

# Chapitre 4

## Le point critique de la transition BKT

### Sommaire

---

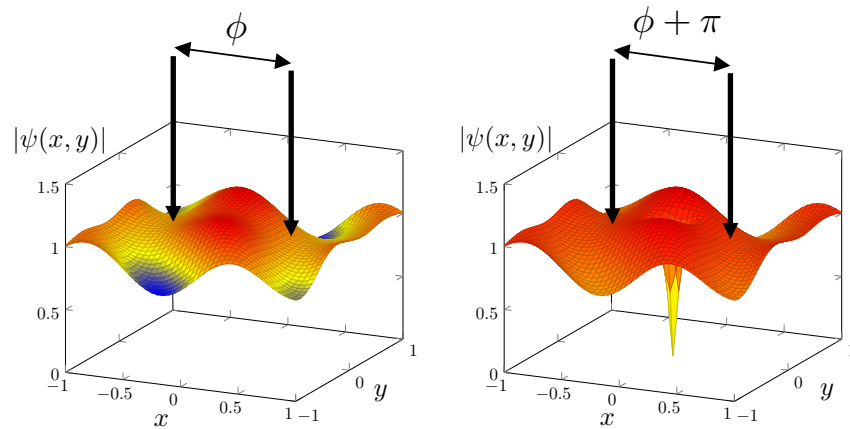
<b>1</b>	<b>Seuil d'apparition d'un vortex isolé</b> . . . . .	<b>2</b>
1-1	Apparition et disparition des vortex . . . . .	2
1-2	L'énergie d'un vortex . . . . .	3
1-3	L'observation d'un vortex isolé est-elle probable? . . . . .	4
1-4	Vortex isolés et non-superfluidité . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Une paire "vortex – antivortex"</b> . . . . .	<b>7</b>
2-1	Champ de vitesses et énergie d'une paire . . . . .	7
2-2	Elongation moyenne d'une paire . . . . .	8
2-3	Densité de paires . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Énergie d'une assemblée de vortex</b> . . . . .	<b>9</b>
3-1	Champs de vitesses longitudinaux et transverses . . . . .	9
3-2	Champ de vitesse d'une assemblée de vortex . . . . .	9
3-3	Énergie des vortex . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Densité superfluide dans un fluide 2D</b> . . . . .	<b>11</b>
4-1	Conditions aux limites distordues . . . . .	12
4-2	Densité superfluide et corrélations en vitesse . . . . .	12
4-3	Densité superfluide et positions des vortex . . . . .	14
4-4	Le principe de la renormalisation . . . . .	15
4-5	Premières études expérimentales : films d'hélium . . . . .	17

---

Nous avons décrit au chapitre précédent le rôle joué par les phonons dans un gaz de Bose 2D à l'équilibre thermodynamique. Nous avons montré qu'en accord avec le théorème de Mermin–Wagner–Hohenberg, ces phonons faisaient disparaître l'ordre à longue portée pour  $T \neq 0$  en le remplaçant par un quasi-ordre : la fonction de corrélation à un corps décroît algébriquement,  $G_1(r) \propto r^{-\alpha}$ , où  $\alpha = 1/\mathcal{D}_s$  est relié à la densité dans l'espace des phases superfluide,  $\mathcal{D}_s = \rho_s \lambda_T^2$ . Nous avons également retrouvé via le critère de Landau que ce quasi-ordre était effectivement suffisant pour maintenir un état superfluide.

Le but de ce chapitre est d'aller au delà du modèle purement phononique et de prendre en compte les vortex. L'influence des vortex peut se comprendre de manière intuitive (figure 1) : supposons que l'on ait – après avoir pris en compte les phonons – une certaine cohérence de phase entre deux points  $A$  et  $B$ , caractérisée par la loi de probabilité pour la différence de phase  $\phi$ ; si un vortex avec son enroulement de phase de  $2\pi$  peut être aléatoirement inséré sur le segment  $AB$ , la différence de phase va basculer entre  $\phi$  et  $\phi + \pi$ . Ce déphasage aléatoire fera perdre toute cohérence entre  $A$  et  $B$ , et le quasi-ordre en phase qui pouvait exister entre ces deux points sera détruit.

Dans ce qui suit, nous allons étudier successivement le rôle d'un vortex isolé, puis d'une paire de vortex de circulations opposées, avant de nous intéresser à la thermodynamique d'une assemblée de vortex. Finalement, nous aborderons le rôle des vortex dans le cadre du groupe de renormalisation. Cela nous permettra d'établir un critère clair de superfluidité; nous



**FIGURE 1.** Vortex isolés et cohérence de phase : si un vortex isolé vient s'intercaler entre deux points, la phase relative entre ces deux points passe de la valeur  $\phi$  à  $\phi + \pi$ . Par conséquent, dans un fluide où les vortex isolés peuvent être répartis de manière aléatoire, la cohérence de phase ne peut pas excéder une longueur de l'ordre de la distance moyenne entre vortex.

verrons en particulier que  $D_s$  est soit nulle, soit supérieure à 4.

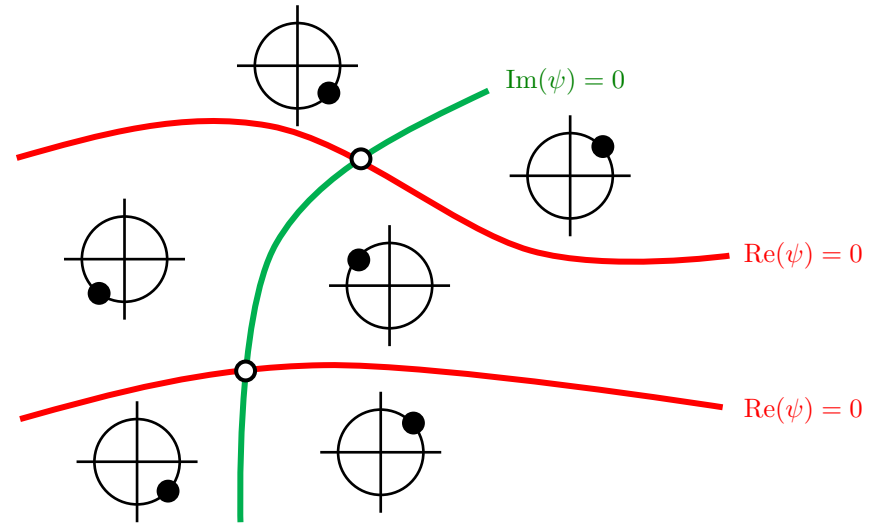
## 1 Seuil d'apparition d'un vortex isolé

### 1-1 Apparition et disparition des vortex

Dans le contexte de notre gaz d'atomes décrit par une fonction d'onde classique  $\psi(\mathbf{r})$ , un vortex est un zéro de cette fonction. Autour de ce zéro, la phase présente un enroulement<sup>1</sup> qui vaut  $\pm 2\pi$ . On parle alors de vortex de charge  $Q = \pm 1$ .

Un moyen mathématique simple pour se représenter l'émergence de

1. On peut considérer d'autres situations, mais elles se ramènent toutes à des superpositions des deux cas  $\pm 2\pi$ . Par exemple, si l'enroulement est nul, on peut voir ce zéro de densité comme la superposition de vortex de charges topologiques opposées. Si l'enroulement vaut  $2n\pi$ , cela correspond à la superposition de  $n$  vortex de charge unité.



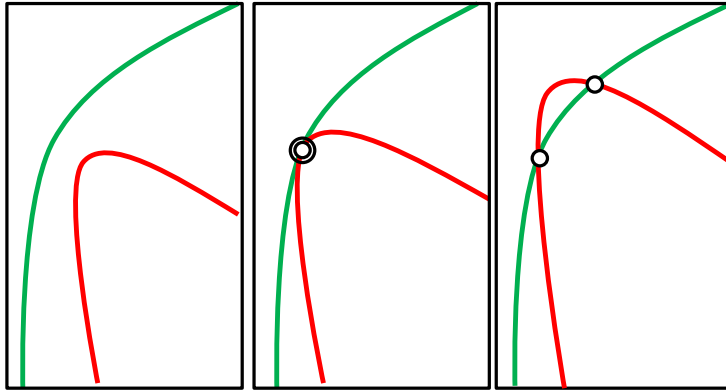
**FIGURE 2.** Lignes sur lesquelles  $\text{Re}[\psi(\mathbf{r})] = 0$  (en rouge) et  $\text{Im}[\psi(\mathbf{r})] = 0$  (en vert). Les points d'intersection  $\mathbf{r}_j$  sont (généralement) des zéros simples de  $\psi(\mathbf{r})$  et ils correspondent à un enroulement de phase de  $\pm 2\pi$ , c'est-à-dire un vortex de charge topologique  $Q = \pm 1$ . On a indiqué dans chaque zone du plan une représentation de la phase de  $\psi$  sur le cercle trigonométrique, ce qui permet de déterminer l'enroulement de phase du vortex.

vortex dans ce contexte consiste à considérer les deux fonctions  $\text{Re}[\psi(\mathbf{r})]$  et  $\text{Im}[\psi(\mathbf{r})]$ . Chacune de ces deux fonctions fluctue dans l'espace sous l'effet des excitations thermiques;  $\text{Re}[\psi(\mathbf{r})]$  par exemple prend des valeurs positives dans certaines régions du plan et négatives dans d'autres régions. Les frontières entre ces régions sont des lignes le long desquelles  $\text{Re}[\psi(\mathbf{r})]$  s'annule. Il en va de même pour  $\text{Im}[\psi(\mathbf{r})]$ . Il peut donc exister des points discrets  $\mathbf{r}_j$  dans le plan où ces lignes se croisent, c'est-à-dire

$$\text{Re}[\psi(\mathbf{r}_j)] = 0 \quad \text{et} \quad \text{Im}[\psi(\mathbf{r}_j)] = 0. \tag{1}$$

Il est facile de vérifier qu'un zéro simple de  $\psi$  correspond effectivement à un vortex de charge topologique  $Q_j = \pm 1$  (figure 2).

L'enroulement de phase d'un vortex constitue une "protection" topologique. On ne peut pas générer spontanément un vortex de charge  $Q \neq 0$



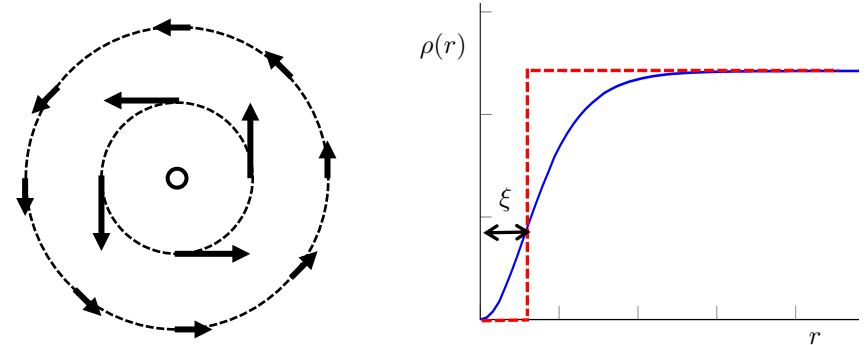
**FIGURE 3.** Emergence d'une paire de vortex du fait de fluctuations thermiques dans le gaz. Sous l'effet d'une fluctuation, la ligne correspondant à  $\text{Re}[\psi(\mathbf{r})] = 0$  (en rouge), initialement disjointe de la ligne  $\text{Im}[\psi(\mathbf{r})] = 0$  (en vert) [dessin de gauche], vient la croiser pour former un zéro double [dessin central], puis en deux zéros simples d'enroulements opposés [dessin de droite]. On obtient alors une paire de vortex de charge  $Q_1 = +1$  et  $Q_2 = -1$ . Le processus inverse est également possible, conduisant à l'annihilation de la paire de vortex.

au sein d'un échantillon, ni l'éliminer. Pour que des vortex apparaissent ou disparaissent, deux possibilités peuvent être envisagées :

- Le vortex est créé ou annihilé de manière individuelle sur le bord de l'échantillon, là où la fonction d'onde  $\psi(\mathbf{r})$  s'annule ;
- Une paire de vortex de charges opposées apparaît ou disparaît en passant par l'état intermédiaire d'un zéro double de  $\psi(\mathbf{r})$ , correspondant à un enroulement nul de la phase (figure 3). Cet état intermédiaire peut être vu comme la superposition des deux vortex de charges opposées.

### 1-2 L'énergie d'un vortex

Les arguments énergétiques et entropiques vont jouer un rôle central dans ce qui va suivre pour déterminer si un vortex a une probabilité significativement non nulle d'être présent dans un fluide quantique. Nous



**FIGURE 4.** Gauche : champ de vitesse créé par un vortex, décroissant comme  $1/r$ . Droite : profil de densité au voisinage du cœur du vortex. La taille du cœur est de l'ordre de la longueur de cicatrisation  $\xi = 1/\sqrt{g\rho}$ . En pointillé, modélisation par la fonction en escalier donnée en (4).

allons donc commencer par évaluer l'énergie d'un vortex isolé en considérant la situation la plus simple possible, celle d'un échantillon circulaire avec un vortex situé au centre de cet échantillon.

Le champ de vitesse créé par le vortex est orthoradial et tel que la circulation le long d'un cercle centré sur l'origine est toujours égale à  $h/m$ , ce qui donne (figure 4)

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{mr} \mathbf{u}_\varphi \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}_\varphi = \mathbf{u}_z \times \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (2)$$

La densité s'annule au point  $\mathbf{r} = 0$  et reprend sa valeur asymptotique sur une distance de l'ordre de la longueur de cicatrisation définie au chapitre précédent :

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2g\rho}}. \quad (3)$$

Pour simplifier, nous modéliserons le profil de densité par une fonction en escalier :

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) &= 0 & \text{si } r < \xi, \\ \rho(\mathbf{r}) &= \rho & \text{si } r > \xi. \end{aligned} \quad (4)$$

L'énergie cinétique du fluide vaut donc :

$$\begin{aligned} E_{\text{cin}} &= \frac{1}{2} m \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{v}^2(\mathbf{r}) d^2r \approx \frac{1}{2} m \rho \frac{\hbar^2}{m^2} \int_{\xi}^R \frac{1}{r^2} 2\pi r dr \\ &= \pi \frac{\hbar^2 \rho}{m} \ln(R/\xi). \end{aligned} \quad (5)$$

Le point essentiel de ce résultat est que l'énergie d'un seul vortex, c'est-à-dire un objet "microscopique", tend vers l'infini quand la taille du système tend elle-même vers l'infini. Bien sûr la divergence n'est que logarithmique, mais cela suffit à rendre la limite thermodynamique singulière vis à vis des vortex isolés. Notons que dans cette expression, le préfacteur  $\pi \hbar^2 \rho / m$  devant le logarithme est "robuste" : il ne dépend pas de la modélisation choisie pour le profil de densité. La forme précise de cette modélisation n'intervient que dans l'argument du logarithme et contribue donc par l'intermédiaire d'une constante qui vient s'ajouter au terme dominant en  $\ln(R)$ .

Il y a également une augmentation de l'énergie d'interaction du fluide, puisqu'on passe d'une densité uniforme  $N/(\pi R^2)$  à la densité  $\rho = N/[\pi(R^2 - \xi^2)]$ . Partant de l'expression générale pour l'énergie d'interaction vue au chapitre précédent,

$$E_{\text{int}} = \frac{\hbar^2}{2m} \tilde{g} \int \rho^2(\mathbf{r}) d^2r, \quad (6)$$

cette augmentation s'écrit :

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= \frac{\hbar^2}{2m} \tilde{g} \left\{ \left[ \frac{N}{\pi(R^2 - \xi^2)} \right]^2 \pi(R^2 - \xi^2) - \left[ \frac{N}{\pi R^2} \right]^2 \pi R^2 \right\} \\ &\approx \frac{\pi}{2} \frac{\hbar^2 \rho}{m}. \end{aligned} \quad (7)$$

Cette énergie reste constante quand la taille du disque tend vers l'infini, et elle est donc beaucoup plus petite que l'énergie cinétique qui diverge comme  $\ln(R)$ . Pour un vortex isolé, cette énergie  $\epsilon_0$  peut donc être négligée, mais ce ne sera plus le cas quand on s'intéressera à une paire vortex-antivortex car l'énergie cinétique sera alors fortement réduite. La valeur de son préfacteur  $\pi/2$  n'est qu'indicative, puisque ce dernier dépend de la modélisation choisie pour décrire l'annulation de la densité au cœur du vortex.

**Densité totale et densité superfluide.** Dans ce qui précède, la densité  $\rho$  représente la densité totale de l'échantillon, lui-même supposé à température nulle. Dans ce cas, densité totale  $\rho$  et densité superfluide  $\rho_s$  coïncident. Si la température n'est pas nulle, la densité superfluide est réduite, du fait des fluctuations de densité à courte échelle. Pour évaluer l'énergie cinétique du vortex, qui fait intervenir le gradient de phase de  $\psi(\mathbf{r})$  sur une grande échelle de longueur, il faut alors faire intervenir uniquement la densité superfluide, ce qui conduit à

$$E_{\text{cin}} \approx \pi \frac{\hbar^2 \rho_s}{m} \ln(R/\xi) \quad \epsilon_0 \sim \frac{\hbar^2 \rho_s}{m}. \quad (8)$$

Insistons sur le fait que cette densité superfluide  $\rho_s$  est une quantité dépendant de la température et de l'échelle spatiale  $a$  à laquelle on regarde le système. Les fluctuations densité-phase de longueur d'onde plus courte que  $a$  ainsi que, comme nous le verrons plus loin, les paires de vortex séparées de moins de  $a$ , sont absorbées dans la définition de  $\rho_s$ . Cette remarque joue un rôle central dans le traitement de la transition par la méthode du groupe de renormalisation.

**Vortex décentré.** L'analyse qui précède a fait l'hypothèse d'un vortex centré sur l'échantillon, ce qui permet de mener les calculs analytiquement. Dans le cas d'un vortex décentré, un traitement exact est plus délicat, mais le résultat n'est que peu modifié puisque l'énergie ne dépend du rayon que via un logarithme.

### 1-3 L'observation d'un vortex isolé est-elle probable ?

Comme indiqué plus haut, un vortex peut *a priori* apparaître dans l'échantillon en étant nucléé sur les parois, puis en dérivant vers la région centrale. L'état d'un gaz avec un vortex est déterminé par la connaissance de la position de ce vortex. Comme le cœur du vortex a une étendue  $\pi \xi^2$ , on peut considérer que l'on a

$$W \approx \frac{\pi R^2}{\pi \xi^2} \quad (9)$$

états indépendants pour un vortex individuel dans le disque de rayon  $R$ .

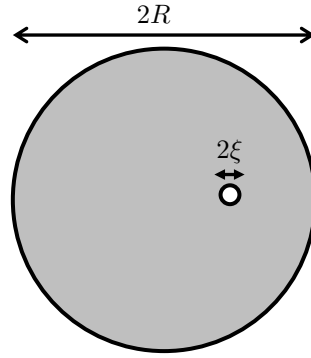


FIGURE 5. Un vortex de rayon  $\approx \xi$  dans un disque de rayon  $R$ .

La probabilité pour qu'un état donné se réalise est donnée par la loi de Boltzmann

$$p \approx e^{-E_{\text{cin}}/k_B T}, \quad (10)$$

où l'on a négligé la contribution de l'énergie d'interaction  $\epsilon_0$  devant l'énergie cinétique. En introduisant la longueur d'onde thermique  $\lambda_T$  et la densité dans l'espace des phases  $\mathcal{D}_s$  associée à la fraction superfluide

$$\lambda_T = \frac{\hbar\sqrt{2\pi}}{\sqrt{mk_B T}}, \quad \mathcal{D}_s = \rho_s \lambda_T^2, \quad (11)$$

cette probabilité s'écrit en utilisant (8)

$$p \approx \exp\left[-\frac{\mathcal{D}_s}{2} \ln\left(\frac{R}{\xi}\right)\right] = \left(\frac{\xi}{R}\right)^{\mathcal{D}_s/2}. \quad (12)$$

Pour un échantillon "macroscopique" tel que  $R \gg \xi$ , cette probabilité est petite devant 1 dès que  $\mathcal{D}_s$  est significativement non nulle.

Intéressons-nous maintenant à la probabilité qu'un vortex soit présent dans l'échantillon, indépendamment de sa position (figure 5). Puisqu'il y a  $W$  états possibles, cette probabilité vaut  $\approx Wp$ , au moins tant que  $Wp \ll 1$ :

$$Wp = \frac{R^2}{\xi^2} p \approx \left(\frac{\xi}{R}\right)^{-2+\mathcal{D}_s/2}. \quad (13)$$

Deux cas de figures sont alors à envisager selon la valeur de l'exposant  $-2 + \mathcal{D}_s/2$ :

- Si cet exposant est positif, c'est-à-dire si la densité superfluide  $\mathcal{D}_s$  vérifie

$$\mathcal{D}_s > 4, \quad (14)$$

la probabilité  $Wp$  tend vers 0 à la limite thermodynamique. Pour des échantillons assez grands, il est alors extrêmement improbable d'avoir un vortex isolé.

- Au contraire si  $\mathcal{D}_s < 4$ , la quantité  $Wp$  diverge à la limite thermodynamique. Cette quantité ne peut alors plus s'interpréter comme une probabilité mais le message est clair : il est très probable que le gaz contiendra un grand nombre de vortex (de charge aléatoire). Comme nous le verrons un peu plus loin (§ 1-4), cette prolifération de vortex individuels suffit à supprimer la superfluidité. La cohérence du calcul nous impose alors de prendre  $\mathcal{D}_s = 0$ .

La conclusion de cette étude préliminaire est donc que la superfluidité ne peut exister dans ce système bidimensionnel que si la densité superfluide est supérieure à 4, auquel cas aucun vortex isolé n'est présent dans le système à l'équilibre thermodynamique. D'une manière remarquable, cette conclusion atteinte à partir de considérations élémentaires et avec une modélisation très grossière du gaz (un seul vortex!) est quantitativement exacte : comme nous le verrons en § 4, le point critique de la transition BKT, correspondant à la transition normal-superfluide, correspond exactement au point où la densité superfluide est telle que  $\mathcal{D}_s = 4$ .

Un autre point tout aussi remarquable est que cette conclusion ne dépend pas de la force des interactions caractérisée par le paramètre  $\tilde{g}$ . Ce paramètre intervient dans la taille du cœur du vortex, mais pas dans le champ de vitesse à grande distance qui est l'élément essentiel du raisonnement précédent. Il s'agit donc d'un résultat « universel ».

**Approche "énergie libre".** Une approche très voisine et conduisant à une conclusion identique consiste à évaluer l'énergie libre de la configuration à un vortex (KOSTERLITZ & THOULESS 1973),

$$F = E - TS, \quad (15)$$

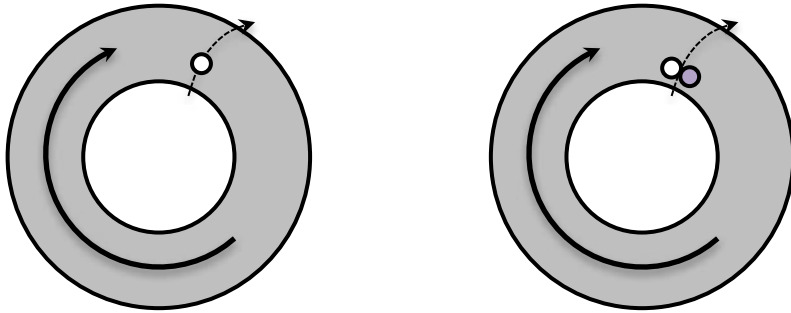


FIGURE 6. Gauche : quand un anneau de fluide bi-dimensionnel est traversé par un vortex isolé, le courant (quantifié) dans cet anneau est modifié. On ne peut donc pas avoir de courant permanent – condition nécessaire de superfluidité – dès que les vortex isolés ont une probabilité significative de se trouver au sein du fluide. Droite : la traversée d'une paire liée de deux vortex de charges opposées n'a en revanche pas d'effet sur le courant permanent.

où  $E$  est l'énergie d'un vortex, essentiellement l'énergie cinétique (8), et  $S$  l'entropie associée à cette configuration, c'est-à-dire

$$S = k_B \ln(W) \quad (16)$$

où  $W$  est le nombre d'états indépendants possibles donné en (9). On trouve alors :

$$F = \left( \pi \frac{\hbar^2 \rho_s}{m} - 2k_B T \right) \ln(R/\xi) \quad (17)$$

soit

$$\frac{F}{k_B T} = \frac{1}{2} (\mathcal{D}_s - 4) \ln(R/\xi). \quad (18)$$

On retrouve ainsi le résultat de la discussion précédente : si  $\mathcal{D}_s > 4$ , l'énergie libre est positive et très grande devant  $k_B T$  à la limite thermodynamique : il est extrêmement improbable qu'un vortex libre apparaisse dans l'échantillon. En revanche, si  $\mathcal{D}_s < 4$ , l'énergie libre est grande en valeur absolue, mais négative, indiquant que ce processus – et l'apparition d'autres vortex – est très probable.

## 1-4 Vortex isolés et non-superfluidité

Pour comprendre pourquoi la possibilité d'avoir un vortex isolé au sein d'un gaz 2D inhibe la superfluidité, le plus simple est de considérer une géométrie en forme d'anneau, comme celle représentée sur la figure 6. S'il est assez large, cet anneau est un gaz bi-dimensionnel avec des conditions aux limites périodiques selon une direction et des conditions aux limites de Dirichlet selon l'autre.

La superfluidité se manifeste par la possibilité d'avoir un courant permanent métastable dans cet anneau, c'est-à-dire un enroulement de phase de  $2\pi N$ , où  $N$  est un nombre entier. Supposons maintenant que la température soit assez élevée pour qu'un vortex isolé, initialement présent sur le bord intérieur ou extérieur de l'anneau, puisse migrer dans la zone de haute densité. Nous avons vu plus haut que ceci peut se produire si  $\mathcal{D}_s < 4$ . Il peut alors très bien arriver que ce vortex traverse l'anneau et ressorte par le bord opposé. Quand cela se produit, l'enroulement de phase est modifié :

$$\text{traversée d'un vortex isolé : } N \rightarrow N \pm 1. \quad (19)$$

Si les vortex isolés ont une probabilité appréciable de traverser l'anneau, l'intensité du courant va alors effectuer un mouvement brownien et sa valeur moyenne va pouvoir relaxer vers 0 : le courant n'est donc pas métastable et la densité superfluide est nulle.

Remarquons que l'argument ci-dessus ne s'applique pas aux paires formées par deux vortex de signes opposés, avec une distance (microscopique) entre les membres de la paire petite devant la taille (macroscopique) de l'anneau. Dans ce cas, aucun changement de l'enroulement de phase n'accompagne la traversée de la paire :

$$\text{traversée d'une paire de vortex : } N \rightarrow N, \quad (20)$$

et la présence de ces paires avec une densité non nulle n'inhibe pas la superfluidité. Elle peut néanmoins réduire la rigidité de phase, donc la fraction superfluide, comme nous le verrons un peu plus loin.

## 2 Une paire "vortex – antivortex"

L'argument de la section précédente s'étend immédiatement à toute configuration de vortex "non équilibrée", c'est-à-dire présentant plus de charges positives que négatives, ou vice-versa. Le champ de vitesse résultant variera à longue distance comme

$$Q_{\text{tot}} \frac{\hbar}{mr} \quad \text{avec} \quad Q_{\text{tot}} = \sum_j Q_j, \quad (21)$$

ce qui conduira à une divergence logarithmique de l'énergie cinétique avec la taille de l'échantillon, avec un facteur multiplicatif  $Q_{\text{tot}}^2$ .

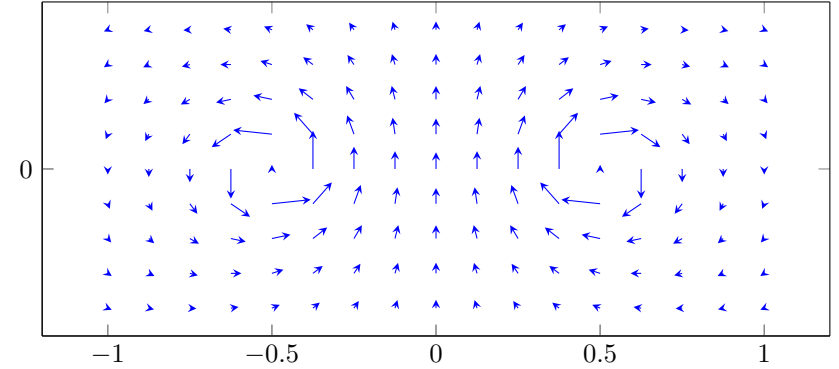
En revanche, les configurations équilibrées avec  $Q_{\text{tot}} = 0$  ne présentent pas cette pathologie. Chacune de ces configurations équilibrées a donc une probabilité non infinitésimale d'apparaître si la température du gaz n'est pas strictement nulle. Nous allons nous intéresser ici au cas simple d'une paire de vortex, l'un de charge positive, l'autre de charge négative que nous appellerons paire "vortex – antivortex"; cette dénomination est justifiée dans la mesure où les deux membres de la paire peuvent s'annihiler (figure 3), comme le ferait un électron et un positron. La section suivante sera consacrée au cas général, où l'on prend une moyenne statistique sur l'ensemble des configurations.

### 2-1 Champ de vitesses et énergie d'une paire

Considérons une paire de vortex de charges opposées, séparés par une distance  $\ell$ , ces deux vortex étant localisés par exemple en  $x = \pm \ell/2, y = 0$  (figure 7). Nous allons supposer que le champ de vitesse global est la somme des champs de vitesse créés par chacun des deux vortex, ce point étant justifié dans la suite de ce chapitre [voir l'équation (46)] :

$$\mathbf{v}_{\pm} = \pm \frac{\hbar}{mr_{\pm}^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \pm \ell/2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad r_{\pm} = [(x \pm \ell/2)^2 + y^2]^{1/2}. \quad (22)$$

Le calcul de l'énergie cinétique correspondante est présenté par NOZIÈRES & PINES (1990) et sera repris de manière générale un peu plus loin [cf. (52)].



**FIGURE 7.** Champ de vitesses créé par une paire de vortex de charges opposées. Ce champ de vitesses décroît comme  $1/r^2$  à l'infini et l'énergie cinétique associée est donc bornée quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini, contrairement au cas d'un vortex isolé.

Nous donnons donc le résultat sans démonstration :

$$E_{\text{cin}}(\ell) \approx 2\pi \frac{\hbar^2 \rho_s}{m} \ln \left( \frac{\ell}{\xi} \right). \quad (23)$$

Ce résultat a une structure apparemment voisine de celui obtenu pour un vortex isolé, mais il ne diverge plus avec la taille  $R$  de l'échantillon. Cette taille est remplacée ici par la distance  $\ell$  entre les deux vortex, les contributions des deux champs de vitesses à l'énergie cinétique se compensant pour des distances à l'origine grandes devant  $\ell$  (ce champ de vitesse décroît comme  $1/r^2$  à l'infini).

À cette énergie cinétique, il faut ajouter l'augmentation d'énergie d'interaction liée à la création de deux trous de taille  $\xi$  dans le fluide, c'est-à-dire  $2\epsilon_0$  où l'énergie  $\epsilon_0 \sim \hbar^2 \rho_s/m$  a été évaluée en (8). Pour une séparation  $\ell$  entre les deux vortex de quelques  $\xi$ , énergie cinétique et énergie d'interaction sont comparables. Le poids de Boltzmann associé à l'apparition d'une paire de vortex s'écrit donc :

$$\mathcal{P}(\ell) = \exp \left\{ -\frac{2\epsilon_0 + E_{\text{cin}}(\ell)}{k_B T} \right\} \quad (24)$$

ou encore

$$\mathcal{P}(\ell) \approx y_0^2 e^{-D_s \ln(\ell/\xi)} = y_0^2 \left( \frac{\xi}{\ell} \right)^{D_s}, \quad (25)$$

où l'on a introduit le facteur provenant de l'énergie d'interaction de chaque vortex, appelé *fugacité d'un vortex* :

$$y_0 \equiv \exp\left(-\frac{\epsilon_0}{k_B T}\right). \quad (26)$$

Pour la modélisation de la densité par une fonction en escalier, le résultat (7) conduit à  $y_0 \approx \exp(-D_s/4)$ .

Le résultat (25) est non négligeable devant 1, au moins pour des paires proches ( $\ell \lesssim$  quelques  $\xi$ ) et pour un gaz faiblement ou modérément dégénéré (densité dans l'espace des phases associée à la fraction superfluide  $D_s$  pas très grande devant 1).

## 2-2 Elongation moyenne d'une paire

Disposant du poids de Boltzmann  $\mathcal{P}(\ell)$  pour la distance entre les deux vortex de la paire, nous pouvons maintenant évaluer plusieurs caractéristiques de la distribution statistique de cette paire. Intéressons-nous dans ce paragraphe à l'élongation moyenne de la paire, c'est-à-dire la moyenne  $\langle (r_i - r_j)^2 \rangle$  du carré de la distance  $\ell$ .

Partant de

$$\langle \ell^2 \rangle = \frac{\int_{\xi}^{+\infty} \ell^2 \mathcal{P}(\ell) 2\pi \ell d\ell}{\int_{\xi}^{+\infty} \mathcal{P}(\ell) 2\pi \ell d\ell} \quad (27)$$

nous trouvons (KOSTERLITZ & THOULESS 1973)

$$\langle \ell^2 \rangle = \xi^2 \frac{D_s - 2}{D_s - 4}. \quad (28)$$

Cette quantité tracée sur la figure 8 n'est définie que pour  $D_s > 4$  : nous avons vu à la section précédente que c'est la condition à remplir pour qu'un vortex libre ne puisse pas apparaître à l'équilibre thermodynamique. En d'autres termes, c'est à cette condition que les paires ne se dissocient pas et restent effectivement liées, avec une valeur finie de leur élongation.

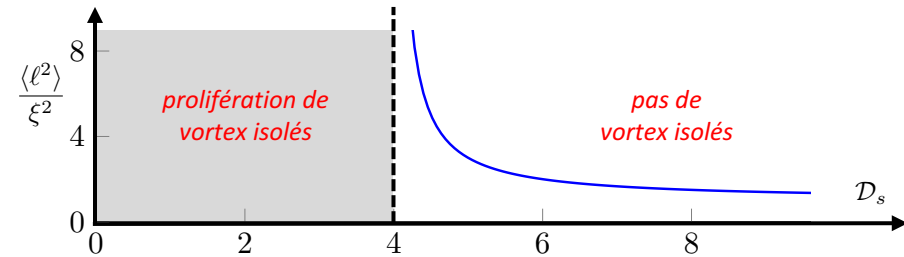


FIGURE 8. Variation de l'élongation moyenne d'une paire de vortex en fonction de la densité dans l'espace des phases associée à la fraction superfluide [cf. eq. (28)].

Pour une densité dans l'espace des phase  $D_s$  notablement supérieure à 4, l'élongation moyenne est d'ordre  $\xi$ , ce qui correspond à une énergie cinétique de l'ordre de l'énergie d'interaction  $2\epsilon_0$ . Quand  $D_s$  décroît et se rapproche de 4, les paires sont de moins en moins liées, l'élongation augmente pour finalement diverger en  $D_s = 4$ .

## 2-3 Densité de paires

Nous pouvons également utiliser le poids de Boltzmann  $\mathcal{P}(\ell)$  donné en (25) pour évaluer la distance moyenne entre deux paires dans le gaz bi-dimensionnel. Partons d'un échantillon de surface  $\pi R^2$  et définissons la position du cœur de chaque vortex à  $\pi\xi^2$  près, comme nous l'avons fait pour un vortex unique en § 1. La probabilité pour que l'échantillon contienne une paire de vortex est

$$\begin{aligned} p(R) &= \iint \mathcal{P}(|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|) \frac{d^2 r_a}{\pi \xi^2} \frac{d^2 r_b}{\pi \xi^2} \\ &= \frac{\pi R^2}{(\pi \xi^2)^2} \int_{\xi}^R \mathcal{P}(\ell) 2\pi \ell d\ell \\ &\approx \frac{2}{D_s - 2} \frac{R^2}{\xi^2} y_0^2. \end{aligned} \quad (29)$$

Pour estimer la distance moyenne  $d$  entre paires, on pose que  $d = R$ , où  $R$  est le rayon pour lequel la probabilité de présence  $p(R)$  calculée ci-dessus



devient d'ordre 1. Ceci donne

$$\frac{2}{\mathcal{D}_s - 2} \frac{d^2}{\xi^2} y_0^2 \sim 1 \quad \longrightarrow \quad d \approx \xi e^{\epsilon_0/k_B T} \sqrt{\mathcal{D}_s}. \quad (30)$$

Pour  $\mathcal{D}_s \gg 1$ , les paires – dont on a vu qu'elles avaient une élongation  $\sim \xi$  – sont distantes les unes des autres de la quantité  $d \gg \xi$ ; elles forment donc un « gaz » très dilué. En revanche, quand  $\mathcal{D}_s$  s'approche de la valeur 4 à laquelle les paires se dissocient, la distance  $d$  devient de l'ordre de l'élongation moyenne d'une paire. Cela signifie que les paires se recouvrent, ce qui rend notre traitement incomplet. L'objet de la section suivante sera de présenter les outils principaux permettant d'étudier plus précisément le voisinage du point critique.

### 3 Énergie d'une assemblée de vortex

#### 3-1 Champs de vitesses longitudinaux et transverses

Au chapitre précédent, nous sommes partis d'une fonction d'onde  $\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})} e^{i\theta(\mathbf{r})}$  à laquelle nous avons associé le champ de vitesse superfluide  $\frac{\hbar}{m} \nabla \theta$ . Nous avons supposé par ailleurs que la phase pouvait être développée en série de Fourier,

$$\theta(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{v}_s^{\parallel}(\mathbf{r}) = i \frac{\hbar}{m} \sum_{\mathbf{q}} \mathbf{q} c_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}. \quad (31)$$

Ces relations peuvent aussi s'écrire

$$\theta(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{\theta}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d^2q, \quad \mathbf{v}_s^{\parallel}(\mathbf{r}) = i \frac{\hbar}{m} \int \mathbf{q} \hat{\theta}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d^2q \quad (32)$$

si l'on préfère traiter  $\mathbf{q}$  comme une variable continue.

La mention  $\parallel$  que nous avons ajoutée à  $\mathbf{v}_s$  provient du fait que le champ de vitesse ainsi défini est longitudinal, c'est-à-dire qu'il est parallèle à  $\mathbf{q}$  en tout point de l'espace de Fourier :

$$\hat{\mathbf{v}}_s^{\parallel}(\mathbf{q}) = i \frac{\hbar}{m} \mathbf{q} \hat{\theta}(\mathbf{q}). \quad (33)$$

Il est bien clair que les vortex, avec leur enroulement de phase de  $\pm 2\pi$  autour d'un point, échappent à la description précédente : une fonction  $\theta(\mathbf{r})$  développable en série de Fourier comme (31) vérifie  $\oint \nabla \theta \cdot d\mathbf{r} = 0$  pour tout contour fermé et ne peut donc pas présenter d'enroulement de phase non nul.

Pour décrire à la fois les fluctuations douces de la phase et les vortex, il faut se rappeler qu'un champ de vitesse  $\mathbf{v}_s(\mathbf{r})$  quelconque n'est pas nécessairement longitudinal. Il s'écrit dans le cas général comme la somme d'un champ longitudinal et d'un champ transverse :

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_s^{\parallel}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}_s^{\perp}(\mathbf{r}) \quad \hat{\mathbf{v}}_s(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{v}}_s^{\parallel}(\mathbf{q}) + \hat{\mathbf{v}}_s^{\perp}(\mathbf{q}), \quad (34)$$

avec

$$\mathbf{q} \times \hat{\mathbf{v}}_s^{\parallel}(\mathbf{q}) = 0 \quad \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s^{\perp}(\mathbf{q}) = 0, \quad (35)$$

ou encore, en revenant dans l'espace des positions :

$$\nabla \times \mathbf{v}_s^{\parallel}(\mathbf{r}) = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_s^{\perp}(\mathbf{r}) = 0. \quad (36)$$

Les phonons que nous avons étudiés au chapitre précédent sont entièrement décrits par la partie longitudinale du champ de vitesses. La prise en compte des vortex va se faire au contraire par l'intermédiaire de la composante transverse de ce champ de vitesses. Par exemple, pour un vortex isolé centré en 0, le champ de vitesses (2) s'écrit en point de vue de Fourier

$$\hat{\mathbf{v}}_s^{\parallel}(\mathbf{q}) = 0 \quad \hat{\mathbf{v}}_s^{\perp}(\mathbf{q}) = i \frac{\hbar}{mq^2} \mathbf{q} \times \mathbf{u}_z. \quad (37)$$

Pour simplifier l'analyse dans le cas général, nous allons faire l'approximation d'un découplage complet des deux champs de vitesses. Ceci revient par exemple à négliger l'influence des trous de densité créés par les vortex sur la propagation des phonons. Dans le paragraphe suivant, partant d'un jeu de positions  $\{\mathbf{r}_j\}$  et de charges  $\{Q_j\}$  données des vortex, nous allons déterminer le champ de vitesse associé  $\mathbf{v}_s^{\perp}(\mathbf{r})$  en supposant qu'il n'y a aucune excitation phononique du système.

#### 3-2 Champ de vitesse d'une assemblée de vortex

Partons d'une situation où l'on se donne les positions  $\{\mathbf{r}_j\}$  et les charges  $\{Q_j\}$  des vortex et cherchons le champ de vitesse qui minimise la fonction-

nelle d'énergie cinétique

$$E_{\text{cin}} = \frac{\hbar^2 \rho_s}{2m} \int [\nabla \theta(\mathbf{r})]^2 d^2r. \quad (38)$$

Une méthode standard de dérivation fonctionnelle indique que les fonctions  $\theta(\mathbf{r})$  minimisantes vérifient l'équation de Laplace

$$\nabla^2 \theta = 0 \quad (39)$$

en tout point où la phase est bien définie, c'est-à-dire en dehors des  $\mathbf{r}_j$ . Le champ de vitesse associé  $\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta$  vérifie

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla^2 \theta = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s(\mathbf{q}) = 0. \quad (40)$$

Il s'agit donc d'un champ de vitesse purement transverse, comme annoncé précédemment. Nous le noterons à partir de maintenant  $\mathbf{v}_s^\perp$ .

Pour résoudre l'équation de Laplace, remarquons qu'à deux dimensions, le résultat (40) pour  $\hat{\mathbf{v}}_s^\perp(\mathbf{q})$  indique qu'il existe une fonction scalaire  $\hat{\Phi}(\mathbf{q})$  telle que

$$\hat{\mathbf{v}}_s^\perp(\mathbf{q}) = i \mathbf{q} \times [\mathbf{u}_z \hat{\Phi}(\mathbf{q})] \quad (41)$$

ce qui s'écrit dans l'espace réel :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_s^\perp(\mathbf{r}) &= \nabla \times [\mathbf{u}_z \Phi(\mathbf{r})] = [\nabla \Phi(\mathbf{r})] \times \mathbf{u}_z \\ &= \begin{pmatrix} +\partial_y \Phi \\ -\partial_x \Phi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (42)$$

Il s'agit maintenant de prendre en compte les contraintes spécifiques à un champ de vitesse superfluide, pour lequel la circulation de la vitesse sur un circuit fermé est quantifiée en multiples de  $2\pi\hbar/m$ , avec une valeur qui dépend de la charge des vortex à l'intérieur du contour. Utilisons la formule de Stokes pour expliciter cette contrainte en terme de  $\Phi$  :

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{v}_s^\perp(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \oint \nabla \times [\mathbf{u}_z \Phi(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{r} \\ &= \iint \mathbf{u}_z \cdot \nabla \times \{ \nabla \times [\mathbf{u}_z \Phi(\mathbf{r})] \} d^2r \\ &= - \iint \nabla^2 \Phi d^2r. \end{aligned} \quad (43)$$

Il est alors immédiat qu'on obtiendra la quantification recherchée en prenant

$$-\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = \frac{2\pi\hbar}{m} \sum_j Q_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j). \quad (44)$$

Nous avons déjà rencontré au chapitre précédent l'équation  $\nabla^2 \Phi \propto \delta(\mathbf{r})$  et nous avons indiqué que sa solution s'écrit :

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar}{m} \sum_j Q_j \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| \quad (45)$$

à l'addition d'une fonction de laplacien nul près. Le champ de vitesses s'obtient alors en prenant le gradient de la fonction  $\Phi$  [cf. (42)] :

$$\mathbf{v}_s^\perp(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{m} \sum_j \frac{Q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2} \begin{pmatrix} -y + y_j \\ x - x_j \end{pmatrix}. \quad (46)$$

On retrouve simplement la somme des champs de vitesse individuels de chacun des vortex, ce qui justifie le calcul fait en § 2 pour une paire de vortex.

Dans la suite, il sera utile de disposer d'une expression de  $\Phi$  et de  $\mathbf{v}_s^\perp$  en termes de la densité de vortex

$$\rho_v(\mathbf{r}) = \sum_j Q_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j). \quad (47)$$

Les expressions (42) et (45) se réécrivent

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar}{m} \int \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rho_v(\mathbf{r}') d^2r' \quad (48)$$

et

$$\mathbf{v}_s^\perp(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{m} \mathbf{u}_z \times \nabla \left[ \int \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rho_v(\mathbf{r}') d^2r' \right]. \quad (49)$$

### 3-3 Énergie des vortex

Avant de passer à la thermodynamique du gaz, il nous reste à évaluer l'énergie cinétique associée au champ de vitesses des vortex. En exprimant

Magnétostatique	Vortex
courants $I_j$	charges topologiques $Q_j$
champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r})$	champ de vitesse $\mathbf{v}_s(\mathbf{r})$
potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r})$	fonction $\Phi(\mathbf{r}) \mathbf{u}_z$
$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$	$\mathbf{v}_s = \nabla \times [\Phi \mathbf{u}_z]$
énergie magnétostatique $\frac{1}{2\mu_0} \int \mathbf{B}^2(\mathbf{r}) d^2r$	énergie cinétique $\frac{\hbar^2 \rho_s}{2m} \int \mathbf{v}_s^2(\mathbf{r}) d^2r$

**TABLE 4.1.** Analogie entre le champ magnétique créé par un réseau de fils parallèles à l'axe  $z$  et le champ de vitesse créé par une assemblée de vortex.

la vitesse en terme de la fonction  $\Phi$  [cf. (42)], nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 E_{\text{cin}} &= \frac{1}{2} m \rho_s \int (\mathbf{v}_s^\perp)^2(\mathbf{r}) d^2r \\
 &= \frac{1}{2} m \rho_s \int [(\partial_x \Phi)^2 + (\partial_y \Phi)^2] d^2r \\
 &= -\frac{1}{2} m \rho_s \int \Phi(\mathbf{r}) \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) d^2r
 \end{aligned} \tag{50}$$

où l'intégration par partie de la dernière ligne n'est possible que si  $\Phi$  tend vers 0 à l'infini, ce qui impose que la charge topologique totale des vortex s'annule :

$$Q_{\text{tot}} = \sum_j Q_j = 0. \tag{51}$$

Nous avons déjà noté en § 1 que cette annulation était une condition nécessaire pour avoir un superfluide, cette restriction n'est donc pas un problème.

En utilisant maintenant que  $\nabla^2 \Phi$  est une somme de distributions de Dirac [cf. (44)], le résultat précédent se simplifie en

$$E \approx N_v \epsilon_0 - \frac{2\pi \hbar^2 \rho_s}{m} \sum_{i < j} Q_i Q_j \ln \left( \frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}{\xi} \right), \tag{52}$$

La divergence en  $\ln(R)$  qui était présente dans l'énergie (8) d'un vortex isolé a disparu du fait de l'hypothèse (51) d'une charge topologique totale nulle. Le champ de vitesse décroît au moins aussi vite que  $1/r^2$  à l'infini, de sorte qu'il n'y pas de problème de convergence de l'intégrale définissant l'énergie cinétique.

**Analogie magnétostatique.** Les résultats qui précèdent sont formellement identiques à ceux bien connus en magnétostatique donnant le champ magnétique créé par des fils parcourus par des courants constants  $I_j$ . Plus précisément, la situation envisagée ici peut être identifiée au cas de fils rectilignes, tous parallèles à l'axe  $z$  et croisant le plan  $xy$  aux points  $r_j$ . Nous détaillons dans la table 4.1 les différents éléments de cette identification.

## 4 Densité superfluide dans un fluide 2D

La superfluidité est un phénomène qui se caractérise par (au moins) deux propriétés distinctes :

- Un état superfluide présente une certaine rigidité de phase. Par exemple si le superfluide est contenu dans un récipient que l'on met en rotation à vitesse angulaire  $\Omega$ , le superfluide restera au repos dans le référentiel du laboratoire – supposé galiléen – au moins pour les basses vitesses de rotation. Un fluide normal au contraire se met en rotation quelle que soit  $\Omega$  et il acquiert un champ de vitesse correspondant à une rotation rigide  $\Omega \times \mathbf{r}$ .
- Un courant dans un superfluide peut être métastable. Si le superfluide est en mouvement à l'intérieur d'un récipient immobile dans le référentiel du laboratoire, ce mouvement pourra perdurer pendant un temps très long. Le critère de métastabilité est que le mouvement relatif du superfluide et des rugosités présentes sur les parois du récipient doit avoir une vitesse inférieure à une certaine vitesse critique.

Nous allons nous intéresser dans ce qui suit au premier critère, et chercher à calculer la rigidité de phase du superfluide bi-dimensionnel quand on prend en compte la contribution des vortex.

### 4-1 Rigidité en phase et conditions aux limites distordues

La fraction superfluide dans un gaz quantique se définit à partir du coût en énergie libre d'une légère distorsion des conditions aux limites. Rappelons l'origine physique de cette définition : comme indiqué ci-dessus, la composante superfluide correspond à la fraction du gaz qui « refuse » de se mettre en mouvement quand on met en rotation à la vitesse  $\Omega$  le récipient contenant le fluide. Vu depuis le référentiel tournant, le fluide normal est au repos alors que le superfluide tourne à la vitesse  $-\Omega$ . Dans ce référentiel, le superfluide possède donc une énergie cinétique supplémentaire par rapport au cas  $\Omega = 0$ .

Or le passage dans le référentiel tournant, qui n'est pas galiléen, peut se faire en considérant que les conditions aux limites périodiques usuelles sont remplacées par des conditions distordues. Dans le changement  $x \rightarrow x+L$ , la phase des fonctions d'onde admissibles est augmentée d'une quantité  $\Theta$ , où  $\Theta$  dépend linéairement de  $\Omega$ . La quantité  $F(\Theta) - F(0)$  correspond donc à l'énergie cinétique du superfluide dans le référentiel tournant, sachant que ce superfluide est en fait resté au repos dans le référentiel du laboratoire. Pour un fluide entièrement normal, l'ensemble du gaz est au repos dans le référentiel tournant et il n'y a donc pas de coût associé à la distorsion des conditions aux limites :  $\rho_s = 0$ .

Plus précisément, nous partons d'un fluide décrit par un champ classique  $\psi(\mathbf{r})$ , pour lequel nous supposons connue l'énergie libre  $F(0)$  pour des conditions aux limites périodiques :

$$\psi(x+L, y) = \psi(x, y+L) = \psi(x, y). \quad (53)$$

Nous imposons maintenant aux états accessibles du fluide de satisfaire

$$\psi(x+L, y) = e^{i\Theta} \psi(x, y), \quad \psi(x, y+L) = \psi(x, y), \quad \Theta \ll 1, \quad (54)$$

ce qui correspond à une distorsion des conditions aux limites selon l'axe  $x$ . Par symétrie, l'énergie libre est une fonction paire de  $\Theta$  et on suppose que l'on peut la développer en série au voisinage de  $\Theta = 0$ . On définit la densité superfluide  $\rho_s$  par

$$F(\Theta) = F(0) + \frac{\hbar^2 \Theta^2}{2m} \rho_s + \mathcal{O}(\Theta^4), \quad \text{soit} \quad \rho_s = \frac{m}{\hbar^2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial \Theta^2} \right|_{\Theta=0}. \quad (55)$$

Pour notre gaz 2D décrit par  $\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho_s} e^{i\theta(\mathbf{r})}$  et en présence de conditions aux limites distordues, le champ de vitesse peut se décomposer en trois parties :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_s^{\parallel} + \mathbf{v}_s^{\perp} + \mathbf{v}_{\Theta}. \quad (56)$$

Les composantes longitudinales et transverses ont déjà été explicitées. La composante  $\mathbf{v}_{\Theta}$  traduit le fait que la phase de la fonction d'onde est "tordue" de  $\Theta$  sur une distance  $L$ ; nous prendrons ici une variation linéaire :

$$\theta_{\text{tordue}}(x) = \Theta \frac{x}{L} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_{\Theta} = \frac{\hbar \Theta}{mL} \mathbf{u}_x. \quad (57)$$

Nous allons maintenant évaluer, à l'ordre le plus bas non nul en  $\Theta$ , l'énergie cinétique associée à ce champ de vitesses, pour en déduire la valeur recherchée de  $\rho_s$ . Nous suivons une démarche voisine de celle décrite par MINNHAGEN & WARREN (1981) [voir également CHAIKIN & LUBENSKY (2000)].

### 4-2 Densité superfluide et corrélations en vitesse

Partons d'un gaz de densité superfluide  $\rho_s^{(0)}$ ; à température nulle,  $\rho_s^{(0)}$  est égale à la densité totale  $\rho$ ; à température non nulle en revanche,  $\rho_s^{(0)} < \rho$ . Plus précisément, la définition de la densité superfluide passe par la donnée d'une échelle de distance minimale  $a$ . Toutes les fluctuations de densité et de phase – y compris les paires de vortex – dont l'échelle de longueur est inférieure à  $a$  sont supposées prises en compte de manière implicite par la réduction  $\rho \rightarrow \rho_s^{(0)}$ . Le principe de l'analyse par le groupe de renormalisation que nous aborderons au paragraphe suivant consiste à étudier le comportement de  $\rho_s^{(0)}$  quand on augmente l'échelle de distance  $a$  pour absorber de plus en plus de fluctuations.

En présence de phonons de grande longueur d'onde et de vortex, et avec les conditions aux limites distordues, l'énergie cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned} E_c[\Theta, \mathbf{v}_s] &= \frac{m\rho_s^{(0)}}{2} \int (\mathbf{v}_{\Theta} + \mathbf{v}_s)^2 d^2r \\ &= \frac{mL^2 \rho_s^{(0)}}{2} v_{\Theta}^2 + \frac{m\rho_s^{(0)}}{2} \int \mathbf{v}_s^2 d^2r + m\rho_s^{(0)} \mathbf{v}_{\Theta} \cdot \int \mathbf{v}_s d^2r. \end{aligned} \quad (58)$$

Le poids de Boltzmann  $e^{-E_c/k_B T}$  qui intervient dans la fonction de partition et dans les moyennes à l'équilibre thermodynamique peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{E_c[\Theta, \mathbf{v}_s]}{k_B T}\right) &= \exp\left(-\frac{mL^2 \rho_s^{(0)}}{2k_B T} v_\Theta^2\right) \times \exp\left(-\frac{E_c[0, \mathbf{v}_s]}{k_B T}\right) \\ &\times \exp\left(-\frac{m\rho_s^{(0)}}{k_B T} \mathbf{v}_\Theta \cdot \int \mathbf{v}_s d^2r\right) \end{aligned} \quad (59)$$

Nous allons maintenant injecter ce résultat dans la fonction de partition

$$\mathcal{Z}(\Theta) = \sum_{\{\mathbf{v}_s\}} \exp\left(-\frac{E[\Theta, \mathbf{v}_s]}{k_B T}\right), \quad (60)$$

cette somme devant en fait être comprise comme une intégrale fonctionnelle. L'énergie figurant dans cette expression est *a priori* l'énergie totale, mais la contribution essentielle provient de l'énergie cinétique à laquelle on ajoutera le moment venu l'énergie de cœur  $\epsilon_0$  de chaque vortex, qui contribuera par l'intermédiaire de la fugacité d'un vortex  $y_0 = e^{-\epsilon_0/k_B T}$ .

Une fois connue la fonction de partition, on en déduira l'énergie libre  $F(\Theta) = -k_B T \ln[\mathcal{Z}(\Theta)]$  et la densité superfluide via :

$$\rho_s = \frac{m}{\hbar^2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial \Theta^2} \right|_{\Theta=0} = \frac{1}{mL^2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial v_\Theta^2} \right|_{v_\Theta=0}. \quad (61)$$

Notons que dans la somme (60) définissant la fonction de partition, le premier terme du membre de droite de (59) peut être mis en facteur puisqu'il ne dépend pas du champ de vitesse  $\mathbf{v}_s$ .

Pour évaluer  $\mathcal{Z}(\Theta)$ , utilisons le fait que l'on s'intéresse aux valeurs arbitrairement faibles de  $\Theta$ . On peut donc faire le développement limité :

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{m\rho_s^{(0)}}{k_B T} \mathbf{v}_\Theta \cdot \int \mathbf{v}_s d^2r\right) &\approx 1 - \frac{m\rho_s^{(0)}}{k_B T} v_\Theta \int v_{s,x} d^2r \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{m\rho_s^{(0)}}{k_B T}\right)^2 v_\Theta^2 \iint v_{s,x}(\mathbf{r}) v_{s,x}(\mathbf{r}') d^2r d^2r' \end{aligned} \quad (62)$$

où l'on a pris le vecteur  $\mathbf{v}_\Theta$  parallèle à la direction  $x$ , comme indiqué en (57).

À partir de ce résultat, quand on multiplie par le poids  $\exp(-E_c[0, \mathbf{v}_s]/k_B T)$  figurant dans (59) et qu'on intègre sur  $\mathbf{v}_s$ , on constate que la contribution du terme linéaire en  $v_\Theta$  a par symétrie une moyenne nulle et il reste donc

$$\mathcal{Z}(\Theta) \approx \exp\left(-\frac{mL^2 \rho_s^{(0)}}{2k_B T} v_\Theta^2\right) \times \mathcal{Z}(0) \quad (63)$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{m\rho_s^{(0)}}{k_B T}\right)^2 v_\Theta^2 \iint \langle v_{s,x}(\mathbf{r}) v_{s,x}(\mathbf{r}') \rangle d^2r d^2r'\right). \quad (64)$$

On en déduit l'énergie libre  $F(\Theta) = -k_B T \ln[\mathcal{Z}(\Theta)]$

$$\begin{aligned} F(\Theta) &\approx \frac{1}{2} mL^2 \rho_s^{(0)} v_\Theta^2 + F(0) \\ &- \frac{1}{2} \frac{(m\rho_s^{(0)})^2}{k_B T} v_\Theta^2 \iint \langle v_{s,x}(\mathbf{r}) v_{s,x}(\mathbf{r}') \rangle d^2r d^2r'. \end{aligned} \quad (65)$$

Nous avons donc relié l'énergie libre  $F(\Theta)$  au deuxième ordre inclus en  $\Theta$  à la fonction de corrélation de la vitesse calculée en l'absence de torsion de la phase. Nous avons vu plus haut que le champ de vitesse avait deux composantes, l'une longitudinale liée au gradient de la phase  $\theta(\mathbf{r})$  et aux phonons, l'autre transverse liée aux vortex. La composante longitudinale ne contribue pas à l'intégrale ci-dessus puisque  $\int \mathbf{v}^{\parallel}(\mathbf{r}) d^2r = 0$  si l'on impose à la phase d'obéir à des conditions aux limites périodiques (sans flux de matière) sur les parois de la boîte. On peut donc dans ce qui précède faire la substitution

$$\langle v_{s,x}(\mathbf{r}) v_{s,x}(\mathbf{r}') \rangle \longrightarrow \langle v_{s,x}^{\perp}(\mathbf{r}) v_{s,x}^{\perp}(\mathbf{r}') \rangle. \quad (66)$$

Il ne reste plus qu'à prendre la dérivée seconde par rapport à  $v_\Theta$  pour obtenir la densité superfluide "renormalisée"  $\rho_s$  :

$$\rho_s = \rho_s^{(0)} - \frac{m(\rho_s^{(0)})^2}{k_B T} \frac{1}{L^2} \iint \langle v_{s,x}^{\perp}(\mathbf{r}) v_{s,x}^{\perp}(\mathbf{r}') \rangle d^2r d^2r'. \quad (67)$$

Ce résultat important montre que le champ de vitesse dû aux vortex est susceptible de réduire, voire de supprimer complètement la densité superfluide. En revanche, la présence de phonons de grande longueur d'onde, responsables du champ  $v^{\parallel}$  ne change pas la densité superfluide initiale; c'est le résultat que nous avons énoncé au chapitre précédent et qui trouve ici sa justification.

### 4-3 Densité superfluide et positions des vortex

Pour aller plus loin et mettre en place les équations appropriées pour la procédure de renormalisation, il est utile d'exprimer la densité superfluide  $\rho_s$  en termes des positions des vortex plutôt que du champ de vitesses qu'ils créent. Pour cela, introduisons un facteur de convergence  $e^{iq_y(y'-y)}$  dans l'intégrale apparaissant dans (67), en considérant la limite  $q_y \rightarrow 0$  :

$$\begin{aligned} \iint \langle v_{s,x}^{\perp}(\mathbf{r}) v_{s,x}^{\perp}(\mathbf{r}') \rangle d^2r d^2r' &= \lim_{q_y \rightarrow 0} \iint \langle v_{s,x}^{\perp}(\mathbf{r}) v_{s,x}^{\perp}(\mathbf{r}') \rangle e^{iq_y(y'-y)} d^2r d^2r' \\ &= (2\pi)^2 \lim_{q_y \rightarrow 0} \langle \hat{v}_{s,x}^{\perp}(\mathbf{q}) \hat{v}_{s,x}^{\perp}(-\mathbf{q}) \rangle \end{aligned} \quad (68)$$

où on a posé  $\mathbf{q} = (0, q_y)$  et introduit la transformée de Fourier du champ de vitesse superfluide transverse

$$\hat{v}_s^{\perp}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{v}_s^{\perp}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^2r. \quad (69)$$

Nous avons donné en (37) la transformée de Fourier  $\hat{v}_s^{\perp}(\mathbf{q})$  du champ de vitesse créé par un vortex de charge  $Q_j = 1$  localisé en  $\mathbf{r}_j = 0$ . On en déduit le champ de vitesse créé par l'assemblée de vortex :

$$\hat{v}_s^{\perp}(\mathbf{q}) = i \frac{\hbar}{mq^2} \mathbf{q} \times \mathbf{u}_z \sum_j Q_j e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_j}, \quad (70)$$

soit pour la composante  $\hat{v}_{s,x}^{\perp}$  qui nous intéresse pour (68) et le choix  $\mathbf{q} = (0, q_y)$  :

$$\hat{v}_{s,x}^{\perp}(\mathbf{q}) = i \frac{\hbar}{mq_y} \sum_j Q_j e^{-iq_y y_j}. \quad (71)$$

Nous arrivons donc à

$$\lim_{q_y \rightarrow 0} \langle \hat{v}_{s,x}^{\perp}(\mathbf{q}) \hat{v}_{s,x}^{\perp}(-\mathbf{q}) \rangle = \frac{\hbar^2}{m^2} \lim_{q_y \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{q_y^2} \sum_{i,j} Q_i Q_j e^{iq_y(y_i - y_j)} \right]. \quad (72)$$

Pour évaluer la limite  $q_y \rightarrow 0$  de l'expression entre crochets, développons l'exponentielle  $e^{iq_y(y_i - y_j)}$  à l'ordre deux en  $q_y$  :

$$e^{iq_y(y_i - y_j)} \approx 1 + iq_y(y_i - y_j) - \frac{1}{2}q_y^2(y_i - y_j)^2 + \dots \quad (73)$$

La contribution des deux premiers termes est nulle car nous nous limitons à des assemblées de vortex de charge topologique totale nulle,  $\sum_i Q_i = 0$ . La limite  $q_y \rightarrow 0$  du troisième terme donne

$$\begin{aligned} \lim_{q_y \rightarrow 0} \langle \hat{v}_{s,x}^{\perp}(\mathbf{q}) \hat{v}_{s,x}^{\perp}(-\mathbf{q}) \rangle &= -\frac{\hbar^2}{2m^2} \sum_{i,j} Q_i Q_j (y_i - y_j)^2 \\ &= -\frac{\hbar^2}{4m^2} \sum_{i,j} Q_i Q_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2. \end{aligned} \quad (74)$$

Ce résultat peut s'exprimer en fonction de la densité de vortex  $\rho_v(\mathbf{r}) = \sum_j Q_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} Q_i Q_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 &= \iint (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 \langle \rho_v(\mathbf{r}) \rho_v(\mathbf{r}') \rangle d^2r d^2r' \\ &= L^2 \int r^2 \langle \rho_v(\mathbf{r}) \rho_v(0) \rangle d^2r \end{aligned} \quad (75)$$

de sorte qu'on obtient à partir de (67)

$$\rho_s = \rho_s^{(0)} + \frac{\pi^2 \hbar^2}{mk_{\text{BT}}} (\rho_s^{(0)})^2 \int r^2 \langle \rho_v(\mathbf{r}) \rho_v(0) \rangle d^2r. \quad (76)$$

Finalement cette expression peut s'écrire de manière compacte en utilisant la densité dans l'espace des phases associée à la fraction superfluide  $\mathcal{D}_s = \rho_s \lambda_T^2$  :

$$\mathcal{D}_s = \mathcal{D}_s^{(0)} + \frac{\pi}{2} (\mathcal{D}_s^{(0)})^2 \int r^2 \langle \rho_v(\mathbf{r}) \rho_v(0) \rangle d^2r. \quad (77)$$

Pour évaluer la fonction de corrélation densité-densité pour les vortex, limitons-nous au premier terme non nul qui correspond à une paire vortex-antivortex, avec soit le vortex + en 0 et le vortex – en  $\mathbf{r}$ , soit l'inverse. Cela revient à évaluer le premier terme dans un développement en puissances de la fugacité d'un vortex  $y_0$ . En utilisant le poids de Boltzmann trouvé en (25) pour une telle paire et nous limitant aux paires de séparation supérieure à  $a$ , nous avons

$$\int r^2 \langle \rho_v(\mathbf{r}) \rho_v(0) \rangle d^2r \approx -\frac{2y_0^2}{a^4} \int_a^{+\infty} r^2 \left(\frac{a}{r}\right)^{\mathcal{D}_s^{(0)}} 2\pi r dr, \quad (78)$$

ce qui conduit à, en passant<sup>2</sup> de la fonction  $\mathcal{D}_s$  à  $1/\mathcal{D}_s$  :

$$\frac{1}{\mathcal{D}_s} = \frac{1}{\mathcal{D}_s^{(0)}} + 2\pi^2 y_0^2 \int_a^{+\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{\mathcal{D}_s^{(0)}-3} \frac{dr}{a}. \quad (81)$$

Notons que dans cette expression la fugacité  $y_0$  d'un vortex est elle-même une fonction de la longueur de coupure  $a$  puisque l'énergie de cœur de vortex qui contribue dans  $y_0$  dépend de la frontière que l'on impose à cette région de cœur.

#### 4-4 Le principe de la renormalisation

La renormalisation pour le problème BKT consiste à faire croître progressivement l'échelle de distance  $a$  pour absorber de plus en plus d'aspects de la physique courte distance, en particulier les paires liées vortex-antivortex, dans la densité superfluide  $\rho_s^{(0)}$ . Toute la question est de savoir si au terme de ce processus,  $\rho_s^{(0)}$  aura convergé vers une valeur nulle ou non nulle. Une action du groupe de renormalisation peut être vue comme une succession de deux étapes [KARDAR (2007), chapitres 4 et 8] :

2. La relation  $\mathcal{D}_s = \mathcal{D}_s^{(0)} + \alpha(\mathcal{D}_s^{(0)})^2$  avec  $\alpha\mathcal{D}_s^{(0)} \ll 1$  peut en effet s'écrire :

$$\frac{1}{\mathcal{D}_s} = \frac{1}{\mathcal{D}_s^{(0)} + \alpha(\mathcal{D}_s^{(0)})^2} = \frac{1}{\mathcal{D}_s^{(0)}} \frac{1}{1 + \alpha\mathcal{D}_s^{(0)}} \approx \frac{1}{\mathcal{D}_s^{(0)}} (1 - \alpha\mathcal{D}_s^{(0)}) = \frac{1}{\mathcal{D}_s^{(0)}} - \alpha. \quad (79)$$

Par ailleurs cette relation est écrite dans de nombreux ouvrages en termes de la quantité  $K = \hbar^2 \rho_s / m k_B T = \mathcal{D}_s / 2\pi$ , ce qui donne :

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_0} + 4\pi^3 y_0^2 \int_a^{+\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{2\pi K_0 - 3} \frac{dr}{a}. \quad (80)$$

— Partant de la moyenne « à gros grains » effectuée sur l'échelle de distance  $a$ , on augmente légèrement cette échelle  $a \rightarrow \tilde{a} = a(1 + \varepsilon)$ . L'intégrale (81) se réécrit :

$$\int_a^{+\infty} \dots = \int_a^{a(1+\varepsilon)} \dots + \int_{a(1+\varepsilon)}^{+\infty} \dots \quad (82)$$

et la composante entre  $a$  et  $a(1 + \varepsilon)$  est incorporée dans  $1/\mathcal{D}_s^{(0)}$  qui devient  $1/\tilde{\mathcal{D}}_s^{(0)}$  :

$$\frac{1}{\tilde{\mathcal{D}}_s^{(0)}} = \frac{1}{\mathcal{D}_s^{(0)}} + 2\pi^2 y_0^2 \int_a^{a(1+\varepsilon)} \left(\frac{a}{r}\right)^{\mathcal{D}_s^{(0)}-3} \frac{dr}{a}. \quad (83)$$

L'équation (81) s'écrit alors

$$\frac{1}{\mathcal{D}_s} = \frac{1}{\tilde{\mathcal{D}}_s^{(0)}} + 2\pi^2 y_0^2 \int_{a(1+\varepsilon)}^{+\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{\mathcal{D}_s^{(0)}-3} \frac{dr}{a}. \quad (84)$$

— On fait ensuite une transformation d'échelle sur (84) pour ramener  $a(1 + \varepsilon)$  sur  $a$ , ce qui vient en particulier modifier  $y_0$  :  $y_0 \rightarrow \tilde{y}_0$  :

$$\frac{1}{\mathcal{D}_s} = \frac{1}{\tilde{\mathcal{D}}_s^{(0)}} + 2\pi^2 \tilde{y}_0^2 \int_a^{+\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{\tilde{\mathcal{D}}_s^{(0)}-3} \frac{dr}{a} \quad (85)$$

avec

$$\tilde{y}_0 = y_0 (1 + \varepsilon)^{(4 - \mathcal{D}_s^{(0)})/2}. \quad (86)$$

On remarquera aussi que  $\tilde{\mathcal{D}}_s^{(0)}$  a été substitué à  $\mathcal{D}_s^{(0)}$  dans l'exposant de l'intégrande de (85), ce qui permet d'assurer l'invariance de l'équation après action du groupe de renormalisation. Ce point se justifie en allant regarder les termes d'ordre suivant (ordre 4) dans le développement en puissances de  $y_0$  (CHAIKIN & LUBENSKY 2000).

La limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans les deux équations (83) et (86) conduit alors au système différentiel pour le couple de fonctions  $[\mathcal{D}_s^{(0)}, y_0]$

$$\frac{d[\mathcal{D}_s^{(0)}]^{-1}}{d\varepsilon} = 2\pi^2 y_0^2 \quad (87)$$

$$\frac{dy_0}{d\varepsilon} = \frac{1}{2} (4 - \mathcal{D}_s^{(0)}) y_0 \quad (88)$$

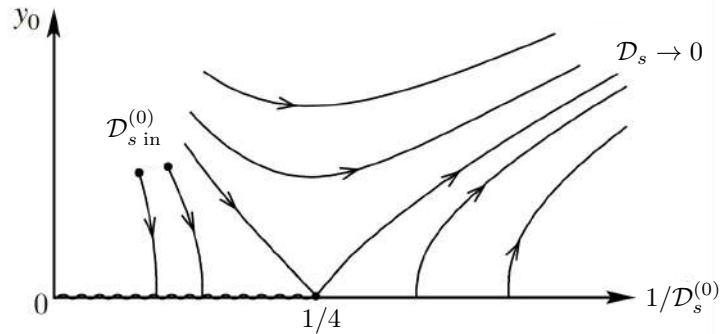


FIGURE 9. Trajectoires dans le plan  $[D_s^{(0)}, y_0]$  obtenues par action de la procédure de renormalisation. Figure adaptée de KARDAR (2007).

Nous ne rentrerons pas dans le détail de la résolution de ce système qui, depuis les articles initiaux de KOSTERLITZ (1974), NELSON & KOSTERLITZ (1977) et JOSÉ, KADANOFF et al. (1977), est devenu un classique des ouvrages sur la théorie statistique des champs. Indiquons simplement ici les principaux résultats, illustrés sur la figure 9 :

- Si on part d'une densité superfluide  $D_s^{(0)} < 4$ , alors on finit toujours avec une densité superfluide nulle.
- Si on part d'une densité superfluide  $D_s^{(0)} > 4$  et une fugacité  $y_0$  assez basse (*i.e.*, créer un vortex coûte une énergie significative), alors on termine la procédure de renormalisation toujours avec  $D_s^{(0)} > 4$  et une fugacité nulle : les vortex ont été « effacés » et le gaz est superfluide.
- Si on part d'une densité superfluide  $D_s^{(0)} > 4$ , mais avec une grande fugacité pour les vortex (*i.e.*, créer un vortex ne coûte presque rien en énergie en comparaison à  $k_B T$ ), on termine dans un état non superfluide. Notons toutefois que la conclusion pour cette situation peut être relativisée pour des systèmes de taille finie, car la limite de la procédure de renormalisation n'est pas forcément atteinte.

La transition BKT à laquelle on aboutit quand  $D_s$  décroît pour atteindre la valeur critique

$$D_{s, \text{crit.}} = 4 \quad (89)$$

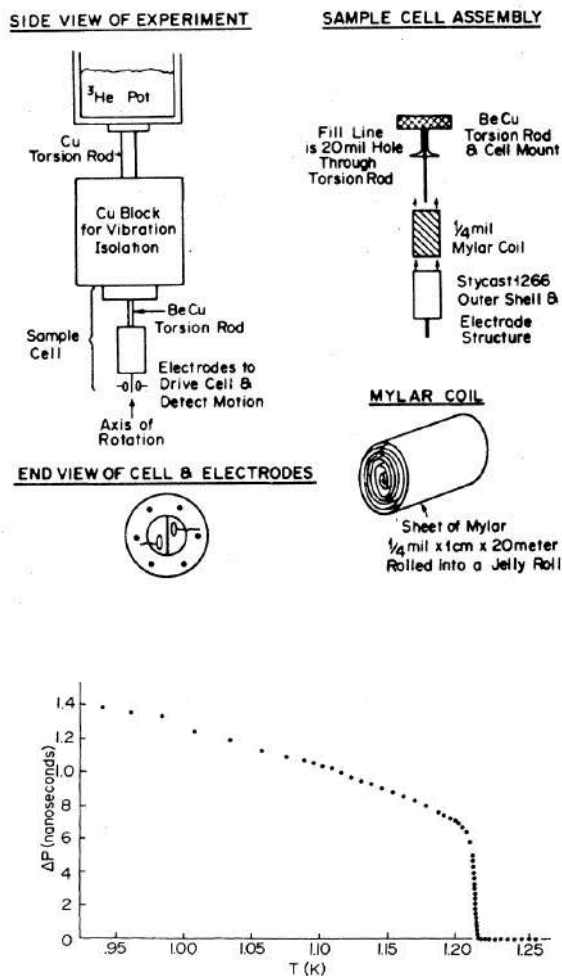
est très différente des transitions de phase du premier ou du deuxième ordre ordinaires :

- Tout d'abord, toutes les fonctions thermodynamiques sont continues et dérivables au point de transition : nous n'avons pas trouvé la transition BKT en recherchant des singularités de l'énergie libre et de ses dérivées par rapport aux variables thermodynamiques usuelles (potentiel chimique et température). Il n'y a donc pas d'exposants critiques associés à la transition. En revanche la densité superfluide est discontinue, puisqu'elle passe de la valeur 4 à la valeur 0 en ce point. Ce saut est souvent qualifié « d'universel » car son amplitude  $\Delta D_s = 4$  est indépendante de la force des interactions  $\tilde{g}$ . Nous avons senti ce résultat quand nous avons analysé la probabilité qu'un vortex libre apparaisse dans l'échantillon.
- Ce saut de la densité superfluide s'accompagne d'un changement de comportement de la fonction à un corps. Pour  $T < T_c$ , dans la zone superfluide, la fonction  $G_1(r)$  décroît algébriquement ; c'est le quasi-ordre à longue portée que nous avons étudié au cours précédent. Pour  $T > T_c$ , dans la zone normale, la fonction  $G_1$  décroît exponentiellement avec la distance. En effet les vortex isolés prolifèrent dans le gaz et on ne peut pas avoir de cohérence de phase significative entre deux points si la probabilité d'avoir un vortex entre ces deux points est elle-même significative.
- On peut montrer que cette transition « d'ordre infini » est caractérisée par une divergence extrêmement forte de la longueur de corrélation quand on approche du côté  $T > T_c$ . La fonction  $G_1(r)$  décroît exponentiellement dans cette zone non superfluide,  $G_1(r) \propto e^{-r/\ell}$ , mais la longueur de décroissance augmente rapidement :

$$\ell \sim \lambda_T \exp\left(\frac{\sqrt{\zeta T_{\text{BKT}}}}{\sqrt{T - T_{\text{BKT}}}}\right) \quad (90)$$

où  $\zeta$  est une constante. La taille de la région critique est donc augmentée par rapport à une transition conventionnelle, ce qui fait jouer aux effets de taille finie un rôle plus important.





**FIGURE 10.** Haut : schéma expérimental utilisé par BISHOP & REPPY (1978). Une feuille de Mylar de surface  $\sim 0.4 \text{ m}^2$  est recouverte d'un film d'hélium liquide. L'épaisseur de ce film est de l'ordre de quelques couches atomiques seulement. La feuille de Mylar est montée sur un pendule de torsion pour mesurer le moment d'inertie de l'ensemble Mylar+film d'hélium. Bas : Exemple de résultat pour la période du pendule de torsion en fonction de la température du système. La transition superfluide se manifeste par une réduction soudaine du moment d'inertie. Figures extraites de BISHOP & REPPY (1978) et BISHOP & REPPY (1980).

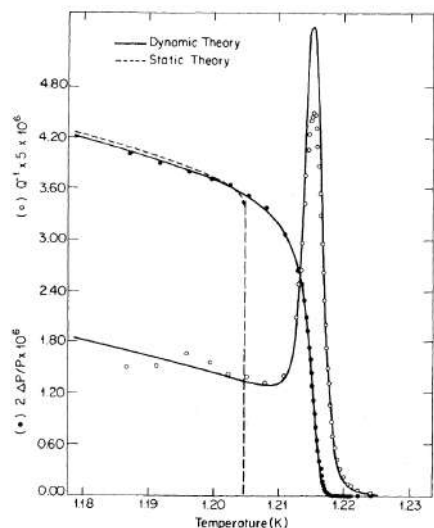
#### 4-5 Premières études expérimentales : films d'hélium

Cinq ans après les articles théoriques de BKT, BISHOP & REPPY (1978) sont venus apporter une très belle confirmation expérimentale de l'existence d'une transition superfluide dans des films d'hélium liquide. Ces expériences, décrites de manière détaillée dans BISHOP & REPPY (1980), puis AGNOLET, MCQUEENEY et al. (1989), sont faites en déposant une très fine couche d'atomes d'hélium (entre 1 et 10 couches atomiques) sur une feuille de Mylar. Cette feuille d'épaisseur  $6 \mu\text{m}$ , est enroulée sur elle-même et a une surface totale de  $0.4 \text{ m}^2$  dans les expériences de 1978 [ $2 \text{ m}^2$  pour AGNOLET, MCQUEENEY et al. (1989)].

La superfluidité éventuelle du film d'hélium est testée en mettant la feuille de Mylar en mouvement et en mesurant si le film d'hélium adsorbé sur cette surface se met également en mouvement. Si c'est le cas, c'est que le fluide est normal. Si au contraire une fraction du fluide reste au repos, on a affaire à un superfluide. Pour effectuer une mesure précise, on relie la feuille de Mylar à un pendule de torsion de haut facteur de qualité,  $Q > 10^5$  (expérience d'Andronikashvili). La fréquence d'oscillation de l'ensemble est aux alentours de  $2.6 \text{ kHz}$  et on la mesure avec une précision relative excellente, de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-9}$ . La période d'oscillation, autour de  $380 \mu\text{s}$ , est donc obtenue avec une précision de 2 picosecondes !

Un exemple de variation de cette période avec la température, pour un film d'épaisseur donnée, est montré sur la figure 10. On y voit une période constante à "haute" température,  $T > 1.22 \text{ K}$ , puis un saut de cette période d'environ  $6 \text{ ns}$ , correspondant à une réduction du moment d'inertie du système. Cela s'interprète comme le fait qu'une partie du film d'hélium est devenue superfluide et que la masse correspondante n'oscille donc pas. Quand on refroidit davantage le film, la réduction de période s'accroît, indiquant qu'une fraction de plus en plus grande du film devient superfluide.

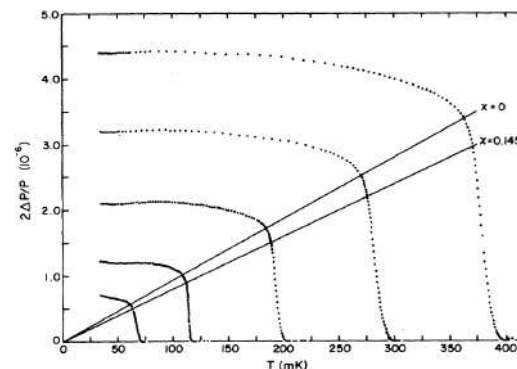
Dans la mesure où la mesure de la fraction superfluide est faite autour de la fréquence de  $2.6 \text{ kHz}$  et non à fréquence nulle, il est nécessaire pour rendre compte quantitativement de cette expérience de reprendre la théorie BKT pour lui ajouter l'aspect dynamique lié aux mouvements des vortex. Cette extension a été faite par AMBEGAOKAR, HALPERIN et al. (1978) et l'accord avec les mesures expérimentales est excellent (figure 11). Elle



**FIGURE 11.** Ajustement des données expérimentales avec la théorie BKT dynamique de AMBEGAOKAR, HALPERIN et al. (1978). La courbe en pointillé représente la théorie BKT statique que nous avons étudiée dans ce chapitre. Les données en symboles ouverts représente l'excès de dissipation  $Q^{-1}$  dû au superfluide (non discuté dans ce cours). Figure extraite de BISHOP & REPPY (1978).

explique en particulier pourquoi on n'observe pas un saut au sens strict de la densité superfluide correspondant à  $\Delta D_s = 4$ , mais plutôt une variation rapide sur une plage de l'ordre de 5 mK. La répétition de ces mesures pour différentes quantités d'hélium déposées sur la feuille de Mylar est présentée sur la figure 12. Chaque épaisseur correspond à un couple "température critique – saut  $\Delta\rho_s$ ", et BISHOP & REPPY (1978) ont pu vérifier que la loi attendue  $\Delta\rho_s \propto T$  était effectivement satisfaite.

**Cristaux d'hélium et transition rugueuse.** Un autre exemple de transition de type BKT qui se manifeste dans l'hélium froid est la transition rugueuse. Cette transition se produit à l'interface entre le superfluide  $^4\text{He}$  et un cristal d'hélium. En dessous de la température critique, une facette plate se développe dans la direction de croissance; au dessus de  $T_c$ , la surface est



**FIGURE 12.** Mesure de la transition BKT pour différentes quantités d'hélium adsorbées sur le Mylar, montrant le déplacement de la température de transition  $T_c$  et le saut de la densité superfluide  $\rho_s$ . La loi  $\Delta\rho_s \propto T$  prédite par la théorie BKT correspond aux lignes droites en trait plein. Le paramètre phénoménologique  $\chi$  appelé obstruction géométrique (geometric hindrance) représente la fraction de superfluide qui n'est pas libre de se déplacer par rapport au Mylar du fait d'imperfections dans l'enroulement de la feuille; sa valeur expérimentale, mesurée indépendamment, est de 0.145. Figure extraite de AGNOLET, MCQUEENEY et al. (1989)

rugueuse. Les expériences ont confirmé plusieurs des caractéristiques de la transition BKT, en mesurant par exemple la vitesse de croissance du cristal en fonction de la température (BALIBAR & CASTAING 1980; WOLF, BALIBAR et al. 1983; WOLF, GALLET et al. 1985; GALLET, BALIBAR et al. 1987).

**Films d'hydrogène.** Pour terminer, citons l'étude d'un gaz bi-dimensionnel d'hydrogène adsorbé à la surface d'un bain d'hélium liquide (SAFONOV, VASILYEV et al. 1998). Les atomes d'hydrogène « flottent » au dessus du bain à une distance de l'ordre de 8 micromètres. Ils ne forment pas un gaz stable : dans une collision à trois corps, deux atomes peuvent se recombiner pour former une molécule  $\text{H}_2$ , le troisième corps emportant l'énergie libérée. Le taux de processus à trois corps varie comme  $\langle \rho^3 \rangle$ ; dans un gaz « ordinaire », les fluctuations de densité conduisent à  $\langle \rho^3 \rangle \approx 3! (\langle \rho \rangle)^3$ . Pour un gaz où les fluctuations de densité

sont gelées (quasi-condensat), on s'attend à  $\langle \rho^3 \rangle \approx (\langle \rho \rangle)^3$ , soit une réduction de  $3! = 6$ . SAFONOV, VASILYEV et al. (1998) ont effectivement mesuré une réduction du taux de pertes d'environ un ordre de grandeur en refroidissant le gaz à une température comparable à celle prévue par la théorie BKT.

## Références

- AGNOLET, Glenn, DF MCQUEENEY & JD REPPY (1989), « Kosterlitz-Thouless transition in helium films », in *Physical Review B* **39**, p. 8934.
- AMBEGAOKAR, Vinay, B. I. HALPERIN, David R. NELSON & Eric D. SIGGIA (1978), « Dissipation in Two-Dimensional Superfluids », in *Phys. Rev. Lett.* **40** (12), p. 783–786.
- BALIBAR, S & B CASTAING (1980), « Possible observation of the roughening transition in helium », in *Journal de Physique Lettres* **41**, p. 329–332.
- BISHOP, D. J. & J. D. REPPY (1978), « Study of the Superfluid Transition in Two-Dimensional  $^4\text{He}$  Films », in *Phys. Rev. Lett.* **40**, p. 1727–1730.
- (1980), « Study of the superfluid transition in two-dimensional  $^4\text{He}$  films », in *Phys. Rev. B* **22**, p. 5171–5185.
- CHAIKIN, Paul M & Tom C LUBENSKY (2000), *Principles of condensed matter physics*, Cambridge university press.
- GALLET, F, S BALIBAR & E ROLLEY (1987), « The roughening transition of crystal surfaces. II. experiments on static and dynamic properties near the first roughening transition of hcp  $4\text{He}$  », in *Journal de Physique* **48**, p. 369–377.
- JOSÉ, Jorge V., Leo P. KADANOFF, Scott KIRKPATRICK & David R. NELSON (1977), « Renormalization, vortices, and symmetry-breaking perturbations in the two-dimensional planar model », in *Phys. Rev. B* **16**, p. 1217–1241.
- KARDAR, Mehran (2007), *Statistical physics of fields*, Cambridge University Press.
- KOSTERLITZ, J M (1974), « The critical properties of the two-dimensional xy model », in *Journal of Physics C : Solid State Physics* **7**, p. 1046–1060.
- KOSTERLITZ, J. M. & D. J. THOULESS (1973), « Ordering, metastability and phase transitions in two dimensional systems », in *J. Phys. C : Solid State Physics* **6**, p. 1181.
- MINNHAGEN, Petter & G. G. WARREN (1981), « Superfluid density of a two-dimensional fluid », in *Phys. Rev. B* **24**, p. 2526–2532.
- NELSON, D. R. & J. M. KOSTERLITZ (1977), « Universal Jump in the Superfluid Density of Two-Dimensional Superfluids », in *Phys. Rev. Lett.* **39**, p. 1201.
- NOZIÈRES, P. & D. PINES (1990), *The Theory of Quantum Liquids, Superfluid Bose Liquids*, Addison-Wesley.
- SAFONOV, A. I., S. A. VASILYEV, I. S. YASNIKOV, I. I. LUKASHEVICH & S. JAAKKOLA (1998), « Observation of Quasicondensate in Two-Dimensional Atomic Hydrogen », in *Phys. Rev. Lett.* **81**, p. 4545.
- WOLF, PE, S BALIBAR & F GALLET (1983), « Experimental Observation of a Third Roughening Transition on hcp  $\text{He 4}$  Crystals », in *Physical review letters* **51**, p. 1366.
- WOLF, PE, F GALLET, S BALIBAR, E ROLLEY & Ph NOZIERES (1985), « Crystal growth and crystal curvature near roughening transitions in hcp  $4\text{He}$  », in *Journal de Physique* **46**, p. 1987–2007.