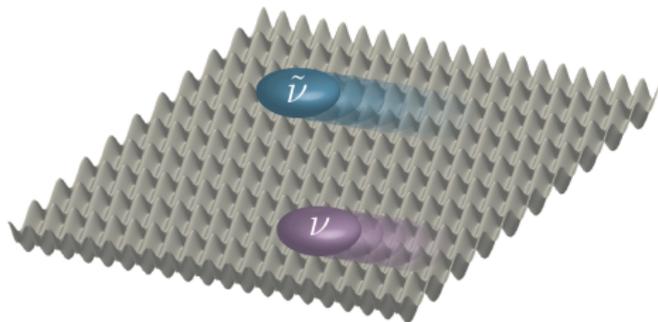
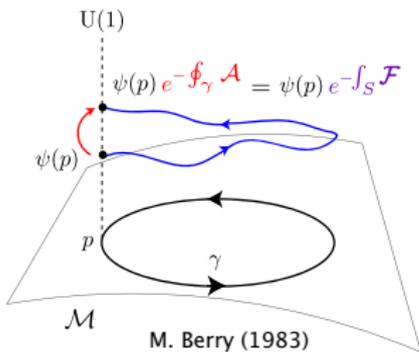


La topologie dans le laboratoire : comment détecter le nombre de Chern et les phases topologiques dans un gaz d'atomes froids ?

Nathan Goldman





La connexion de Berry

$$\mathcal{A} = \langle \psi | \partial_{\mu} \psi \rangle dx^{\mu}$$

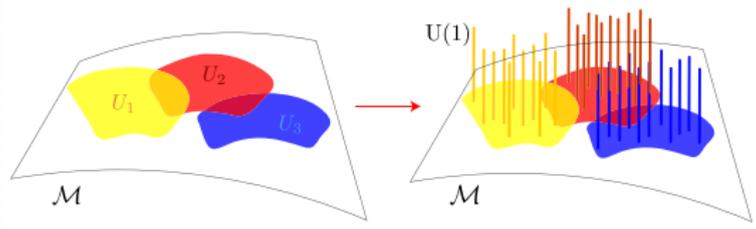
La courbure de Berry

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} = \langle \partial_{\nu} \psi | \partial_{\mu} \psi \rangle dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$$

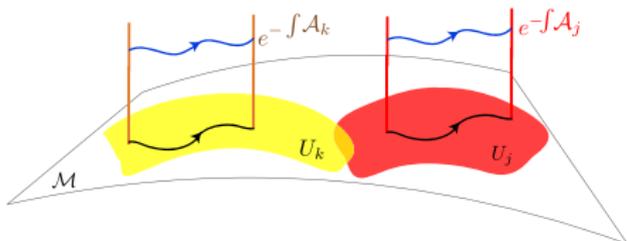
La phase de Berry et les fibrés: B. Simon (1983)

Espace de base: \mathcal{M}

Fibre: U(1)



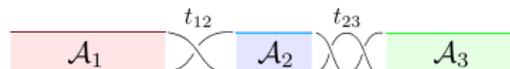
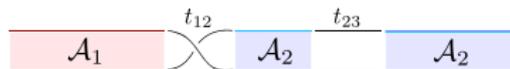
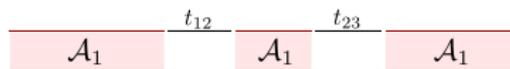
La connexion locale et la topologie des fibrés



$$\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_j + t_{jk}^{-1} dt_{jk}$$

Généralisation de Gauss-Bonnet

$$\frac{i}{2\pi} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{F} = \nu : \text{nb de Chern}$$



- 1 L'effet Hall quantique : Le nombre de Chern et les états de bord topologiques
 - La quantification de la conductivité de Hall
 - Le modèle de Haldane
 - Les états de bord topologiques
- 2 Implémentation du modèle de Haldane avec des atomes froids
 - Idée générale
 - Proposition spécifique
 - Comment sonder les phases topologiques ?
- 3 Comment sonder des états de bord topologiques dans un gaz atomique ?
 - Discussion générale
 - La spectroscopie
 - Imagerie directe
- 4 Mesure du nombre de Chern et le déplacement du centre de masse
 - Stratégie générale
 - Résultats numériques

1 L'effet Hall quantique : Le nombre de Chern et les états de bord topologiques

La quantification de la conductivité de Hall

Le modèle de Haldane

Les états de bord topologiques

2 Implémentation du modèle de Haldane avec des atomes froids

Idée générale

Proposition spécifique

Comment sonder les phases topologiques ?

3 Comment sonder des états de bord topologiques dans un gaz atomique ?

Discussion générale

La spectroscopie

Imagerie directe

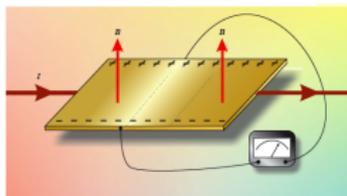
4 Mesure du nombre de Chern et le déplacement du centre de masse

Stratégie générale

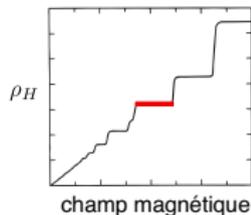
Résultats numériques

L'effet Hall quantique (IQHE) et le nombre de Chern

- 1980: Découverte de l'effet Hall quantique (K. von Klitzing)



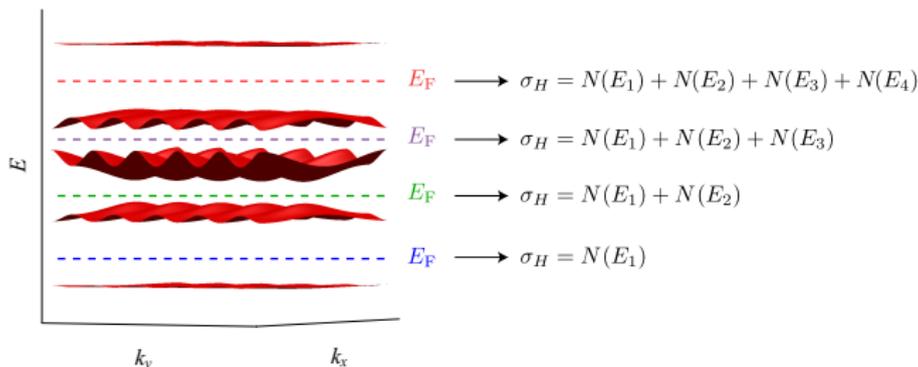
$$j_y = \sigma_H E_x$$



$$\sigma_H = 1/\rho_H = \nu \times (e^2/h)$$

- 1982: Expression de Thouless–Kohmoto–Nightingale–Nijs (TKNN)

$$\sigma_{yx} = (e^2/h)\nu = (e^2/h) \sum_{E_\alpha < E_F} N(E_\alpha) \quad N(E_\alpha) = \frac{i}{2\pi} \int (\langle \partial_{k_x} \psi | \partial_{k_y} \psi \rangle - \langle \partial_{k_y} \psi | \partial_{k_x} \psi \rangle) dk_x dk_y$$



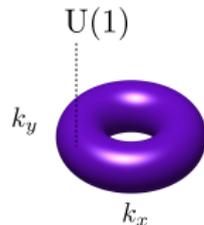
L'effet Hall quantique (IQHE) et le nombre de Chern

- 1982: Expression de Thouless–Kohmoto–Nightingale–Nijs (TKNN)

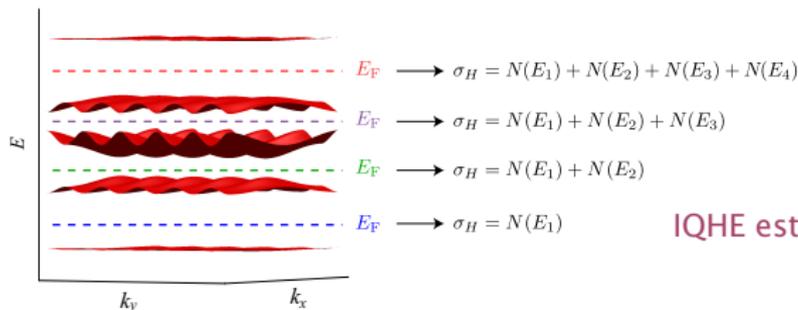
$$\sigma_{yx} = (e^2/h) \nu = (e^2/h) \sum_{E_\alpha < E_F} N(E_\alpha) \quad N(E_\alpha) = \frac{i}{2\pi} \int (\langle \partial_{k_x} \psi | \partial_{k_y} \psi \rangle - \langle \partial_{k_y} \psi | \partial_{k_x} \psi \rangle) dk_x dk_y$$

- 1983: B. Simon [+ Avron & Seiler] relie TKNN au nombre de Chern

$$N(E_\alpha) = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} \mathcal{F}(\psi_\alpha) = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} (\langle \partial_{k_x} \psi | \partial_{k_y} \psi \rangle - \langle \partial_{k_y} \psi | \partial_{k_x} \psi \rangle) dk_x dk_y$$



$\mathcal{F}(\psi_\alpha)$: courbure de Berry sur le fibré $(\mathbb{T}^2, U(1))$



IQHE est un effet topologique!

- 1988: D. Haldane propose un modèle pour l'effet Hall quantique...

... sans champ magnétique!

1 L'effet Hall quantique : Le nombre de Chern et les états de bord topologiques

La quantification de la conductivité de Hall

Le modèle de Haldane

Les états de bord topologiques

2 Implémentation du modèle de Haldane avec des atomes froids

Idée générale

Proposition spécifique

Comment sonder les phases topologiques ?

3 Comment sonder des états de bord topologiques dans un gaz atomique ?

Discussion générale

La spectroscopie

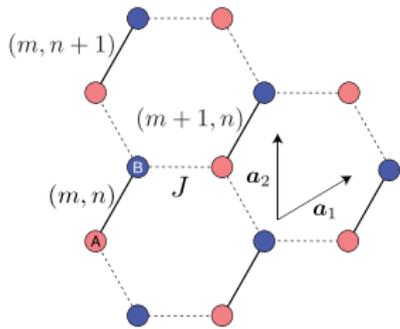
Imagerie directe

4 Mesure du nombre de Chern et le déplacement du centre de masse

Stratégie générale

Résultats numériques

Le réseau en nid d'abeilles



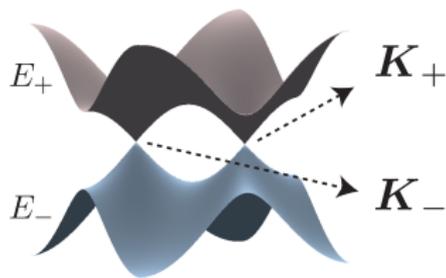
$$\hat{H} = -J \sum_{\langle j,k \rangle} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k \quad : \text{régime liaisons fortes} \quad (\text{cf. cours de Jean})$$

$$E\psi_A(m, n) = -J [\psi_B(m, n) + \psi_B(m-1, n) + \psi_B(m, n-1)]$$

$$E\psi_B(m, n) = -J [\psi_A(m, n) + \psi_A(m+1, n) + \psi_A(m, n+1)]$$

$$\text{Th. de Bloch:} \quad \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = e^{ik_x m} e^{ik_y n} \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix}$$

$$E \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix} = \hat{H}(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f(\mathbf{k}) \\ f^*(\mathbf{k}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix} \quad f(\mathbf{k}) = -J (1 + e^{-ik_x} + e^{-ik_y})$$



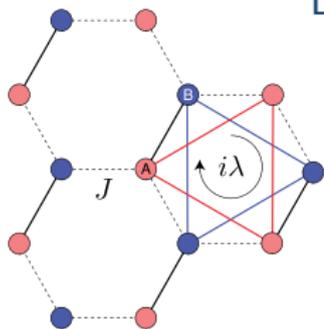
Structure de vortex: $f(\mathbf{K}_\pm) = 0$

$$f(k_x, k_y) = |f| e^{-i\varphi}$$

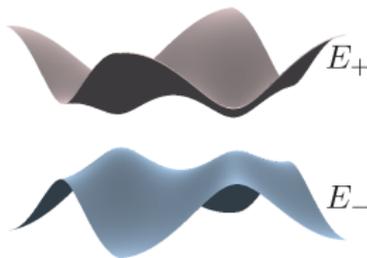
$$\oint_{S_\pm} \nabla \varphi \cdot d\mathbf{k} = \oint_{S_\pm} d\varphi = \pm 2\pi$$



Le modèle de Haldane (1988)



$$\hat{H} = -J \sum_{\langle j,k \rangle} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k + \lambda \sum_{\langle j,k \rangle} i \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k$$



$$E \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix} = \hat{H}(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\mathbf{k}) & f(\mathbf{k}) \\ f^*(\mathbf{k}) & -g(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix}$$

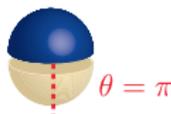
Nb de Chern associé à la bande inférieure? $N(E_-) = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} \mathcal{F}$
 On introduit des coordonnées sphériques

$$\hat{H}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} g(\mathbf{k}) & f(\mathbf{k}) \\ f^*(\mathbf{k}) & -g(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = E_+(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{i\varphi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$|\phi_-\rangle = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad \mathcal{A} = \langle \phi_- | \partial_\mu \phi_- \rangle dx^\mu = -\frac{i}{2} (1 - \cos \theta) d\varphi$$

Le modèle de Haldane (1988)

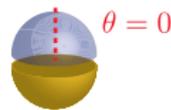
$$|\phi_{-}\rangle = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad \mathcal{A} = -\frac{i}{2}(1 - \cos \theta)d\varphi$$



singularité

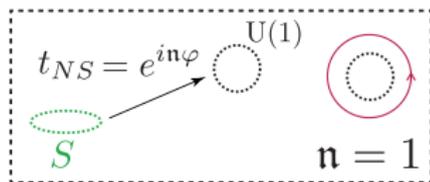
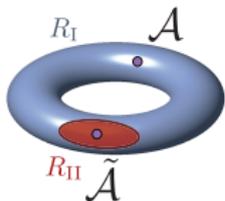
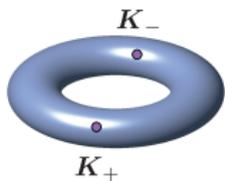
Transformation de jauge

$$|\tilde{\phi}_{-}\rangle = \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathcal{A}} = \frac{i}{2}(1 + \cos \theta)d\varphi$$



$$\boxed{\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_N \quad \tilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{A}_S} \quad : \text{ on retombe sur un monopole! } \\ \text{(de charge } g=1/2 \text{)}$$

Prenons le paramètre $\lambda > 0$: $\theta(\mathbf{K}_{+}) = \pi$ et $\theta(\mathbf{K}_{-}) = 0$



$$\nu = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} \mathcal{F} = \frac{i}{2\pi} \int_{\text{frontière}=S_{+}} \mathcal{A} - \tilde{\mathcal{A}} = \frac{i}{2\pi} \int_{S_{+}} (-i)d\varphi = 1$$

1 L'effet Hall quantique : Le nombre de Chern et les états de bord topologiques

La quantification de la conductivité de Hall

Le modèle de Haldane

Les états de bord topologiques

2 Implémentation du modèle de Haldane avec des atomes froids

Idée générale

Proposition spécifique

Comment sonder les phases topologiques ?

3 Comment sonder des états de bord topologiques dans un gaz atomique ?

Discussion générale

La spectroscopie

Imagerie directe

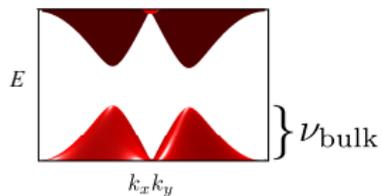
4 Mesure du nombre de Chern et le déplacement du centre de masse

Stratégie générale

Résultats numériques

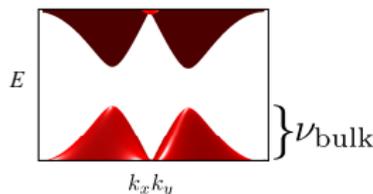
La correspondance intérieur \leftrightarrow bord (*bulk-edge correspondence*)

Dans le bulk

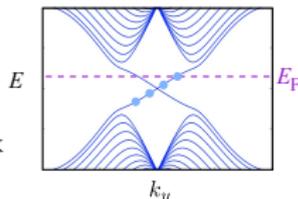
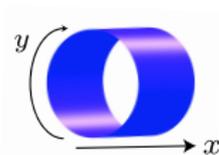


La correspondance intérieur \leftrightarrow bord (*bulk-edge correspondence*)

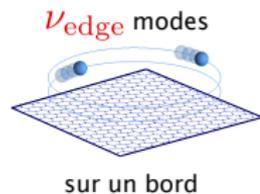
Dans le bulk



Sur les bords?



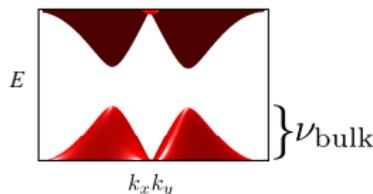
états de bord



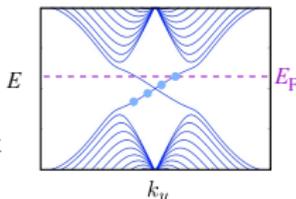
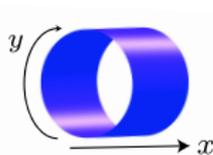
- Le nombre de modes chiraux sur les bords ν_{edge} est un *invariant topologique*, protégé par le gap (cf. Hatsugai 1993).

La correspondance intérieur \leftrightarrow bord (*bulk-edge correspondence*)

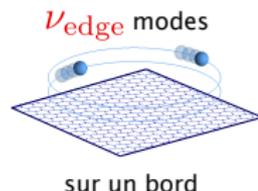
Dans le bulk



Sur les bords?



états de bord



- Le nombre de modes chiraux sur les bords ν_{edge} est un *invariant topologique*, protégé par le gap (cf. Hatsugai 1993).
- Correspondance bulk-edge : ce nombre ν_{edge} est égal au nb de Chern (bulk)

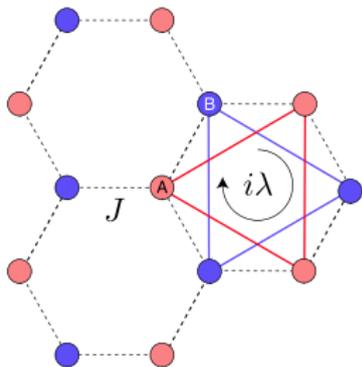
$$\nu_{\text{edge}} = \nu_{\text{bulk}} = \nu \quad \sigma_H = \frac{e^2}{h} \nu$$

- La chiralité (sens de propagation sur le bord) : $\text{sign}(\partial E / \partial k_y) = \text{sign}(\nu)$

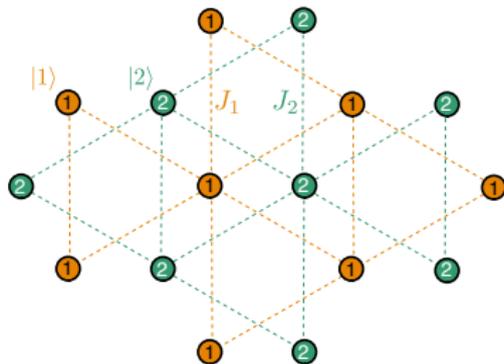
Isolant de Chern = isolant dans le bulk présentant des états de bord chiraux (protégés par la topologie)

- 1 L'effet Hall quantique : Le nombre de Chern et les états de bord topologiques
 - La quantification de la conductivité de Hall
 - Le modèle de Haldane
 - Les états de bord topologiques
- 2 Implémentation du modèle de Haldane avec des atomes froids
 - Idée générale**
 - Proposition spécifique
 - Comment sonder les phases topologiques ?
- 3 Comment sonder des états de bord topologiques dans un gaz atomique ?
 - Discussion générale
 - La spectroscopie
 - Imagerie directe
- 4 Mesure du nombre de Chern et le déplacement du centre de masse
 - Stratégie générale
 - Résultats numériques

Modèle de Haldane



Modèle de Haldane avec des atomes froids?

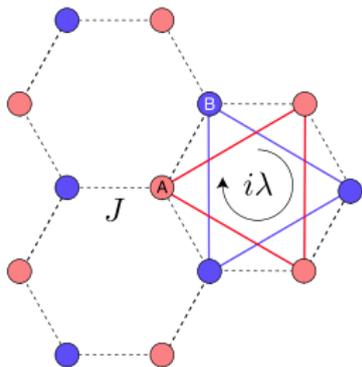


Sauts sur un réseau optique

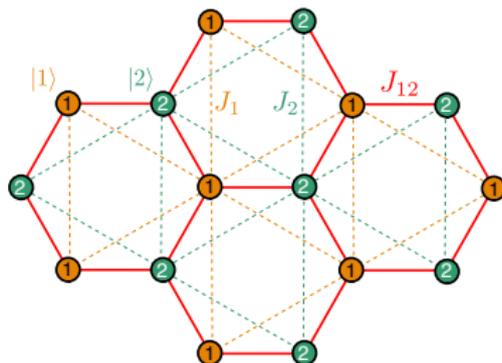
(cf. cours de J. Dalibard)



Modèle de Haldane



Modèle de Haldane avec des atomes froids?



Sauts sur un réseau optique

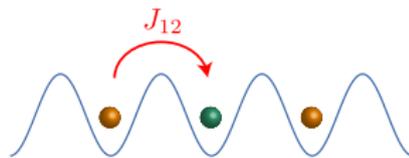
(cf. cours de J. Dalibard)



Sauts assistés par laser

$$J_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = J \times e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2}$$

\mathbf{p} = vecteur d'onde associé au couplage



Dalibard, Gerbier et al. Rev. Mod. Phys. 2011

Goldman, Juzeliunas, Ohberg, Spielman: arXiv:1308.6533

- 1 L'effet Hall quantique : Le nombre de Chern et les états de bord topologiques
 - La quantification de la conductivité de Hall
 - Le modèle de Haldane
 - Les états de bord topologiques
- 2 Implémentation du modèle de Haldane avec des atomes froids
 - Idée générale
 - Proposition spécifique**
 - Comment sonder les phases topologiques ?
- 3 Comment sonder des états de bord topologiques dans un gaz atomique ?
 - Discussion générale
 - La spectroscopie
 - Imagerie directe
- 4 Mesure du nombre de Chern et le déplacement du centre de masse
 - Stratégie générale
 - Résultats numériques

Réseaux optiques et longueur d'onde anti-magique

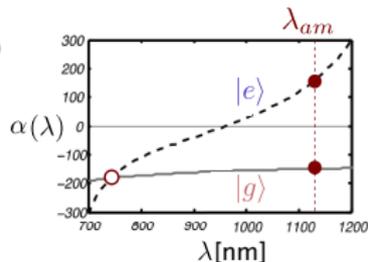
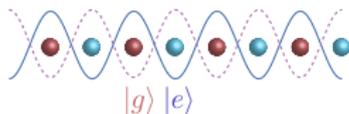
Réseaux optiques et polarisabilité

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \underbrace{\alpha(\lambda)} |E(\mathbf{r})|^2$$

dépend de: (a) l'état interne de l'atome
(b) la longueur d'onde du laser

Longueur d'onde anti-magique (Yb)

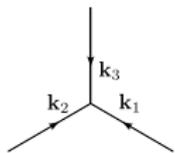
$$V_{e,g}(\mathbf{r}) = \pm \frac{1}{2} \alpha(\lambda_{am}) |E(\mathbf{r})|^2$$



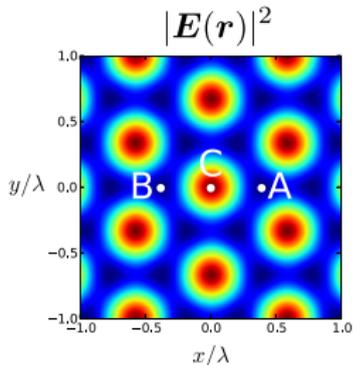
Gerbier-Dalibard NJP '10

Configuration des lasers et le réseau hybride

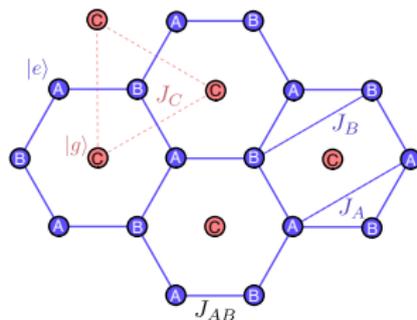
Trois lasers



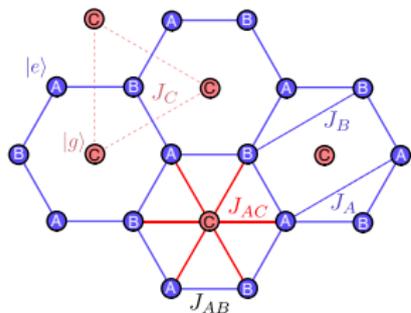
$$E_i = E_0 e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \mathbf{1}_z, \quad |\mathbf{k}_i| = \frac{2\pi}{\lambda_{am}}$$



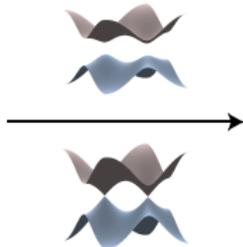
Le réseau hybride



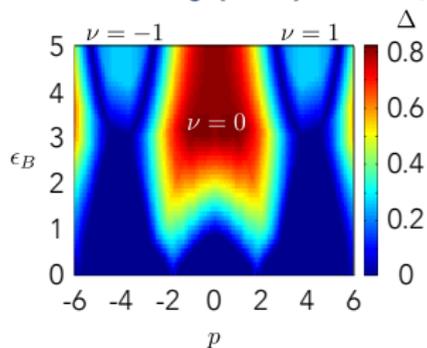
Le réseau hybride couplé par laser



$$J_{AC}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = J \times e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2}$$



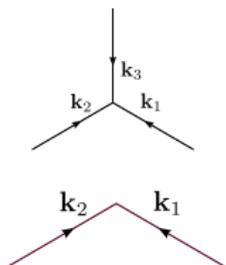
Ouverture du gap et symétrie A/B



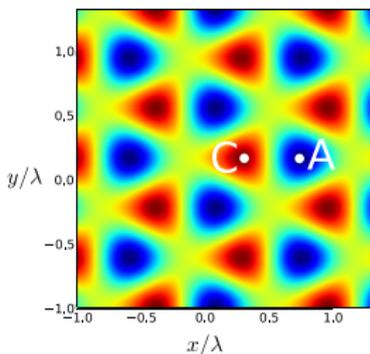
Isolant de Chern pour $\epsilon_B \gg J$

Le réseau auxiliaire:

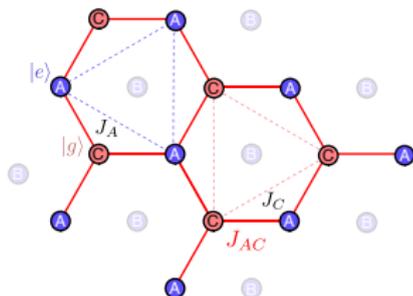
2 lasers polarisés dans le plan



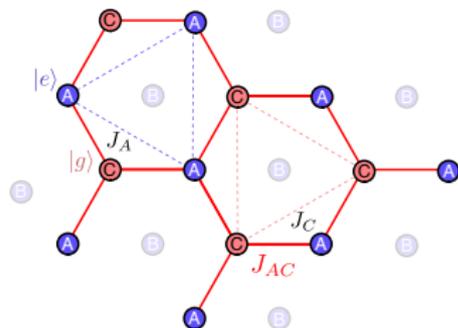
Réseau total: primaire + aux.



Réseau en nid d'abeille couplé par laser

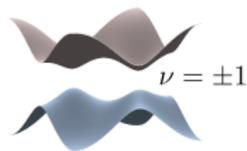
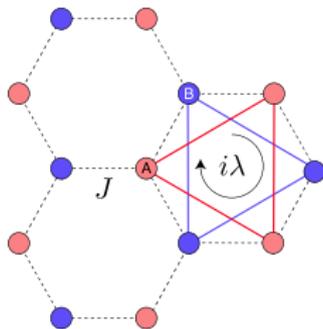


Réseau en nid d'abeille couplé par laser

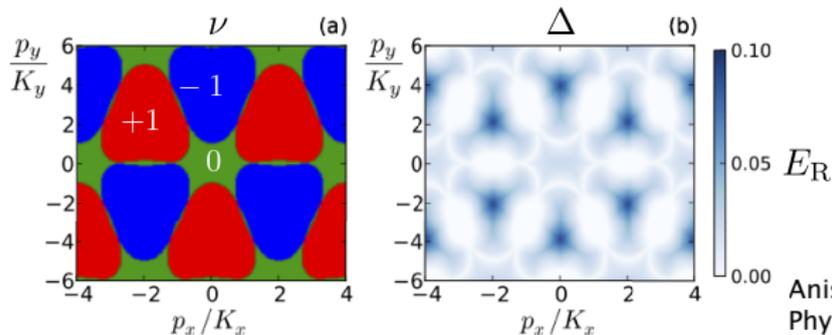


$$J_{AC}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = J \times e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2}$$

Modèle de Haldane



Des isolants de Chern accessibles (gap de l'ordre de 100Hz)

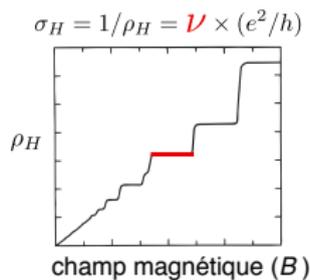
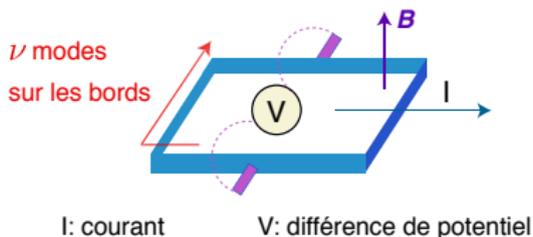


Anisimovas, Gerbier, Andrijauskas, N.G.
Phys. Rev. A **89**, 013632 (2014)

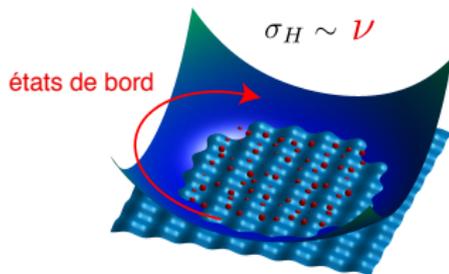
- 1 L'effet Hall quantique : Le nombre de Chern et les états de bord topologiques
 - La quantification de la conductivité de Hall
 - Le modèle de Haldane
 - Les états de bord topologiques
- 2 Implémentation du modèle de Haldane avec des atomes froids
 - Idée générale
 - Proposition spécifique
 - Comment sonder les phases topologiques ?
- 3 Comment sonder des états de bord topologiques dans un gaz atomique ?
 - Discussion générale
 - La spectroscopie
 - Imagerie directe
- 4 Mesure du nombre de Chern et le déplacement du centre de masse
 - Stratégie générale
 - Résultats numériques

La question principale: comment identifier une phase topologique?

Physique de la matière condensée: "barre de Hall"

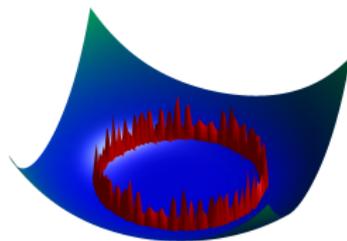


Système d'atomes froids topologique



Peut-on voir des états de bord?

Peut-on évaluer ν ?

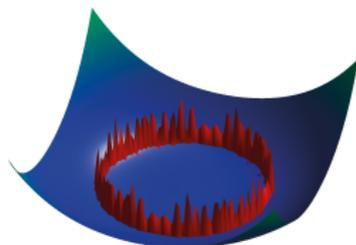
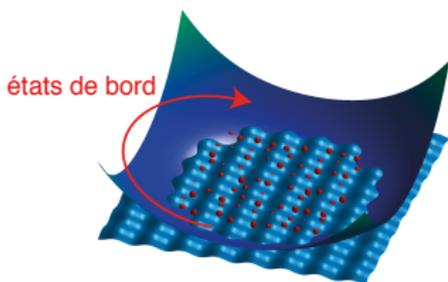


- 1 L'effet Hall quantique : Le nombre de Chern et les états de bord topologiques
 - La quantification de la conductivité de Hall
 - Le modèle de Haldane
 - Les états de bord topologiques
- 2 Implémentation du modèle de Haldane avec des atomes froids
 - Idée générale
 - Proposition spécifique
 - Comment sonder les phases topologiques ?
- 3 **Comment sonder des états de bord topologiques dans un gaz atomique ?**
 - Discussion générale**
 - La spectroscopie
 - Imagerie directe
- 4 Mesure du nombre de Chern et le déplacement du centre de masse
 - Stratégie générale
 - Résultats numériques

Que se passe-t-il sur le bord?

Réseau optique à la Haldane

But: isoler et étudier les états de bord

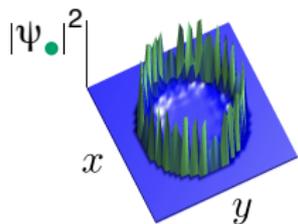
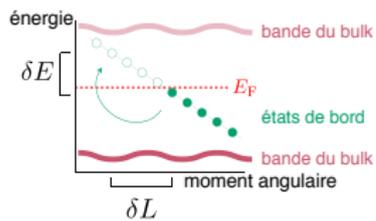


- Comment reconnaître des états de bord topologiques?
 - Ils sont chiraux ("*ils vont dans la même direction*")
 - Ils sont localisés sur le "bord"
 - Leur relation de dispersion est approx. linéaire: $E \sim vk$
- Difficulté principale: il y a **peu d'états de bord, beaucoup d'états de bulk**
 - Typiquement: $N=10.000$ atomes et approx. 10-100 états de bord
 - **Comment peut-on isoler le signal de ces quelques états de bord?**

- 1 L'effet Hall quantique : Le nombre de Chern et les états de bord topologiques
 - La quantification de la conductivité de Hall
 - Le modèle de Haldane
 - Les états de bord topologiques
- 2 Implémentation du modèle de Haldane avec des atomes froids
 - Idée générale
 - Proposition spécifique
 - Comment sonder les phases topologiques ?
- 3 **Comment sonder des états de bord topologiques dans un gaz atomique ?**
 - Discussion générale
 - La spectroscopie**
 - Imagerie directe
- 4 Mesure du nombre de Chern et le déplacement du centre de masse
 - Stratégie générale
 - Résultats numériques

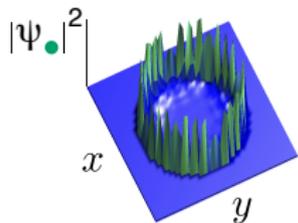
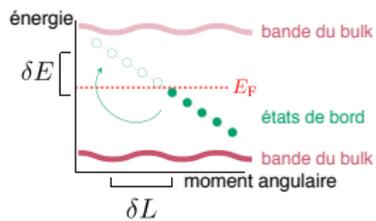
Spectroscopie et états de bord atomiques

- Excitation autour du niveau de Fermi (i.e. dans le gap topologique)



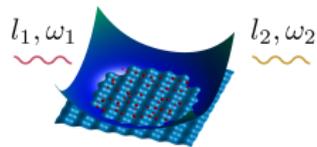
Spectroscopie et états de bord atomiques

- Excitation autour du niveau de Fermi (i.e. dans le gap topologique)



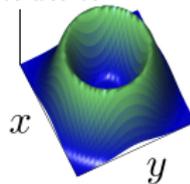
- La sonde: deux lasers Laguerre-Gauss

$$\mathcal{E}(r, \theta) = f(r)e^{i(l\theta - \omega t)}$$



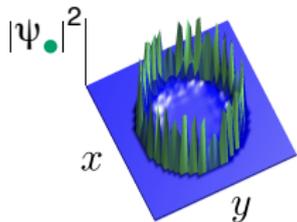
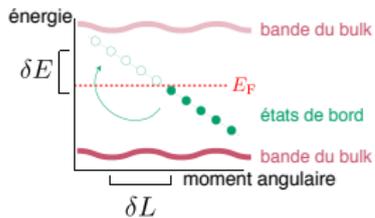
$$\delta\omega \approx \delta E/\hbar \quad \delta l \approx \delta L$$

forme de la sonde



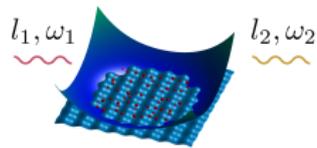
Spectroscopie et états de bord atomiques

- Excitation autour du niveau de Fermi (i.e. dans le gap topologique)



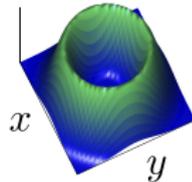
- La sonde: deux lasers Laguerre-Gauss

$$\mathcal{E}(r, \theta) = f(r)e^{i(l\theta - \omega t)}$$

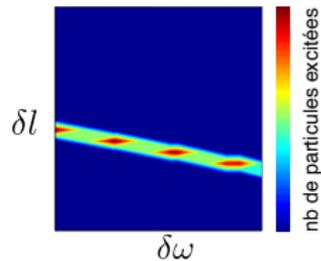
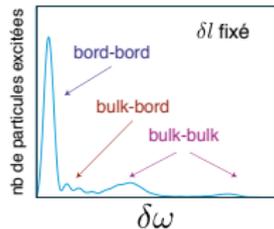


$$\delta\omega \approx \delta E/h \quad \delta l \approx \delta L$$

forme de la sonde

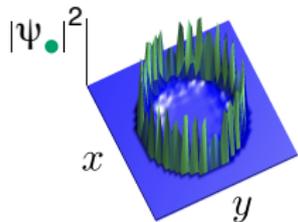
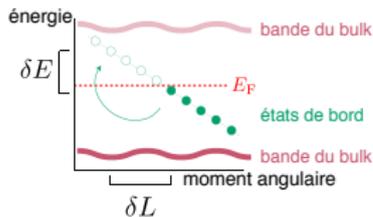


- Le spectre de Bragg: la relation de dispersion révélée



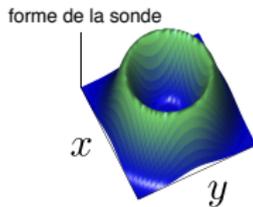
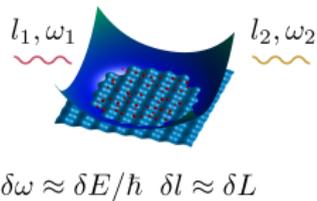
Spectroscopie et états de bord atomiques

- Excitation autour du niveau de Fermi (i.e. dans le gap topologique)

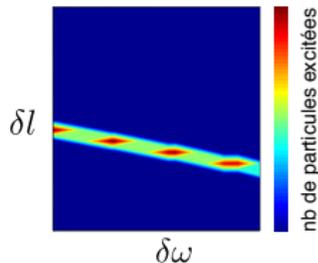
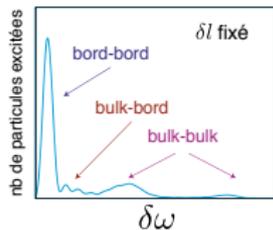


- La sonde: deux lasers Laguerre-Gauss

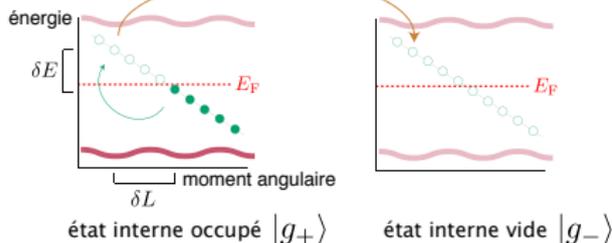
$$\mathcal{E}(r, \theta) = f(r)e^{i(l\theta - \omega t)}$$



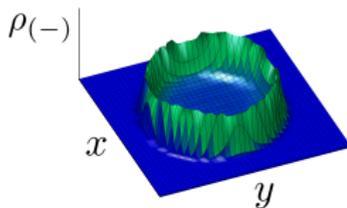
- Le spectre de Bragg: la relation de dispersion révélée



- Excite les atomes + change l'état interne



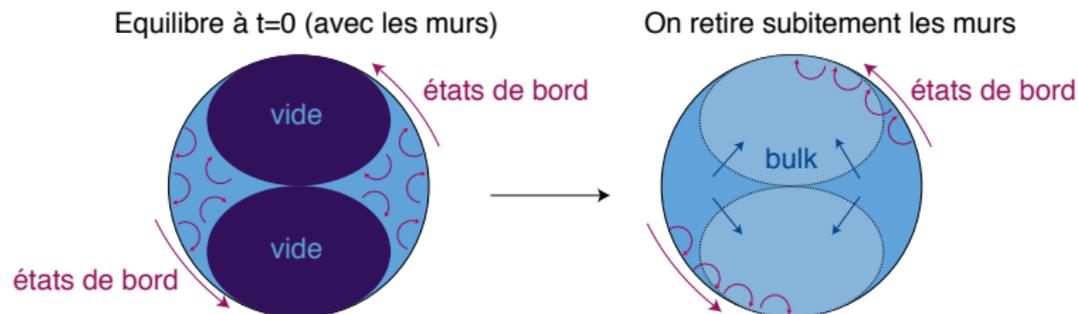
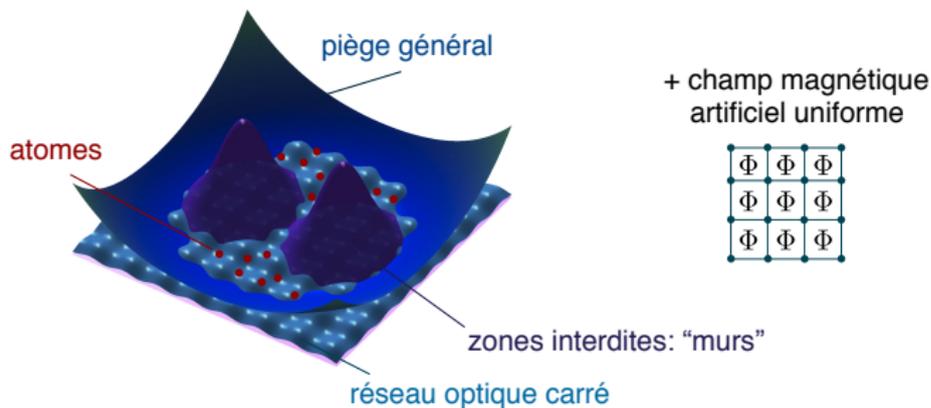
- Signal des états de bord sur fond noir (sans le signal bulk)



N.G., J. Beugnon and F. Gerbier
PRL 2012

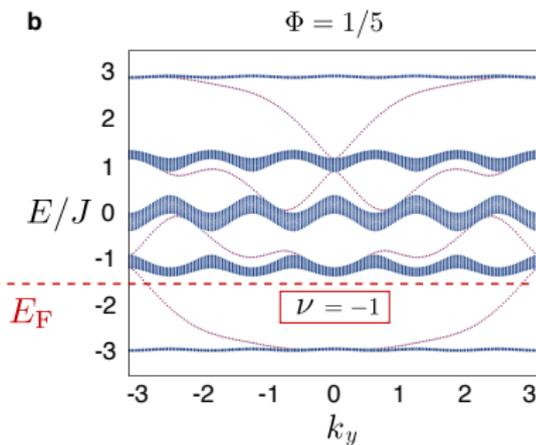
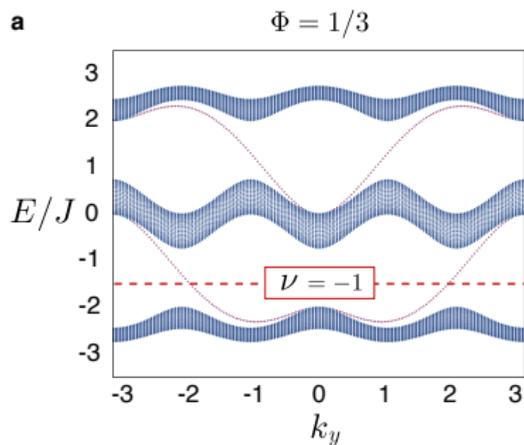
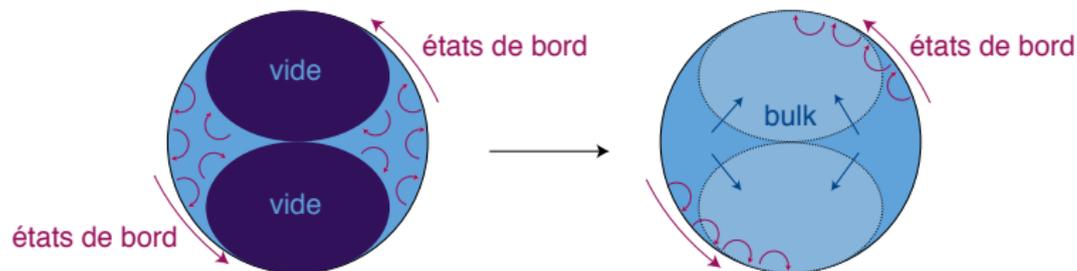
- 1 L'effet Hall quantique : Le nombre de Chern et les états de bord topologiques
 - La quantification de la conductivité de Hall
 - Le modèle de Haldane
 - Les états de bord topologiques
- 2 Implémentation du modèle de Haldane avec des atomes froids
 - Idée générale
 - Proposition spécifique
 - Comment sonder les phases topologiques ?
- 3 **Comment sonder des états de bord topologiques dans un gaz atomique ?**
 - Discussion générale
 - La spectroscopie
 - Imagerie directe**
- 4 Mesure du nombre de Chern et le déplacement du centre de masse
 - Stratégie générale
 - Résultats numériques

Sonder les états de bord après un “quench”

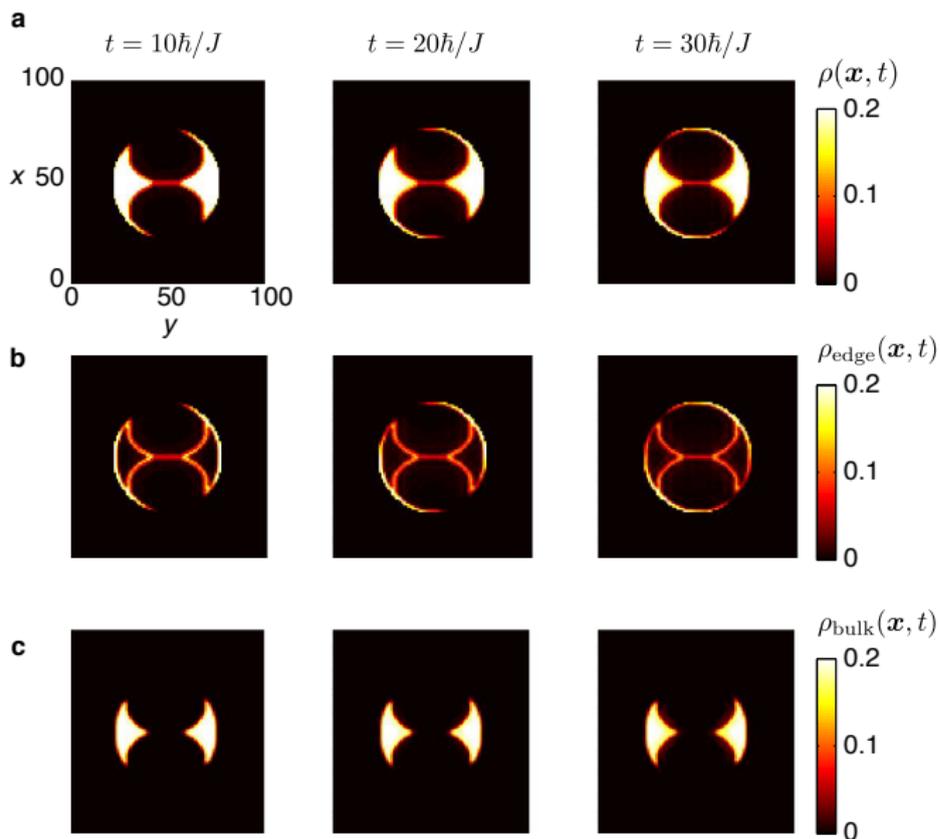


NG, J. Dalibard, A. Dauphin, F. Gerbier, M. Lewenstein, P. Zoller, and I. B. Spielman, PNAS 110, 6736 (2013)

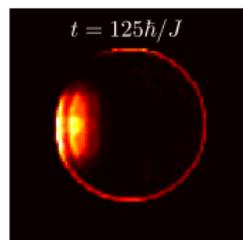
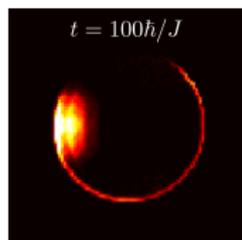
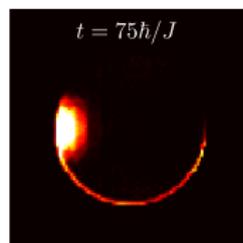
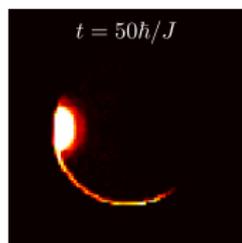
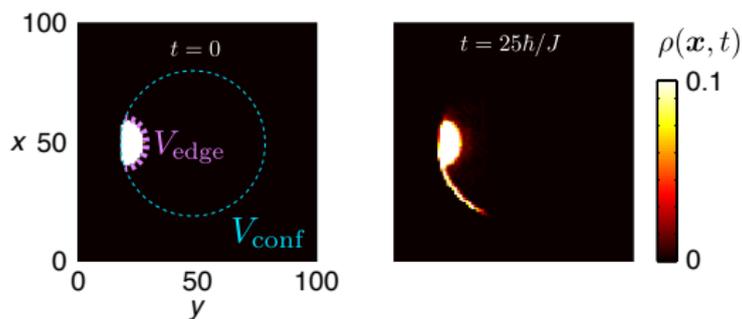
Succès de la méthode : bandes plates vs bandes dispersives



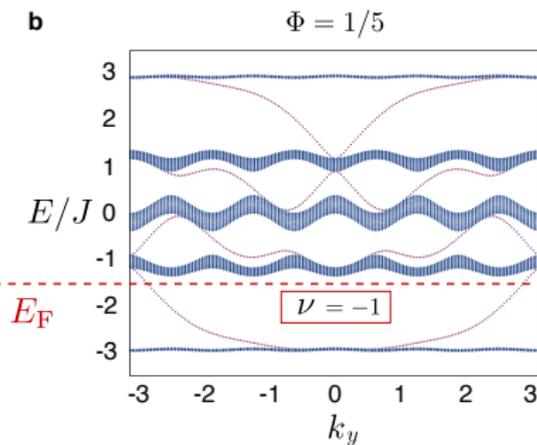
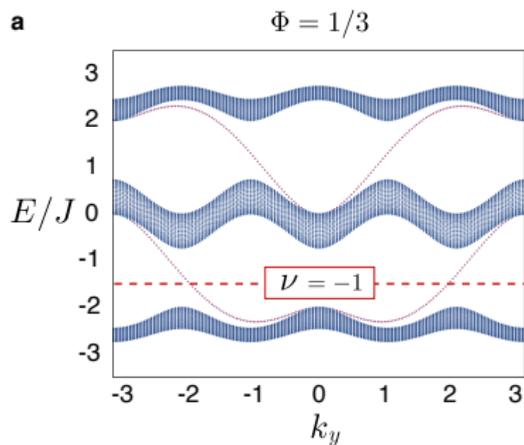
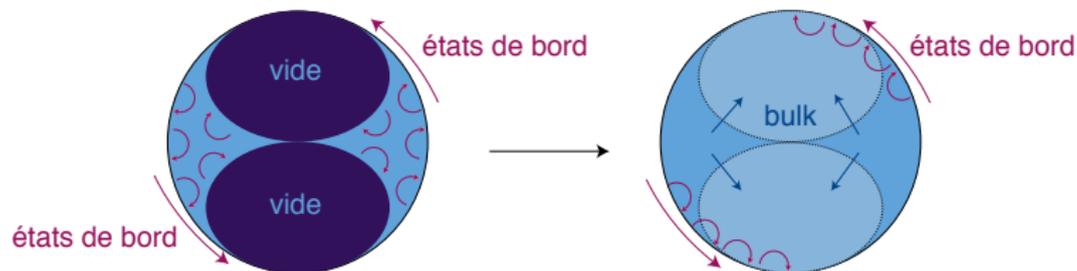
Cas d'une bande plate topologique \sim niveau de Landau



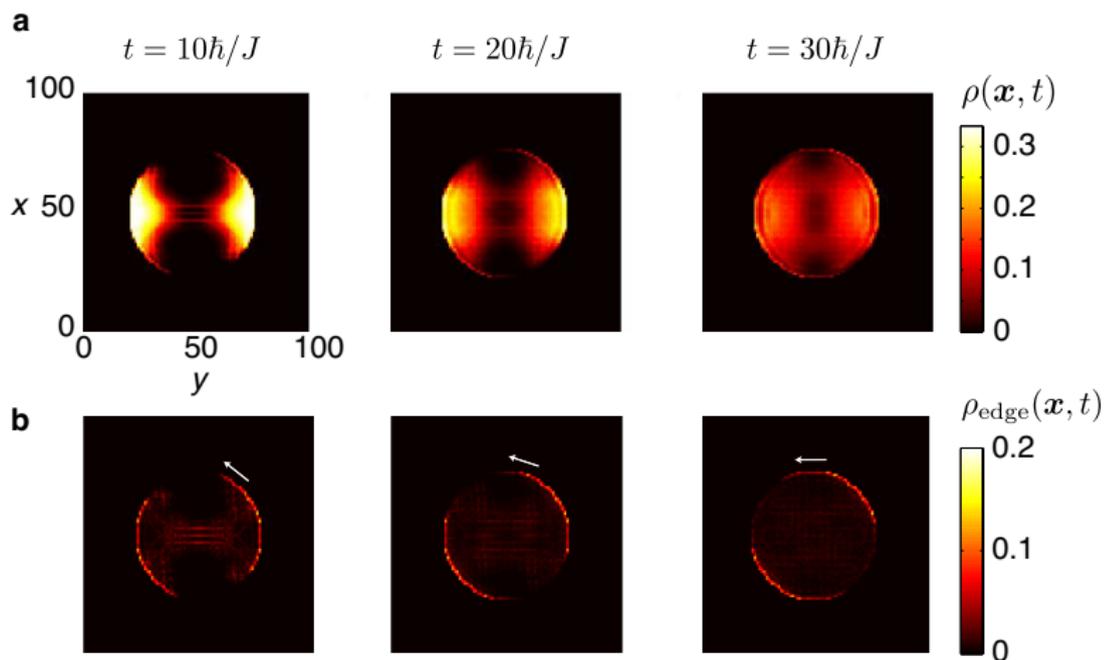
Petite variante : propagation des états de bord sur une longue distance



Succès de la méthode : bandes plates vs bandes dispersives

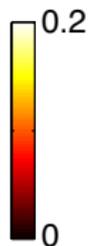
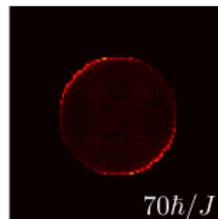
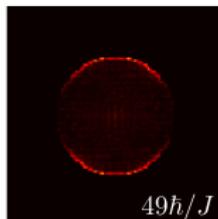
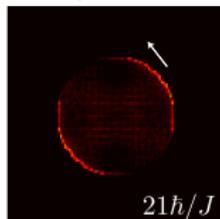


Le cas (a priori problématique) des bandes dispersives

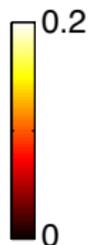
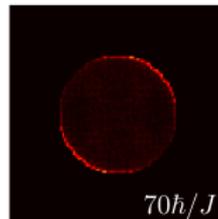
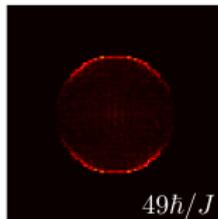
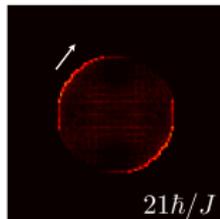


Solution : méthode des flux opposés

b $\rho_{\text{edge}}(\mathbf{x}, t; \Phi = +1/3)$

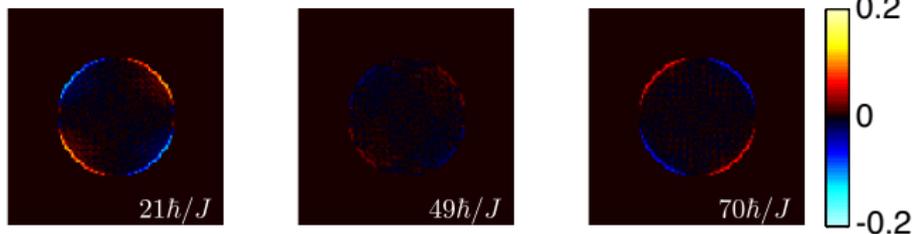


c $\rho_{\text{edge}}(\mathbf{x}, t; \Phi = -1/3)$

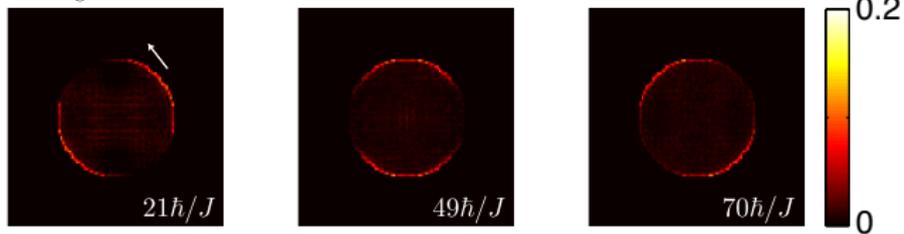


Solution : méthode des flux opposés

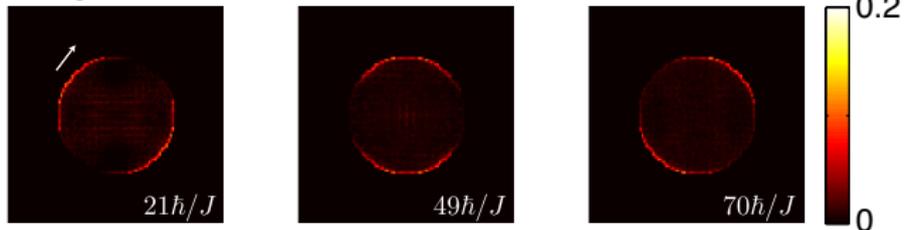
a $\delta\rho = \rho(\mathbf{x}, t; \Phi = +1/3) - \rho(\mathbf{x}, t; \Phi = -1/3)$



b $\rho_{\text{edge}}(\mathbf{x}, t; \Phi = +1/3)$



c $\rho_{\text{edge}}(\mathbf{x}, t; \Phi = -1/3)$



- 1 L'effet Hall quantique : Le nombre de Chern et les états de bord topologiques
 - La quantification de la conductivité de Hall
 - Le modèle de Haldane
 - Les états de bord topologiques
- 2 Implémentation du modèle de Haldane avec des atomes froids
 - Idée générale
 - Proposition spécifique
 - Comment sonder les phases topologiques ?
- 3 Comment sonder des états de bord topologiques dans un gaz atomique ?
 - Discussion générale
 - La spectroscopie
 - Imagerie directe
- 4 **Mesure du nombre de Chern et le déplacement du centre de masse**
 - Stratégie générale**
 - Résultats numériques

La vitesse “anormale” sur un réseau en présence d’un champ électrique

- La vitesse d’une particule dans un état $|u_n(\mathbf{k})\rangle$ et soumise à un champ électrique $\mathbf{E} = E_y \mathbf{1}_y$ est donnée par

$$v_x(\mathbf{k}) = v_{\text{band}}^x + v_{\mathcal{F}}^x = \frac{\partial E_n(\mathbf{k})}{\hbar \partial k_x} - \frac{i}{\hbar} E_y \mathcal{F}_{xy}^{(n)}(\mathbf{k}),$$

$$v_y(\mathbf{k}) = v_{\text{band}}^y = \frac{\partial E_n(\mathbf{k})}{\hbar \partial k_y} \quad \mathcal{F}_{xy}^{(n)} : \text{courbure de Berry (} n^{\text{ième}} \text{ bande)}$$

La vitesse “anormale” sur un réseau en présence d’un champ électrique

- La vitesse d’une particule dans un état $|u_n(\mathbf{k})\rangle$ et soumise à un champ électrique $\mathbf{E} = E_y \mathbf{1}_y$ est donnée par

$$v_x(\mathbf{k}) = v_{\text{band}}^x + v_{\mathcal{F}}^x = \frac{\partial E_n(\mathbf{k})}{\hbar \partial k_x} - \frac{i}{\hbar} E_y \mathcal{F}_{xy}^{(n)}(\mathbf{k}),$$

$$v_y(\mathbf{k}) = v_{\text{band}}^y = \frac{\partial E_n(\mathbf{k})}{\hbar \partial k_y} \quad \mathcal{F}_{xy}^{(n)} : \text{courbure de Berry (} n^{\text{ième}} \text{ bande)}$$

- Price-Cooper (PRA 2012) : Il est possible d’extraire \mathcal{F} en regardant la dynamique
 - Préparer un paquet d’onde (suff. localisé en \mathbf{k}) dans la bande n (e.g. $n = 1$)
 - Mesurer les vitesses moyennes $v_x(\mathbf{k}_c; +E_y)$ and $v_x(\mathbf{k}_c; -E_y)$
 - On prend la différence pour éliminer la vitesse de groupe v_{band}^x

$$\mathcal{F}_{xy}(\mathbf{k}_c) = \frac{\hbar}{2iE_y} (v_x(\mathbf{k}_c; -E_y) - v_x(\mathbf{k}_c; E_y))$$

La vitesse “anormale” sur un réseau en présence d’un champ électrique

- La vitesse d’une particule dans un état $|u_n(\mathbf{k})\rangle$ et soumise à un champ électrique $\mathbf{E} = E_y \mathbf{1}_y$ est donnée par

$$v_x(\mathbf{k}) = v_{\text{band}}^x + v_{\mathcal{F}}^x = \frac{\partial E_n(\mathbf{k})}{\hbar \partial k_x} - \frac{i}{\hbar} E_y \mathcal{F}_{xy}^{(n)}(\mathbf{k}),$$

$$v_y(\mathbf{k}) = v_{\text{band}}^y = \frac{\partial E_n(\mathbf{k})}{\hbar \partial k_y} \quad \mathcal{F}_{xy}^{(n)} : \text{courbure de Berry (} n^{\text{ième}} \text{ bande)}$$

- Price-Cooper (PRA 2012) : Il est possible d’extraire \mathcal{F} en regardant la dynamique
 - Préparer un paquet d’onde (suff. localisé en \mathbf{k}) dans la bande n (e.g. $n = 1$)
 - Mesurer les vitesses moyennes $v_x(\mathbf{k}_c; +E_y)$ and $v_x(\mathbf{k}_c; -E_y)$
 - On prend la différence pour éliminer la vitesse de groupe v_{band}^x

$$\mathcal{F}_{xy}(\mathbf{k}_c) = \frac{\hbar}{2iE_y} (v_x(\mathbf{k}_c; -E_y) - v_x(\mathbf{k}_c; E_y))$$

- Mesure du nombre de Chern ? Une somme astucieuse sur les trajectoires :

$$\nu_{\text{approx}} = \frac{i}{2\pi} \sum_{\mathbf{k}_c} \mathcal{F}_{xy}(\mathbf{k}_c) \Delta \mathbf{k}_c \longrightarrow \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} \mathcal{F}_{xy}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = \nu$$

La vitesse “anormale” sur un réseau en présence d’un champ électrique

- La vitesse d’une particule dans un état $|u_n(\mathbf{k})\rangle$ et soumise à un champ électrique $\mathbf{E} = E_y \mathbf{1}_y$ est donnée par

$$v_x(\mathbf{k}) = v_{\text{band}}^x + v_{\mathcal{F}}^x = \frac{\partial E_n(\mathbf{k})}{\hbar \partial k_x} - \frac{i}{\hbar} E_y \mathcal{F}_{xy}^{(n)}(\mathbf{k}),$$

$$v_y(\mathbf{k}) = v_{\text{band}}^y = \frac{\partial E_n(\mathbf{k})}{\hbar \partial k_y} \quad \mathcal{F}_{xy}^{(n)} : \text{courbure de Berry (} n^{\text{ième}} \text{ bande)}$$

- Price-Cooper (PRA 2012) : Il est possible d’extraire \mathcal{F} en regardant la dynamique
 - Préparer un paquet d’onde (suff. localisé en \mathbf{k}) dans la bande n (e.g. $n = 1$)
 - Mesurer les vitesses moyennes $v_x(\mathbf{k}_c; +E_y)$ and $v_x(\mathbf{k}_c; -E_y)$
 - On prend la différence pour éliminer la vitesse de groupe v_{band}^x

$$\mathcal{F}_{xy}(\mathbf{k}_c) = \frac{\hbar}{2iE_y} (v_x(\mathbf{k}_c; -E_y) - v_x(\mathbf{k}_c; E_y))$$

- Mesure du nombre de Chern ? Une somme astucieuse sur les trajectoires :

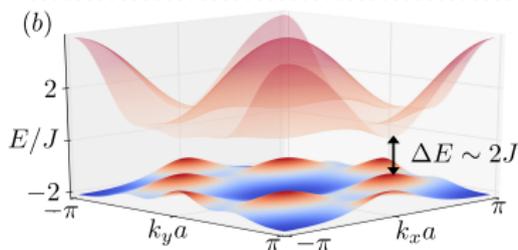
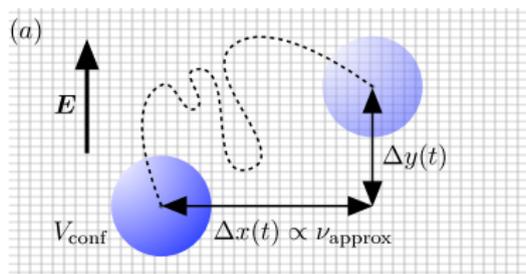
$$\nu_{\text{approx}} = \frac{i}{2\pi} \sum_{\mathbf{k}_c} \mathcal{F}_{xy}(\mathbf{k}_c) \Delta \mathbf{k}_c \longrightarrow \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} \mathcal{F}_{xy}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = \nu$$

- On considère une stratégie différente pour éliminer la vitesse de bande : on **remplit** initialement une bande (avec des fermions)

$$\langle v_x \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} v_x(\mathbf{k}) \xrightarrow{V \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi^2} \int v_x(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = \frac{iE_y}{4\pi^2 \hbar} \int \mathcal{F}_{xy}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = \frac{E_y}{2\pi \hbar} \times \nu$$

La stratégie générale

- On confine initialement le nuage $V_{\text{conf}}(r) \sim (r/r_0)^\infty$ et on ajuste le niveau de Fermi E_F dans le gap, i.e. **on remplit la bande fondamentale**.



- Au temps $t = 0$, on retire $V_{\text{conf}}(r)$ et on applique la force $\mathbf{E} = E_y \mathbf{1}_y$ selon y
- Pour $E_y a \ll \Delta E$, le centre de masse $\mathbf{x}(t)$ est décrit par les équations du mvt

$$x(t) = -(a^2 t E_y / \pi \hbar) \nu_{\text{approx}},$$

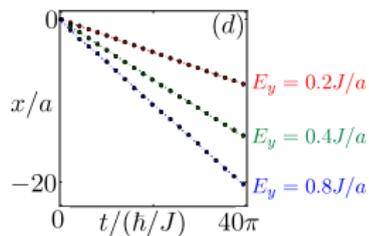
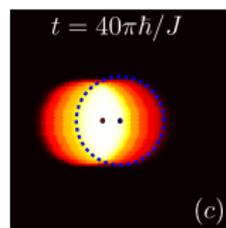
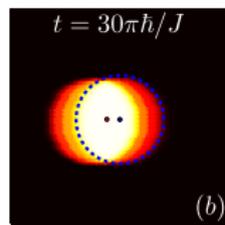
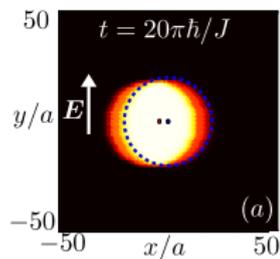
$$y(t) = 0,$$

$$\text{où } \nu_{\text{approx}} \approx \nu \quad (\nu_{\text{approx}} \rightarrow \nu \text{ lorsque } r_0 \rightarrow \infty)$$

- 1 L'effet Hall quantique : Le nombre de Chern et les états de bord topologiques
 - La quantification de la conductivité de Hall
 - Le modèle de Haldane
 - Les états de bord topologiques
- 2 Implémentation du modèle de Haldane avec des atomes froids
 - Idée générale
 - Proposition spécifique
 - Comment sonder les phases topologiques ?
- 3 Comment sonder des états de bord topologiques dans un gaz atomique ?
 - Discussion générale
 - La spectroscopie
 - Imagerie directe
- 4 **Mesure du nombre de Chern et le déplacement du centre de masse**
 - Stratégie générale
 - Résultats numériques**

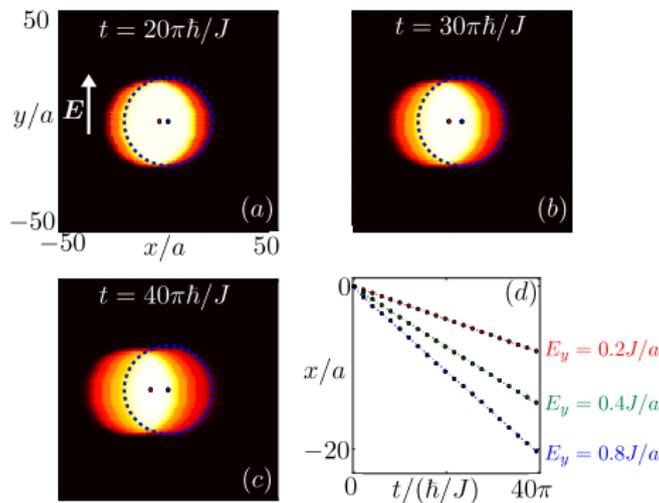
Mesure du nombre de Chern

- Pour $E_y = 0.2J/a$, le déplacement $|\mathbf{x}(t)| \approx 8a\mathbf{1}_x$ après un temps $t = 40\pi\hbar/J$.



Mesure du nombre de Chern

- Pour $E_y = 0.2J/a$, le déplacement $|x(t)| \approx 8a1_x$ après un temps $t = 40\pi\hbar/J$.



- Utilisant la prédiction théorique (basée sur l'approx. adiabatique)

$$x(t) = -(a^2 t E_y / \pi \hbar) \nu_{\text{approx}}$$

on évalue le nombre de Chern associé à la phase isolante de Chern (atomique)

$\nu_{\text{approx}} \simeq 1.00$ ($E_y = 0.2J/a$) : l'approx. adiab. est **valide**

$\nu_{\text{approx}} \simeq 0.9$ ($E_y = 0.4J/a$) : légère population de la bande supérieure

$\nu_{\text{approx}} \simeq 0.6$ ($E_y = 0.8J/a$) : **population importante de la bande supérieure**

Conclusions et sujets non abordés

- Il existe des méthodes pour **générer des phases topologiques (isolants de Chern) avec des atomes froids**

Ingrédient de base : champs de jauge artificiels (cf. cours de J. Dalibard)

- On a proposé des méthodes pour **identifier et étudier les états de bord topologiques**

Outils : spectroscopie, imagerie in-situ après un quench

- On a exploré une méthode permettant la **mesure du nombre de Chern associé à un isolant de Chern atomique**

Stratégie de base : Visualisation du déplacement du centre de masse

Conclusions et sujets non abordés

- Il existe des méthodes pour **générer des phases topologiques (isolants de Chern) avec des atomes froids**

Ingrédient de base : champs de jauge artificiels (cf. cours de J. Dalibard)

- On a proposé des méthodes pour **identifier et étudier les états de bord topologiques**

Outils : spectroscopie, imagerie in-situ après un quench

- On a exploré une méthode permettant la **mesure du nombre de Chern associé à un isolant de Chern atomique**

Stratégie de base : Visualisation du déplacement du centre de masse

- On peut envisager **d'autres mesures**

Alba *et al.* PRL 2011, Abanin *et al.* PRL (2013), etc...

voir l'article de revue N.G., Juzeliūnas, Öhberg, Spielman, arXiv :1308.6533

- On peut envisager **d'autres phases topologiques**

- Isolants topologiques en présence de couplage spin-orbite (phases \mathbb{Z}_2 à 2D ou 3D)

N.G. *et al.* PRL 2010 , Bermudez *et al.* PRL 2010, Béri and Cooper PRL 2011

- Suprafluides topologiques avec des atomes froids

Jiang *et al.* PRL 2011, Kraus *et al.* NJP 2012, Nascimbène JPB 2013

References

“Detecting chiral edge states in the Hofstadter optical lattice”

N. G., J. Beugnon and F. Gerbier
Phys. Rev. Lett. **108**, 255303 (2012)

“Direct imaging of topological edges states in cold-atom systems”

N. G., J. Dalibard, A. Dauphin, F. Gerbier, M. Lewenstein, P. Zoller, and I. B. Spielman
Proc. Natl. Acad. Sci. USA **110**, 6736 (2013)

*“Extracting the Chern number from the dynamics of a Fermi gas :
Implementing a quantum Hall bar for cold atoms”*

A. Dauphin and N.G.
Phys. Rev. Lett. **111**, 135302 (2013)

*“Measuring topology in a laser-coupled honeycomb lattice :
from Chern insulators to topological semi-metals”*

N.G. E. Anisimovas, F. Gerbier, P. Öhberg, I.B. Spielman and G. Juzeliūnas
New J. Phys. **15**, 013025 (2013)

“Design of laser-coupled honeycomb optical lattices supporting Chern insulators”

E. Anisimovas, F. Gerbier, T. Andrijauskas and N. G.
Phys. Rev. A **89**, 013632 (2014)