

*Fluides quantiques de basse dimension
et transition de Kosterlitz-Thouless*

Le quasi-ordre à longue portée

Jean Dalibard

Chaire *Atomes et rayonnement*

Année 2016-17



COLLÈGE
DE FRANCE
— 1530 —

Bilan des cours précédents

A température non nulle, il n'y a pas d'ordre à longue portée dans un système de basse dimension (Peierls, Mermin-Wagner-Hohenberg) :

- Absence d'ordre cristallin (interactions entre proches voisins)
- Gaz de Bose idéal à 2D : $G_1(r) = \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(0) \rangle \propto e^{-r/\ell}$

Berezinskii, Kosterlitz & Thouless ont néanmoins montré qu'une transition de phase « topologique » pouvait se produire entre un état complètement désordonné à haute température et un état quasi-ordonné à basse température

Aucune trace de cette transition dans notre étude du gaz parfait à 2D

*Les interactions jouent un rôle central dans cette transition
contrairement à la condensation de Bose-Einstein à 3D*

Buts du cours d'aujourd'hui

Prise en compte des interactions pour montrer un changement radical de la cohérence d'un fluide de Bose à deux dimensions

Basse température : $G_1(r) = \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(0) \rangle \propto \frac{1}{r^\alpha}$ *quasi-ordre algébrique*

Pour simplifier notre étude, développement d'une approche « champ classique »

- Domaine de validité ?
- Que reste-t-il de quantique dans cette approche ?

Discuter les prédictions de cette approche dans la limite des petites fluctuations

Ondes sonores, spectre de Bogoliubov

1.

Approche champ classique

Description d'un système de N particules identiques (bosons) par un champ $\psi(\mathbf{r})$

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \longrightarrow \psi(\mathbf{r}_1) \dots \psi(\mathbf{r}_N)$$

Analogie optique

Un état donné du champ électromagnétique correspond à une certaine distribution d'amplitudes de probabilité des états à nombre de photons donnés :

$$\sum_{\{n_{\mathbf{k},\epsilon}\}} C_{\{n_{\mathbf{k},\epsilon}\}} |n_1 : (\mathbf{k}_1, \epsilon_1), n_2 : (\mathbf{k}_2, \epsilon_2), \dots\rangle \quad \textit{bien compliqué...}$$

On utilise souvent une description classique du champ électromagnétique :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

Cette description permet de décrire des phénomènes qui semblent « quantiques », comme le fonctionnement d'un laser

Quelles sont ses limitations ?

Limitation de l'approche « champ classique » en optique

- Granularité de la lumière, qui se manifeste par exemple dans le mécanisme d'émission spontanée

$$[\hat{a}_{\mathbf{k},\epsilon}, \hat{a}_{\mathbf{k},\epsilon}^\dagger] \neq 0$$

Plus précisément :

$$\langle N : (\mathbf{k}, \epsilon) | \hat{a}_{\mathbf{k},\epsilon}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},\epsilon} | N : (\mathbf{k}, \epsilon) \rangle = N$$
$$\langle N : (\mathbf{k}, \epsilon) | \hat{a}_{\mathbf{k},\epsilon} \hat{a}_{\mathbf{k},\epsilon}^\dagger | N : (\mathbf{k}, \epsilon) \rangle = N + 1$$

Si $N \gg 1$, cette différence n'est généralement pas bien importante

- Le problème du rayonnement du corps noir : l'équipartition de l'énergie attendue à l'équilibre thermodynamique peut conduire à des divergences

Thermodynamique d'un champ classique

Champ $\mathcal{E}(\mathbf{r})$ avec l'énergie associée $E[\mathcal{E}] = \alpha \int \mathcal{E}^2(\mathbf{r}) d^3r$

Intégrale prise sur un volume L^3

Décomposition du champ en « modes propres » (ou « états propres ») indépendants :

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} \mathcal{E}_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \quad \mathbf{q} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n} \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3$$

L'état du champ est caractérisé par la donnée des $\{\mathcal{E}_{\mathbf{q}}\}$

$|\mathcal{E}_{\mathbf{q}}|^2$: population du mode \mathbf{q}

$$\text{Energie : } E[\mathcal{E}] = \alpha L^3 \sum_{\mathbf{q}} |\mathcal{E}_{\mathbf{q}}|^2 \quad \longrightarrow \quad \mathcal{P}[\{\mathcal{E}_{\mathbf{q}}\}] \propto e^{-E[\mathcal{E}]/k_B T}$$

$$\langle |\mathcal{E}_{\mathbf{q}}|^2 \rangle \propto k_B T$$

Cette variation linéaire en température de la population moyenne de chaque mode est caractéristique d'une approche « champ classique »

Principe d'une approche « champ classique » pour la matière

On remplace la « vraie » fonction d'onde ou la « vraie » matrice densité à N corps par un mélange statistique d'états à une particule :

$$|N : \psi\rangle \longleftrightarrow \psi(\mathbf{r}_1) \dots \psi(\mathbf{r}_N)$$

La densité de probabilité pour qu'un état ψ apparaisse est notée $\mathcal{P}[\psi]$

Moyenne d'une quantité physique A caractérisée par l'observable \hat{A} :

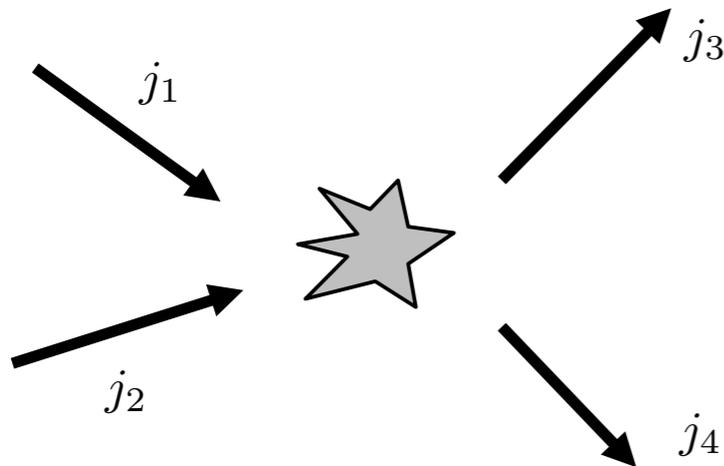
$$\int \langle N : \psi | \hat{A} | N : \psi \rangle \mathcal{P}[\psi] d[\psi] \quad \textit{intégrale fonctionnelle}$$

On souhaite que cette moyenne soit aussi proche que possible du résultat exact $\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{A})$

N.B. : il s'agit (presque) toujours d'une approximation et pas d'un résultat exact

Retour sur les statistiques quantiques

Bilan d'équilibre à la base des statistiques quantiques



$$j_1 + j_2 \longrightarrow j_3 + j_4 \quad \text{si} \quad E_1 + E_2 = E_3 + E_4$$

Le processus inverse est également possible :

$$j_3 + j_4 \longrightarrow j_1 + j_2$$

$$\text{Bilan détaillé : } N_{j_1} N_{j_2} = N_{j_3} N_{j_4}$$

Si la fonction N_j ne dépend que de l'énergie E_j , la fonction $N(E)$ doit vérifier la propriété

$$N(E_1) N(E_2) = N(E_3) N(E_4) \quad \text{si} \quad E_1 + E_2 = E_3 + E_4$$

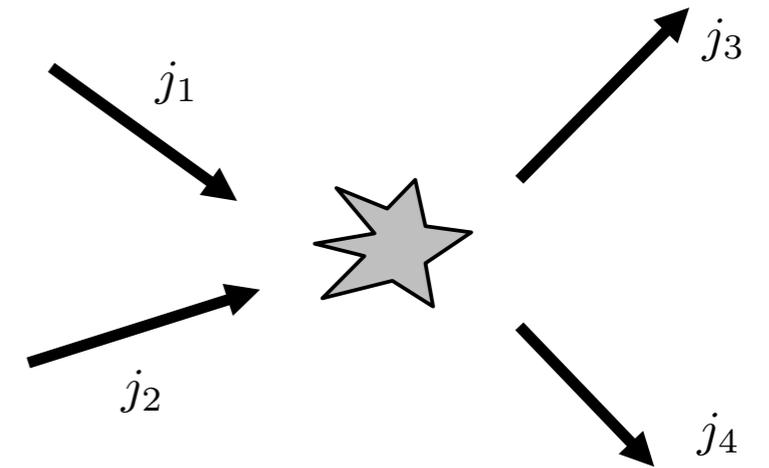
$$\text{Solution générale : } N(E) = e^{aE+b} \quad a = -1/k_B T \quad b = \mu/k_B T$$

$$\text{Boltzmann retrouvé : } N(E) = e^{(\mu-E)/k_B T}$$

Retour sur les statistiques quantiques (2)

Prise en compte de l'émission stimulée :

$$j_1 + j_2 \longleftrightarrow j_3 + j_4$$



$$N_{j_1} N_{j_2} [1 + N_{j_3}] [1 + N_{j_4}] = N_{j_3} N_{j_4} [1 + N_{j_1}] [1 + N_{j_2}]$$

ou encore
$$\frac{N_{j_1}}{1 + N_{j_1}} \frac{N_{j_2}}{1 + N_{j_2}} = \frac{N_{j_3}}{1 + N_{j_3}} \frac{N_{j_4}}{1 + N_{j_4}}$$

ce qui est possible si
$$\frac{N(E)}{1 + N(E)} = e^{aE+b} \longrightarrow N(E) = \frac{1}{e^{-(aE+b)} - 1}$$

ou encore
$$N(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} - 1}$$

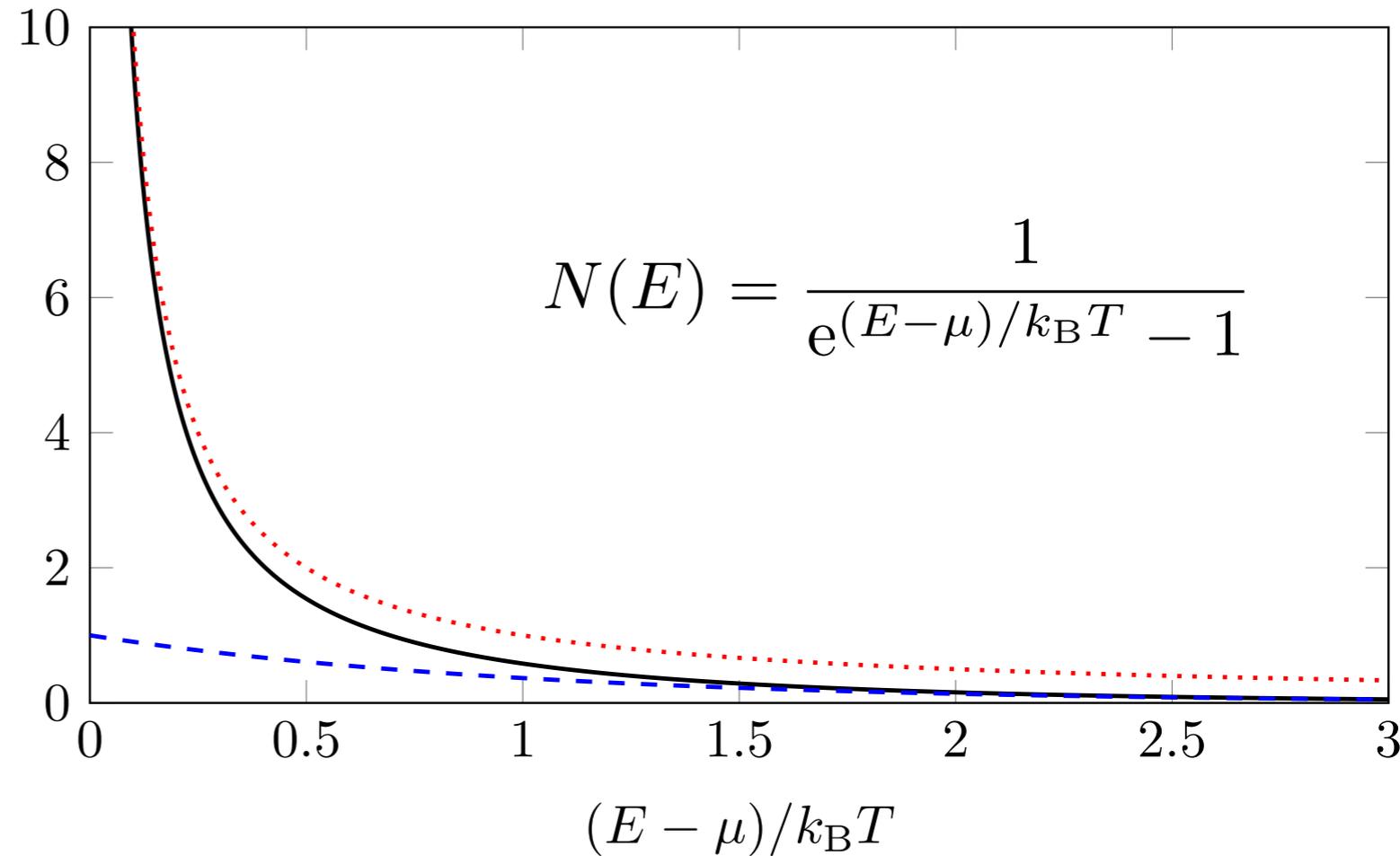
Les deux régimes de la loi de Bose-Einstein

- Aux grandes énergies :

$$E - \mu \gg k_B T$$

$$N(E) \approx e^{(\mu - E)/k_B T} \ll 1$$

*régime de particules classiques :
Maxwell - Boltzmann*

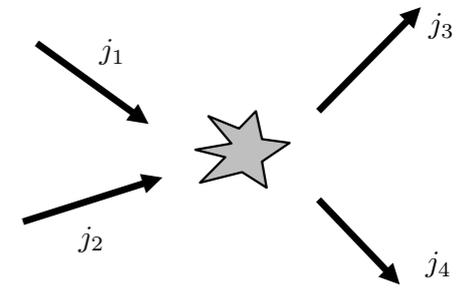


- Aux petites énergies : $E - \mu \ll k_B T$

$$N(E) \approx \frac{1}{\left(1 + \frac{E - \mu}{k_B T}\right) - 1} \approx \frac{k_B T}{E - \mu} \gg 1$$

régime de champ classique, avec des nombres d'occupation grands devant 1

Le champ classique retrouvé par le bilan détaillé



Bilan détaillé dans lequel l'émission stimulée domine l'émission spontanée :

$$N_{j_1} N_{j_2} [1 + N_{j_3}] [1 + N_{j_4}] = N_{j_3} N_{j_4} [1 + N_{j_1}] [1 + N_{j_2}]$$

avec tous les N_j grands devant 1

Terme dominant : $N_{j_1} N_{j_2} N_{j_3} N_{j_4} = N_{j_1} N_{j_2} N_{j_3} N_{j_4}$ **trivial**

Terme suivant : $N_{j_1} N_{j_2} [N_{j_3} + N_{j_4}] = N_{j_3} N_{j_4} [N_{j_1} + N_{j_2}]$

qui peut aussi s'écrire : $\frac{1}{N_{j_1}} + \frac{1}{N_{j_2}} = \frac{1}{N_{j_3}} + \frac{1}{N_{j_4}}$ si $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$

ou encore :
$$\frac{1}{N(E)} = \frac{E - \mu}{k_B T} \rightarrow N(E) = \frac{k_B T}{E - \mu}$$

Que reste-t-il de quantique ?

Assemblée de particules décrites par le champ $\psi(\mathbf{r})$ complexe :

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})} e^{i\theta(\mathbf{r})}$$

Champ de vitesse associé : $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta$

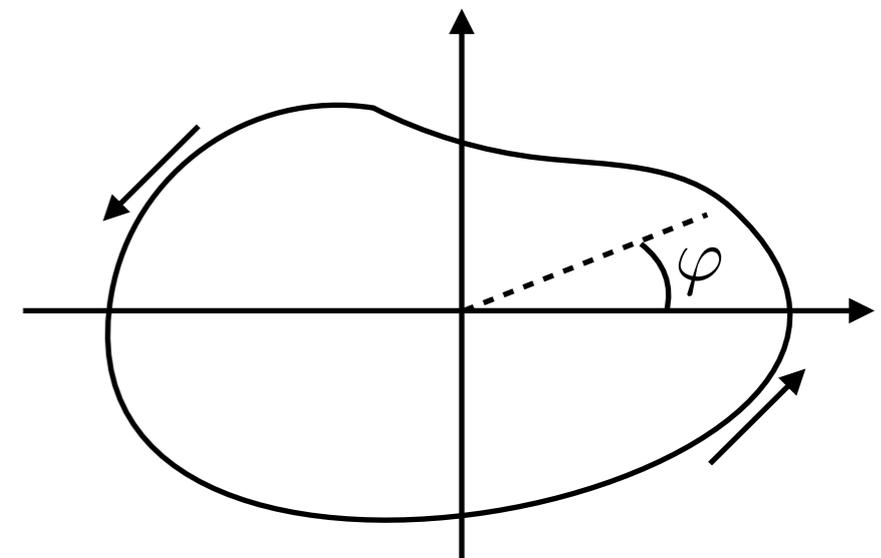
Définition de la phase à 2π près :

$$\oint \nabla \theta(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = n 2\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

pour tout contour fermé

Quantification de la circulation de la vitesse :

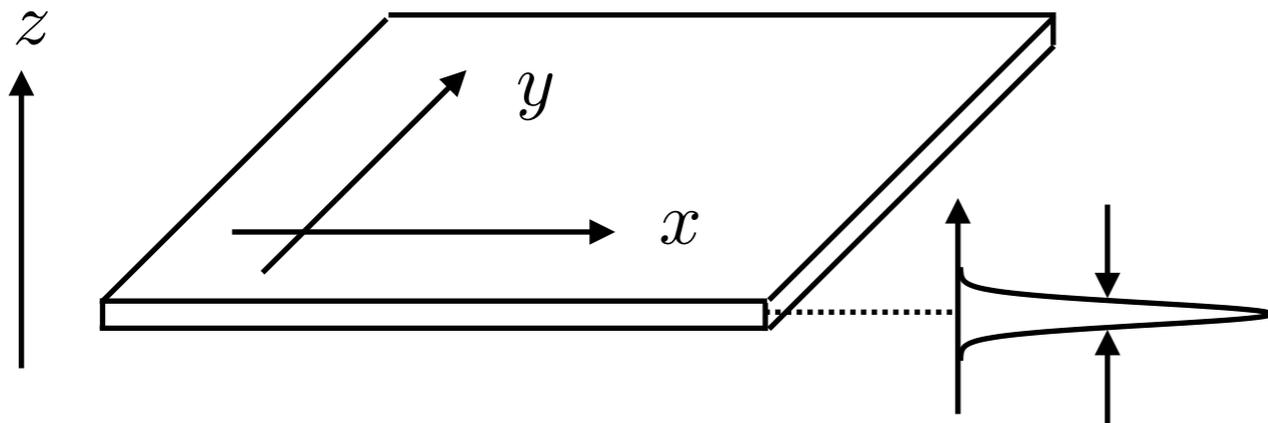
$$\oint \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = n \frac{2\pi \hbar}{m}$$



$$\psi(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r}) e^{i\varphi}$$
$$\oint \nabla \theta(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$$

2.

Fonctionnelle d'énergie de Gross-Pitaevskii



$$V_{\text{trap}}^{(3\text{D})}(\mathbf{r}) = V_{\text{trap}}^{(1\text{D})}(z) + V_{\text{trap}}^{(2\text{D})}(x, y)$$

L'énergie du gaz 3D

L'hamiltonien à N corps s'écrit pour des interactions binaires :

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m} + V_{\text{trap}}^{(3D)}(\hat{\mathbf{r}}_j) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U(\hat{\mathbf{r}}_i - \hat{\mathbf{r}}_j)$$

Traitement en champ classique (ou encore champ moyen, ansatz de Hartree) :

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \propto \phi(\mathbf{r}_1) \dots \phi(\mathbf{r}_N) \quad \int |\phi(\mathbf{r})|^2 d^3r = N$$

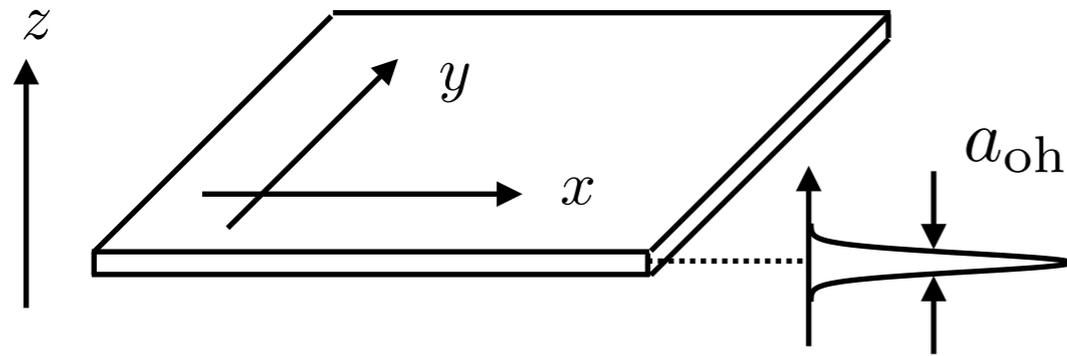
On calcule l'énergie moyenne : $E[\phi] = \langle \Phi | \hat{H} | \Phi \rangle$

$$E(\phi) = \int \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi|^2 + V_{\text{trap}}^{(3D)}(\mathbf{r}) |\phi(\mathbf{r})|^2 + \frac{g}{2} |\phi(\mathbf{r})|^4 \right) d^3r$$

où on a modélisé le potentiel d'interaction par le potentiel de contact :

$$U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad g = \frac{4\pi \hbar^2 a}{m} \quad a : \text{longueur de diffusion 3D}$$

Factorisation du mouvement gelé



Piégeage harmonique fort selon z

Les particules occupent l'état fondamental de ce mouvement:

$$\chi_0(z) \propto e^{-z^2 / (2a_{\text{oh}}^2)} \quad a_{\text{oh}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_z}}$$

On écrit donc le champ classique $\phi(x, y, z)$ sous la forme factorisée :

$$\phi(x, y, z) = \psi(x, y) \chi_0(z)$$

La physique à deux dimensions est décrite par le champ $\psi(x, y)$ avec l'énergie

$$E(\psi) = \int \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 + V_{\text{trap}}^{(2D)}(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \tilde{g} |\psi(\mathbf{r})|^4 \right) d^2r$$

Le paramètre sans dimension $\tilde{g} = \sqrt{8\pi} \frac{a}{a_{\text{oh}}}$, déjà trouvé au cours 2, caractérise la force des interactions

L'équation de Gross-Pitaevskii à 2D

Equation du mouvement pour le champ classique $\psi(x, y)$, écrite ici en l'absence de potentiel de piégeage dans le plan xy

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\psi + \frac{\hbar}{m}\tilde{g}|\psi|^2\psi$$

Quantités conservées : nombre de particules et énergie totale

$$N = \int |\psi(\mathbf{r})|^2 d^2r$$

$$E = E_{\text{cin}} + E_{\text{int}}$$

$$E_{\text{cin}} = \frac{\hbar^2}{2m} \int |\nabla\psi|^2 d^2r$$

$$E_{\text{int}} = \frac{\hbar^2}{2m} \tilde{g} \int |\psi(\mathbf{r})|^4 d^2r$$

Etat fondamental : densité uniforme dans la boîte $L \times L$

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho_0} \quad \text{avec} \quad \rho_0 = \frac{N}{L^2}$$

$$E_{\text{cin}} = 0$$

$$E_{\text{int}} = \frac{\hbar^2}{2m} \tilde{g} \rho_0^2 L^2$$

Coupure ultraviolette et longueur de cicatrisation

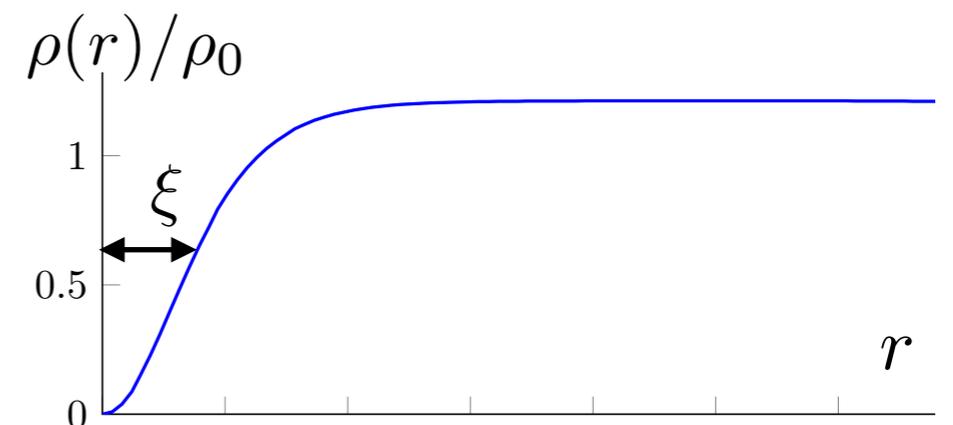
L'approche « champ classique » n'est valable que pour des modes fortement peuplés :

$$\frac{p^2}{2m} < k_B T \quad \text{ou encore} \quad \lambda_T < \frac{\hbar}{p} \quad \lambda_T^2 = \frac{2\pi \hbar^2}{mk_B T}$$

La longueur d'onde thermique représente l'échelle de longueur minimale accessible dans le cadre de cette théorie de champ classique

Les interactions introduisent une autre échelle de longueur : longueur de cicatrisation

$$\frac{\hbar^2}{2m\xi^2} = \frac{\hbar^2 \tilde{g}}{m} \rho \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{g}\rho}}$$



Selon la valeur de l'énergie d'interaction (plus ou moins grande que $k_B T$), la longueur de cicatrisation sera accessible ou non à cette théorie classique

Optique non-linéaire et physique à deux dimensions

Réflexion amorcée par Pomeau, Rica et al.

Expériences menées à Princeton (J. Fleischer) et très récemment à Nice (R. Kaiser)

Principe : étudier la propagation d'un faisceau lumineux à l'approximation paraxiale dans un milieu optiquement non-linéaire, avec l'indice $n_0 + n_2 I$

Equations de Maxwell : équation d'onde pour les composantes du champ électromagnétique

$$\nabla^2 u - \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{Pour l'instant, milieu linéaire d'indice } n_0$$

$$\text{Solutions en ondes planes : } u(\mathbf{r}, t) = u_0 e^{i(kz - \omega t)} \quad \omega = ck/n_0$$

$$\text{Solutions plus générales : } u(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\text{Enveloppe lentement variable : } \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right| \ll k \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|$$

L'approximation paraxiale

Partant de $\nabla^2 u - \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ avec la forme $u(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) e^{i(kz - \omega t)}$

on arrive à la forme de l'équation requise pour l'enveloppe $\psi(\mathbf{r})$:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{2k} \nabla_{\perp}^2 \psi \quad \text{avec} \quad \nabla_{\perp}^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$$

Même structure que l'équation de Schrödinger dépendante du temps à 2D.

En posant $\tau = n_0 z / c$ (temps de propagation), on peut écrire cette équation

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{\hbar}{2m_{\text{phot}}} \nabla_{\perp}^2 \psi \quad m_{\text{phot}} = n_0^2 \hbar \omega / c^2$$

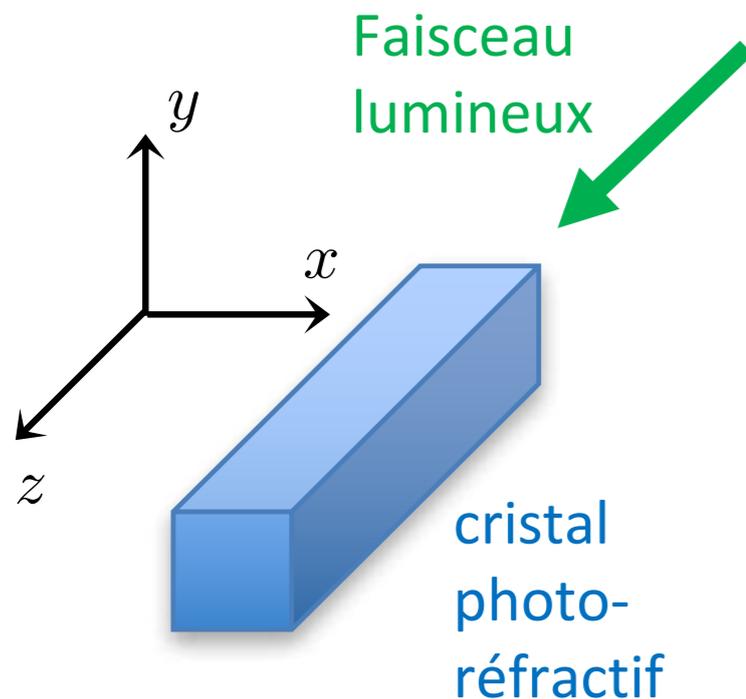
Ce raisonnement ondulatoire redonne la masse effective des photons à 2D dans l'approximation paraxiale, trouvée au cours 2 par un raisonnement corpusculaire

Optique non-linéaire et équilibre thermique

On ajoute une composante non-linéaire à l'indice : $n_0 \longrightarrow n_0 + n_2|\psi|^2/k^2$

Equation d'évolution de l'enveloppe $\psi(\mathbf{r})$ lors de sa propagation

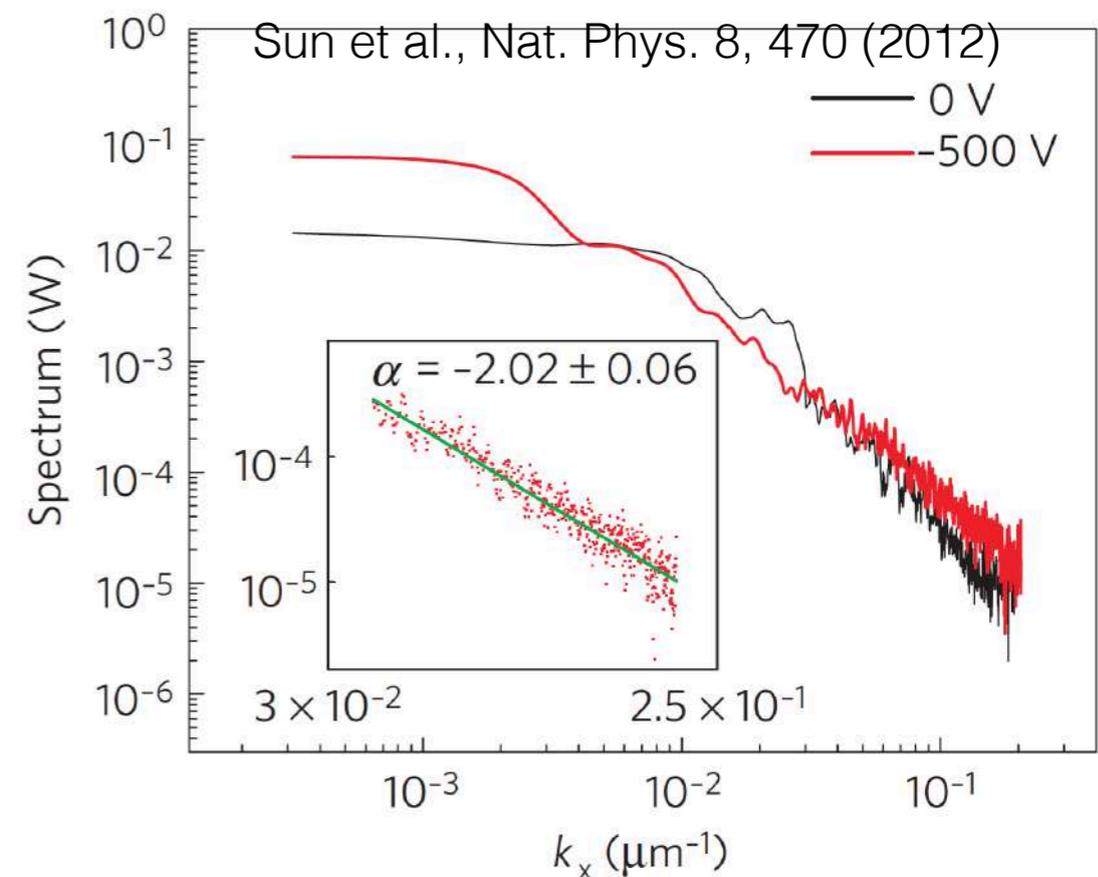
$$i\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{1}{2k}\nabla_{\perp}^2\psi - \frac{n_2}{n_0k}|\psi|^2\psi$$



A l'entrée du cristal, on imprime un désordre contrôlé en phase et en amplitude pour ajuster l'énergie E

On mesure la distribution spatiale en sortie du cristal : est-elle « thermalisée », i.e.,

$$N(k_{\perp}) \propto \frac{k_B T}{E} \propto k_{\perp}^{-2} ?$$



3.

Fluctuations de phase et quasi-ordre

Comportement de la fonction de corrélation

$$G_1(\mathbf{r}) = \langle \psi(\mathbf{r}) \psi^*(0) \rangle \quad \text{à basse température ?}$$

La suppression des fluctuations de densité

Etat fondamental : $\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho_0}$ avec $\rho_0 = \frac{N}{L^2}$ $E_{\text{int}} = \frac{\hbar^2}{2m} \tilde{g} \rho_0 N$

A température non nulle, fluctuations de phase et de densité

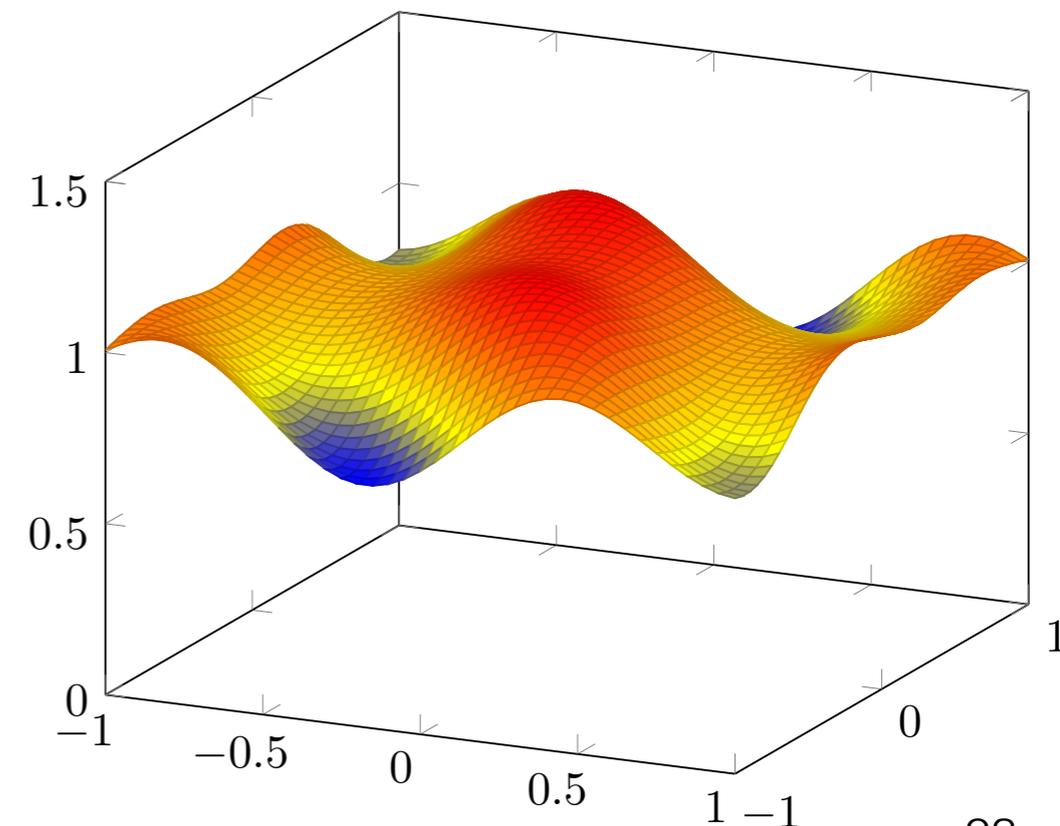
Pour un gaz fortement dégénéré, c'est-à-dire une densité dans l'espace des phases

$$\mathcal{D} \gg 1 \quad \mathcal{D} = \rho_0 \lambda_T^2$$

les fluctuations de densité importantes ont un coût prohibitif

$$\frac{E_{\text{int}}/N}{k_B T} = \frac{\tilde{g}}{4\pi} \mathcal{D} \gg 1$$

Nous allons nous concentrer dans un premier temps sur les fluctuations de phase



Energie liée aux fluctuations de phase

Energie d'interaction gelée :
$$E_{\text{int}} = \frac{\hbar^2}{2m} \tilde{g} \int \rho^2(\mathbf{r}) d^2r = \frac{\hbar^2}{2m} \tilde{g} L^2 \rho^2$$

Energie cinétique :
$$E_{\text{cin}} = \frac{\hbar^2}{2m} \int |\nabla \psi|^2 d^2r$$

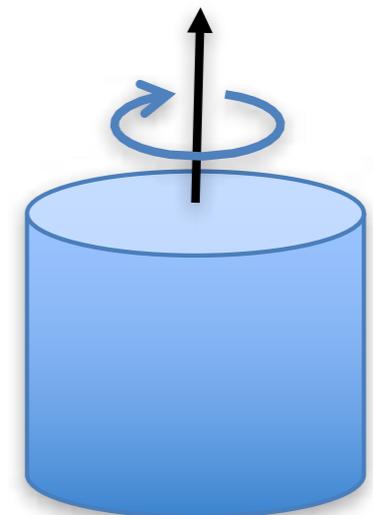
avec
$$\nabla \psi = \nabla \left(\sqrt{\rho(\mathbf{r})} e^{i\theta(\mathbf{r})} \right) \approx \sqrt{\rho} (i \nabla \theta) e^{i\theta(\mathbf{r})}$$

ce qui donne
$$E_{\text{cin}} \approx \frac{\hbar^2}{2m} \rho \int (\nabla \theta)^2 d^2r$$

Expression typique d'un superfluide (cours 2015-16)

Mesure le prix énergétique à payer pour tordre la phase

Expérience du récipient tournant : cette énergie exprime le fait qu'il peut être énergétiquement favorable pour le fluide de rester au repos dans le référentiel galiléen du laboratoire plutôt que tourner avec le récipient (ref. non galiléen).



Hamiltonien effectif à basse énergie

L'expression

$$E_{\text{cin}} \approx \frac{\hbar^2}{2m} \rho \int (\nabla\theta)^2 d^2r$$

signifie implicitement que l'ensemble du fluide (densité ρ) est superfluide.

Mais l'approche champ classique, couplée à l'hypothèse de gel des fluctuations de densité, n'est valable que pour des échelles de longueur assez grandes ($> \lambda_T$).

Un moyen heuristique pour prendre en compte la physique aux plus courtes échelles de longueur est de remplacer la densité totale ρ par une densité « superfluide » ρ_s

$$E_{\text{cin}} \approx \frac{\hbar^2}{2m} \rho_s \int (\nabla\theta)^2 d^2r$$

Permet de se concentrer simplement sur la physique à longue distance, en absorbant dans ρ_s les aspects non essentiels de la physique à courte distance.

Analyse de Fourier des fluctuations de phase

On souhaite calculer la fonction de corrélation

$$G_1(\mathbf{r}) = \langle \psi(\mathbf{r}) \psi^*(0) \rangle = \rho \langle e^{i[\theta(\mathbf{r}) - \theta(0)]} \rangle$$

Développement de la phase en série de Fourier $\theta(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$

N.B. Avec ce développement, on se limite à des variations « douces » de la phase. Il ne convient pas pour un vortex avec un enroulement de 2π sur une distance très courte.

Energie en fonction des coefficients de Fourier :

$$E_{\text{cin}} = \frac{\hbar^2}{2m} \rho_s \int (\nabla\theta)^2 d^2r = \rho_s L^2 \sum_{\mathbf{q}} \frac{\hbar^2 q^2}{2m} |c_{\mathbf{q}}|^2$$

Quelle valeur à l'équilibre thermique ?

Equipartition de l'énergie et fluctuations de phase

Energie cinétique liée aux fluctuations de phase :

$$E_{\text{cin}} = \sum_{\substack{\mathbf{q} \\ q_x > 0}} \epsilon_{\mathbf{q}} |c_{\mathbf{q}}|^2 \quad \text{avec} \quad \epsilon_{\mathbf{q}} = \rho_s L^2 \frac{\hbar^2 q^2}{m} \quad \longrightarrow \quad \langle |c_{\mathbf{q}}|^2 \rangle = \frac{k_B T}{\epsilon_{\mathbf{q}}}$$

Différence de phase entre deux points : $\theta(\mathbf{r}) - \theta(0) = \sum_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}} (e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} - 1)$

$$\longrightarrow \langle \theta(\mathbf{r}) - \theta(0) \rangle = 0$$

$$\longrightarrow \langle [\theta(\mathbf{r}) - \theta(0)]^2 \rangle = 4 \sum_{\mathbf{q}} \langle |c_{\mathbf{q}}|^2 \rangle \sin^2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} / 2)$$

expression formellement identique à celle trouvée lors de notre étude d'un possible ordre cristallin à deux dimensions (Peierls)

$$\langle [\theta(\mathbf{r}) - \theta(0)]^2 \rangle \approx \frac{2}{\rho_s \lambda_T^2} \ln(r / \lambda_T)$$

Croissance logarithmique avec la distance : pas d'ordre en phase

Le quasi-ordre à longue portée

On revient au champ $\psi(x, y)$ lui-même

$$G_1(r) = \langle \psi(\mathbf{r}) \psi^*(0) \rangle \approx \rho \langle e^{i[\theta(\mathbf{r}) - \theta(0)]} \rangle$$

et on utilise la relation pour une variable aléatoire gaussienne $\langle e^{iu} \rangle = e^{-\langle u^2 \rangle / 2}$

$$G_1(r) \approx \rho e^{-\frac{1}{\rho_s \lambda_T^2} \ln(r/\lambda_T)} = \rho \left(\frac{\lambda_T}{r} \right)^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1}{\rho_s \lambda_T^2}$$

Décroissance algébrique de la corrélation dans ce régime de basse température

Décroissance beaucoup plus lente que pour le gaz parfait (exponentielle)

→ Quasi-ordre

Un exemple concret pour $G_1(r) = \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(0) \rangle$

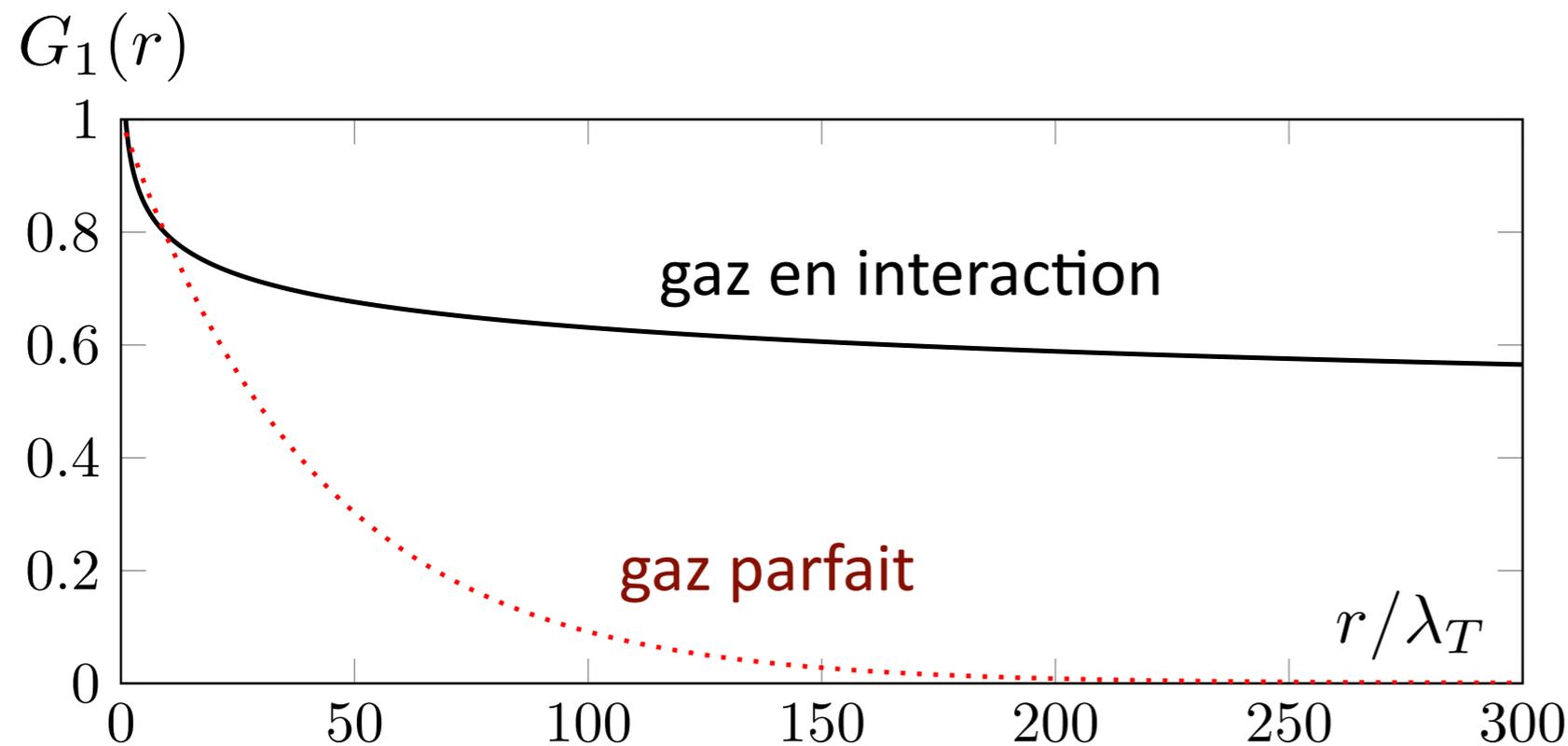
Gaz de Bose avec une densité dans l'espace des phases $\mathcal{D} = \rho \lambda_T^2 = 10$

- Gaz parfait : décroissance exponentielle

$$G_1(r) \propto e^{-r/\ell} \quad \text{avec} \quad \ell \approx \frac{\lambda_T}{\sqrt{4\pi}} e^{\mathcal{D}/2} \longrightarrow \ell \approx 40 \lambda_T$$

- Gaz en interaction : décroissance algébrique

$$G_1(r) \propto 1/r^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = 1/\mathcal{D} = 1/10$$



Pour perdre le quasi-ordre,
il faut aller très très loin :

$$G_1(r) = 0.01$$

pour

$$r = \frac{\lambda_T}{(0.01)^{1/\alpha}} = 10^{20} \lambda_T$$

4.

L'approche de Bogoliubov

Aller au delà de l'approximation du gel des fluctuations de densité

Adapter à 2D le formalisme connu à 3D

*On ne peut pas faire simplement un développement $\psi \approx \psi_0 + \delta\psi$
car on n'a pas de ψ_0 autour duquel on pourrait développer*

Equations couplées amplitude - phase

Dans le cadre de l'approche champ classique, on pose :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\rho_0 + \delta\rho(\mathbf{r}, t)} e^{i\theta(\mathbf{r}, t)} \quad |\delta\rho| \ll \rho_0$$

et on fait un développement en série de Fourier (les vortex sont donc toujours exclus)

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 [1 + 2\eta(\mathbf{r}, t)] \quad \eta(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{q}} d_{\mathbf{q}}(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$$

$$\theta(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}}(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$$

L'équation de Gross-Pitaevskii s'écrit en fonction des coefficients de Fourier :

$$\left(\frac{2m}{\hbar}\right) \dot{c}_{\mathbf{q}} = - (q^2 + 4\tilde{g}\rho_0) d_{\mathbf{q}} \quad \ddot{c}_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}}^2 c_{\mathbf{q}} = 0$$

$$\left(\frac{2m}{\hbar}\right) \dot{d}_{\mathbf{q}} = q^2 c_{\mathbf{q}} \quad \ddot{d}_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}}^2 d_{\mathbf{q}} = 0$$

avec la relation de dispersion de Bogoliubov :

$$\omega_{\mathbf{q}} = \frac{\hbar}{2m} [q^2 (q^2 + 4\tilde{g}\rho_0)]^{1/2}$$

Le spectre de Bogoliubov

$$\omega_q = \frac{\hbar}{2m} [q^2 (q^2 + 4\tilde{g}\rho_0)]^{1/2}$$

- Partie de petit vecteur d'onde $q^2 \ll 4\tilde{g}\rho_0$

$$\omega_q = c_0 q \quad \text{avec} \quad c_0 = \frac{\hbar}{m} \sqrt{\tilde{g}\rho_0}$$

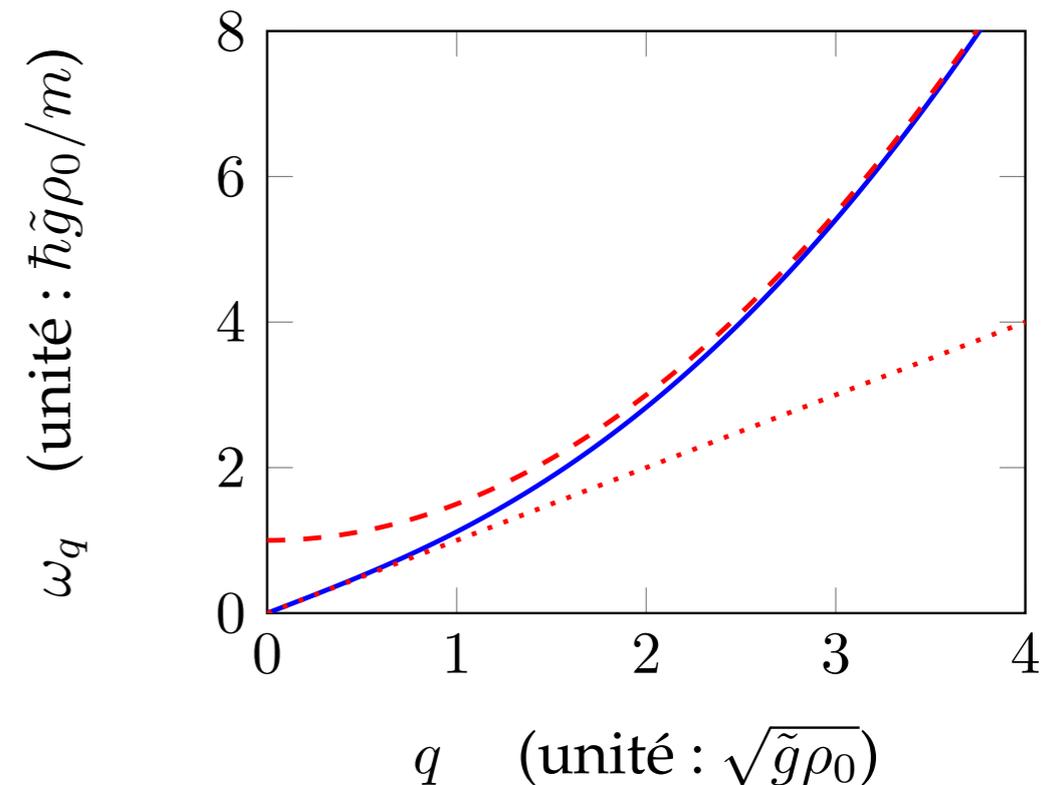
Ondes sonores

L'existence de cette branche linéaire assure la superfluidité du gaz selon le critère de Landau : une impureté bougeant à une vitesse $v < c_0$ ne peut pas être freinée

- Partie de grand vecteur d'onde $q^2 \gg 4\tilde{g}\rho_0$

$$\hbar\omega_q = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \quad \text{à une constante additive près}$$

Régime de particules libres



Production d'un gaz d'atomes à 2D

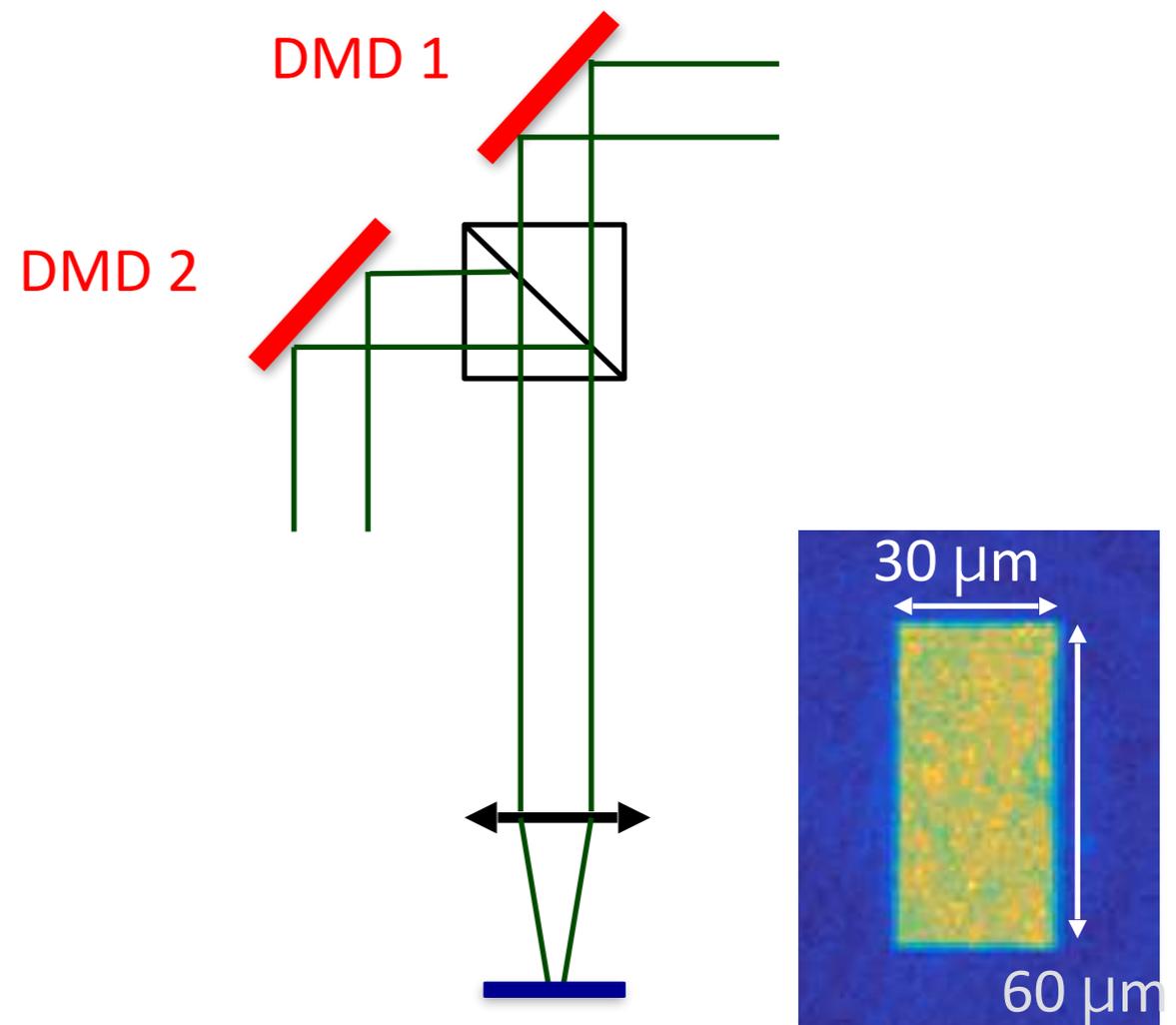
Gel de la direction verticale en piégeant les atomes dans un noeud d'une onde lumineuse stationnaire



$$k_B T < \hbar \omega_z$$

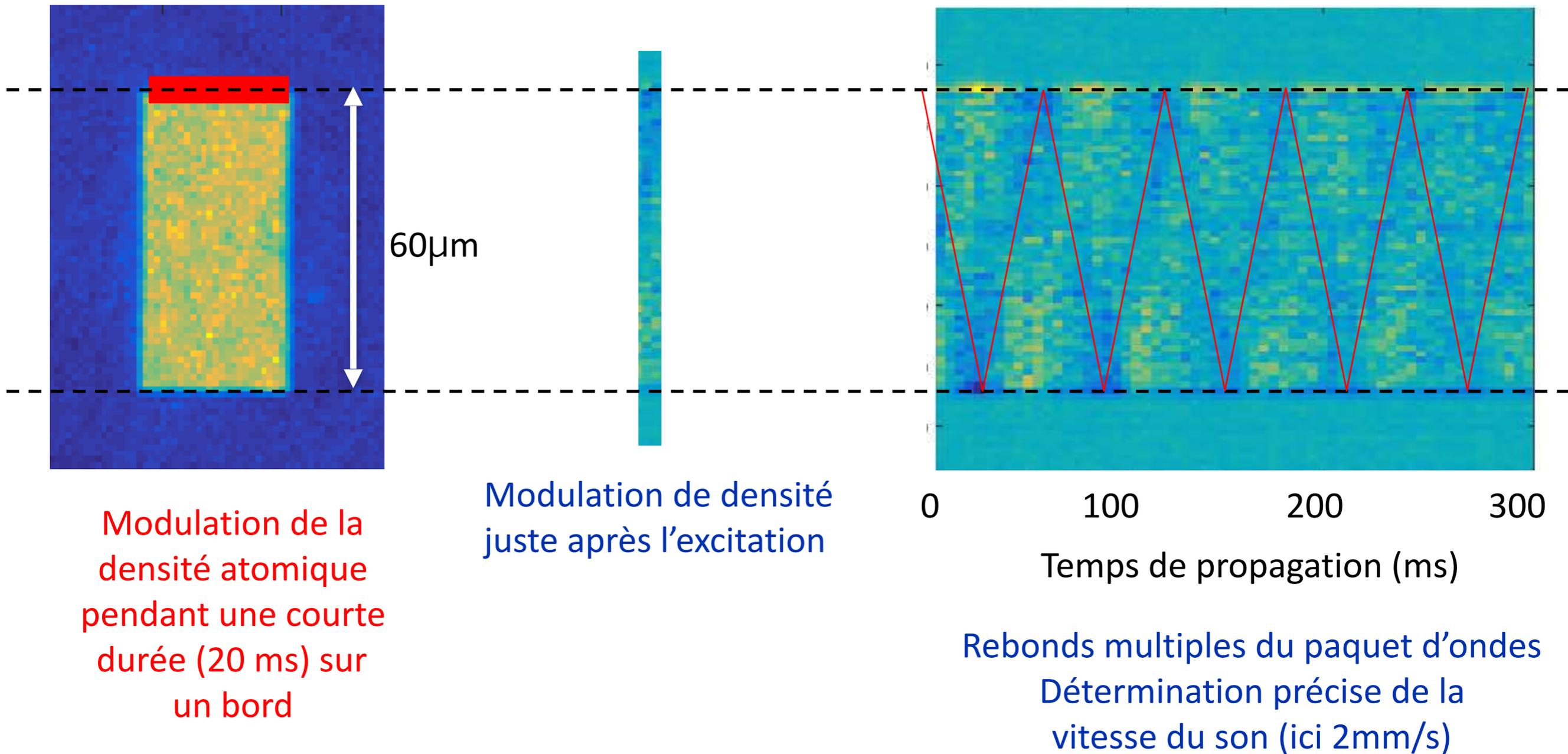
10 nK 200 nK

Confinement dans le plan horizontal grâce à des murs lumineux dont le dessin est imprimé sur une matrice de micro-miroirs



Jean-Loup Ville, Raphaël Saint-Jalm, Monika Aidelsburger, Sylvain Nascimbene, Jérôme Beugnon

Propagation d'un paquet d'ondes dans un gaz 2D (CdF 2017)



Jean-Loup Ville, Raphaël Saint-Jalm, Monika Aidelsburger, Sylvain Nascimbene, Jérôme Beugnon

Fluctuations de phase vs. densité

Dans le cadre de l'approche de Bogoliubov, nous avons décomposé les fluctuations en

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 [1 + 2\eta(\mathbf{r}, t)] \quad \eta(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{q}} d_{\mathbf{q}}(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$$
$$\theta(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}}(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$$

Les équations couplées entre les amplitudes $c_{\mathbf{q}}$ et $d_{\mathbf{q}}$ donnent les amplitudes relatives

$$\frac{\bar{d}_{\mathbf{q}}}{\bar{c}_{\mathbf{q}}} = \frac{q}{\sqrt{q^2 + 4\tilde{g}\rho_0}}$$

Pour $q^2 \ll 4\tilde{g}\rho_0$, les fluctuations relatives de densité sont plus petites que les fluctuations de phase : justifie l'approche élémentaire basée sur l'énergie

$$E_{\text{cin}} \approx \frac{\hbar^2}{2m} \rho_s \int (\nabla\theta)^2 d^2r$$

qui a conduit à la notion de quasi-ordre à longue portée.

Bilan de ce cours

Partant d'une modélisation du fluide en termes de champ classique, nous avons analysé la dynamique et l'équilibre thermique par les modes propres densité-phase

- Approche valable si la phase est décomposable en série de Fourier

Exclut les vortex

- Conduit à un quasi-ordre à longue portée

$$G_1(r) = \langle \psi(\mathbf{r}) \psi^*(0) \rangle \propto 1/r^\alpha \quad \alpha = 1/\mathcal{D}_s$$

Radicalement différent du gaz parfait

Questions ouvertes :

Que se passe-t-il en présence de fluctuations de phase plus fortes ?

Comment connecter ce résultat au domaine « haute température », où on s'attend à retrouver une décroissance exponentielle de G_1 ?