

Les interactions entre atomes dans les gaz quantiques

Cours 5

Les résonances de diffusion

Jean Dalibard

Chaire *Atomes et rayonnement*

Année 2020-21



COLLÈGE
DE FRANCE
— 1530 —

Interactions entre particules à basse température

- Essentiellement dans le canal de moment cinétique $\ell = 0$ (onde s)
- L'amplitude de diffusion dans ce canal est essentiellement donnée par la longueur de diffusion a :

$$\frac{1}{f(k)} \approx -\frac{1}{a} - ik + \dots$$

$$f(k) = -\frac{a}{1 + ika}$$

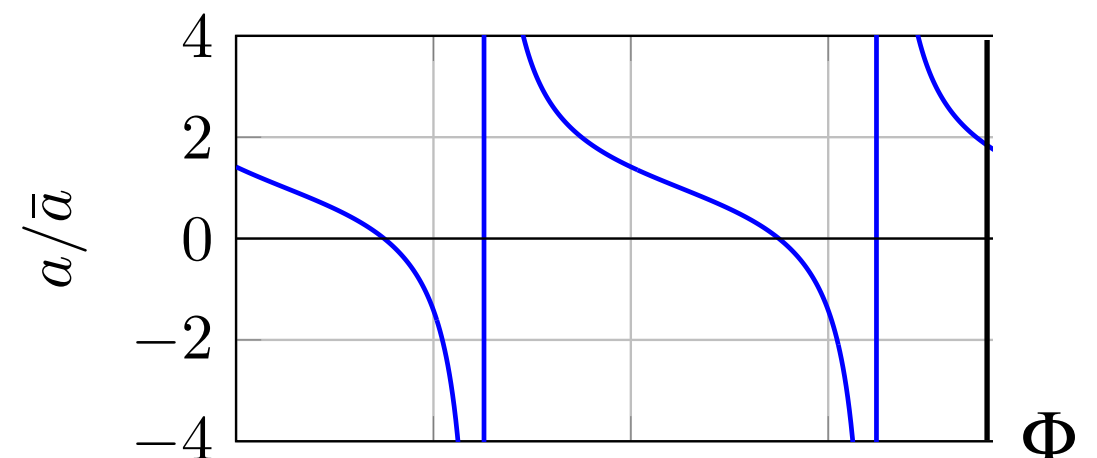
pour des particules discernables :

$$\sigma(k) = 4\pi |f(k)|^2 = \frac{4\pi a^2}{1 + k^2 a^2}$$

- Pour un potentiel de type van der Waals à grande distance, la longueur de diffusion s'écrit

$$\frac{a}{\bar{a}} = 1 - \tan \Phi \quad \bar{a} \approx R_{\text{vdW}} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{2m_r C_6}{\hbar^2} \right)^{1/4}$$

a diverge quand $\Phi \approx \pi/2$ [π]



But de ce cours : approfondir les résonances de diffusion

Importance de ces résonances pour la physique des gaz quantiques

Régime d'interaction forte : $a \gtrsim d$ avec $d =$ distance entre particules

Réalisation d'états nouveaux pour le problème à petit nombre de corps (Efimov)

→ Comprendre comment ces résonances peuvent se manifester

$|a| \gg \bar{a}$ pour l'onde s

Quel équivalent pour les ondes $\ell > 0$?

→ Comprendre comment induire ces résonances et plus généralement accorder à volonté la valeur de la longueur de diffusion a

Un modèle "simple" pour les résonances de Fano-Feshbach

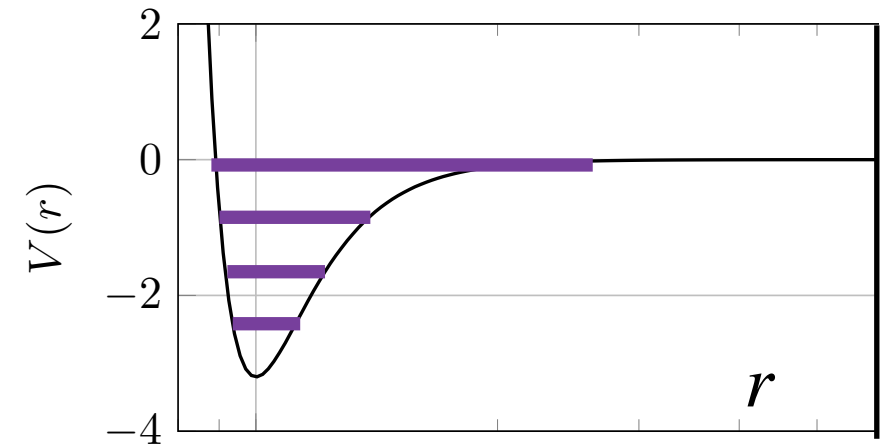
1.

Quelques exemples de résonances de diffusion

Résonance à énergie nulle

Collision mono-canal usuelle avec un configuration particulière du potentiel qui entraîne

- un état très faiblement lié
- ou alors un état lié sur le point d'apparaître



Théorème de Levinson : la longueur de diffusion diverge $|a| \rightarrow +\infty$

Comportement de la section efficace :

$$\sigma(k) = \frac{4\pi a^2}{1 + k^2 a^2} \approx \frac{4\pi}{k^2} \longrightarrow \frac{8\pi}{k^2} \quad \text{pour des bosons polarisés}$$

On atteint la limite unitaire avec à l'équilibre thermique $\overline{k^2} \propto T$ et donc :

$$\sigma(T) \propto \frac{1}{T}$$

L'exemple du césium

Mesure de la section efficace de collision pour différentes températures

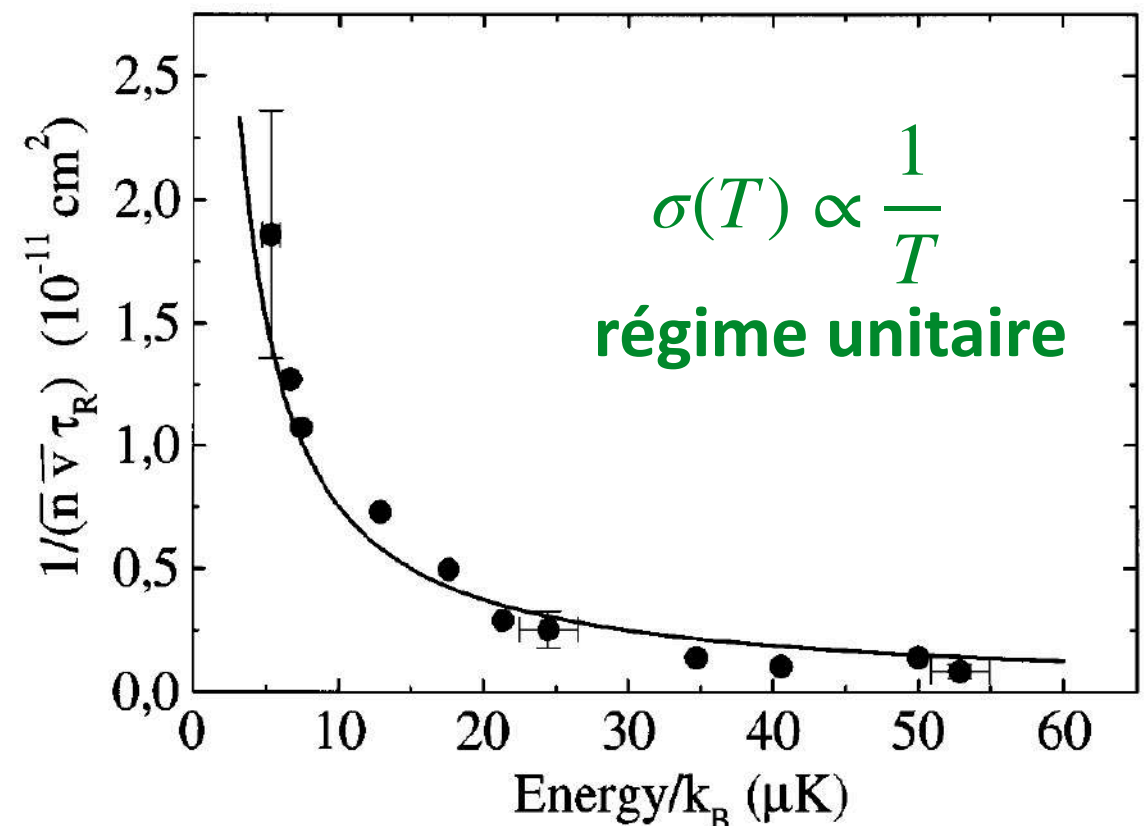
A l'équilibre thermique, on attend dans un piège harmonique $\frac{1}{2}m\omega_\alpha^2\overline{r_\alpha^2} = \frac{1}{2}k_B T$
 $\alpha = x, y, z$

On prépare un nuage avec un rapport d'anisotropie $\overline{x^2}/\overline{z^2}$ différent de celui attendu et on mesure la relaxation vers l'équilibre sous l'effet des collisions élastiques

Temps de relaxation : $\tau_R \propto 1/\gamma_{\text{coll}}$

Taux de collision : $\gamma_{\text{coll}} = n\sigma\bar{v}$
 densité \nearrow vitesse quadratique moyenne \nwarrow

$$\sigma \propto \frac{1}{n\bar{v}\tau_R}$$



Kerman et al., 2001 : $a \approx 25 \bar{a}$!

La contrepartie de cette résonance...

VOLUME 80, NUMBER 9

PHYSICAL REVIEW LETTERS

2 MARCH 1998

Giant Spin Relaxation of an Ultracold Cesium Gas

J. Söding, D. Guéry-Odelin, P. Desbiolles, G. Ferrari,* and J. Dalibard

Laboratoire Kastler Brossel,[†] Ecole Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, F-75231 Paris CEDEX 05, France.

(Received 6 November 1997)

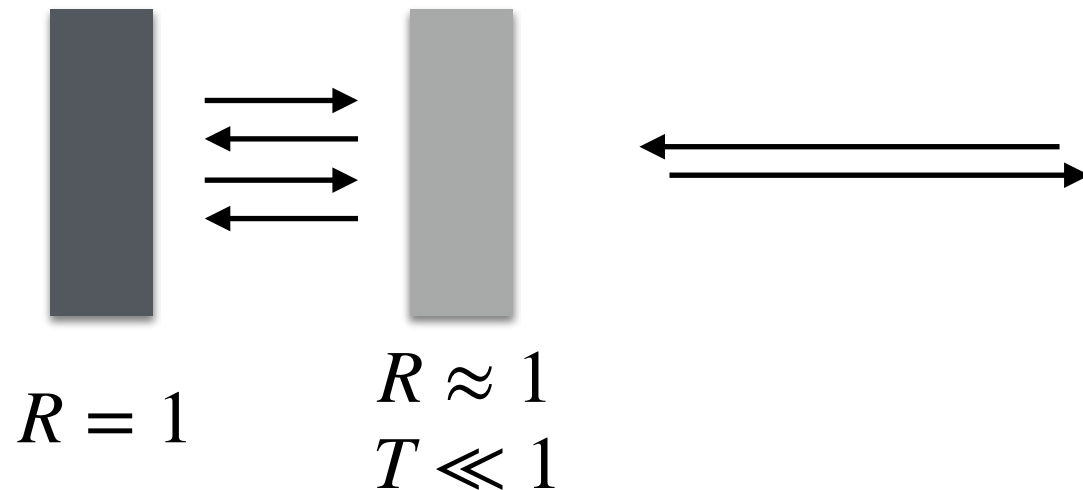
We have measured the rate of inelastic collisions in a cloud of doubly polarized ground-state cesium atoms ($F = m_F = 4$) confined in a magnetic trap for temperatures T between 8 and 70 μK . We find a two-body rate coefficient varying as $T^{-0.63}$. At 8 μK it reaches $4 \times 10^{-12} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ which is 3 orders of magnitude larger than predicted, ruling out a Bose-Einstein condensation of Cs in this internal state.

La première signature d'une grande largeur de diffusion est très souvent une perte importante d'atomes, au moins pour des bosons

Le césium a finalement été condensé en 2003 dans le groupe de Rudi Grimm, en utilisant une résonance de Fano-Feshbach pour s'écarter de la zone "dangereuse"

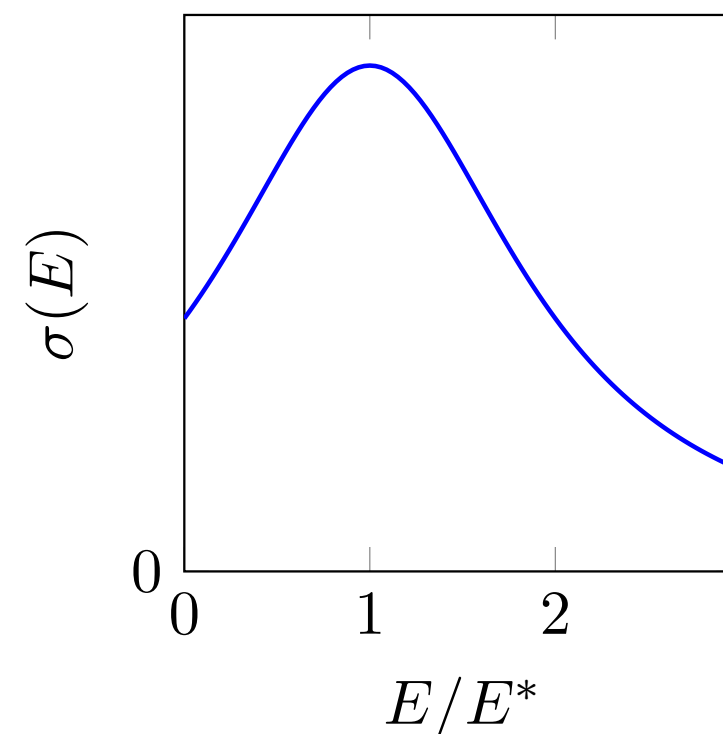
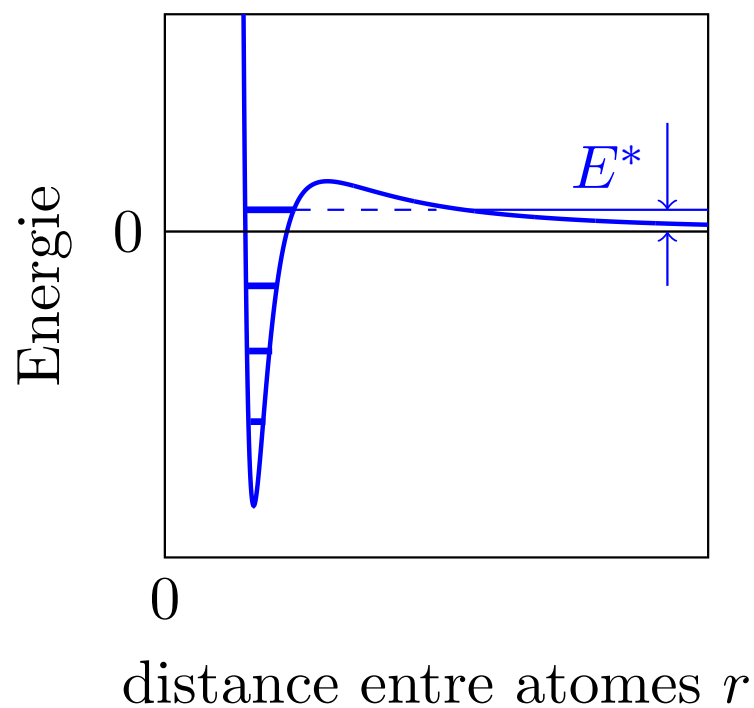
Les résonances de forme ($\ell \neq 0$)

Analogie avec une cavité Fabry-Perot



Si la condition de résonance est remplie, l'onde pénètre dans la cavité et y fait de nombreux allers et retours avant de ressortir

Le rôle du miroir d'entrée est joué ici par la barrière centrifuge :



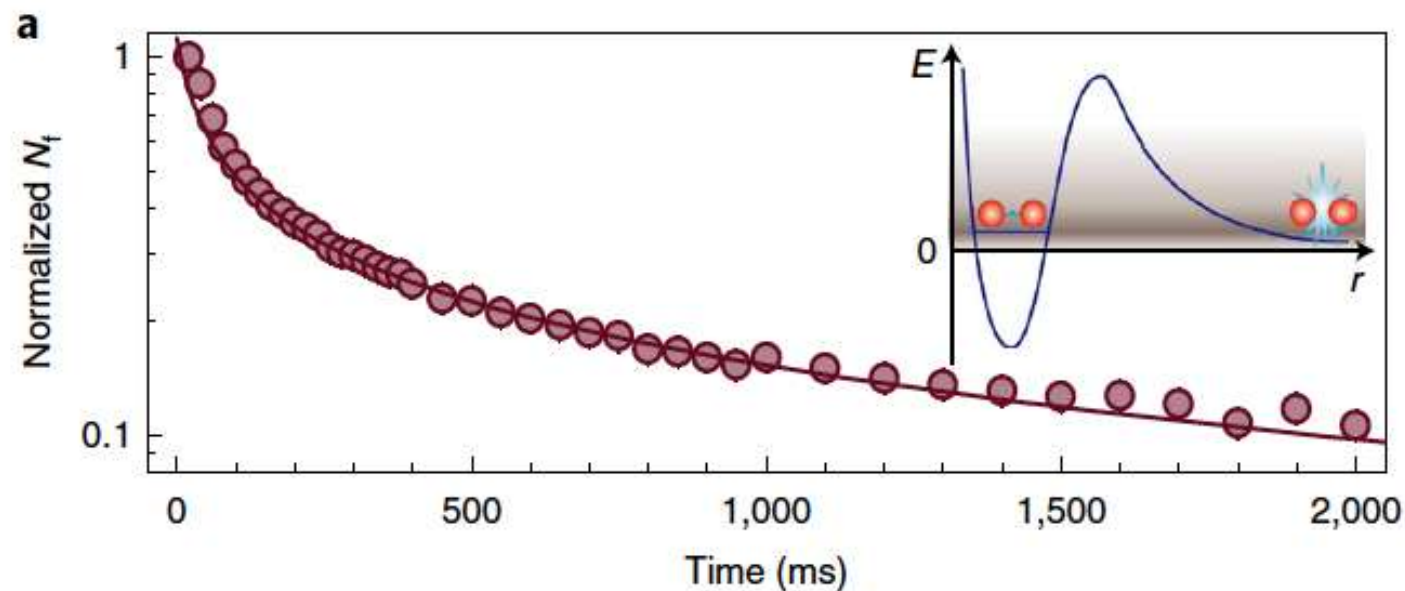
Résonances de forme en onde d ($\ell = 2$)

Yao et al., Nature Physics 2019

Gaz ultra-froid de potassium 41

On modifie la position de l'état quasi-lié grâce à un champ magnétique

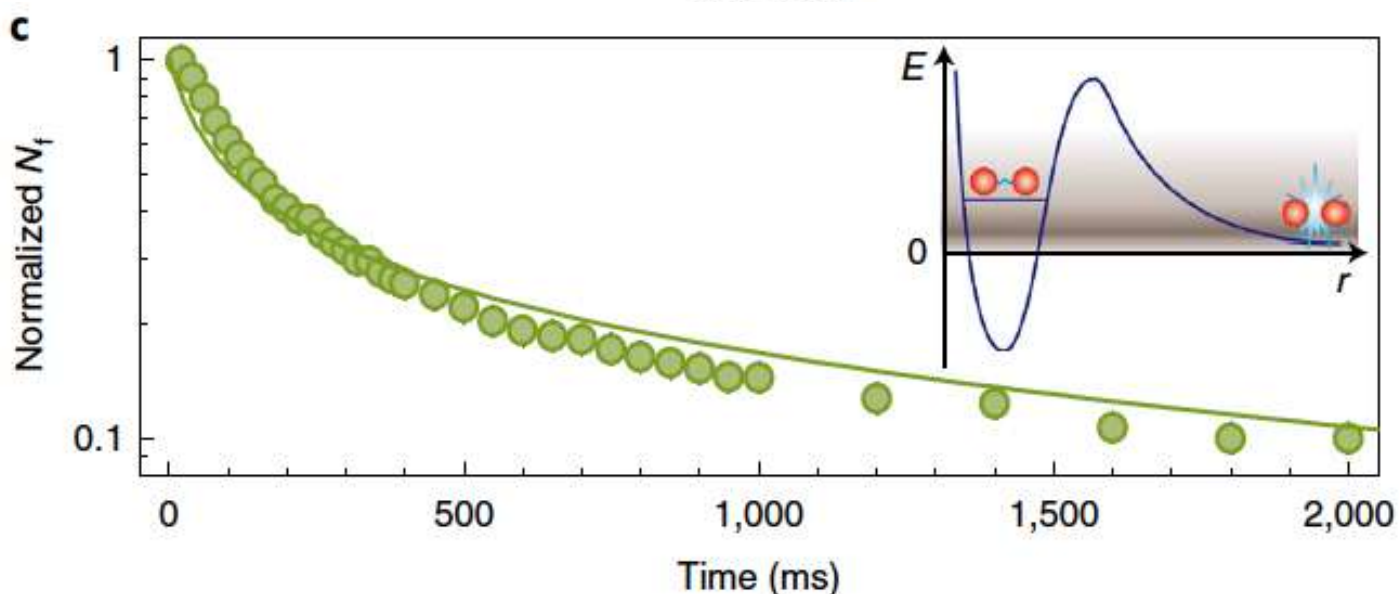
On détermine le taux de pertes à 3 corps K_3 (superposées à des pertes à un corps)



cas résonnant :

$$E_{\text{quasi-lié}} \approx k_B T$$

$$K_3 = (3.8 \pm 0.3) \times 10^{-25} \text{ cm}^6 \text{ s}^{-1}$$



cas non résonnant :

$$E_{\text{quasi-lié}} \approx 2.5 k_B T$$

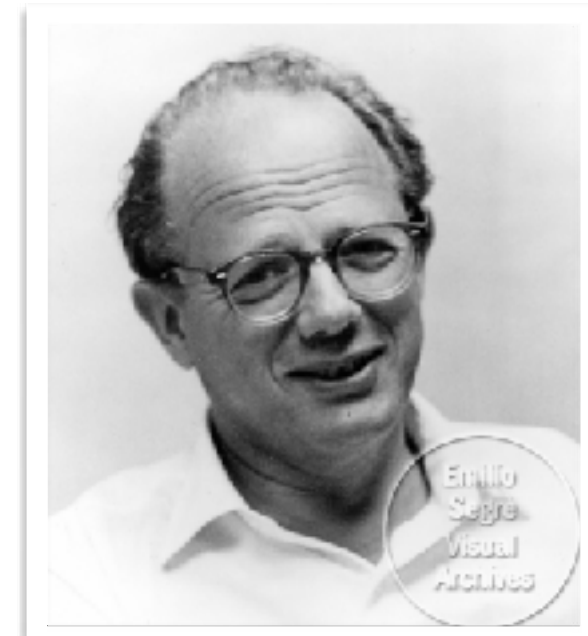
$$K_3 = (3.1 \pm 0.4) \times 10^{-25} \text{ cm}^6 \text{ s}^{-1}$$

réduit par rapport au cas résonnant

Résonances de Fano-Feshbach



Ugo Fano (Chicago)
pour la physique atomique

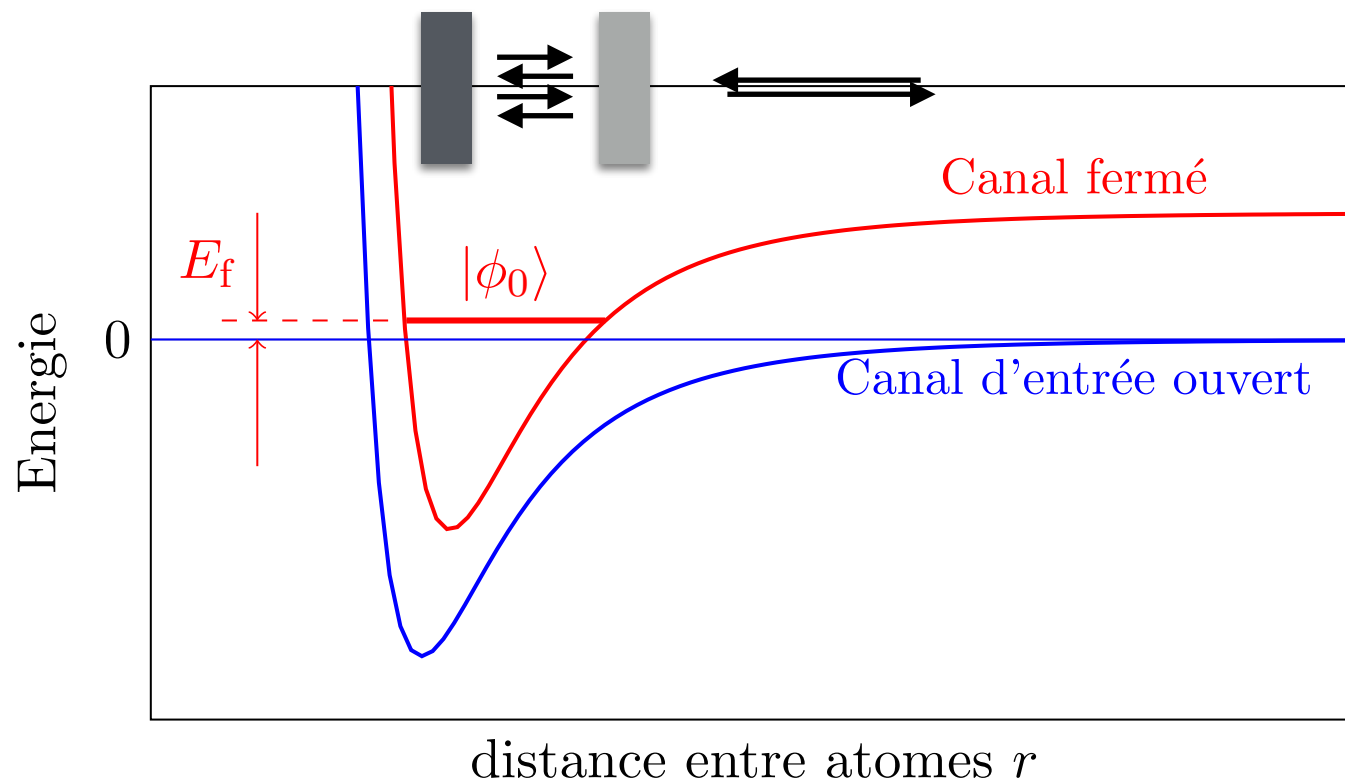


Herman Feshbach (MIT)
pour la physique nucléaire

Résonances qui peuvent survenir quand plusieurs canaux de collision entrent en jeu simultanément

Transposition aux gaz atomiques ultra-froids :
Stwalley (1976), Reynolds et al. (1986), Tiesinga, Verhaar & Stoof (1993)

Le principe d'une résonance de Feshbach



Lors de la collision, un couplage entre les deux canaux se produit :

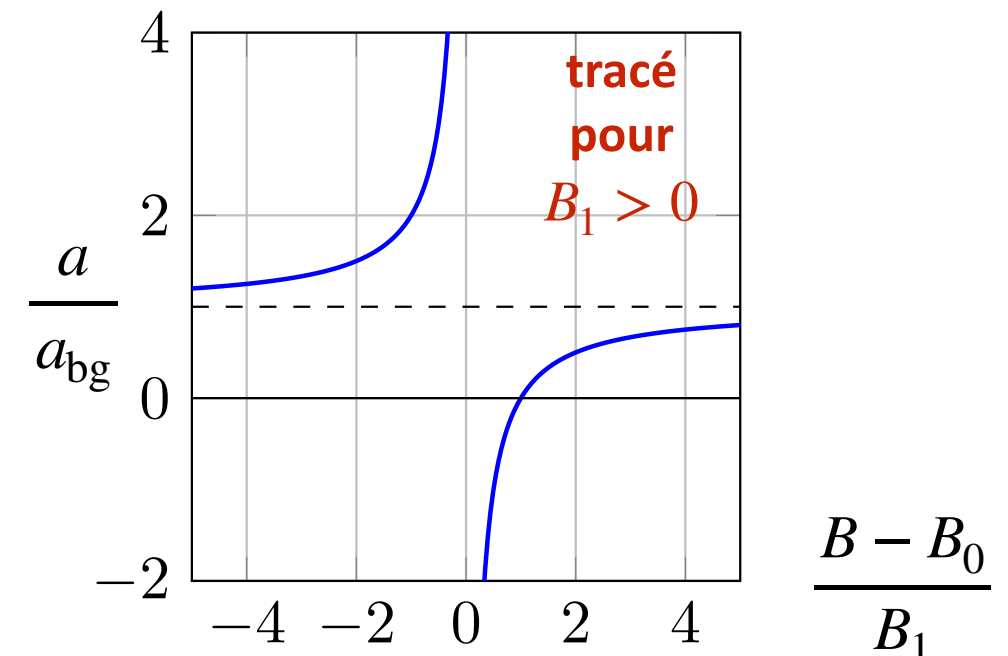
- Déviation par rapport au suivi adiabatique du canal d'entrée
- Couplage entre les deux canaux créé par un champ extérieur

Ajustement de l'énergie de $|\phi_0\rangle$ par rapport au canal d'entrée par exemple via un champ magnétique

$$\text{Paramétrisation : } a = a_{\text{bg}} \left(1 - \frac{B_1}{B - B_0} \right)$$

a_{bg} : long. de diffusion "de fond"

B_1 : "largeur" de la résonance

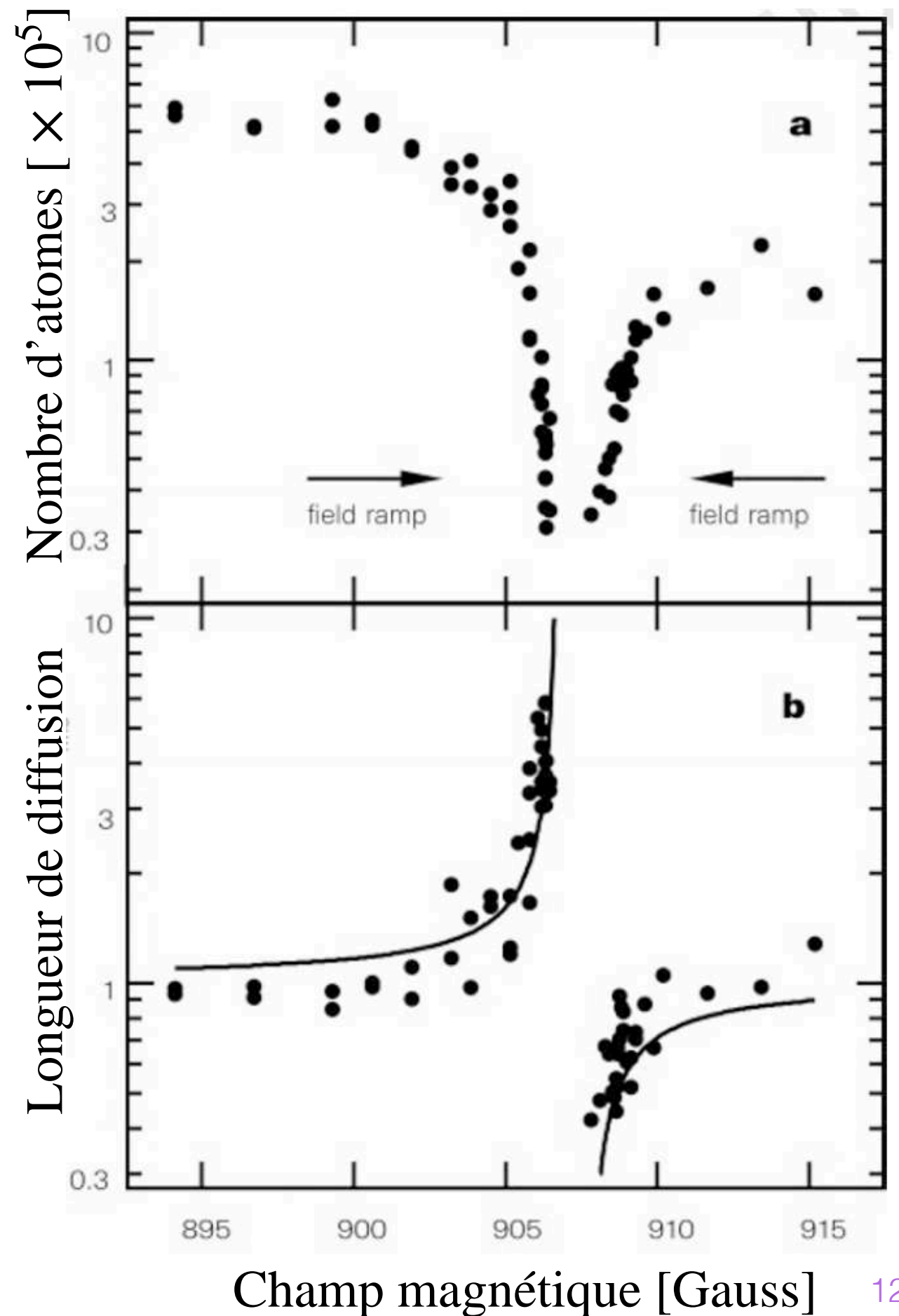


Premières observations sur des gaz atomiques

1998 : Inouye et al., Nature **392**, 151 (1998)
voir aussi Courteille et al., Roberts et al.,
Vuletic et al.

Condensat de Bose-Einstein de sodium
placé dans un grand champ magnétique

- Pertes d'atomes
- Mesure de la longueur de diffusion à partir de l'énergie d'interaction, elle-même mesurée par expansion ballistique



Champ magnétique [Gauss]

2.

La limite $a \rightarrow \pm \infty$ est-elle singulière
pour le problème à deux corps ?

Théorie de champ moyen : énergie par particule $\propto a\bar{n}$

\bar{n} :densité

Le modèle de *Busch et al.*

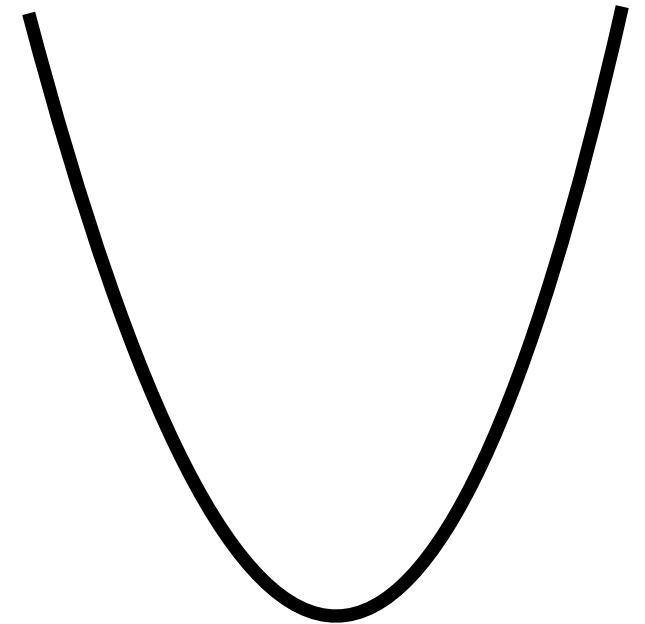
Puits harmonique de pulsation ω

On y place deux particules A et B en interaction via le pseudo-potentiel $V_{\text{pp}}(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B)$

$$\hat{V}_{\text{pp}} [\psi(\mathbf{r})] = g \delta(\mathbf{r}) \left. \frac{\partial}{\partial r} [r\psi(\mathbf{r})] \right|_{r=0} \quad a \equiv \frac{gm_r}{2\pi\hbar^2}$$

Point de vue de Bethe-Peirls : $\psi(\mathbf{r}) \propto \frac{1}{r} - \frac{1}{a} + \mathcal{O}(r)$

Comment se comportent les niveaux d'énergie du système à deux particules en fonction de a ?



Variable du centre de masse et variable relative

Le découplage entre ces deux variables faite dans le cas uniforme reste valable dans le cas d'un piège harmonique

$$\hat{H}_{\text{tot}} = \left(\frac{\hat{p}_A^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r_A^2 \right) + \left(\frac{\hat{p}_B^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r_B^2 \right) + V_{\text{pp}}(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{1}{2} (\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B) & \longrightarrow & \quad \frac{1}{2}m\omega^2 r_A^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 r_B^2 = \frac{1}{2}M\omega^2 R^2 + \frac{1}{2}m_r\omega^2 r^2 \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B & & & & M = 2m \quad m_r = m/2 \end{aligned}$$

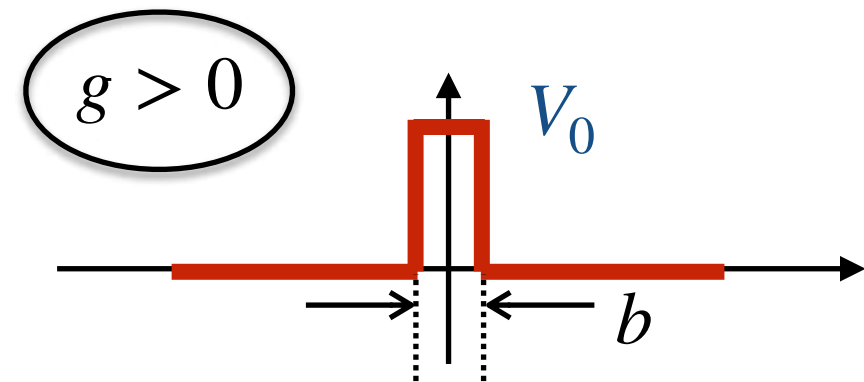
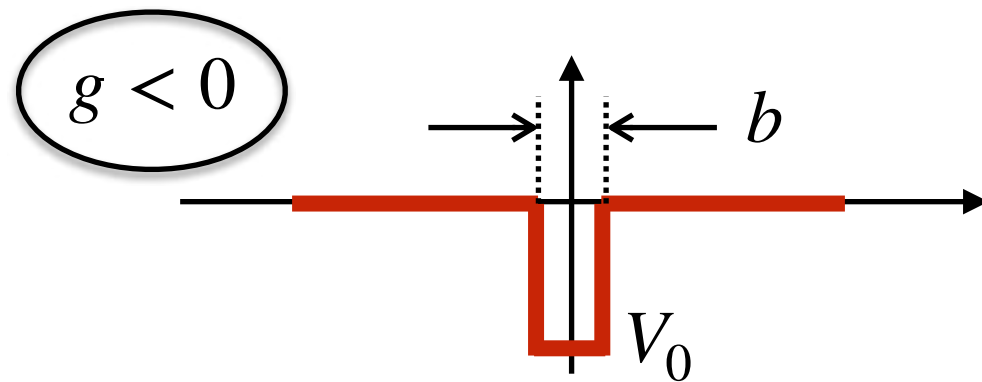
Le mouvement du centre de masse est celui d'une particule de masse $2m$ dans un puits harmonique de pulsation ω : niveaux d'énergie $(n + 3/2) \hbar\omega$

Nous allons nous concentrer sur le mouvement relatif (comme d'habitude)

Le cas uni-dimensionnel

“Vrai” potentiel de contact : $V(x) = g \delta(x)$, qui ne pose pas de problème à 1D

Utilisé pour modéliser un puits carré dans la limite : $V_0 \rightarrow \infty$, $b \rightarrow 0$, $V_0 b = g$

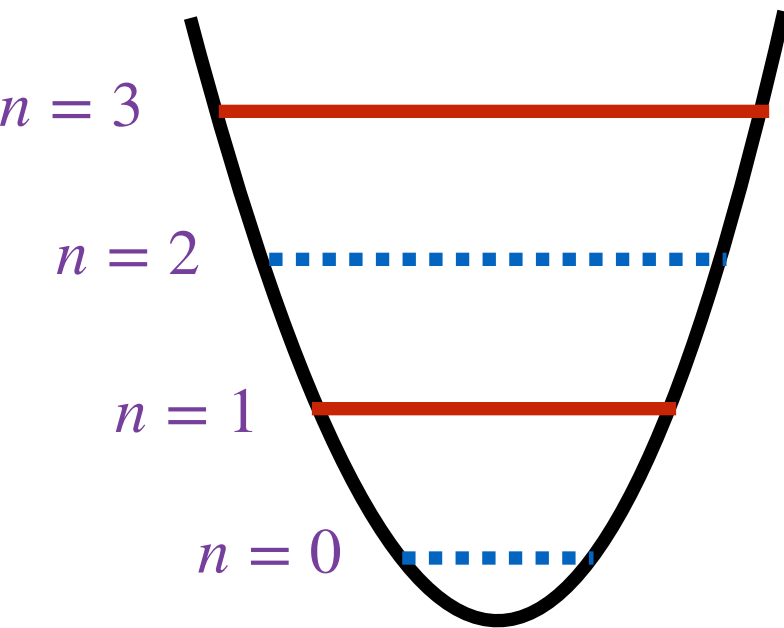


Equation de Schrödinger correspondant au potentiel $\frac{1}{2}m_r\omega^2x^2 + g\delta(x)$

On peut chercher les fonctions propres sous forme de fonctions paires ou impaires

- Les fonctions impaires vérifient $\psi(0) = 0$: elles ne sont pas sensibles au potentiel $g\delta(x)$ et sont donc les mêmes que dans un potentiel harmonique
- Nous allons nous intéresser aux fonction paires $\psi(-x) = \psi(x)$

Le cas uni-dimensionnel : les fonctions paires



Recherche des fonctions paires solutions de

$$-\frac{1}{2}\psi''(x) + \frac{x^2}{2}\psi(x) + G\delta(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

$$G = g/(\hbar\omega a_{\text{oh}}) \quad a_{\text{oh}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

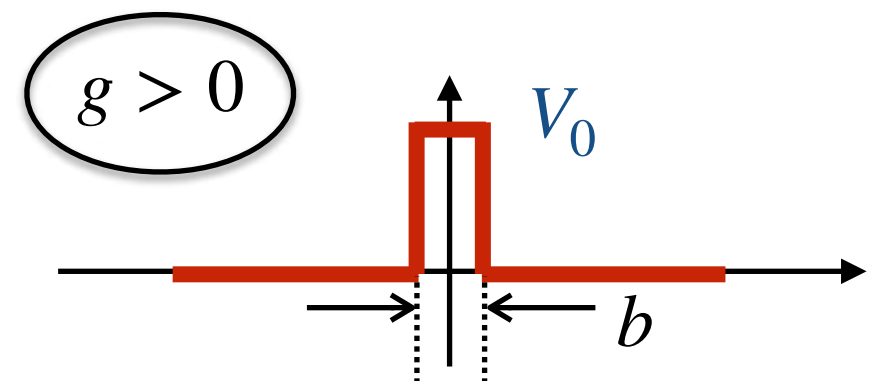
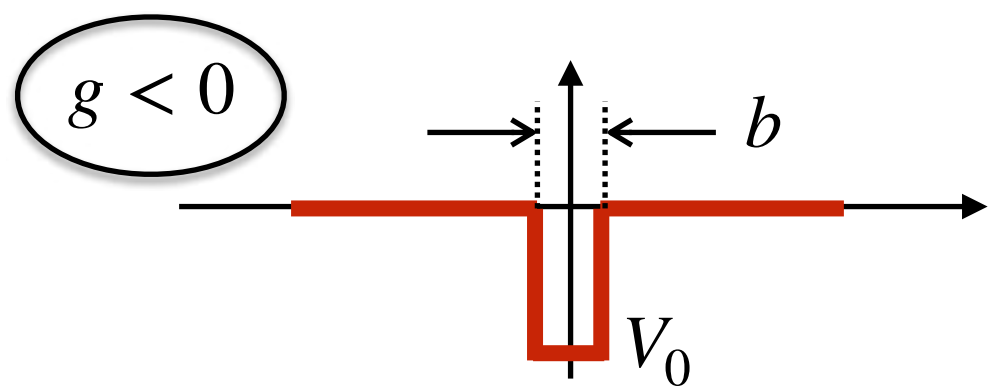
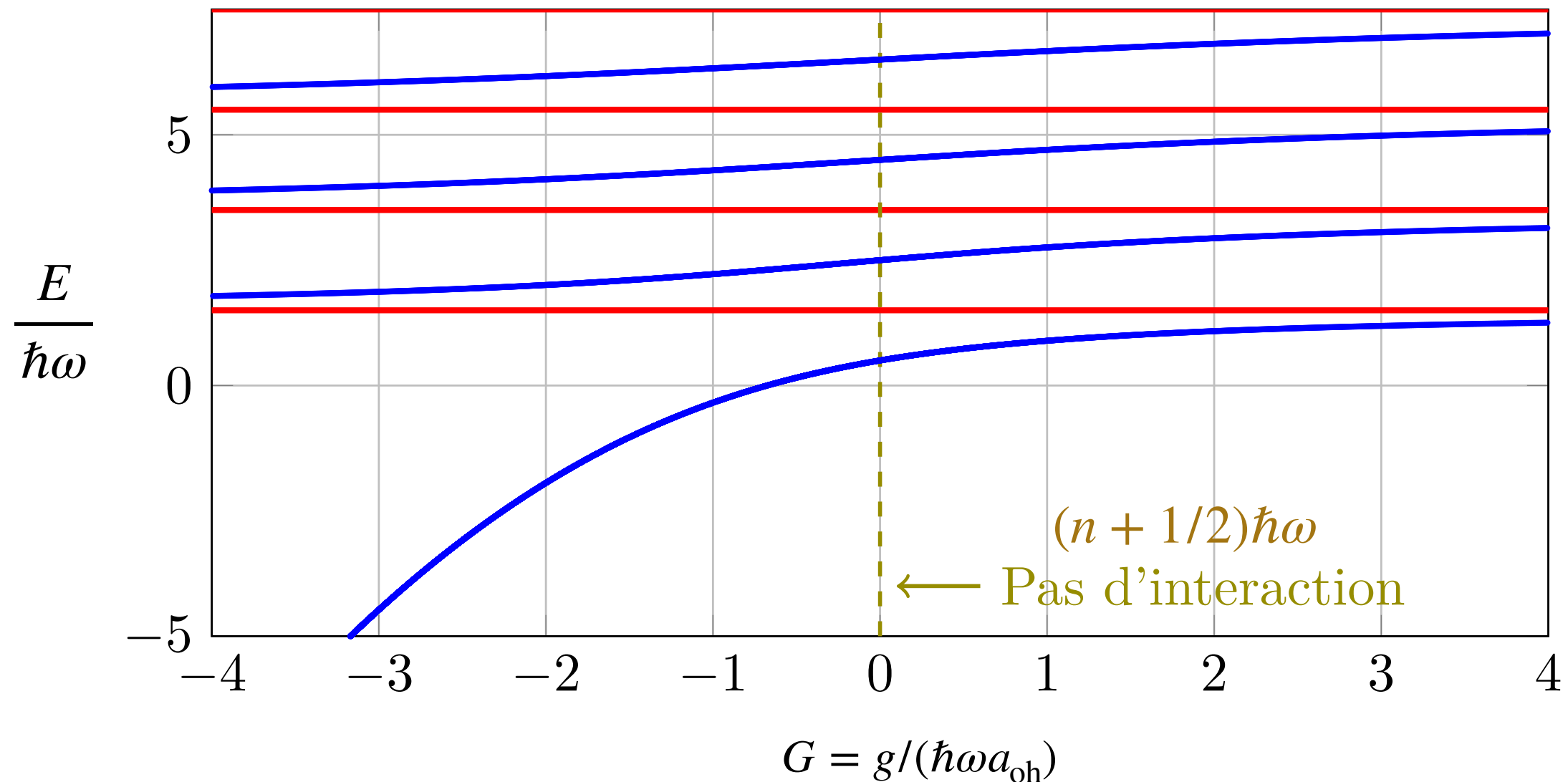
Prise en compte de $\delta(x)$: on intègre autour de $x = 0$, c.a.d.:

$$-\frac{1}{2} [\psi'(0_+) - \psi'(0_-)] + G\psi(0) = 0 \quad \xrightarrow[\text{de } \psi(x)]{\text{parité}} \quad \int_{0_-}^{0_+} \psi'(0_+) = G\psi(0)$$

On résout ensuite sur l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation $-\frac{1}{2}\psi''(x) + \frac{x^2}{2}\psi(x) = E\psi(x)$ avec cette condition aux limites en $x = 0$

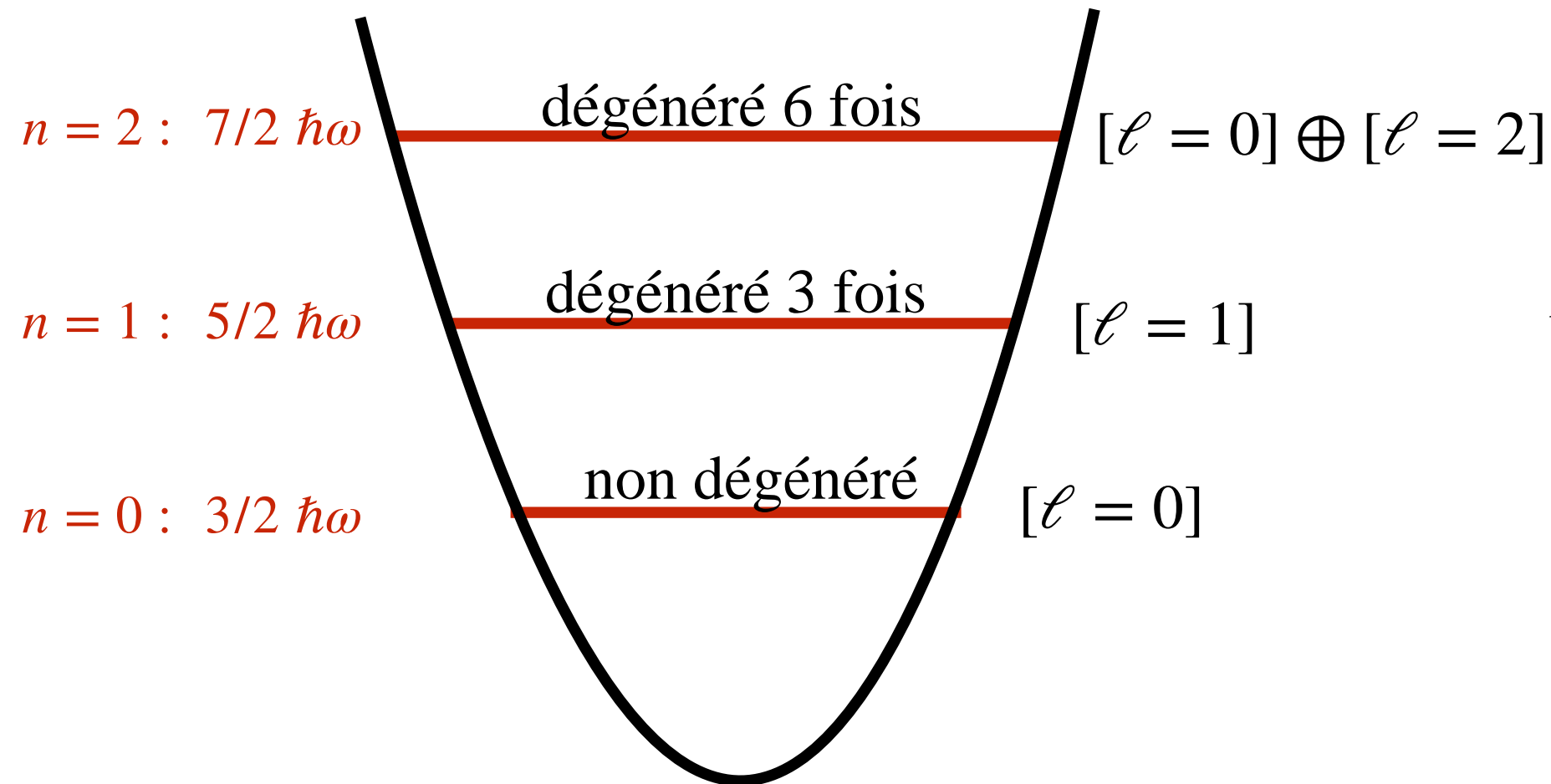
Fonctions de Kummer

Le spectre dans le cas 1D pour un potentiel de contact



Le cas 3D

Niveaux d'énergie pour la variable relative, en absence d'interaction ($V_{pp} = 0$)



$$E = \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega$$
$$= \left(n + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega$$

$$n = n_x + n_y + n_z$$

Rappel : le pseudo-potentiel n'affecte que les états de moment cinétique nul, $\ell = 0$

La position des états $\ell \neq 0$ n'est pas modifiée par V_{pp} , comme pour les fonctions impaires dans le cas 1D

L'équation radiale pour le cas 3D ($\ell = 0$)

On introduit la fonction d'onde radiale réduite $u(r) = r R(r)$

$$-\frac{1}{2}u''(r) + \frac{r^2}{2}u(r) = E u(r)$$

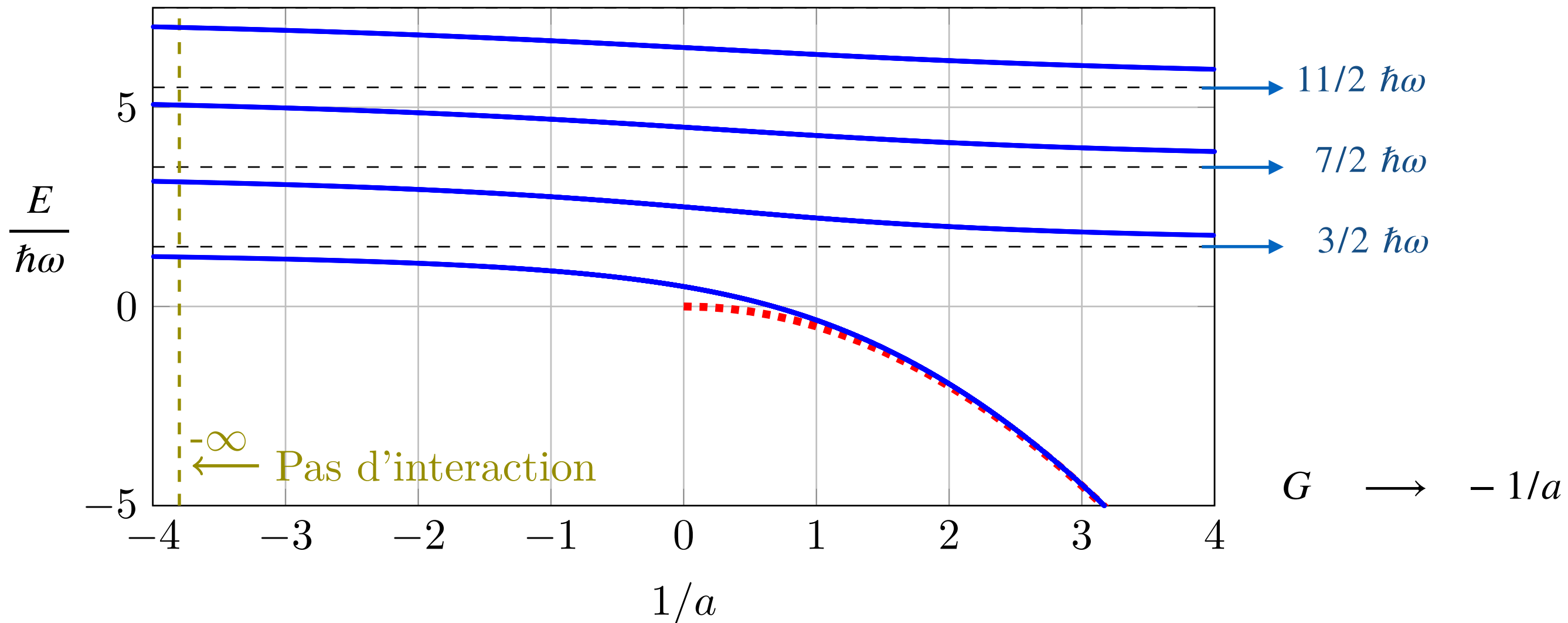
+ condition aux limites de Bethe-Peierls

$$\psi(\mathbf{r}) \propto \frac{1}{r} - \frac{1}{a} + \mathcal{O}(r) \quad \longrightarrow \quad u(r) \propto a - r + \mathcal{O}(r^2)$$
$$\Leftrightarrow \quad u'(0) = -\frac{1}{a} u(0)$$

A comparer au cas 1D : $-\frac{1}{2}\psi''(x) + \frac{x^2}{2}\psi(x) = E \psi(x) \quad \psi'(0) = G \psi(0)$

Problème identique avec la substitution $G \longrightarrow -\frac{1}{a}$

Le spectre dans le cas 3D pour le pseudo-potentiel



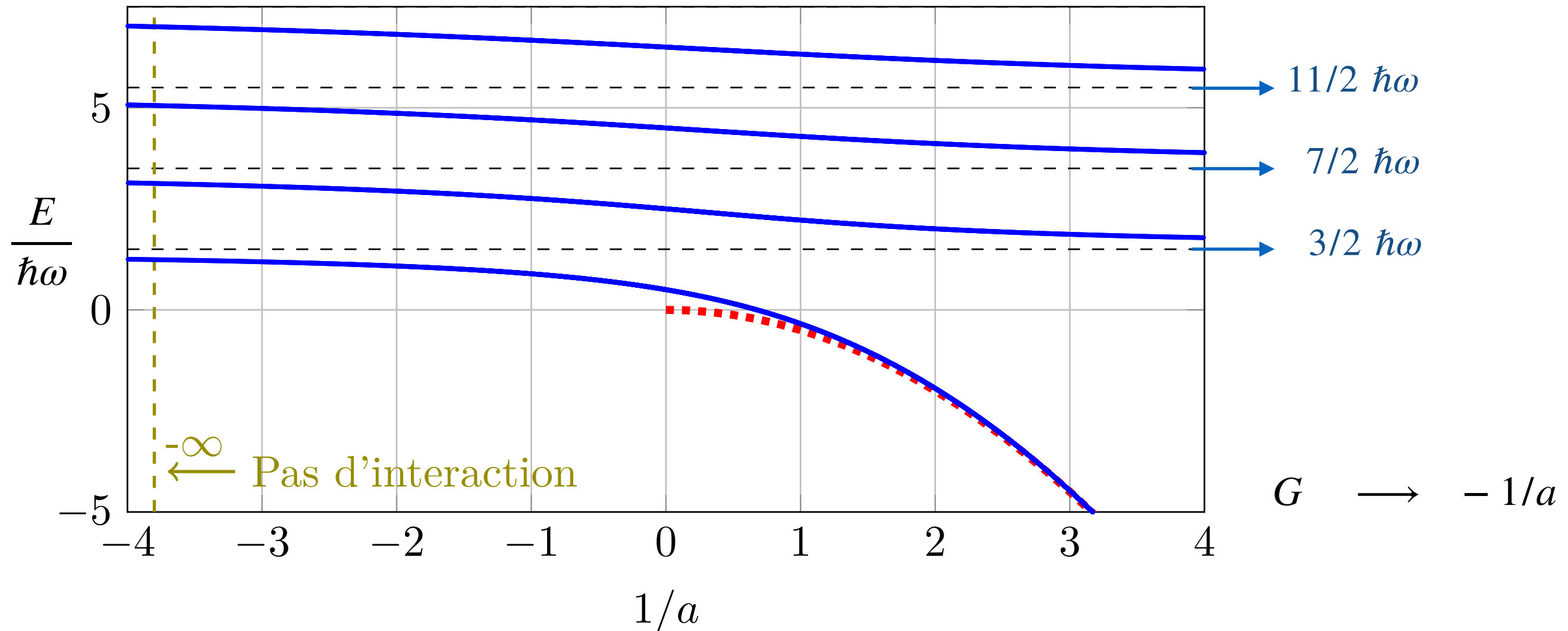
L'énergie du fondamental est toujours abaissée par rapport au cas $V_{pp} = 0$

Le pseudo-potentiel est toujours attractif

Le cas sans interaction est retrouvé pour $1/a \rightarrow -\infty$, donc $a \rightarrow 0_-$

Il n'y a aucune singularité au passage $1/a = 0$, donc $a = \pm \infty$

Le spectre dans le cas 3D pour le pseudo-potentiel (2)



Quand $a \rightarrow 0_+$, on retrouve l'état lié d'énergie $-\hbar^2/(2m_r a^2)$

Quand $a \rightarrow 0_+$, le premier état excité a une énergie légèrement supérieure au cas $V_{pp} = 0$

"branche répulsive", qui peut retomber sur l'état fondamental en présence d'un troisième corps

3.

Un préliminaire à la modélisation
des résonances de Fano-Feshbach :

Les potentiels séparables



Yamaguchi, 1954

*un exemple de problème
exactement soluble*

Potentiel local vs. potentiel séparable

Hamiltonien à une particule (ou pour la particule relative du pb. à 2 corps) :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m_r} + \hat{V}$$

Potentiel local (le cas usuel de la physique quantique) : $\langle \mathbf{r} | \hat{V} | \mathbf{r}' \rangle = V(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$

$$\langle \mathbf{r} | \hat{V} | \psi \rangle = \int \langle \mathbf{r} | \hat{V} | \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r}' | \psi \rangle d^3 r' = V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r})$$

ce qui conduit à l'éq. de S. usuelle : $-\frac{\hbar^2}{2m_r} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r})$

Potentiel séparable : on se donne une fonction $\phi_0(\mathbf{r})$ réelle normalisée

$$\hat{V} = V_0 |\phi_0\rangle \langle \phi_0| \quad \propto \quad \text{projecteur sur l'état } |\phi_0\rangle$$

$$\langle \mathbf{r} | \hat{V} | \mathbf{r}' \rangle = V_0 \phi_0(\mathbf{r}) \phi_0(\mathbf{r}') \quad \longrightarrow \quad \langle \mathbf{r} | \hat{V} | \psi \rangle = V_0 \phi_0(\mathbf{r}) \int \phi_0(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3 r'$$

$$\hat{V} = V_0 |\phi_0\rangle\langle\phi_0|$$

Etat lié d'un potentiel séparable

On cherche une (ou plusieurs) solution de l'éq. de S. pour une énergie négative

$$-\frac{\hbar^2}{2m_r} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + V_0 \phi_0(\mathbf{r}) \int \phi_0(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3 r' = E \psi(\mathbf{r}) \quad E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m_r}$$

On définit $I = \langle \phi_0 | \psi \rangle = \int \phi_0(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3 r' = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{\phi}_0^*(\mathbf{q}') \tilde{\psi}(\mathbf{q}') d^3 q'$

Supposée connue pour l'instant, sera déterminée à la fin par une condition d'auto-cohérence

On passe en point de vue impulsion (Fourier) :

$$\frac{\hbar^2 q^2}{2m_r} \tilde{\psi}(\mathbf{q}) + V_0 I \tilde{\phi}_0(\mathbf{q}) = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m_r} \tilde{\psi}(\mathbf{q}) \quad \longrightarrow \quad \frac{\hbar^2}{2m_r} (q^2 + \kappa^2) \tilde{\psi}(\mathbf{q}) = -V_0 I \tilde{\phi}_0(\mathbf{q})$$

On pose $V_0 = -\frac{\hbar^2}{2m_r \sigma_0}$ (σ_0 surface) et on obtient : $\tilde{\psi}(\mathbf{q}) = \frac{I \tilde{\phi}_0(\mathbf{q})}{\sigma_0 (q^2 + \kappa^2)}$

implicite à cause de la présence de I

$$\hat{V} = V_0 |\phi_0\rangle\langle\phi_0|$$

$$V_0 = -\frac{\hbar^2}{2m_r\sigma_0}$$

Etat lié d'un potentiel séparable (suite)

La fonction d'onde de l'état lié (en impulsion) doit satisfaire $\tilde{\psi}(\mathbf{q}) = \frac{I}{\sigma_0} \frac{\tilde{\phi}_0(\mathbf{q})}{q^2 + \kappa^2}$

où I fait elle-même intervenir $\tilde{\psi}(\mathbf{q})$: $I = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{\phi}_0^*(\mathbf{q}') \tilde{\psi}(\mathbf{q}') d^3q'$

Condition d'auto-cohérence : $I = \frac{I}{\sigma_0 (2\pi)^3} \int \frac{|\tilde{\phi}_0(\mathbf{q})|^2}{q^2 + \kappa^2} d^3q$

membre de droite : fonction décroissante de $\kappa \rightarrow$ au plus une solution !

Etat de diffusion pour un potentiel séparable

On reprend l'équation de Lippmann-Schwinger

$$|\psi_k\rangle = |\mathbf{k}\rangle + \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i0_+} \hat{V} |\psi_k\rangle$$

avec

$$\hat{V} = V_0 |\phi_0\rangle\langle\phi_0|$$

$$= |\mathbf{k}\rangle + \frac{V_0 I}{E - \hat{H}_0 + i0_+} |\phi_0\rangle$$

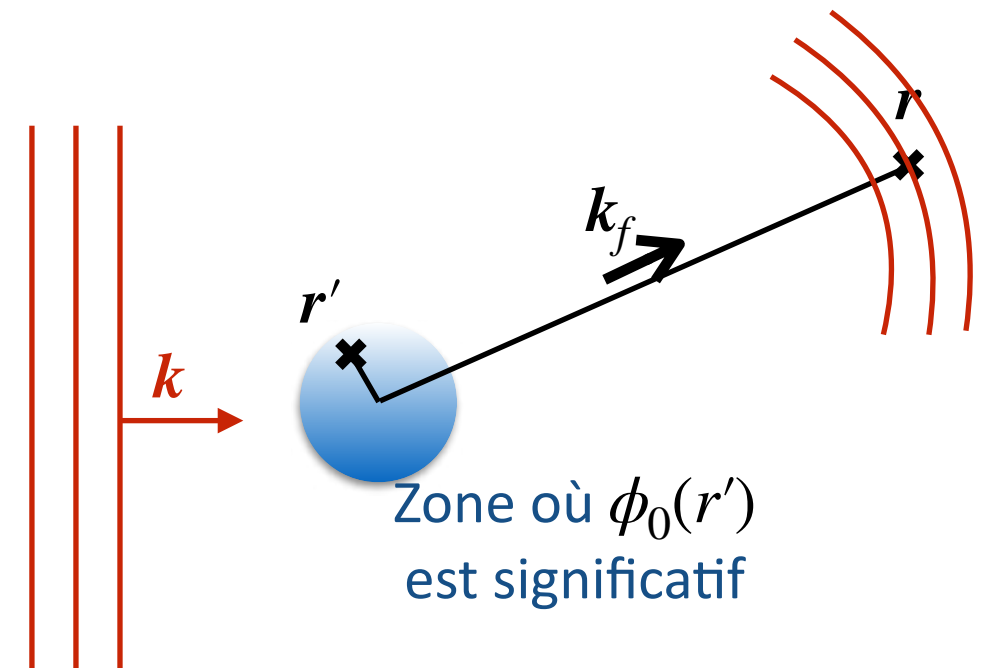
et $I = \langle\phi_0|\psi_k\rangle$ comme précédemment

Ecriture en point de vue position :

$$\psi_k(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + V_0 I \int \mathcal{G}_0^{(+)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \phi_0(\mathbf{r}') d^3r'$$

Amplitude de diffusion :

$$f(k) = -V_0 I \frac{m_r}{2\pi\hbar^2} \tilde{\phi}_0(k)$$



On suppose ici ϕ_0 à symétrie sphérique pour simplifier : diffusion dans l'onde s uniquement

Amplitude de diffusion pour un potentiel séparable

$$f(k) = \frac{I}{4\pi\sigma_0} \tilde{\phi}_0(k) \quad \text{avec} \quad I = \langle \phi_0 | \psi_k \rangle \quad V_0 = -\frac{\hbar^2}{2m_r\sigma_0}$$

On détermine I en utilisant la condition d'auto-cohérence (comme pour l'état lié)

Après calculs, on arrive à :

$$\frac{1}{f(k)} = \frac{1}{\tilde{\phi}_0^2(k)} \left[4\pi\sigma_0 + \frac{1}{2\pi^2} \int \mathcal{P}\mathcal{P} \left(\frac{\tilde{\phi}_0^2(q)}{k^2 - q^2} \right) d^3q \right] - ik \quad \textbf{Exact !}$$

- On a la bonne partie imaginaire (théorème optique)
- La limite $k \rightarrow 0$ donne la longueur de diffusion

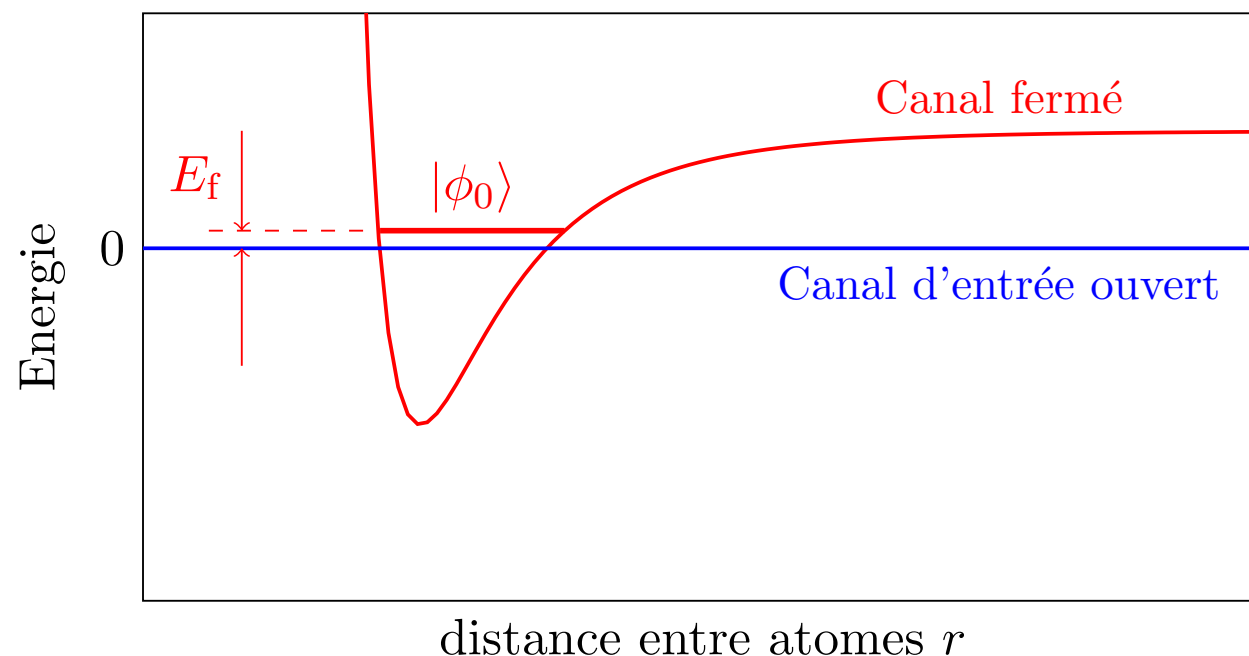
4.

Un modèle simple de résonance de Fano-Feshbach

Canal ouvert, canal fermé

On adopte la configuration la plus simple possible à deux canaux :

- Pas d'interaction dans le canal ouvert $\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m_r}$
- Interaction dans le canal fermé : potentiel séparable associé à $\phi_0(\mathbf{r})$

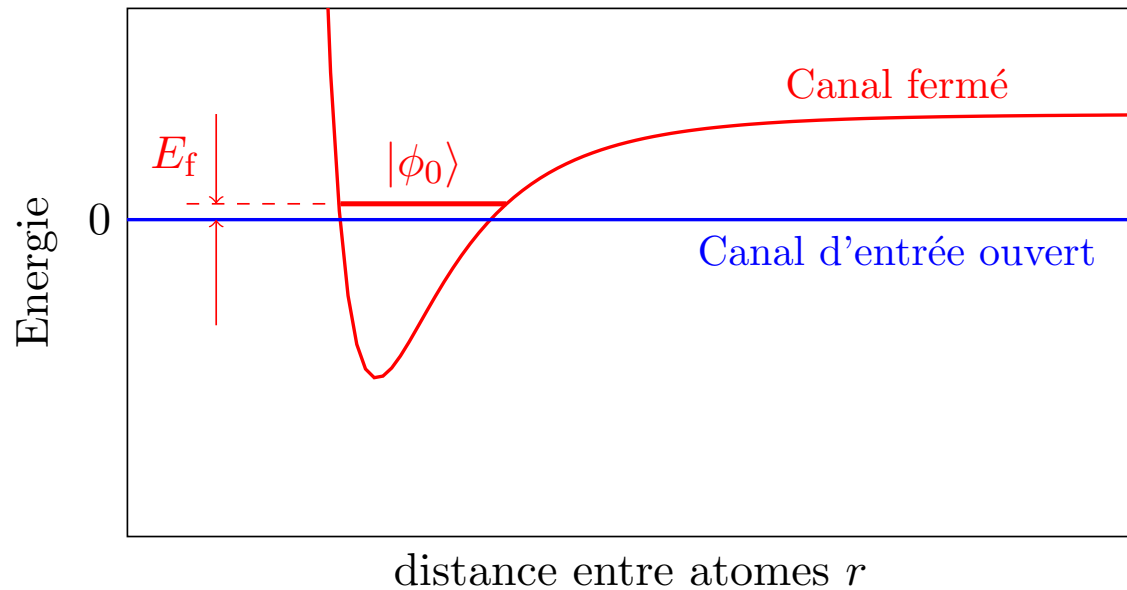


Paramètre de contrôle : E_f

Etat du système décrit par $\begin{pmatrix} \text{ouvert} \\ \text{ferme} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\psi\rangle \\ |\phi\rangle \end{pmatrix}$ avec $|\phi\rangle = \alpha |\phi_0\rangle$

L'équation aux valeurs propres pour ce modèle à deux canaux

$$\begin{pmatrix} \text{ouvert} \\ \text{ferme} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\psi\rangle \\ \alpha |\phi_0\rangle \end{pmatrix}$$



On note \hat{W} le couplage entre les deux canaux

$$\begin{cases} \hat{H}_0 |\psi\rangle + \alpha \hat{W} |\phi_0\rangle = E |\psi\rangle \\ \hat{W} |\psi\rangle + \alpha E_f |\phi_0\rangle = \alpha E |\phi_0\rangle \end{cases}$$

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m_r} \quad \langle \psi | \hat{W} | \phi_0 \rangle = \int \psi^*(\mathbf{r}) \underbrace{W(\mathbf{r}) \phi_0(\mathbf{r})}_{\text{supposé réel et isotrope}} d^3r$$

Deux équations couplées avec pour inconnues :

- la fonction d'onde $\psi(\mathbf{r})$ du canal ouvert
- l'amplitude complexe α du canal fermé

Les états de diffusion

$$\hat{H}_0 |\psi\rangle + \alpha \hat{W} |\phi_0\rangle = E |\psi\rangle$$

$$\hat{W} |\psi\rangle + E_f \alpha |\phi_0\rangle = E \alpha |\phi_0\rangle$$

On utilise la première des deux équations couplées, en supposant l'amplitude α connue.

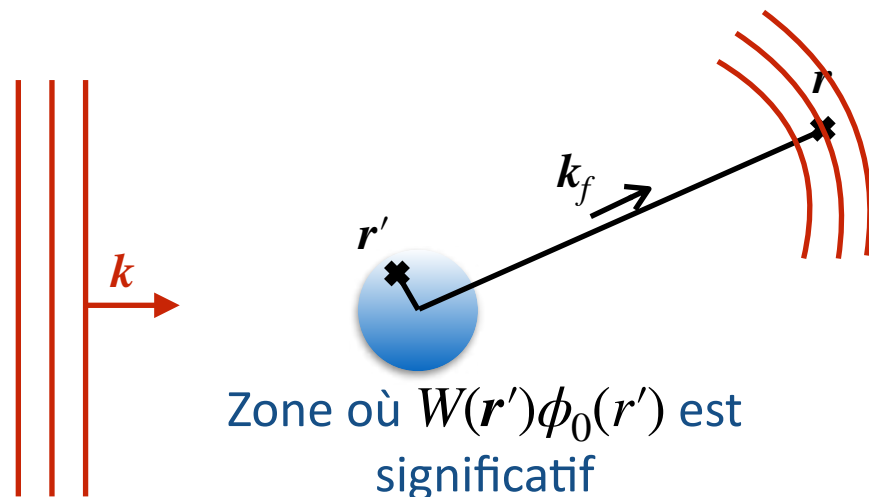
$$(E - \hat{H}_0) |\psi\rangle = \alpha \hat{W} |\phi_0\rangle \quad \longrightarrow \quad |\psi_k\rangle = |\mathbf{k}\rangle + \alpha \hat{G}_0(E) \hat{W} |\phi_0\rangle$$

Lippmann-Schwinger

Comportement asymptotique :

$$\psi_k(\mathbf{r}) \sim e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \alpha \frac{e^{ikr}}{r} \frac{m_r}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\mathbf{k}_f\cdot\mathbf{r}'} W(\mathbf{r}') \phi_0(\mathbf{r}') d^3r'$$

$$\underbrace{\frac{m_r}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\mathbf{k}_f\cdot\mathbf{r}'} W(\mathbf{r}') \phi_0(\mathbf{r}') d^3r'}_{\sqrt{\frac{m_r}{2\pi\hbar^2}} g(k) \propto \langle \mathbf{k}_f | \hat{W} | \phi_0 \rangle}$$



Amplitude de diffusion isotrope si W et ϕ_0 sont eux-mêmes isotropes :

$$f(k) = -\alpha \sqrt{\frac{m_r}{2\pi\hbar^2}} g(k)$$

Il reste à déterminer α ...

Les états de diffusion (suite)

$$\hat{H}_0 |\psi_k\rangle + \alpha \hat{W} |\phi_0\rangle = E |\psi_k\rangle$$

$$\hat{W} |\psi_k\rangle + E_f \alpha |\phi_0\rangle = E \alpha |\phi_0\rangle$$

Détermination de l'amplitude α du canal fermé

On reporte la solution de la première équation $|\psi_k\rangle = |\mathbf{k}\rangle + \alpha \hat{G}_0(E) \hat{W} |\phi_0\rangle$ dans la seconde :

$$\hat{W} |\mathbf{k}\rangle + \alpha \hat{W} \hat{G}_0(E) \hat{W} |\phi_0\rangle + E_f \alpha |\phi_0\rangle = E \alpha |\phi_0\rangle$$

$$\times \langle \phi_0 | \quad \longrightarrow \quad \alpha = \frac{\langle \phi_0 | \hat{W} | \mathbf{k} \rangle}{E - E_f - \langle \phi_0 | \hat{W} \hat{G}_0(E) \hat{W} | \phi_0 \rangle}$$

Calcul du terme intervenant au dénominateur en utilisant

$$\frac{1}{x - x_0 + i0_+} = \mathcal{P}\mathcal{P} \left(\frac{1}{x - x_0} \right) - i\pi \delta(x - x_0)$$

qui donne

$$\langle \phi_0 | \hat{W} \hat{G}_0(E) \hat{W} | \phi_0 \rangle = -\delta E_f(k) - ik g^2(k) \quad \left\{ \begin{array}{l} g(k) \propto \langle \mathbf{k} | \hat{W} | \phi_0 \rangle \\ \delta E_f(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{q^2 g^2(q)}{q^2 - k^2} dq \end{array} \right.$$

L'amplitude de diffusion

$$\delta E_f(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{q^2 g^2(q)}{q^2 - k^2} dq$$

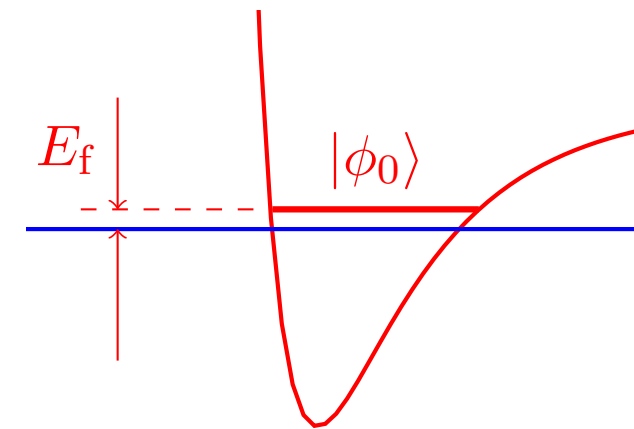
$$g(k) \propto \langle \mathbf{k} | \hat{W} | \phi_0 \rangle$$

On a trouvé $f(k) \propto -\alpha g(k)$ et on a déterminé

$$\alpha \propto \frac{g(k)}{E - E_f + \delta E_f(k) + ik g^2(k)}$$

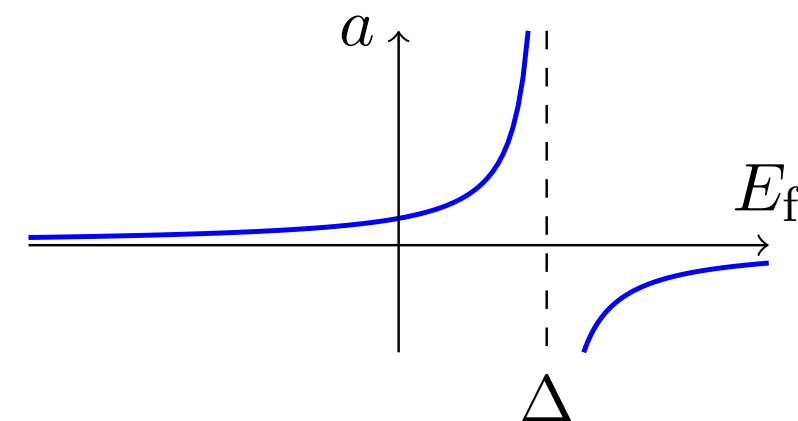
On en déduit : $\frac{1}{f(k)} = -\frac{E - E_f + \delta E_f(k)}{g^2(k)} - ik$

- Partie imaginaire OK (théorème optique)
- Longueur de diffusion : limite $E, k \rightarrow 0$



$$a = -\frac{g_0^2}{E_f - \Delta} \quad \begin{array}{l} g_0 \equiv g(0) \\ \Delta \equiv \delta E_f(0) > 0 \end{array}$$

Présente le caractère résonnant recherché quand $E_f - \Delta = 0$



Le couplage entre les deux canaux déplace la résonance par rapport à la prédiction naïve $E_f = 0$

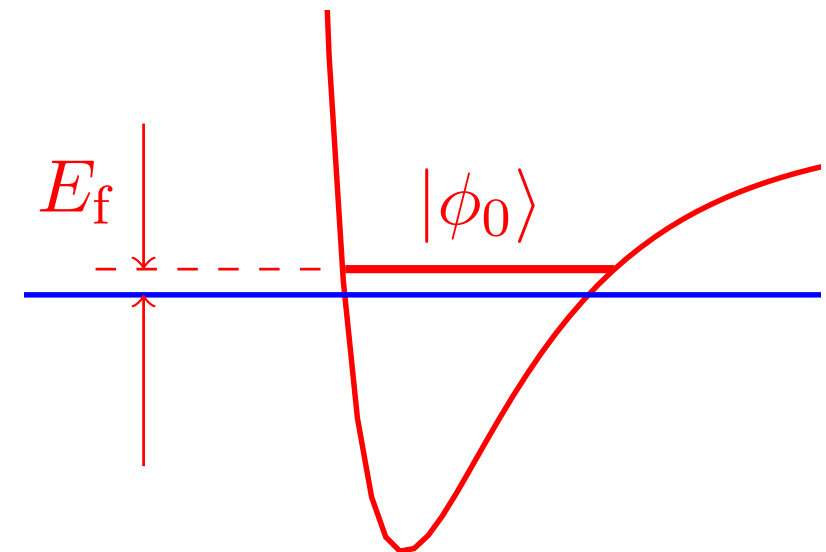
En résumé...

Plusieurs mécanismes peuvent conduire à une diffusion anormalement grande

*Résonances à énergie nulle, résonances de forme,
résonances de Fano-Feshbach*

Développement d'un modèle "simple" de
résonance de Fano-Feschbach

*Modèle exactement soluble :
on a trouvé l'amplitude de diffusion*



Au programme du prochain cours :

- Trouver d'éventuels états liés
- Définir et comprendre la largeur de la résonance dans ce modèle
- Y a-t-il des spécificités liées à la nature bi-canal de la collision ?