

# *Une brève histoire des atomes froids*

## Cours 2

### Le refroidissement Doppler et le piège magnéto-optique

Jean Dalibard

Chaire *Atomes et rayonnement*

Année 2014-15



COLLÈGE  
DE FRANCE  
—1530—

# Le refroidissement Doppler

Soixante ans après les articles d'Einstein sur la thermalisation d'atomes dans le rayonnement du corps noir, deux propositions tirant parti des lasers accordables:

1975 :      Hänsch-Schawlow                      Wineland-Dehmelt

Il n'y a plus de « réservoir » au sens thermodynamique : le refroidissement et sa température limite dépendent des paramètres de la transition atomique.

$$\text{limite Doppler : } k_{\text{B}}T = \frac{\hbar\Gamma}{2}$$

Largeur naturelle typique :  $\Gamma/2\pi \sim$  quelques MHz

température de l'ordre de quelques centaines de microkelvins

# Plan du cours

## 1. La force de pression de radiation

*Equations de Bloch optiques, condition de raie large*

## 2. Le refroidissement Doppler

*Force de friction et coefficient de diffusion, température limite*

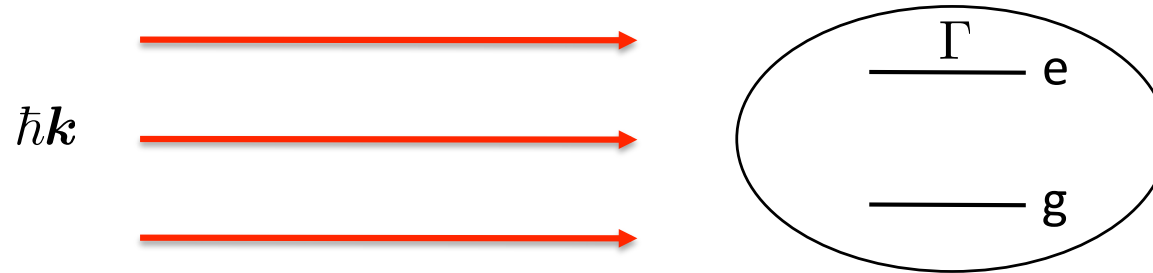
## 3. La mélasse optique en pratique

*Capture dans une mélasse optique, test expérimentaux, corps macroscopiques*

## 4. Le piège magnéto-optique

*Principe de base, capture, piégeage de molécules*

# Bilan d'impulsion dans un cycle *absorption - émission*



Passage de  $g$  à  $e$  et absorption d'un photon : gain de  $\hbar\mathbf{k}$

Passage de  $e$  à  $g$  et émission d'un photon :

- émission stimulée : perte de  $\hbar\mathbf{k}$ , donc bilan nul

- émission spontanée : perte de  $\hbar\mathbf{k}_{\text{spont}}$  avec  $\langle \mathbf{k}_{\text{spont}} \rangle = 0$   
→ bilan de  $\hbar\mathbf{k}$  pour ce type de cycle

Force de pression de radiation moyenne :  $\mathbf{F} = \hbar\mathbf{k} \gamma$ , où  $\gamma$  est le taux d'émission spontanée

$$\gamma = \Gamma P_e \quad P_e : \text{population de l'état excité}$$

# Les équations de Bloch optiques

Formalisme nécessaire pour traiter un mélange de

- processus cohérents : interaction atome – laser monochromatique
- processus incohérents : phénomènes d'émission spontanée

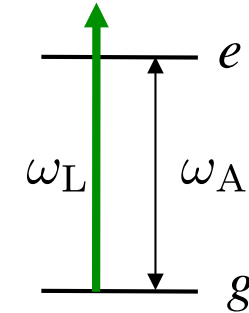
Equation pilote pour la matrice densité atomique

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{gg} & \rho_{ge} \\ \rho_{eg} & \rho_{ee} \end{pmatrix} \quad \rho_{gg} = P_g \quad \rho_{ee} = P_e \quad \rho_{gg} + \rho_{ee} = 1$$
$$\rho_{eg} = \rho_{ge}^*$$

Pour un laser de puissance « raisonnable », on a en très bonne approximation

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \left. \frac{d\hat{\rho}}{dt} \right|_{\text{coh.}} + \left. \frac{d\hat{\rho}}{dt} \right|_{\text{incoh.}}$$

# L'évolution cohérente



Le couplage « atome - laser » est caractérisé par deux fréquences :

- Le désaccord entre la fréquence du laser et la fréquence de résonance de l'atome

$$\Delta = \omega_L - \omega_A$$

- La fréquence de Rabi caractérisant la « force » du couplage

$$\kappa = \frac{dE_0 e^{i\phi}}{\hbar}$$

$d$  : dipôle électrique réduit de la transition  $g \leftrightarrow e$

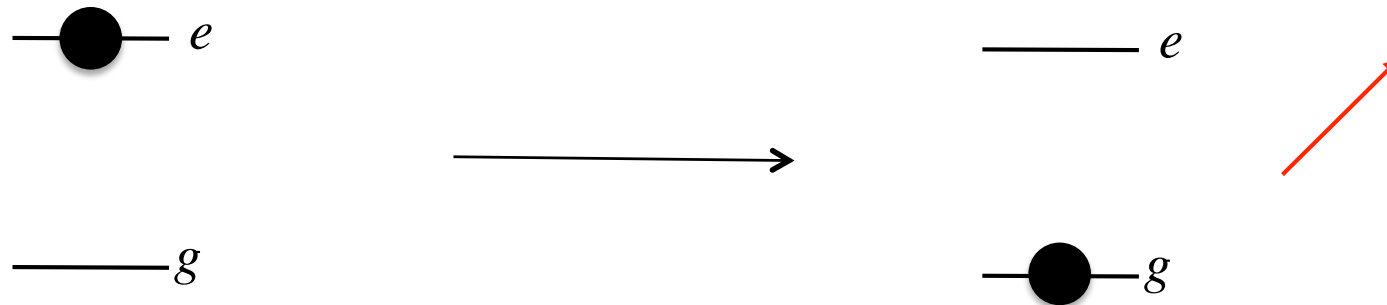
$E(t) = E_0 \cos(\omega_L t - \phi)$  : champ électrique de l'onde lumineuse

Après « passage dans le référentiel tournant », le couplage dipolaire électrique s'écrit

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \kappa^* \\ \kappa & -\Delta \end{pmatrix} \text{ dans la base } \{|g\rangle, |e\rangle\} \longrightarrow i\hbar \left. \frac{d\hat{\rho}}{dt} \right|_{\text{coh.}} = [\hat{H}, \hat{\rho}]$$

# L'évolution incohérente

Couplage de l'atome à l'ensemble des modes vides du champ électromagnétique quantifié, responsable du phénomène d'émission spontanée



Evolution des éléments diagonaux de la matrice densité :

$$\left. \frac{dP_g}{dt} \right|_{\text{incoh.}} = \Gamma P_e \quad \left. \frac{dP_e}{dt} \right|_{\text{incoh.}} = -\Gamma P_e \quad \begin{aligned} \rho_{ee} &= P_e \\ \rho_{gg} &= P_g \end{aligned}$$

Evolution des éléments non-diagonaux de la matrice densité :

$$\left. \frac{d\rho_{eg}}{dt} \right|_{\text{incoh.}} = -\frac{\Gamma}{2} \rho_{eg} \quad \left. \frac{d\rho_{ge}}{dt} \right|_{\text{incoh.}} = -\frac{\Gamma}{2} \rho_{ge}$$

# Les équations de Bloch optiques et leur solution stationnaire

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \left. \frac{d\hat{\rho}}{dt} \right|_{\text{coh.}} + \left. \frac{d\hat{\rho}}{dt} \right|_{\text{incoh.}}$$

Matrice 2x2 : quatre équations couplées avec par exemple :

$$\dot{P}_e = \frac{i}{2} (\kappa^* \rho_{eg} - \kappa \rho_{ge}) - \Gamma P_e$$

Solution stationnaire :  $P_e = \frac{1}{2} \frac{s}{1+s}$        $P_g = 1 - P_e$

paramètre de saturation :  $s = \frac{2|\kappa|^2}{\Gamma^2 + 4\Delta^2} = \frac{I/I_{\text{sat}}}{1 + 4\Delta^2/\Gamma^2}$ .

Deux limites intéressantes :

faible saturation :  $s \ll 1 \longrightarrow P_g \approx 1 \quad P_e \approx \frac{s}{2} \ll 1$

forte saturation :  $s \gg 1 \longrightarrow P_g \approx P_e \approx \frac{1}{2}$



# La force de pression de radiation

Revenons à l'expression initiale  $\mathbf{F} = \hbar \mathbf{k} \gamma$  avec  $\gamma = \Gamma P_e$  :  $\mathbf{F} = \hbar \mathbf{k} \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s}$

Accélération maximale :  $a_{\max} = \frac{F_{\max}}{M} = \frac{\hbar k}{M} \frac{\Gamma}{2}$

$v_r = \underbrace{\hbar k / M}$  : vitesse de recul

Exemple d'un atome de sodium  $^{23}\text{Na}$  :  $v_r \approx 3 \text{ cm/s}$   $\Gamma \approx 6 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$   $a_{\max} \approx 10^6 \text{ m/s}^2$

*Avec cette accélération (ou décélération), on arrête un atome allant à 200 m/s sur 2cm !*

**Remarque** : on peut retrouver l'expression de  $\mathbf{F}$  à partir du théorème d'Ehrenfest

$$\hat{\mathbf{F}} = \frac{d\hat{\mathbf{p}}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_{\text{tot}}, \hat{\mathbf{p}}]$$

# Pertinence de la notion de *force moyenne*

Force de pression de radiation :  $\mathbf{F} = \hbar \mathbf{k} \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s}$



$$s = \frac{2|\kappa|^2}{\Gamma^2 + 4\Delta^2}$$

$$\Delta = \omega_L - \omega_A$$

Prise en compte du mouvement de l'atome :  $\omega_L \longrightarrow \omega_L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$

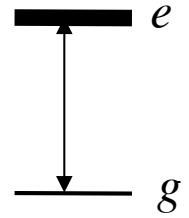
**effet Doppler**

La force est donc dépendante de la vitesse et l'équation du mouvement s'écrit:

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{v})$$

Pour que la notion de force moyenne ait un sens, il faut que  $\mathbf{F}(\mathbf{v})$  soit peu modifiée lors d'un changement élémentaire de vitesse  $v \rightarrow v \pm v_r$

# Condition de raie large



Si on veut être sûr que le changement de vitesse  $v \rightarrow v \pm v_r$  modifie peu la valeur de la force

$$F = \hbar k \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s} \quad \text{avec} \quad s(v) = \frac{2|\kappa|^2}{4(\Delta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 + \Gamma^2}$$

il faut imposer :  $kv_r = \frac{\hbar k^2}{M} \ll \Gamma$

On introduit l'énergie de recul et la pulsation associée :

$$E_r = \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \quad \omega_r = \frac{\hbar k^2}{2M} \quad E_r = \hbar \omega_r$$

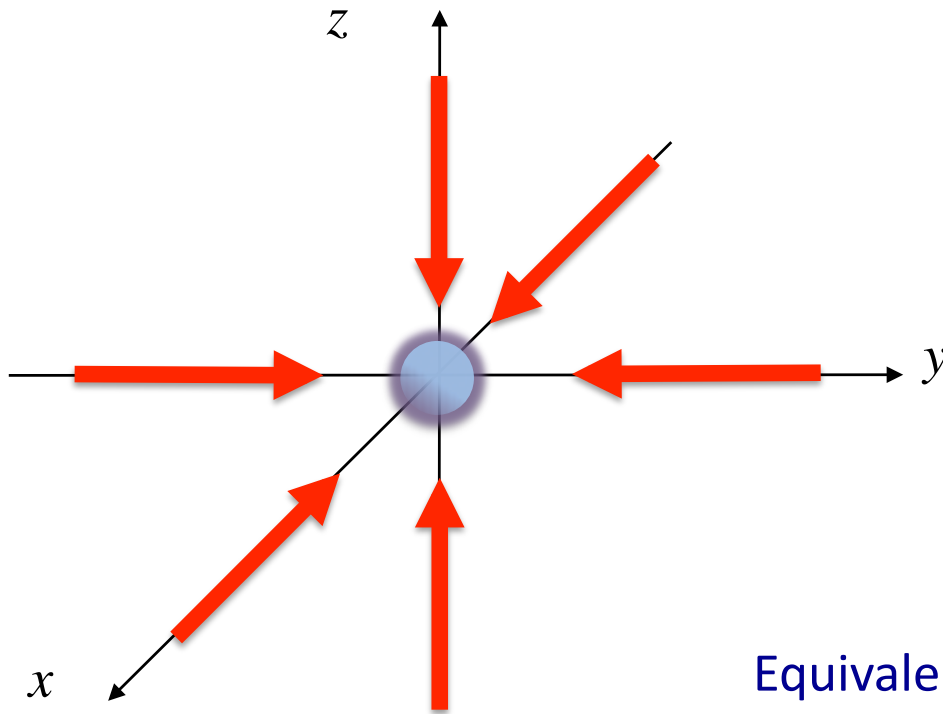
On dira qu'on a affaire à une raie large si  $\omega_r \ll \Gamma$

Sodium :  $\frac{\Gamma}{\omega_r} = 400$  OK !

2.

## Le refroidissement Doppler

# Réalisation d'une mélasse optique



Paramètre de saturation  $\ll 1$  :  
on peut ajouter indépendamment  
les six forces de pression de radiation

On choisit un désaccord

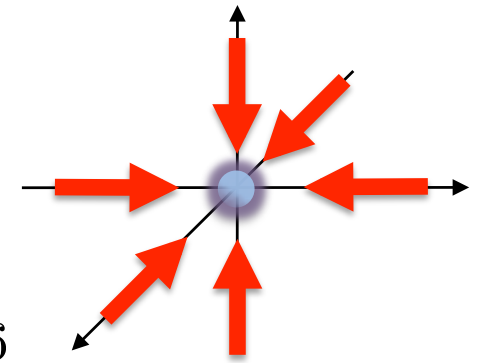
$$\Delta < 0 \quad \omega_L < \omega_A$$

Equivalent (amplifié) de  $\frac{dn}{d\omega} < 0$  pour le corps noir

*Un atome en mouvement est plus proche de la résonance avec une onde venant à sa rencontre qu'avec une onde allant dans le même sens que lui.*

*Force résultante opposée à la vitesse de l'atome : force de friction*

# Calcul de la force de friction



Limite de faible saturation :  $\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \sum_j \mathbf{F}_j(\mathbf{v}) \quad j = 1, \dots, 6$

$$\mathbf{F}_j(\mathbf{v}) \approx \frac{\Gamma}{2} \hbar \mathbf{k}_j s_j(\mathbf{v}) \quad s_j(\mathbf{v}) = \frac{2|\kappa|^2}{4(\Delta - \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{v})^2 + \Gamma^2}$$

Développement à l'ordre 1 en vitesse :  $s_j(\mathbf{v}) = s_0 + (\dots) \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{v}$

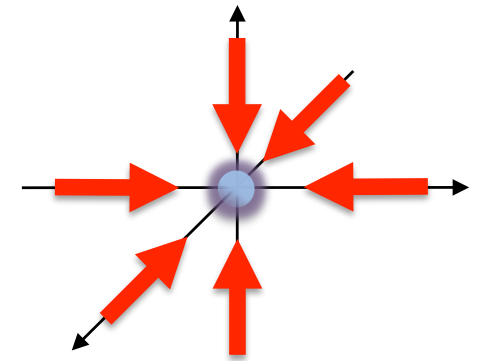
$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \underbrace{\sum_j \mathbf{F}_j(0)}_{\text{nulle par symétrie}} + \underbrace{\sum_j (\dots) \mathbf{k}_j (\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{v})}_{= -M\alpha \mathbf{v}}$$

nulle par  
symétrie

$$= -M\alpha \mathbf{v}$$

Coefficient de friction :  $M\alpha = \hbar k^2 s_0 \frac{2(-\Delta)\Gamma}{\Delta^2 + \Gamma^2/4}$

## Approche de type *mouvement brownien*



L'expression du coefficient de diffusion est inchangée par rapport au cas du rayonnement du corps noir :

$$D_p = \hbar^2 k^2 R / 6$$

$R$  : taux des processus d'absorption et d'émission

On a ici 6 ondes avec chacune un taux d'absorption  $\frac{\Gamma s_0}{2}$  et un taux d'émission spontanée  $\frac{\Gamma s_0}{2}$

Coefficient de diffusion en impulsion :  $D_p = \hbar^2 k^2 s_0 \Gamma$

*contributions égales des fluctuations à l'absorption et à l'émission*

$$\text{Température d'équilibre : } k_B T = \frac{D_p}{M\alpha} = \frac{\hbar \Delta^2 + \Gamma^2 / 4}{2 |\Delta|}$$

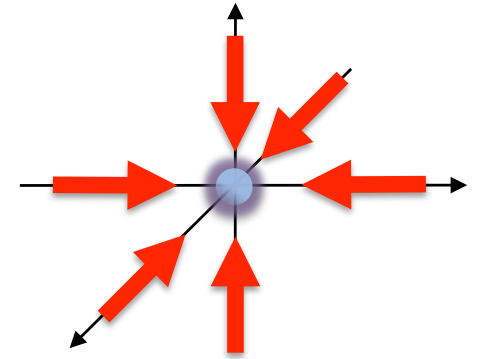
$$\Delta < 0$$

# Température minimale et temps de refroidissement

La température d'équilibre ne dépend que du désaccord  $\Delta$  :

$$k_B T = \frac{\hbar \Delta^2 + \Gamma^2/4}{2|\Delta|}$$

Le minimum est obtenu pour  $\Delta_{\min} = -\frac{\Gamma}{2}$  :  $k_B T_{\min} = \frac{\hbar \Gamma}{2}$   
**limite Doppler**



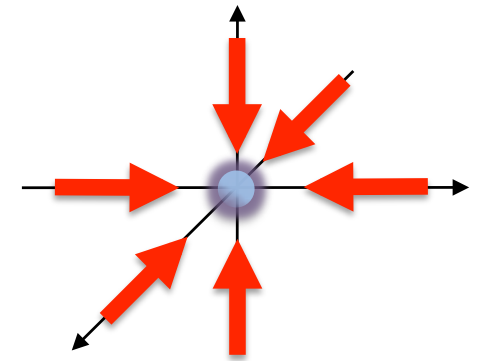
Atomes de sodium, rubidium, mercure : 240 150 30 microkelvins

$$v_0 = \sqrt{\frac{k_B T}{M}} : 30 \quad 12 \quad 3.6 \text{ cm/s}$$

Temps d'atteinte de l'équilibre :  $\alpha^{-1} = \frac{M}{\hbar k^2} \frac{1}{2s_0} \approx 20 \mu\text{s}$  pour Na, avec  $s_0=1/10$



# Validité de l'approche *mouvement brownien*



## Petits pas ?

Taille des pas :  $v_r = \frac{\hbar k}{M}$  . A-t-on  $v_r \ll v_0$  ?

$$\frac{v_r}{v_0} = \frac{\hbar k/M}{\sqrt{\hbar\Gamma/2M}} = 2\sqrt{\frac{\omega_r}{\Gamma}} \ll 1 \quad \text{OK pour une raie large}$$

## Linéarisation en vitesse de la force de pression de radiation ?

Il faut que  $kv \ll \Gamma$  sur la plage de vitesse peuplée à l'équilibre  $v \sim v_0$

$$\delta v_{\text{res}} = \Gamma/k \quad \frac{v_0}{\delta v_{\text{res}}} = \frac{\sqrt{\hbar\Gamma/2M}}{\Gamma/k} = \sqrt{\frac{\omega_r}{\Gamma}} \ll 1 \quad \text{OK pour une raie large}$$

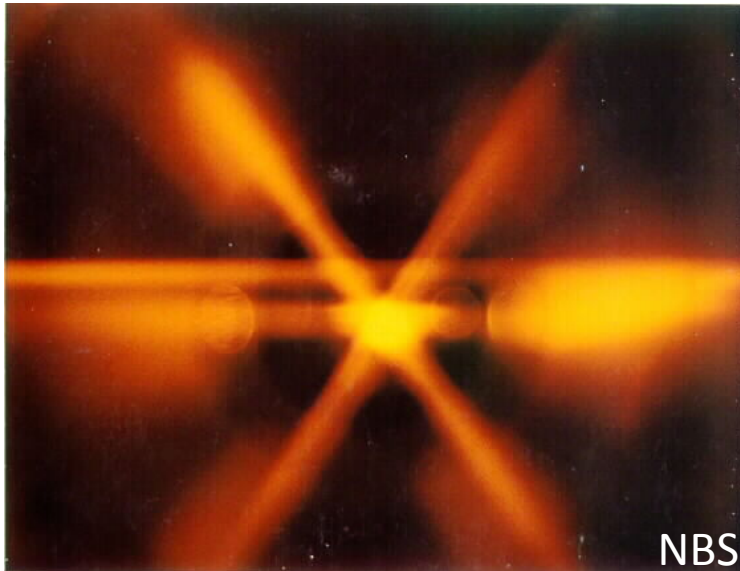
Sodium :  $v_r = 3 \text{ cm/s}$      $v_0 = 30 \text{ cm/s}$      $\delta v_{\text{res}} = 6 \text{ m/s}$

3.

La mélasse optique en pratique

# Les premières mélasses optiques

Bell Labs 1985, NBS (NIST) 1987



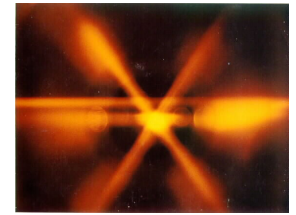
Une centaine de millions  
d'atomes de sodium

Quelle température ?

On réalise rapidement que ces mélasses de sodium sont trop froides :  $k_{\text{B}}T < \frac{\hbar\Gamma}{2}$

*L'atome de sodium a un niveau fondamental composé de plusieurs sous-niveaux entre lesquels un processus de refroidissement supplémentaire (Sisyphé) se produit (cf. cours 5).*

# Prise en compte de la saturation



Dans notre traitement analytique, nous avons utilisé  $F(\mathbf{v}) = \sum_j F_j(\mathbf{v})$

Valable si on peut négliger les effets « croisés » entre les ondes, comme les effets d'onde stationnaire.

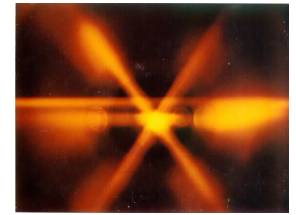
Dans la limite d'une faible saturation, cette approximation est justifiée si on considère le résultat obtenu comme une moyenne sur une longueur d'onde

Mais une faible saturation conduit à des faibles coefficients de friction, et donc des longs temps de thermalisation...

En pratique, on travaille avec un paramètre de saturation/onde de l'ordre de 1

*Pour prendre en compte la saturation correspondante,  
« bricolage » ou alors calcul numérique peu transparent*

# Capture dans une mélasse optique



Equation du mouvement  $M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{v})$

On dispose d'une longueur fixée  $L$  (de l'ordre du centimètre) pour arrêter les atomes venant de directions arbitraires. Quels paramètres choisir pour optimiser la capture ?

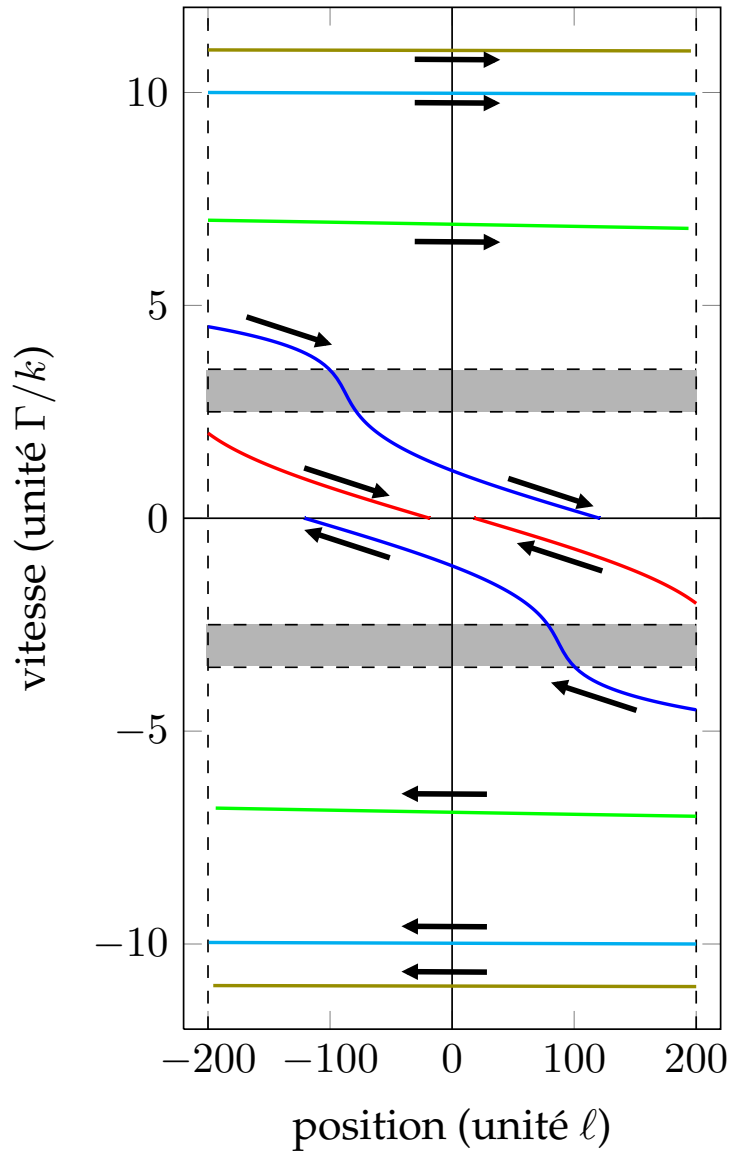
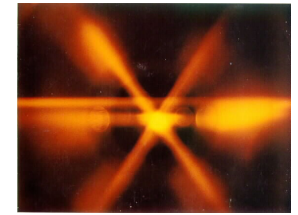
Modèle à une dimension :

$$Mv \frac{dv}{dx} = F(v) \qquad M \int_{v_i}^{v_f} \frac{v}{F(v)} dv = \int dx = L$$

Pour des paramètres typiques de mélasse, on trouve  $\frac{kv_i}{\Gamma} \approx \left(3 \frac{L}{\ell} \frac{I}{I_{\text{sat}}}\right)^{1/4}$

avec l'échelle de longueur :  $\ell = M\Gamma/\hbar k^3$  (20 microns pour le sodium)

# Portrait de phase d'une mélasse optique



$$\frac{kv_i}{\Gamma} \approx \left( 3 \frac{L}{\ell} \frac{I}{I_{\text{sat}}} \right)^{1/4}$$

$$L = 400 \ell \quad \ell = M\Gamma / \hbar k^3$$

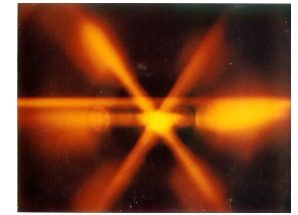
$$I = I_{\text{sat}}/2$$

Désaccord optimal pour la capture :  $\Delta = -3\Gamma$

Zones grisées : résonance atome-laser (à  $\Gamma/2$  près)

vitesse de capture  $\approx 5 \Gamma/k$  (30 m/s pour Na)

# Diffusion spatiale dans une mélasse optique



Le coefficient de diffusion spatiale s'écrit (cf. cours précédent) :  $D_x = v_0^2/\alpha$

Pour le désaccord qui minimise la température,  $\Delta = -\Gamma/2$ , le coefficient de friction vaut :

$$\alpha = 2s_0 \frac{\hbar k^2}{M} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} M v_0^2 = \frac{\hbar \Gamma}{4}$$

$$\text{On en déduit : } D_x = \frac{\Gamma}{4k^2} \frac{1}{s_0}$$

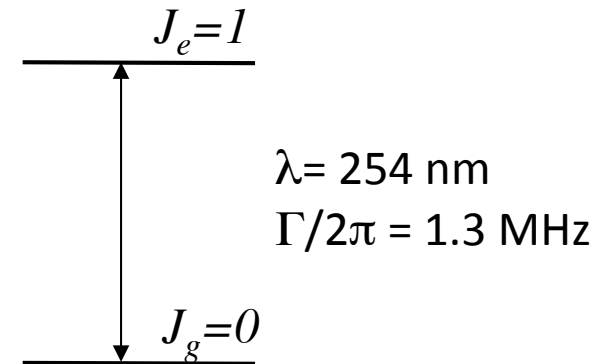
Exemple : atomes de sodium avec  $s_0 = 0.1$  :  $D_x \sim 1.4 \text{ mm}^2/\text{s}$

*Il faut une dizaine de secondes pour qu'un atome capturé dans une mélasse de taille centimétrique atteigne le bord et s'échappe.*

# Tests expérimentaux récents à 3D

Observatoire de Paris : expériences sur l'atome de mercure  $^{200}\text{Hg}$ ,  $^{202}\text{Hg}$

- Spin électronique nul dans l'état fondamental (état singulet des deux électrons externes)
- Pas de spin nucléaire pour ces isotopes



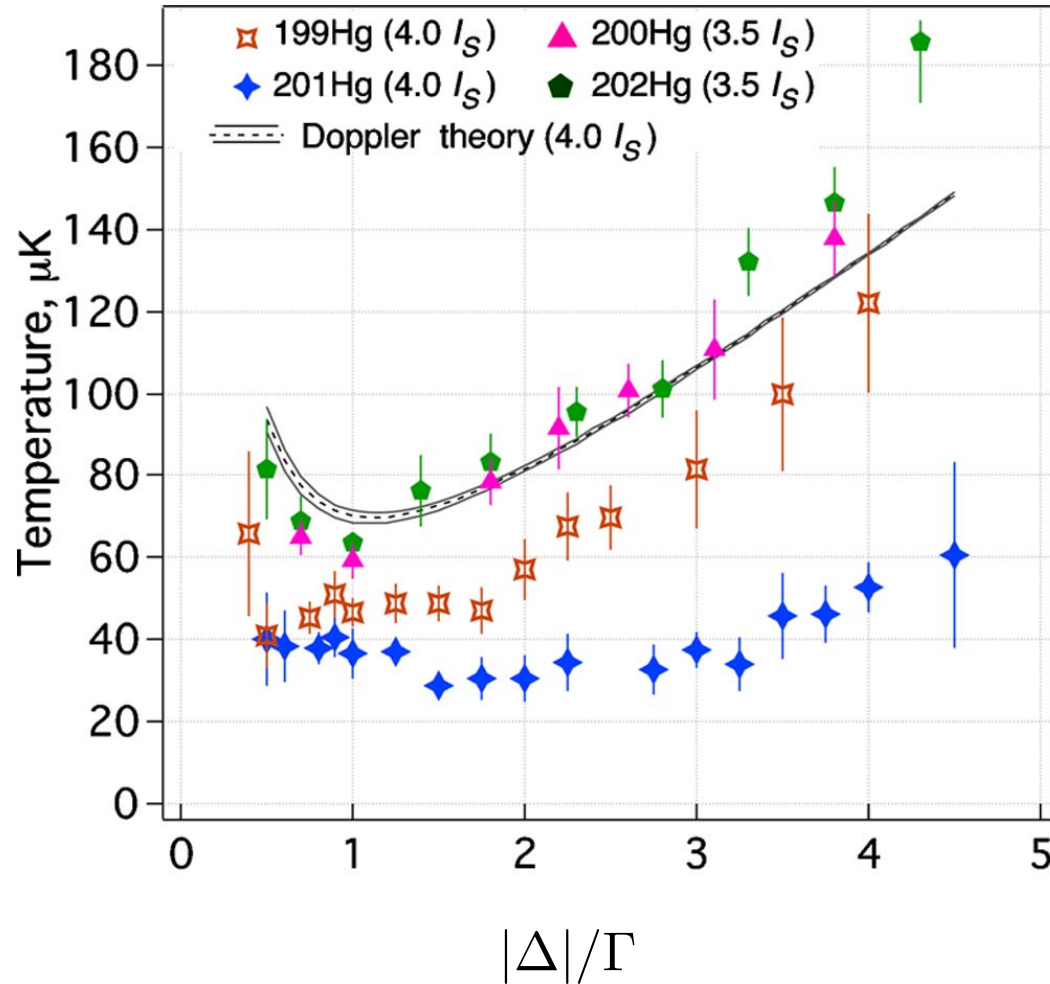
Etat fondamental non dégénéré : pas d'effet Sisyphé possible

Raie large :  $\Gamma/\omega_r \sim 100$

Mesure de la température par temps de vol : on coupe brusquement les faisceaux lumineux créant la mélasse et on mesure la taille du nuage après un temps de vol de quelques dizaines de millisecondes



# Résultats de McFerran *et al* (2010)



Intensité totale  $\approx 4 I_{\text{sat}}$

Note : les isotopes avec un spin nucléaire non nul conduisent à des températures sous la limite Doppler (effet Sisyphes présent !)

# Expérience sur l'atome d'hélium

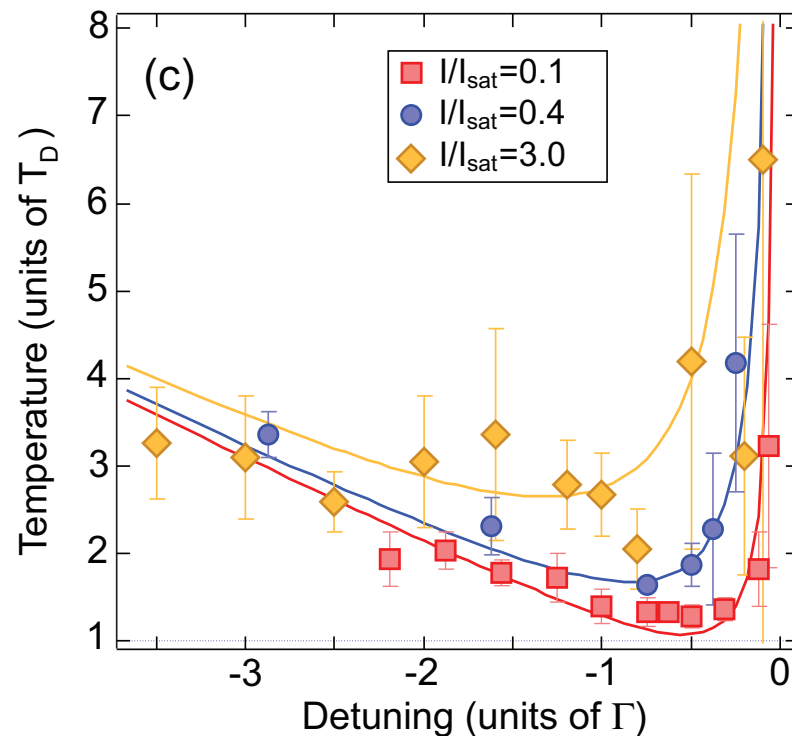
Institut d'optique, Palaiseau (2014)

Atomes d'hélium sur la transition :  $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_2$

$\lambda = 1083 \text{ nm}$

$\Gamma/2\pi = 1.6 \text{ MHz}$

Un effet Sisyphé pourrait en principe être présent, mais il est non significatif ici car sa plage d'action est très petite devant la vitesse de recul



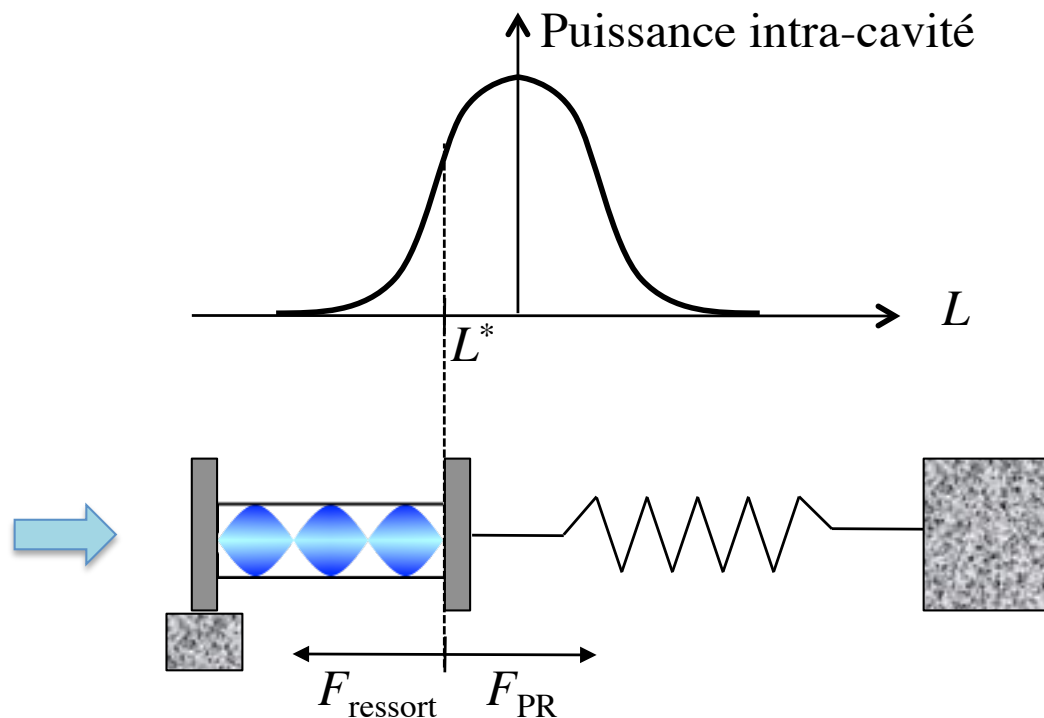
$$k_B T_{\min} \approx 1.3 \frac{\hbar \Gamma}{2}$$

en bon accord avec la théorie  
du refroidissement Doppler

# Pression de radiation sur des corps macroscopiques

Optomécanique : champ de recherche en pleine expansion

Expériences pionnières en 2006 (Vienne, Paris, Caltech-Munich)



Cavité Fabry-Perot, avec un miroir mobile monté sur ressort

Position d'équilibre : la compression du ressort compense la force de pression de radiation

# Force de friction sur le miroir

Point clé : le nombre de photons ne s'ajuste pas instantanément à la position du miroir

Miroir allant vers la droite : la cavité n'a pas eu le temps de se remplir de photons.

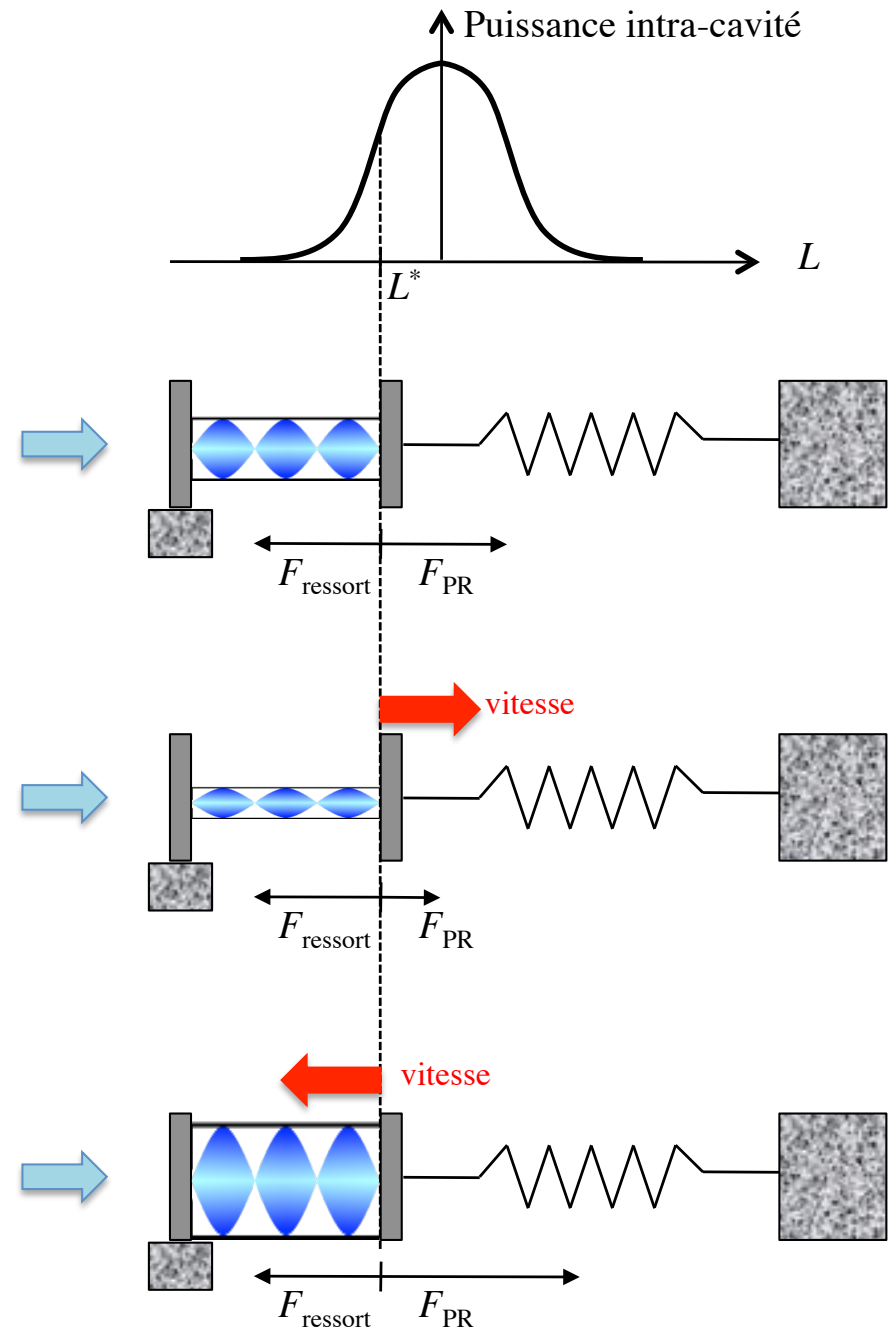
$$F_{PR} + F_{ressort} < 0$$

*force vers la gauche*

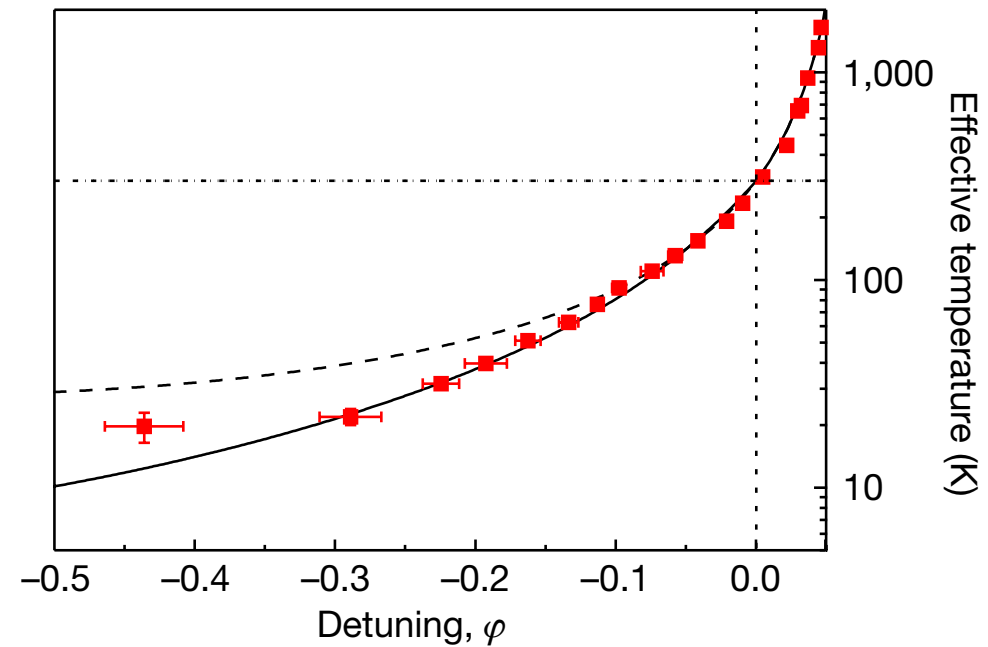
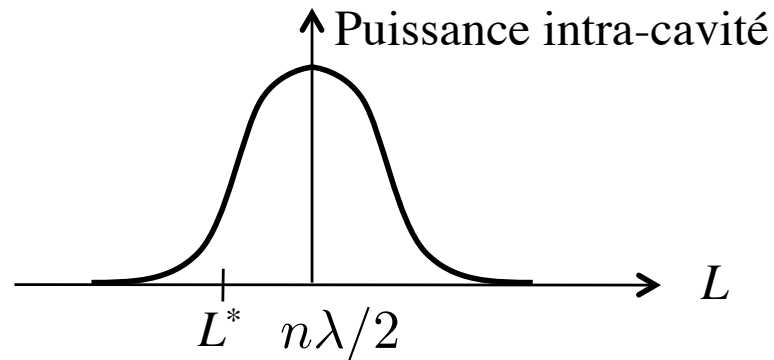
Miroir allant vers la gauche : la cavité contient plus de photons qu'à l'équilibre.

$$F_{PR} + F_{ressort} > 0$$

*force vers la droite*



## Résultats de Arcizet *et al* (2006)



La quantité  $\varphi = L^* - n\lambda/2$  joue le rôle du désaccord  $\Delta$

Cavité optique de longueur 2 mm et de finesse 30 000

Mode de vibration refroidi de fréquence 0.8 MHz, facteur de qualité 10 000.

4.

## Le piège magnéto-optique

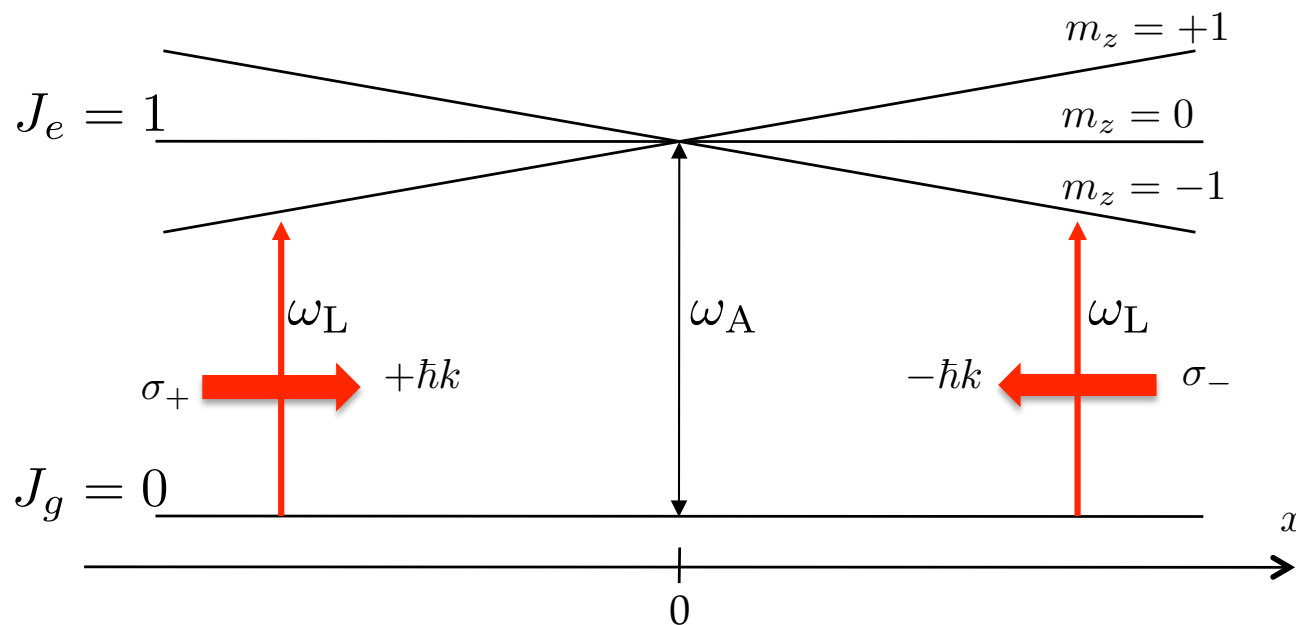
# Le principe du piège magnéto-optique

On ajoute à la sélectivité en vitesse, via l'effet Doppler, une sélectivité en position, via l'effet Zeeman.

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \longrightarrow \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

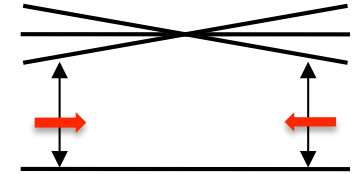
Configuration 1D, transition  $J_g = 0 \leftrightarrow J_e = 1$ , champ magnétique  $B = b'x$

Laser : paire d'ondes contre-propageantes, polarisées  $\sigma_{\pm}$  et désaccord  $\Delta$  négatif



$$F(x, v) = -Kx - M\alpha v$$

## Taille à l'équilibre (1 atome)



La température reste déterminée par le refroidissement Doppler

$$\frac{1}{2}Kx_0^2 = \frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}k_B T \quad \longrightarrow \quad x_0 = \left( \frac{\hbar\Gamma}{4k\mu b' s_0} \right)^{1/2} \quad \text{pour } \Delta = -\Gamma/2$$

Atomes de sodium dans un gradient de 10 Gauss/cm (0.1 Tesla/m) avec  $s_0=1/10$

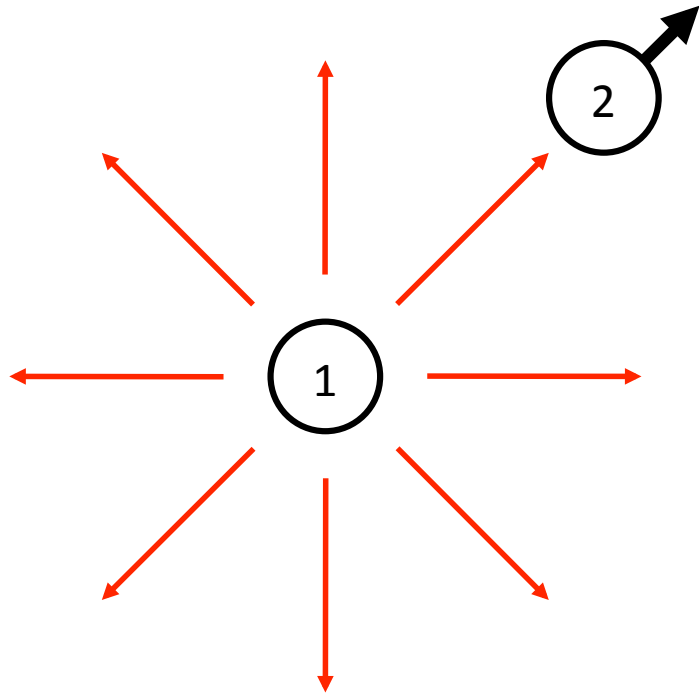
$$x_0 \approx 40 \mu\text{m}$$

### En pratique :

- Les mécanismes de type Sisyphé qui créent un refroidissement supplémentaire sont également à l'origine d'un piégeage renforcé : abaisse  $x_0$
- Les processus collectifs (diffusion multiple de photons) viennent diminuer le confinement : augmente  $x_0$



# Effets collectifs dans un piège magnéto-optique



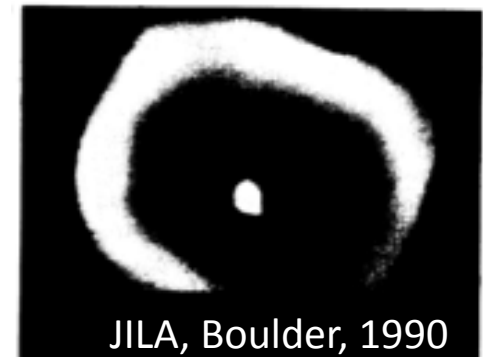
Force de pression de radiation exercée par l'atome 1 sur l'atome 2

Force en  $1/r_{12}^2$  : analogue à la force de Coulomb entre deux charges de même signe

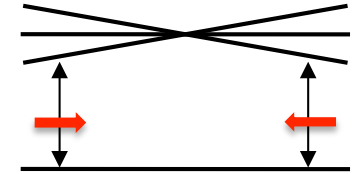
Augmente considérablement la taille à l'équilibre du piège magnéto-optique

A l'origine d'une dynamique non-linéaire très riche :

bistabilité, instabilité paramétrique, dynamique chaotique, explosion coulombienne



# Capture dans un piège magnéto-optique



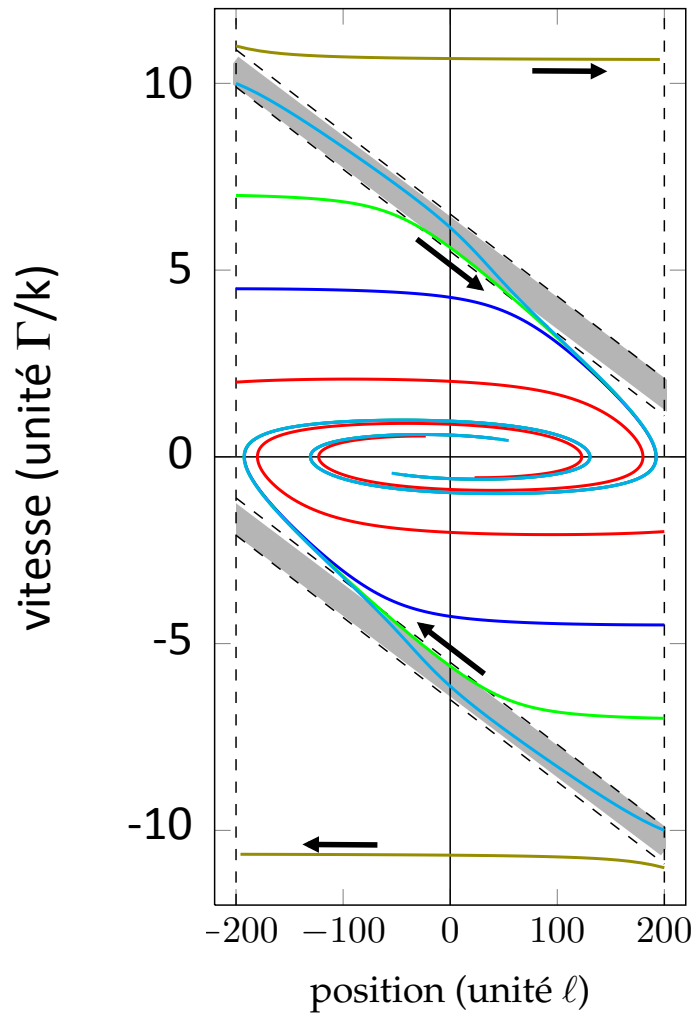
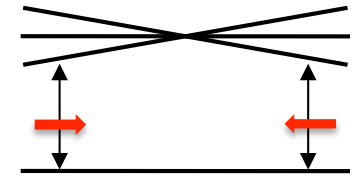
Désaccord effectif pour un atome au point  $x$  avec la vitesse  $v$  :

$$\Delta = \omega_L - \omega_A \quad \longrightarrow \quad \omega_L \pm kv - \omega_A \pm \frac{\mu b' x}{\hbar}$$

Zone de résonance dans le plan  $(x, v)$ :  $\pm\Delta = kv + \mu b' x / \hbar$

Même question que pour la mélasse optique : si on dispose d'une longueur  $L$  pour capturer les atomes, quelle est la plus grande vitesse que l'on peut attraper ?

# Portrait de phase du piège magnéto-optique



$$L = 400 \ell \quad \ell = M\Gamma / \hbar k^3$$

$$I = I_{\text{sat}}/2$$

Désaccord optimal pour la capture :  $\Delta = -6 \Gamma$

Zones grisées : résonance atome-laser (à  $\Gamma/2$  près)

$$\frac{kv_i}{\Gamma} \sim \left( \frac{L}{\ell} \frac{I}{I_{\text{sat}}} \right)^{1/2}$$

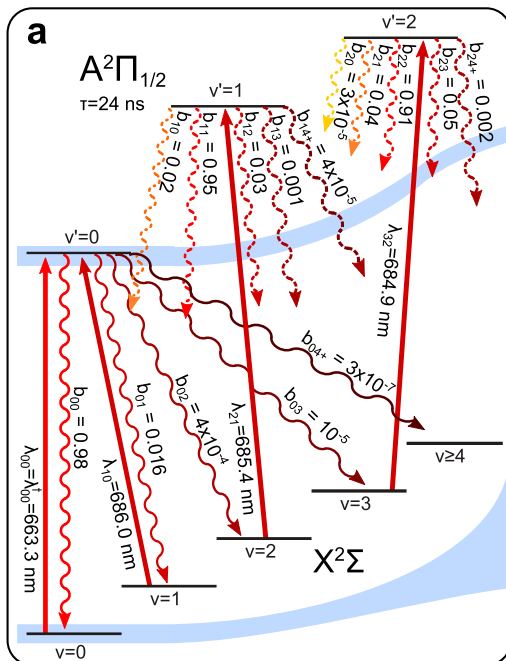
Rappel : exposant  $\frac{1}{4}$  pour la mélasse optique

vitesse de capture  $\approx 10 \Gamma/k$  (60 m/s pour Na)

# Au tour des molécules ?

Une difficulté majeure par rapport aux atomes : les degrés de liberté supplémentaires (vibration, rotation) font qu'il est en général impossible d'isoler un système « à deux niveaux » sur lequel la molécule peut cycler.

Il faut de l'ingéniosité (trouver la meilleure molécule) et des moyens (beaucoup de sources laser).



2014 : Yale, premier piège magnéto-optique 3D de molécules

Monofluorure de strontium : SrF

300 molécules à 2 millikelvin

7 niveaux vibrationnels en jeu,  
4 sources laser  
(avec de multiples bandes latérales)

