

Cohérence et superfluidité dans les gaz atomiques

Jean Dalibard
Collège de France, chaire *Atomes et rayonnement*

Cours 2015-16

Introduction

Grâce au refroidissement lumineux complété par le refroidissement par évaporation, on sait abaisser la température des gaz atomiques dans un domaine de température inédit, situé entre le nano et le microkelvin. Quand les atomes sont des particules de spin entier, donc des bosons, ce refroidissement peut donner naissance à un condensat de Bose–Einstein, comme celui représenté sur la figure 1. Ce phénomène observé pour la première fois il y a une vingtaine d’années [voir par exemple les conférences Nobel de Cornell & Wieman (2002) et Ketterle (2002)] a donné naissance à un vaste champ de recherche, allant de la physique à N corps à la métrologie.

Le cours de cette année est consacré à l’étude des propriétés de cohérence et de superfluidité de ces gaz d’atomes. La cohérence apparaît comme une conséquence directe du phénomène de condensation prédit par Einstein (1925) à partir des travaux de Bose (1924). L’accumulation d’atomes dans un état donné donne naissance à une onde de matière macroscopique dont la cohérence peut être évaluée à partir d’expériences d’interférence. En parallèle avec cette apparition de la cohérence, on observe dans ces gaz un comportement superfluide, se traduisant par une absence de chauffage lorsqu’ils sont traversés par une impureté mobile. Une autre manifestation de la superfluidité concerne l’existence de courants permanents, excitations macroscopiques métastables de longue durée de vie. Il existe ainsi un lien étroit entre la physique de ces gaz d’atomes froids et celle de l’hélium liquide, en dépit d’une différence de 8 à 10 ordres de grandeur entre leurs densités.

Le cours de cette année va s’attacher à établir des liens entre ces différentes propriétés des fluides quantiques atomiques. A partir de modélisations théoriques relativement simples (équation de Gross-Pitaevskii, méthode de Bogoliubov, *ansatz* de Gutzwiller, ...), nous allons étudier le cas des systèmes homogènes ainsi que celui des gaz confinés dans des réseaux

optiques, avec notamment la transition entre un état superfluide et un état isolant de Mott. Nous décrirons également une série d’expériences récentes menées sur ces systèmes, mettant en évidence différentes facettes de la cohérence macroscopique et de la superfluidité.

Notons que nous nous limiterons cette année au cas de gaz de Bose polarisés, pour lesquels les concepts de cohérence et de superfluidité sont les plus simples à présenter. Les gaz de fermions en interaction présentent eux aussi des propriétés superfluides (Inguscio, Ketterle, et al. 2008; Benemann & Ketterson 2013), tout comme les mélanges bosons-fermions (Ferrier-Barbut, Delehay, et al. 2014) et les gaz spineurs (Stamper-Kurn & Ueda 2013): l’étude de ces systèmes plus complexes fera l’objet de cours ultérieurs.

Le plan du cours est le suivant :

- Le chapitre 1 sera consacré à la statistique de Bose–Einstein et à une de ses conséquences les plus spectaculaires, la saturation du gaz parfait et le phénomène de condensation. Nous décrirons comment cette saturation a été mise en évidence expérimentalement grâce à des expériences réalisées avec des gaz uniformes (Gaunt, Schmidutz, et al. 2013). Nous étudierons également comment aller au delà du modèle du gaz parfait pour caractériser l’apparition d’un condensat, avec notamment le critère de Penrose & Onsager (1956).
- Le chapitre 2 fera le lien entre condensation de Bose–Einstein et superfluidité. Nous étudierons deux propriétés caractéristiques de la superfluidité, la robustesse de la phase de la fonction d’onde macroscopique et l’existence de courants permanents, états métastables du fluide. Nous verrons comment ces propriétés peuvent être testées expérimentalement dans des expériences réalisées avec des anneaux d’atomes froids (Eckel, Jendrzejewski, et al. 2014).

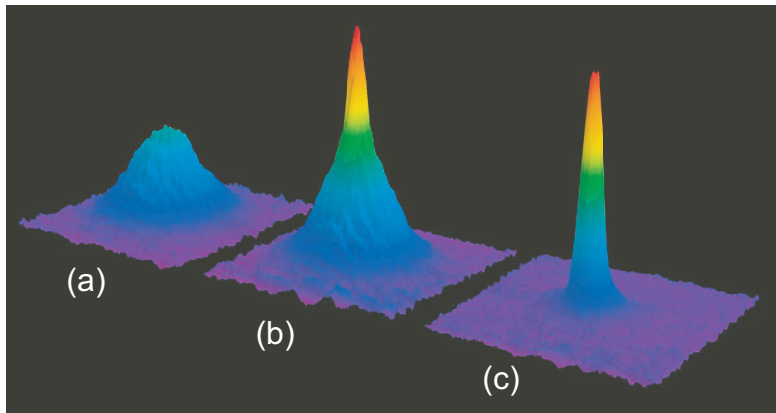


FIGURE 1. Évolution de la distribution en vitesse d'un gaz d'environ 1 million d'atomes de sodium lors du refroidissement par évaporation dans un piège magnétique. La photo (a) correspond à une température de quelques microkelvins, atteinte par refroidissement lumineux et supérieure à la température de condensation ; la répartition des vitesses atomiques est proche d'une distribution de Maxwell-Boltzmann. La photo (b) correspond à une température légèrement inférieure à la température de condensation (de l'ordre du microkelvin). Le pic central étroit correspond aux atomes condensés ; ce pic est superposé à un piédestal plus large, correspondant aux atomes non condensés. La photo (c) a été obtenue en poussant encore plus loin le refroidissement par évaporation : le nuage atomique est alors quasi-totalement condensé (photographie fournie par W. Ketterle, MIT).

— Le chapitre 3 détaillera le rôle essentiel des interactions pour faire apparaître le caractère superfluide. Nous étudierons la fonctionnelle d'énergie de Gross-Pitaevskii, essentiellement dans un cadre de champ classique, nous déterminerons le spectre d'excitation du gaz en interaction et nous présenterons des mesures expérimentales précises de ce spectre (Steinhauer, Ozeri, et al. 2002). Nous établirons le critère de Landau, qui exprime une condition nécessaire pour la métastabilité d'un écoulement superfluide, et nous verrons comment aller au delà de ce critère en étudiant la nucléation de vortex quantiques dans le gaz.

— Le chapitre 4 abordera le problème de la superfluidité en présence

d'un potentiel périodique créé par un réseau optique. Nous expliquerons d'abord pourquoi la présence de ce potentiel peut diminuer la stabilité d'un écoulement en donnant naissance à une instabilité dynamique (Fallani, De Sarlo, et al. 2004). Pour des plus grandes profondeurs de réseau, l'état superfluide disparaît et on obtient, à température nulle, une phase *isolant de Mott*. Nous présenterons un traitement théorique simple, fondé sur l'*ansatz* de Gutzwiller, pour rendre compte de cette transition de phase quantique.

— Le chapitre 5 décrira quelques expériences montrant cette transition superfluide–isolant de Mott dans un réseau (Greiner, Mandel, et al. 2002; Bakr, Peng, et al. 2009; Sherson, Weitenberg, et al. 2010). Nous verrons en particulier comment tester la cohérence du gaz (et son éventuelle disparition) par une méthode de temps de vol. Nous étudierons également la nature même de la transition, en revenant au modèle de Landau–Ginzburg pour une transition du deuxième ordre. Nous expliquerons pourquoi ce gaz sur réseau permet, dans certains cas, d'observer un mode absent pour un gaz homogène, similaire au mode de Higgs bien connu en physique des particules. Nous décrirons pour terminer quelques expériences récentes ayant mis ce mode en évidence (Bissbort, Götze, et al. 2011; Endres, Fukuhara, et al. 2012).

Références

- Bakr, W. S., A. Peng, S. Folling & M. Greiner (2009), « A quantum gas microscope for detecting single atoms in a Hubbard-regime optical lattice », in *Nature* 462, pp. 74–77.
- Bennemann, Karl-Heinz & John B Ketterson (2013), *Novel superfluids*, vol. 1 and 2, Oxford University Press.
- Bissbort, Ulf, Sören Götze, Yongqiang Li, Jannes Heinze, Jasper S. Krauser, Malte Weinberg, Christoph Becker, Klaus Sengstock & Walter Hofstetter (2011), « Detecting the Amplitude Mode of Strongly Interacting Lattice Bosons by Bragg Scattering », in *Phys. Rev. Lett.* 106 (20), p. 205303.
- Bose, S. N. (1924), « Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese », in *Z. Phys.* 26, p. 178.

-
- Cornell, E. A. & C. E. Wieman (2002), « Nobel Lecture : Bose–Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments », in *Rev. Mod. Phys.* 74.3, pp. 875–893.
- Eckel, S., F. Jendrzejewski, A. Kumar, C. J. Lobb & G. K. Campbell (2014), « Interferometric Measurement of the Current-Phase Relationship of a Superfluid Weak Link », in *Phys. Rev. X* 4 (3), p. 031052.
- Einstein, A. (1925), « Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. II », in *Sitzungsberichte/Physikalische Klasse, Preussische Akademie der Wissenschaften* 1, p. 3.
- Endres, Manuel, Takeshi Fukuhara, David Pekker, Marc Cheneau, Peter Schauβ, Christian Gross, Eugene Demler, Stefan Kuhr & Immanuel Bloch (2012), « The ‘Higgs’ amplitude mode at the two-dimensional superfluid/Mott insulator transition », in *Nature* 487.7408, pp. 454–458.
- Fallani, L., L. De Sarlo, J. E. Lye, M. Modugno, R. Saers, C. Fort & M. Inguscio (2004), « Observation of Dynamical Instability for a Bose-Einstein Condensate in a Moving 1D Optical Lattice », in *Phys. Rev. Lett.* 93 (14), p. 140406.
- Ferrier-Barbut, Igor, Marion Delehaye, Sebastien Laurent, Andrew T Grier, Matthieu Pierce, Benno S Rem, Frédéric Chevy & Christophe Salomon (2014), « A mixture of Bose and Fermi superfluids », in *Science* 345.6200, pp. 1035–1038.
- Gaunt, Alexander L., Tobias F. Schmidutz, Igor Gotlibovych, Robert P. Smith & Zoran Hadzibabic (2013), « Bose-Einstein Condensation of Atoms in a Uniform Potential », in *Phys. Rev. Lett.* 110 (20), p. 200406.
- Greiner, M., M. O. Mandel, T. Esslinger, T. Hänsch & I. Bloch (2002), « Quantum Phase Transition from a Superfluid to a Mott Insulator in a Gas of Ultracold Atoms », in *Nature* 415, p. 39.
- Inguscio, M, W Ketterle & C Salomon, eds. (2008), *Ultra-cold Fermi Gases*, Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi, Course CLXIV, Varenna 2006, IOS Press.
- Ketterle, W. (2002), « Nobel lecture : When atoms behave as waves : Bose–Einstein condensation and the atom laser », in *Rev. Mod. Phys.* 74.4, pp. 1131–1151.
- Penrose, O. & L. Onsager (1956), « Bose–Einstein condensation and liquid helium », in *Phys. Rev.* 104, p. 576.
- Sherson, Jacob F., Christof Weitenberg, Manuel Endres, Marc Cheneau, Immanuel Bloch & Stefan Kuhr (2010), « Single-atom-resolved fluorescence imaging of an atomic Mott insulator », in *Nature* 467.7311, 68.
- Stamper-Kurn, Dan M. & Masahito Ueda (2013), « Spinor Bose gases : Symmetries, magnetism, and quantum dynamics », in *Rev. Mod. Phys.* 85 (3), pp. 1191–1244.
- Steinhauer, J., R. Ozeri, N. Katz & N. Davidson (2002), « Excitation spectrum of a Bose–Einstein condensate », in *Phys. Phys. Lett.* 88.12, p. 120407.

Chapitre 1

Statistique de Bose–Einstein et condensation

Sommaire

1	De Boltzmann à Bose–Einstein	2
1-1	La proposition de Bose	2
1-2	Le passage aux particules matérielles	2
1-3	Le phénomène d’émission stimulée	4
1-4	Un autre éclairage sur les lois statistiques	5
2	La condensation du gaz de Bose parfait	7
2-1	Saturation des états excités	7
2-2	L’expérience de Cambridge	8
2-3	Le cas d’un gaz piégé	9
3	La CBE à la limite thermodynamique	10
3-1	Limite thermodynamique en dimension réduite	11
3-2	La saturation de la densité à 3D	12
3-3	Le point de condensation	12
3-4	Utilisation de la densité d’états en énergie	14
3-5	Limite thermodynamique pour un piège	14
4	La condensation de BE au delà du gaz parfait	16
4-1	Le critère de Penrose–Onsager	16
4-2	L’ordre à longue portée dans un fluide homogène	17
4-3	Distribution en impulsion et fonction G_1	18

Le premier chapitre de ce cours va être consacré à un problème simple, l’étude de l’état d’équilibre d’un gaz parfait composé de particules indiscernables. Nous partirons du travail de Bose (1924), qui s’est le premier posé ce problème dans le cadre de ses études sur le rayonnement du corps noir, c’est-à-dire un gaz thermique de photons. La généralisation par Einstein à un gaz de particules matérielles fut presque immédiate et permit d’introduire le concept de saturation des états excités : pour un système de taille finie et à température donnée, le nombre de particules que l’on peut placer dans l’ensemble des niveaux d’énergie de l’hamiltonien en dehors du niveau fondamental est borné. Les particules en excès de cette borne ne peuvent donc occuper que le niveau fondamental, formant ainsi un *condensat de Bose–Einstein*.

Une fois cette saturation acquise, à la fois pour un gaz confiné dans une boîte et dans un piège harmonique, nous étudierons comment prendre la limite thermodynamique du système, en faisant tendre la taille du gaz vers l’infini et en gardant les paramètres intensifs (densité, température) constants. Nous verrons que la « survie » de la saturation dépend à la fois de la dimensionnalité de l’espace de travail et de la forme du confinement du gaz. Nous illustrerons ces différents concepts par des résultats expérimentaux récents, obtenus notamment avec des pièges « à fond plat » pour les gaz atomiques. Nous terminerons ce chapitre par une toute première discussion de la description de la condensation de Bose–Einstein (CBE) au delà du gaz parfait, avec le critère proposé par Penrose et Onsager.

L’étude du gaz parfait obéissant à la statistique de Bose–Einstein est

décrite dans de nombreux ouvrages de physique [voir par exemple Diu, Guthmann, et al. (1989) ainsi que Cohen-Tannoudji (1997-1998)]. Il n'est pas question de dupliquer ici ce traitement, mais plutôt d'insister sur quelques points saillants comme l'importance de l'émission stimulée, ou encore l'universalité du concept de saturation en dehors de toute limite thermodynamique.

1 De Boltzmann à Bose–Einstein

1-1 La proposition de Bose

En juin 1924, le jeune physicien bengali Satyendra Nath Bose qui travaillait à l'Université de Dhaka (désormais au Bangladesh) envoya une lettre à Einstein, accompagnée d'un manuscrit. Le manuscrit en anglais avait été refusé par le *Philosophical Magazine* ; Bose demandait donc son avis et éventuellement son aide à Einstein pour publier son travail. Le manuscrit de Bose proposait une nouvelle dérivation de la formule du rayonnement du corps noir de Planck. Bose passait d'abord en revue quelques méthodes connues à l'époque pour justifier cette formule et écrivait :

In all cases it appears to me that the derivations have not been sufficiently justified from a logical point of view. As opposed to these the light quantum hypothesis combined with statistical mechanics (as it was formulated to meet the needs of the quantum theory) appears sufficient for the derivation of the law independent of classical theory.

Einstein, trouvant l'approche de Bose très prometteuse, traduisit lui-même l'article et le soumit à *Zeitschrift für Physik*. L'article fut publié (Bose 1924) avec cette note d'Einstein :

*Anmerkung des Übersetzers. Boses Ableitung der Planckschen Formel bedeutet nach meiner Meinung einen wichtigen Fortschritt. Die hier benutzte Methode liefert auch die Quantentheorie des idealen Gases, wie ich an anderer Stelle ausführen will.*¹

1. « Note du traducteur : Je considère que la dérivation de la formule de Planck par Bose constitue une avancée importante. La méthode utilisée ici conduit également à une théorie du gaz parfait quantique, que je discuterai en détail ailleurs. »

Pour Einstein, le point important du travail de Bose était la proposition d'une nouvelle manière pour compter les modes du champ électromagnétique, en divisant l'espace des phases en cellules de taille h^3 et en évaluant le nombre de façons de placer les quanta de lumière dans ces cellules. Plus précisément, comme l'analyse en détail Pais (1979), l'article de Bose contient trois idées radicalement nouvelles :

- Le nombre de photons n'est pas conservé.
- Le dénombrement se fait en répondant à la question : « Combien de particules se trouvent dans une cellule donnée ? » et non plus « Quelles particules se trouvent dans une cellule donnée ? »
- Les cellules sont indépendantes, mais l'indépendance statistique des particules a disparu.

Pais (1979) remarque (un peu ironiquement) que Bose ne commente aucun de ces trois points cruciaux et cite cette phrase ultérieure de Bose :

I had no idea that what I had done was really novel... I was not a statistician to the extent of really knowing that I was doing something which was really different from what Boltzmann would have done from Boltzmann statistics.

Quant à Einstein, son fort intérêt pour le travail de Bose ne l'empêchait pas de conserver une certaine distance puisqu'il écrivit à Ehrenfest en 1924 (Pais 1979) : *La dérivation de Bose est élégante mais son essence demeure obscure.*

1-2 Le passage aux particules matérielles

Comme annoncé dans sa « note du traducteur », Einstein transposa l'approche de Bose au cas du gaz parfait en une série de trois articles (Einstein 1924; Einstein 1925a; Einstein 1925b). Einstein remplaça le multiplicateur de Lagrange introduit par Bose pour le nombre de cellules – d'une utilité discutable puisque le nombre de cellules est fixé – par un multiplicateur de Lagrange exprimant la conservation du nombre de particules ; il remarqua au passage que ne pas mettre ce multiplicateur pour les particules revient à supposer que leur nombre n'est pas conservé, ce qui était implicite chez Bose.

Einstein arriva ainsi au dénombrement bien connu qui est la base de la statistique pour des particules indiscernables (au sens de Bose–Einstein) :

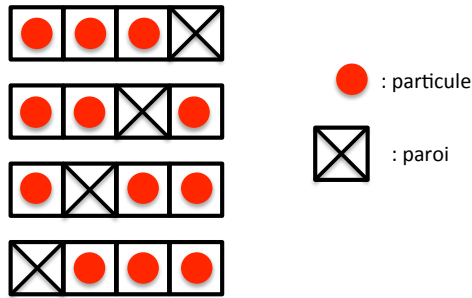


FIGURE 1. Les $W(N, M) = \frac{(M+N-1)!}{N!(M-1)!}$ possibilités pour mettre N particules dans M boîtes, avec ici $N = 3$ particules, $M = 2$ boîtes (soit $M - 1 = 1$ paroi intermédiaire) et donc $W(3, 2) = 4$ possibilités.

si l'on dispose de M boîtes dans lesquelles on doit placer N particules indiscernables, le nombre de combinaisons possibles est

$$W(N, M) = \frac{(M + N - 1)!}{N! (M - 1)!}, \tag{1}$$

alors que ce nombre est M^N pour des particules discernables. Rappelons (cf. figure 1) que le résultat (1) s'obtient en considérant $M + N - 1$ cases vides et en remplissant ces cases soit par une particule, soit par une paroi commune à deux boîtes (il y a M boîtes, donc $M - 1$ parois). Une fois que l'on a disposé les N particules dans les $M + N - 1$ cases [soit $W(N, M)$ possibilités], les positions des parois sont également fixées et la configuration parfaitement déterminée. Rappelons qu'une fois ce dénombrement effectué, on peut en déduire la loi de Bose–Einstein, donnant le taux d'occupation moyen d'un état j d'énergie E_j pour une assemblée d'atomes de température T et de potentiel chimique μ [voir par exemple Diu, Guthmann, et al. (1989)] :

$$N_j = \frac{1}{e^{(E_j - \mu)/k_B T} - 1}. \tag{2}$$

Le point crucial dans ce dénombrement est que l'on traite les particules non seulement comme *identiques*, mais également comme *indiscernables* [pour plus de détails, voir par exemple Cohen-Tannoudji, Dalibard, et al. (2005)]. Considérons par exemple la deuxième ligne de la figure 1,

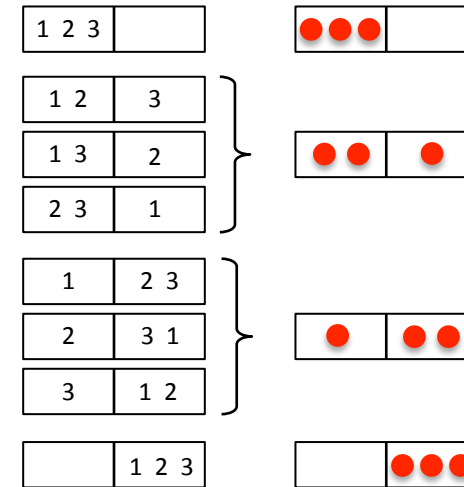
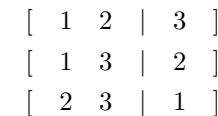


FIGURE 2. Différence entre statistique de Boltzmann et statistique de Bose–Einstein : dans le premier cas, il y a 2^N manières de répartir N particules dans deux boîtes (avec ici $N = 3$). Dans le deuxième cas, ce nombre est beaucoup plus petit : $1/(N + 1)$. Si on attribue une probabilité égale à chaque configuration, la statistique de Bose-Einstein favorise les configurations « condensées », c'est-à-dire la première et la dernière ligne de ce dessin.

que Bose et Einstein comptent comme une seule éventualité possible. Si les particules étaient *discernables* et donc numérotées par les entiers 1, 2 et 3, il y aurait en fait trois configurations microscopiques conduisant à cette ligne (cf. figure 2) :



correspondant aux trois choix possibles de la particule isolée dans la boîte de droite.

Soulignons également que l'aspect « grégaire » des particules indiscernables est manifeste sur le dénombrement (1). Considérons N particules et $M = 2$ boîtes, appelées A et B (figure 2). Supposons par ailleurs que

chaque éventualité de remplissage se produit avec la même probabilité et intéressons-nous à la situation « condensée », où les N particules occupent toutes la boîte A . Dans la nouvelle statistique introduite par Bose et expliquée par Einstein, cette éventualité se réalisera avec une probabilité

$$\text{Bose–Einstein : } p = \frac{1}{W(N, 2)} = \frac{1}{N + 1}. \quad (3)$$

C'est la ligne du haut des figures 1 et 2, avec la paroi disposée dans la case la plus à droite possible. La statistique de Boltzmann, pour des particules discernables, donne quant à elle le résultat exponentiellement plus petit

$$\text{Boltzmann : } p = \frac{1}{2^N}, \quad (4)$$

puisque chaque particule a une probabilité $1/2$ de se trouver dans la boîte A et que la probabilité totale est le produit des probabilités si les placements de chacune des particules sont indépendants.

L'exemple ci-dessus illustre bien le fait que la nouvelle statistique entraîne une « perte d'indépendance » des particules. Ce point avait été « reproché » à Einstein par des collègues, Schrödinger par exemple, suite à la publication de son premier article de 1924. Einstein le reprend donc de manière explicite dans l'article suivant : la différence entre statistique de Boltzmann et statistique de Bose–Einstein « exprime de manière indirecte une certaine hypothèse sur une influence mutuelle des molécules qui reste pour le moment d'une nature mystérieuse ». La nature de cette influence n'est autre que la nécessité de restreindre l'espace de Hilbert à des fonctions d'onde complètement symétriques par échange de deux particules, contrainte dont découle le phénomène d'émission stimulée comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant.

Pour finir ce paragraphe, mentionnons que le champ d'application de cette nouvelle statistique n'était à l'époque pas encore bien établi. Dans son article de 1925, Einstein suggèrait qu'elle pourrait s'appliquer aux électrons : « Il y a un cas où la nature a peut-être réalisé, pour l'essentiel, le gaz parfait saturé : c'est celui des électrons de conduction d'un métal ». Un an plus tard, la statistique de Fermi–Dirac avait été découverte et Dirac (1926), prenant le contre-pied d'Einstein, écrivait dans sa discussion du gaz parfait quantique :

The solution with symmetrical eigenfunctions must be the correct one when applied to light quanta, since it is known that the Einstein–Bose statistical mechanics leads to Planck's law of black-body radiation. The solution with antisymmetrical eigenfunctions, though, is probably the correct one for gas molecules, since it is known to be the correct one for electrons in an atom, and one would expect molecules to resemble electrons more closely than light quanta.

La notion d'objet composite, dont la nature statistique (Bose–Einstein ou Fermi–Dirac) ne dépend que du spin total (entier ou demi-entier), n'était manifestement pas encore comprise ! Rappelons que cette notion est pertinente tant qu'on travaille dans un domaine d'énergie bien inférieure à l'énergie caractéristique de la composition de cet objet. Pour un gaz d'atomes froids, cette condition est très largement remplie puisque les énergies internes atomiques sont de l'ordre de l'électron-volt, alors que les énergies cinétiques typiques des gaz sont inférieures par dix ordres de grandeur. La nature statistique d'un atome neutre (avec un nombre égal d'électrons et de protons) est donc déterminée par son nombre de neutrons. Si ce nombre est pair, le spin total de l'atome sera entier et l'atome sera un boson. Si le nombre de neutrons est impair, l'atome sera au contraire un fermion.

1-3 Le phénomène d'émission stimulée

Pour prendre en compte l'indiscernabilité des particules obéissant à la statistique de Bose–Einstein, on pose en physique quantique que la fonction d'onde ou le vecteur d'état d'un système à N particules doit être totalement symétrique par échange de deux particules. Nous allons montrer que ce postulat entraîne immédiatement le phénomène d'émission stimulée, à partir duquel on peut retrouver la loi de Bose–Einstein (§ 1-4).

Considérons N particules identiques au sens de Bose–Einstein et n'interagissant pas les unes avec les autres. L'hamiltonien du système est donc une somme d'hamiltoniens à un corps :

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N \hat{h}^{(j)}. \quad (5)$$

Pour modéliser le phénomène d'émission stimulée, supposons qu'on ap-

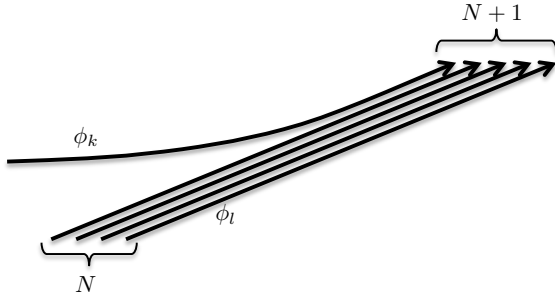


FIGURE 3. Principe de l'émission stimulée : la probabilité pour qu'une particule dans un état ϕ_k subisse une transition vers un état ϕ_l est multipliée par $N + 1$ si l'état ϕ_l est déjà occupé par N particules.

plique à ces particules pendant une durée donnée le potentiel à un corps :

$$\hat{V} = \sum_{j=1}^N \hat{v}^{(j)}. \quad (6)$$

Le potentiel $\hat{v}^{(j)}$ agit seulement sur la particule j et peut induire des transitions entre les différents états propres de $\hat{h}^{(j)}$. Nous allons montrer que la probabilité pour qu'une particule atteigne un état final donné $|\phi_l\rangle$ est augmentée si cet état est déjà occupé.

Considérons d'abord le cas où une seule particule est présente et se trouve initialement dans l'état $|\phi_k\rangle$. Si nous supposons que l'effet de \hat{v} est faible, la probabilité pour que la particule atteigne l'état $|\phi_l\rangle$ sous l'action de \hat{v} est proportionnelle à l'élément de matrice au carré de \hat{v} :

$$|v_{kl}|^2 = |\langle \phi_k | \hat{v} | \phi_l \rangle|^2, \quad (7)$$

ce résultat apparaissant par exemple dans le cadre de la théorie des perturbations dépendant du temps.

Supposons maintenant que l'état $|\phi_l\rangle$ soit déjà occupé par N particules (figure 3), et qu'il y ait une seule particule dans l'état $|\phi_k\rangle$. L'état initial

correctement symétrisé s'écrit :

$$|\Psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{N+1}} \left(\begin{aligned} &|1 : \phi_k ; 2 : \phi_l ; \dots ; N : \phi_l ; N+1 : \phi_l\rangle \\ &+ |1 : \phi_l ; 2 : \phi_k ; \dots ; N : \phi_l ; N+1 : \phi_l\rangle + \dots \\ &+ |1 : \phi_l ; 2 : \phi_l ; \dots ; N : \phi_l ; N+1 : \phi_k\rangle \end{aligned} \right) \quad (8)$$

et nous recherchons la probabilité d'atteindre l'état final :

$$|\Psi_f\rangle = |1 : \phi_l ; 2 : \phi_l ; \dots ; N : \phi_l ; N+1 : \phi_l\rangle. \quad (9)$$

La probabilité de transition est maintenant proportionnelle à :

$$\begin{aligned} |V_{if}|^2 &= |\langle \Psi_i | \hat{V} | \Psi_f \rangle|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{N+1}} (N+1) \langle 1 : \phi_k ; 2 : \phi_l ; \dots | \hat{v}^{(1)} | 1 : \phi_l ; 2 : \phi_l ; \dots \rangle \right|^2 \\ &= (N+1) |v_{kl}|^2 \end{aligned} \quad (10)$$

où l'on a utilisé le fait que les $N+1$ éléments de matrice émanant des $N+1$ termes de la somme (8) sont tous égaux.

La présence de N particules dans l'état $|\phi_l\rangle$ augmente donc par un facteur $N+1$ la probabilité que la particule initialement dans l'état $|\phi_k\rangle$ atteigne cet état $|\phi_l\rangle$. Plus précisément, la probabilité de transition est la somme du taux pour une transition spontanée, proportionnel à $|v_{kl}|^2$ et indépendant de N , et du taux de la transition stimulée par la présence des N bosons initialement dans l'état $|\phi_l\rangle$, proportionnel à $N |v_{kl}|^2$.

1-4 Un autre éclairage sur les lois statistiques

À partir du comptage (1) appliqué aux différentes cellules de l'espace des phases, Einstein a établi dans ses articles la loi donnant pour un gaz parfait la population d'un état individuel j d'énergie E_j :

$$N_j = \frac{1}{e^{(E_j - \mu)/k_B T} - 1} \quad (11)$$

pour un système de température T et de potentiel chimique μ . La dérivation de cette loi est faite dans tous les traités de physique statistique et nous

n'allons pas la reprendre ici. En revanche, il peut être utile de savoir la retrouver à partir d'arguments simples, utilisant la notion de bilan détaillé et d'émission stimulée.

Commençons par expliquer comment retrouver la statistique de Maxwell–Boltzmann à partir d'un bilan d'équilibre entre différents processus de collision. Considérons une paire de particules dans les états j_1 et j_2 , d'énergies respectives E_1 et E_2 . Ces particules peuvent entrer en collision élastique et sortir de la collision dans deux autres états, j_3 et j_4 , la conservation de l'énergie imposant :

$$j_1 + j_2 \longrightarrow j_3 + j_4 \quad \text{si} \quad E_1 + E_2 = E_3 + E_4. \quad (12)$$

Le processus inverse

$$j_3 + j_4 \longrightarrow j_1 + j_2 \quad (13)$$

est également possible et à l'équilibre, le nombre de transitions dans le sens (12) doit être égal au nombre de transitions dans le sens (13) : c'est la condition de *bilan détaillé*. Cette condition impose

$$N_{j_1} N_{j_2} = N_{j_3} N_{j_4} \quad \text{si} \quad E_1 + E_2 = E_3 + E_4. \quad (14)$$

Supposons pour simplifier que la population d'un état j ne dépend que de l'énergie E_j de cet état :

$$N_j = N(E_j). \quad (15)$$

La relation (14) s'écrit donc :

$$N(E_1) N(E_2) = N(E_3) N(E_4) \quad \text{si} \quad E_1 + E_2 = E_3 + E_4. \quad (16)$$

Quelles sont les fonctions $f(E)$ satisfaisant cette équation ?

La réponse à cette question est simple. Considérons la fonction

$$g(E) = \log [N(E)] \quad (17)$$

qui vérifie donc :

$$g(E_1) + g(E_2) = g(E_3) + g(E_4) \quad \text{si} \quad E_1 + E_2 = E_3 + E_4. \quad (18)$$

Cette relation a pour seules solutions les fonctions affines

$$g(E) = aE + b, \quad (19)$$

soit pour la fonction de départ $N(E)$:

$$N(E) = e^{aE+b} \equiv e^{(\mu-E)/k_B T} \quad \text{avec} \quad a = -1/k_B T, \quad b = \mu/k_B T. \quad (20)$$

On retrouve donc bien la statistique de Maxwell–Boltzmann à partir de la condition de bilan détaillé.

Passons maintenant au cas d'un gaz de bosons. La différence avec le cas du gaz de Boltzmann est que la probabilité de la transition (12) est augmentée du fait de l'émission stimulée si les états j_3 et/ou j_4 sont déjà occupés :

$$\text{Boltzmann : } N_{j_1} N_{j_2} \longrightarrow \text{Bose : } N_{j_1} N_{j_2} [1 + N_{j_3}] [1 + N_{j_4}] \quad (21)$$

et de même pour la transition (13)

$$\text{Boltzmann : } N_{j_3} N_{j_4} \longrightarrow \text{Bose : } N_{j_3} N_{j_4} [1 + N_{j_1}] [1 + N_{j_2}] \quad (22)$$

Le bilan détaillé s'écrit donc en présence d'émission stimulée :

$$N_{j_1} N_{j_2} [1 + N_{j_3}] [1 + N_{j_4}] = N_{j_3} N_{j_4} [1 + N_{j_1}] [1 + N_{j_2}], \quad (23)$$

qui peut se réécrire

$$\frac{N_{j_1}}{1 + N_{j_1}} \frac{N_{j_2}}{1 + N_{j_2}} = \frac{N_{j_3}}{1 + N_{j_3}} \frac{N_{j_4}}{1 + N_{j_4}} \quad (24)$$

pour tout quadruplet d'états tel que $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$.

Faisons là aussi l'hypothèse que N_j ne dépend que de l'énergie E_j de l'état j et posons

$$g(E) = \log \left[\frac{N(E)}{1 + N(E)} \right]. \quad (25)$$

Nous sommes conduits pour $g(E)$ à la même équation que dans le cas de la statistique de Boltzmann

$$g(E_1) + g(E_2) = g(E_3) + g(E_4) \quad \text{si} \quad E_1 + E_2 = E_3 + E_4. \quad (26)$$

dont on a vu que les solutions sont les fonctions affines $g(E) = (\mu - E)/k_B T$, ce qui conduit à

$$\frac{N(E)}{1 + N(E)} = e^{(\mu-E)/k_B T} \Rightarrow N(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} - 1}. \quad (27)$$

Nous retrouvons donc bien la statistique de Bose–Einstein² à partir de ces considérations de bilan détaillé, couplées à l'émission stimulée.

Cas où le nombre de particules n'est pas conservé. Il existe des situations où le nombre de particules n'est pas constant dans un processus élémentaire. Par exemple, on peut modéliser les parois d'un corps noir comme un système où deux photons d'énergie E_1 et E_2 peuvent disparaître pour donner naissance à un seul photon d'énergie $E_3 = E_1 + E_2$:

$$j_1 + j_2 \longleftrightarrow j_3 \quad \text{si} \quad E_1 + E_2 = E_3. \quad (28)$$

Le bilan détaillé s'écrit alors en présence d'émission stimulée :

$$\frac{N_{j_1}}{1 + N_{j_1}} \frac{N_{j_2}}{1 + N_{j_2}} = \frac{N_{j_3}}{1 + N_{j_3}} \quad (29)$$

soit, en définissant $g(E)$ comme en (25) :

$$g(E_1) + g(E_2) = g(E_3) \quad \text{si} \quad E_1 + E_2 = E_3. \quad (30)$$

Les solutions à cette équation sont les seules fonctions linéaires (et non plus affines comme dans ce qui précède) :

$$g(E) = aE \equiv -E/k_{\text{B}}T, \quad (31)$$

ce qui est équivalent à prendre un potentiel chimique nul dans (27)

$$\frac{N(E)}{1 + N(E)} = e^{-E/k_{\text{B}}T} \quad \Rightarrow \quad N(E) = \frac{1}{e^{E/k_{\text{B}}T} - 1}. \quad (32)$$

2 La condensation du gaz de Bose parfait

Nous allons considérer dans ce paragraphe un gaz parfait et homogène de N particules bosoniques de masse m . Nous supposons ces particules

2. On pourra vérifier que l'on peut également retrouver la statistique de Fermi–Dirac en remplaçant $[1 + N_j]$ par $[1 - N_j]$ dans (23), pour prendre en compte le blocage lié au principe d'exclusion de Pauli.

confinées dans une boîte cubique de côté L et nous prendrons des conditions aux limites périodiques pour écrire les états propres de l'énergie cinétique. Ces états propres sont donc des ondes planes repérées par leur vecteur d'onde \mathbf{k} ou leur impulsion $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$:

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}, \quad \mathbf{p} = \frac{2\pi\hbar}{L}\mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{Z}^3. \quad (33)$$

L'énergie de l'onde plane d'impulsion \mathbf{p} est

$$E_{\mathbf{p}} = \frac{p^2}{2m}, \quad (34)$$

l'état fondamental $\mathbf{p} = 0$ d'énergie $E_0 = 0$ étant non dégénéré.

2-1 Saturation des états excités

La loi de Bose–Einstein nous donne, pour une température T et un potentiel chimique μ , le nombre moyen de particules occupant l'état \mathbf{p} :

$$N(\mathbf{p}) = \frac{1}{e^{(E_{\mathbf{p}} - \mu)/k_{\text{B}}T} - 1}. \quad (35)$$

Le nombre total de particules dans le système s'écrit donc

$$N = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{e^{(E_{\mathbf{p}} - \mu)/k_{\text{B}}T} - 1}. \quad (36)$$

Pour que chaque $N_{\mathbf{p}}$ soit défini et positif, il faut que le potentiel chimique μ soit strictement plus petit que l'énergie de l'état fondamental, en l'occurrence

$$\mu < E_0 = 0 \quad (37)$$

Il est alors utile de décomposer cette somme en deux contributions, la première concernant l'état fondamental $\mathbf{p} = 0$, la seconde tous les états excités $\mathbf{p} \neq 0$:

$$N = N_0 + N_{\text{exc}}, \quad N_0 = \frac{Z}{1 - Z}, \quad N_{\text{exc}} = \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \frac{Z}{e^{E_{\mathbf{p}}/k_{\text{B}}T} - Z} \quad (38)$$

où l'on a introduit la fugacité

$$Z = \exp(\mu/k_B T). \quad (39)$$

Du fait de la contrainte $\mu < 0$, la fugacité est un nombre compris entre 0 et 1 strictement. L'inégalité $Z < 1$ permet de donner immédiatement une borne supérieure à la population totale des états excités :

$$N_{\text{exc}} < N_{\text{exc}}^{(\text{max})}(T) = \sum_{p \neq 0} \frac{1}{e^{E_p/k_B T} - 1}. \quad (40)$$

La notion de condensation de Bose–Einstein dans sa version la plus simple se dégage directement de l'existence de cette borne supérieure : si pour une température T donnée, on place dans la boîte un nombre de particules strictement supérieur à $N_{\text{exc}}^{(\text{max})}(T)$, alors on est sûr qu'au moins $N - N_{\text{exc}}^{(\text{max})}(T)$ particules s'accumuleront dans l'état fondamental $p = 0$. En prenant pour fixer les idées $N = 2N_{\text{exc}}^{(\text{max})}(T)$, on trouve donc qu'au moins 50% des particules occuperont l'état individuel $p = 0$.

Il est essentiel de bien différencier ce phénomène d'un simple effet « d'activation thermique ». Dans le cadre de la statistique de Boltzmann, on sait bien que si la température est inférieure à l'écart énergétique entre l'état fondamental et le premier état excité, on peut également observer une forte accumulation de particules dans le fondamental³. L'accumulation que nous trouvons ici est nettement plus subtile : elle se produit quelle que soit la température, en particulier si $k_B T$ est bien supérieur à l'écart $2\pi^2 \hbar^2 / (mL^2)$ entre état fondamental et premier état excité [cf. (34)]. Bien sûr, la valeur de $N_{\text{exc}}^{(\text{max})}(T)$ est une fonction croissante de T et il faudra mettre d'autant plus de particules que la température sera élevée pour être certain d'avoir dépassé le seuil de condensation, c'est-à-dire un point où N_0/N devient significativement non nul.

2-2 L'expérience de Cambridge

Parmi les très nombreuses expériences qui ont été réalisées au cours des vingt dernières années sur la condensation de Bose–Einstein des gaz ato-

3. La valeur précise de cette accumulation dépend de la position de tous les niveaux d'énergie et nous ne la précisons donc pas davantage ici.

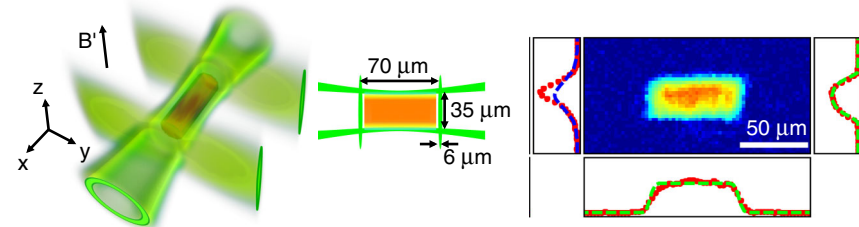


FIGURE 4. « Boîte lumineuse » utilisée à Cambridge pour étudier la condensation de Bose–Einstein d'un gaz uniforme de ^{87}Rb (Gaunt, Schmidutz, et al. 2013; Schmidutz, Gotlibovych, et al. 2014).

miques, celle qui illustre notre propos de la manière la plus directe est celle réalisée à Cambridge dans le groupe de Z. Hadzibabic (Gaunt, Schmidutz, et al. 2013; Schmidutz, Gotlibovych, et al. 2014).

Avec un dispositif holographique, on réalise de fines nappes de lumière désaccordées sur le bleu de la transition de résonance des atomes (^{87}Rb). Pour ce choix de désaccord, les atomes sont repoussés par les régions de haute intensité lumineuse. On dispose les différentes nappes de manière à former les parois d'une boîte cylindrique de diamètre 35 microns et de longueur 70 microns (figure 4).

Pour s'assurer que les atomes ressentent bien un potentiel uniforme à l'intérieur de la boîte en dépit de la gravité, on prépare les atomes dans un sous-niveau magnétique donné ; on applique un gradient de champ magnétique de sorte que la force magnétique pour ce sous-niveau compense le poids des atomes. La température des atomes est ajustée en changeant la puissance des faisceaux formant la boîte, ce qui permet de varier l'équilibre atteint après refroidissement par évaporation.

Bien qu'on ne réalise pas des conditions aux limites périodiques dans une boîte de ce type, l'analyse qui précède reste *grosso modo* valable. On peut déterminer la distribution en impulsion des atomes par une méthode de *temps de vol* : on éteint brusquement la lumière formant les parois de la boîte et on mesure l'étalement balistique du nuage en une durée donnée, les atomes dans l'état fondamental de la boîte ne bougeant quasiment pas.

Pour cette étude, il y a un avantage certain à travailler avec un poten-

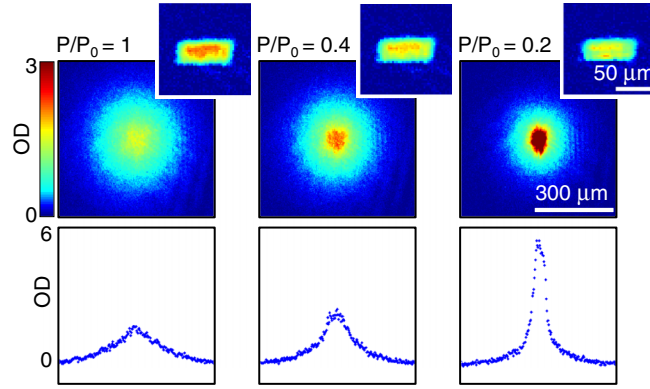


FIGURE 5. Expansion ballistique d'un gaz de ^{87}Rb confiné dans la boîte représentée en figure 4. Le paramètre de contrôle P/P_0 mesure le rapport entre la puissance P des faisceaux lumineux formant la boîte et la puissance totale disponible P_0 [$P_0 = 0.7 \text{ W}$, correspondant à une hauteur de barrière $k_B \times 2 \mu\text{K}$]. Le nombre d'atome est inférieur au nombre de saturation pour l'image de gauche, et supérieur pour les deux autres images (Gaunt, Schmidutz, et al. 2013; Schmidutz, Gotlibovych, et al. 2014).

tiel uniforme plutôt qu'avec le potentiel harmonique utilisé dans la vaste majorité des expériences d'atomes froids; en effet, les interactions entre atomes jouent ici un rôle quasi-négligeable dans la structure du condensat et lors du temps de vol. Nous reviendrons en détail sur ce point plus tard, mais indiquons d'ores et déjà que pour les densités réalisées ici, de l'ordre de deux atomes par μm^3 , l'énergie d'interaction par particule est inférieure au nanokelvin, alors que les températures explorées sont de plusieurs dizaines de nanokelvins.

Un exemple de temps de vol est montré en figure 5. On voit comment une fraction notable d'atomes avec une impulsion très faible apparaît pour un gaz suffisamment dense et froid. En faisant cette expérience pour différents nombres d'atomes et une même température, on peut vérifier la saturation prédite par Einstein (figure 6). En dessous du seuil évalué plus haut, un nouvel atome va rejoindre avec une probabilité proche de 1 la fraction thermique formée par l'ensemble des états excités : aucune singularité n'apparaît donc dans la population de l'état fondamental. Quand le

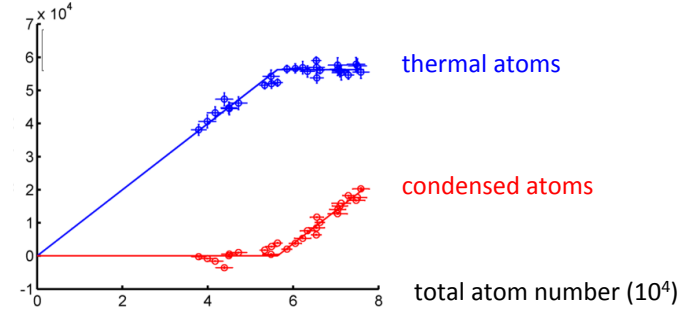


FIGURE 6. Saturation du nombre d'atomes occupant les états excités de la boîte de la figure 4. Figure communiquée par Zoran Hadzibabic à partir de données extraites de Gaunt, Schmidutz, et al. 2013; Schmidutz, Gotlibovych, et al. 2014.

nombre d'atomes excède une certaine valeur, de l'ordre de 60 000 pour la température ($\sim 30 \text{ nK}$) et la boîte utilisées ici, la fraction thermique sature et tout atome en excédent vient occuper l'état fondamental.

2-3 Le cas d'un gaz piégé

Le résultat obtenu au paragraphe précédent, conséquence de la loi de Bose–Einstein, s'applique en fait à de très nombreux types de potentiel de confinement $V_{\text{trap}}(\mathbf{r})$ d'un gaz parfait de bosons. Tant que l'on ne considère pas la limite thermodynamique (que nous étudierons en §3), les seuls ingrédients nécessaires pour que la borne $N_{\text{exc}}^{(\text{max})}(T)$ soit pertinente sont :

- un spectre en énergie discret, $E_0 < E_1 < E_2 < \dots$, assuré si le potentiel de confinement tend vers l'infini quand $|\mathbf{r}|$ tend vers l'infini ; c'est en particulier le cas d'une boîte de taille L finie ;
- l'hypothèse que la somme discrète :

$$N_{\text{exc}}^{(\text{max})}(T) = \sum_{j \neq 0} \frac{1}{e^{(E_j - E_0)/k_B T} - 1}, \quad (41)$$

obtenue en donnant au potentiel chimique sa valeur maximale $\mu = E_0$, converge aux grandes énergies, hypothèse raisonnable pour un potentiel de confinement réaliste.

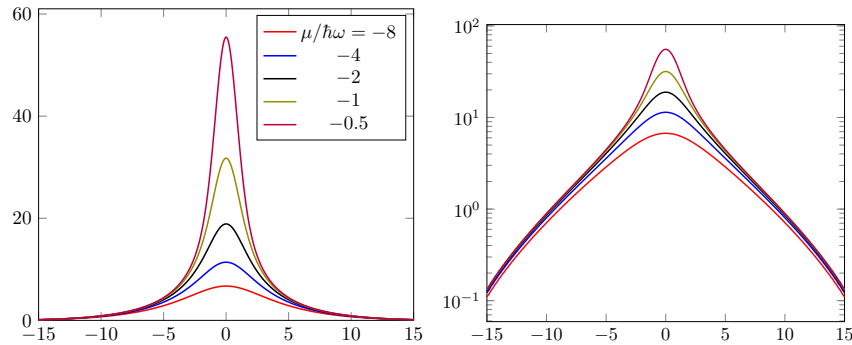


FIGURE 7. Saturation de la population des états excités pour un gaz parfait placé dans un piège harmonique unidimensionnel. On trace ici le profil de densité spatiale pour un gaz de température $T = 40 \hbar\omega/k_B$. L'unité de position est $a_{\text{oh}} = \sqrt{\hbar/m\omega}$ et l'unité de densité est arbitraire. Quand le potentiel chimique se rapproche de l'énergie du fondamental (prise ici nulle par convention), on voit la densité spatiale saturer dans les ailes, les atomes en excès se disposant dans l'état fondamental du piège, c'est-à-dire la gaussienne $\psi_0(x) = \exp(-x^2/2)$.

Par exemple, si les particules sont placées dans un piège harmonique unidimensionnel de pulsation ω , on sait que les niveaux d'énergie sont non dégénérés et repérés par un nombre entier j

$$E_j = (j + 1/2) \hbar\omega, \quad j \in \mathbb{N} \quad (42)$$

le potentiel chimique μ devant rester inférieur à l'énergie $\hbar\omega/2$ du fondamental $j = 0$. On en déduit la borne supérieure pour la population des états excités :

$$N_{\text{exc}}^{(\text{max})}(T) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{e^{j \hbar\omega/k_B T} - 1}. \quad (43)$$

On a représenté sur la figure 7 l'évolution du profil de densité dans ce piège harmonique en fonction du nombre d'atomes, pour la température $k_B T = 40 \hbar\omega$. On voit clairement que lorsque le potentiel chimique μ s'approche de l'énergie de l'état fondamental, toutes les nouvelles particules s'accumulent dans cet état fondamental, localisé au voisinage de $x = 0$. Les ailes de la distribution quant à elles n'évoluent quasiment pas puis-

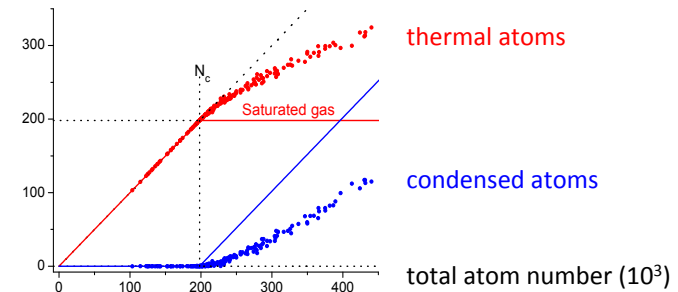


FIGURE 8. « Non-saturation » des états excités pour un gaz d'atomes de ^{39}K , confiné dans un piège harmonique de fréquence $\omega/2\pi \approx 70$ Hz à une température de $T \approx 180$ nK. Figure extraite de Tammuz, Smith, et al. (2011).

qu'elles correspondent essentiellement à des particules occupant les niveaux d'énergies excités.

Sur le plan expérimental, il est nettement plus difficile de mettre en évidence cette saturation du nombre d'atomes dans les états excités avec un piège harmonique qu'avec une boîte. La raison en est simple : une fois que le nombre d'atomes atteint $N_{\text{exc}}^{(\text{max})}(T)$, l'accumulation dans l'état fondamental du piège débute. Comme cet état fondamental est localisé dans l'espace, cette accumulation conduit rapidement à une densité importante au centre du piège et donc à un rôle accru des interactions entre atomes. En particulier, les atomes non condensés interagissent avec ce condensat localisé et ressentent donc un potentiel déformé par rapport au potentiel harmonique de départ. Dans ce potentiel déformé, le nombre $N_{\text{exc}}^{(\text{max})}(T)$ est augmenté, ce qui entraîne une non-saturation. La figure 8, extraite de Tammuz, Smith, et al. (2011), illustre ce phénomène.

3 La CBE à la limite thermodynamique

Notre étude du paragraphe précédent reposait sur l'hypothèse d'un spectre discret, conséquence du confinement dans une boîte de taille L . Une question importante à ce stade est de déterminer si notre conclusion

de l'existence d'une borne supérieure $N_{\text{exc}}^{(\text{max})}(T)$ est un simple effet de taille finie ou si elle « survit » au passage à la limite thermodynamique. En effet, quand on fait tendre la taille de la boîte vers l'infini, l'écart entre niveaux d'énergie tend vers 0 et on peut mettre de plus en plus de particules sur les niveaux excités. Deux scénarios sont donc possibles :

- L'augmentation de $N_{\text{exc}}^{(\text{max})}(T)$ avec la taille de la boîte est plus rapide que cette taille elle-même. Dans ce cas, pour une température et une densité données, il existera une taille au dessus de laquelle les états excités se « désatureront », et la population de l'état fondamental ne sera pas très différente de celle de ses voisins immédiats.
- Le nombre de saturation n'augmente pas plus vite que la taille de la boîte : la densité correspondant aux états excités restera donc bornée et la condensation survivra au passage à la limite thermodynamique.

Le scénario effectivement réalisé dépend fortement de la dimension de l'espace. Nous allons voir qu'à une ou deux dimensions, le phénomène de condensation disparaît quand on prend la limite thermodynamique :

$$L \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty, \rho^{(d)} = \frac{N}{L^d} : \text{constante}, \quad d : \text{dimension d'espace} \quad (44)$$

alors qu'il subsiste à trois dimensions.

3-1 Limite thermodynamique en dimension réduite

Intéressons-nous ici au cas 2D pour lequel le calcul de N_{exc} à la limite thermodynamique peut être fait analytiquement. Ce passage se fait en remplaçant la somme discrète sur \mathbf{p} par une intégrale

$$\sum_{\mathbf{p}} \dots \longrightarrow \left(\frac{L}{2\pi\hbar} \right)^2 \int d^2p \dots \quad (45)$$

soit

$$\rho_{\text{exc}}^{(2)} = \frac{N_{\text{exc}}}{L^2} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int \frac{Z}{e^{p^2/(2mk_{\text{B}}T)} - Z} d^2p. \quad (46)$$

Ceci donne après un calcul simple l'expression de la densité dans l'espace des phases à deux dimensions

$$\mathcal{D}^{(2)} = -\ln(1 - Z) \quad \text{avec} \quad \mathcal{D}^{(2)} = \rho_{\text{exc}}^{(2)} \lambda_T^2, \quad (47)$$

où l'on a introduit la longueur d'onde thermique

$$\lambda_T = \frac{\hbar\sqrt{2\pi}}{\sqrt{mk_{\text{B}}T}}. \quad (48)$$

Le résultat (47) nous indique que la borne supérieure (40) trouvée dans le cas d'un spectre discret ne survit pas au passage à la limite thermodynamique :

$$\rho_{\text{exc}}^{(2)} \lambda_T^2 \rightarrow \infty \quad \text{quand} \quad Z \rightarrow 1. \quad (49)$$

Quand le potentiel chimique varie continument entre $-\infty$ et 0, ou en d'autres termes quand la fugacité varie continument entre 0 et 1, la loi de Bose-Einstein permet d'obtenir n'importe quelle valeur pour la densité spatiale bi-dimensionnelle $\rho_{\text{exc}}^{(2)}$ associée aux états excités.

Pour un gaz 2D infini, on ne s'attend donc pas à voir la densité spatiale $\rho_0^{(2)}$ associée à l'état fondamental $\mathbf{p} = 0$ devenir significative par rapport à la densité spatiale totale. Cette conclusion est effectivement confirmée une analyse numérique du rapport $\rho_0^{(2)}/\rho^{(2)}$, pour des tailles croissantes de boîtes, à température donnée. Dans la limite $L \rightarrow \infty$, la relation (40) se simplifie donc pour donner

$$\rho^{(2)} \approx \rho_{\text{exc}}^{(2)}, \quad \rho_0^{(2)} \ll \rho^{(2)}. \quad (50)$$

Le niveau $\mathbf{p} = 0$ en tant qu'état fondamental reste bien sûr le plus peuplé de tous les états individuels, mais la densité spatiale qui lui est associée ne devient jamais macroscopique. La même conclusion est atteinte pour un gaz uni-dimensionnel.

Invariance d'échelle. L'expression (47) constitue une *équation d'état* pour le gaz de Bose parfait à deux dimensions. Elle relie une quantité thermodynamique, ici la densité dans l'espace des phases $\mathcal{D}^{(2)}$, aux deux variables thermodynamiques du problème, à savoir la température T et le potentiel chimique μ . Dans le cas général d'un gaz en interaction en dimension d , la densité dans l'espace des phases $\mathcal{D}^{(d)}$ est *a priori* une fonction qui dépend séparément de T et μ . Dans le cas rencontré ici, $\mathcal{D}^{(d)}$ ne dépend que du rapport μ/T . Cette simplification signale l'*invariance d'échelle* de ce système particulier.

3-2 La saturation de la densité à 3D

Un calcul similaire à celui du paragraphe précédent, mais à trois dimensions, conduit à un résultat radicalement différent. Ce calcul, initialement mené par Einstein (1925a) dans son deuxième article sur le sujet, est un grand classique des cours de physique statistique et nous nous contenterons donc de le résumer.

Le passage de la somme discrète (40) à une intégrale donne ici ⁴

$$\rho_{\text{exc}} \equiv \frac{N_{\text{exc}}}{L^3} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{Z}{e^{p^2/(2mk_B T)} - Z} d^3p, \quad (51)$$

intégrale qui contrairement au cas 2D ne se calcule pas analytiquement en termes de fonctions simples. Toutefois, la densité dans l'espace des phases correspondant aux états excités, $\mathcal{D}_{\text{exc}} = \rho_{\text{exc}} \lambda_T^3$, peut s'exprimer comme un polylogarithme ⁵ Li_α de la fugacité :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\text{exc}} = \rho_{\text{exc}} \lambda_T^3 &= \frac{\lambda_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \left(Z e^{-p^2/(2mk_B T)} \right)^n \right] d^3p \\ &= \text{Li}_{3/2}(Z) \end{aligned} \quad (52)$$

avec

$$\text{Li}_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}. \quad (53)$$

Le point crucial mis en avant par Einstein est que ce polylogarithme d'indice 3/2, contrairement à son analogue à deux dimensions $\text{Li}_1(Z) = -\log(1 - Z)$ [cf. (47)], reste borné quand la fugacité approche sa valeur maximale $Z = 1$. On en déduit que la densité dans l'espace des phases associée à l'ensemble des états excités à une particule ne peut pas dépasser la valeur critique ⁶

$$\mathcal{D}_{\text{exc}}^{\text{max}} = \text{Li}_{3/2}(1) = 2.612 \dots \quad (54)$$

4. Dans la mesure où il n'y a pas d'ambiguïté, nous omettons ici l'exposant ⁽³⁾ indiquant que nous nous sommes placés à trois dimensions.

5. également connu sous le nom de fonction de Jonquière.

6. La constante $\text{Li}_{3/2}(1)$ est également égale à la valeur de la fonction $\zeta(x)$ de Riemann en $x = 3/2$: $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-x}$.

Que se passe-t-il si on cherche à mettre une densité dans l'espace des phases totale \mathcal{D} plus grande que cette valeur critique ? La réponse est la même qu'au paragraphe § 2-1 : on accumule dans l'état fondamental, c'est-à-dire l'état d'impulsion nulle, une densité dans l'espace des phases au moins égale à l'excès par rapport à $\mathcal{D}_{\text{exc}}^{\text{max}}$

$$\mathcal{D}_0 \gtrsim \mathcal{D} - \mathcal{D}_{\text{exc}}^{\text{max}}. \quad (55)$$

En pratique, on peut vérifier numériquement que cette inégalité devient une égalité à la limite thermodynamique $N, L^3 \rightarrow \infty, N/L^3 = \rho$ constant. C'est le phénomène de condensation de Bose-Einstein, dans sa version originale.

En résumé : à trois dimensions et pour un gaz de Bose idéal, deux situations sont possibles à la limite thermodynamique selon la valeur de la densité dans l'espace des phases totale $\mathcal{D} = \rho \lambda_T^3$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \leq 2.612 : \quad \mathcal{D} &\approx \mathcal{D}_{\text{exc}} = \text{Li}_{3/2}(Z), \quad \mathcal{D}_0 \ll \mathcal{D}, \\ \mathcal{D} > 2.612 : \quad \mathcal{D} &= \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_{\text{exc}}^{\text{max}} \quad \text{avec} \quad \mathcal{D}_{\text{exc}}^{\text{max}} = 2.612. \end{aligned} \quad (56)$$

Notons que l'on retrouve là aussi une invariance d'échelle, puisque la densité dans l'espace des phases s'exprime uniquement en fonction de Z , c'est-à-dire du rapport μ/T .

3-3 Le point de condensation

Le point de condensation correspond à la situation où l'on a placé dans le piège un nombre d'atomes tel que la densité dans l'espace des phases atteint la valeur critique (54). En ce point, le nombre d'atomes dans l'état fondamental reste microscopique, mais il augmente ensuite rapidement quand le nombre d'atomes dépasse la valeur critique, cette transition devenant une transition de phase à la limite thermodynamique.

Le point critique de la transition correspond donc à

$$\mathcal{D}_c = \rho_c \lambda_T^3 = 2.612 \quad \text{ou encore} \quad \rho_c = 0.166 \frac{(mk_B T)^{3/2}}{\hbar^3}, \quad (57)$$

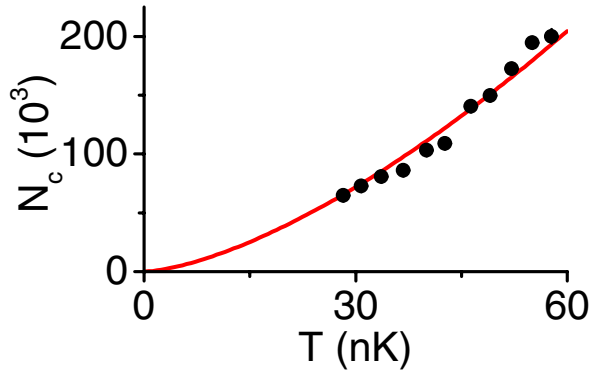


FIGURE 9. Vérification de la loi (57) donnant le nombre d’atomes au point critique en fonction de la température, $N_c \propto T^{3/2}$ (courbe continue rouge). Figure extraite de Schmidutz, Gotlibovych, et al. (2014).

soit une densité critique de 2 atomes de rubidium par microns-cube pour une température de 30 nK. Cette loi $\rho_c \propto T^{3/2}$ est remarquablement bien vérifiée dans l’expérience de Cambridge de Schmidutz, Gotlibovych, et al. (2014) (figure 9). Dans cette expérience, les interactions jouent un rôle suffisamment faible pour que la valeur de la densité critique ne soit pas affectée par ces interactions, à la précision de mesure près (de l’ordre de 10 % sur le nombre d’atomes et 20 % sur le volume).

Température au seuil de condensation. Quand on prend la limite thermodynamique dans une boîte, l’écart $\hbar^2/(mL^2)$ (à un facteur numérique près) entre l’état fondamental et le premier état excité tend vers 0. La condensation peut quant à elle se produire à une température arbitrairement plus grande que cet écart, pourvu que la densité spatiale ρ soit suffisante. Ceci illustre bien le point déjà mentionné que la condensation n’est pas l’effet trivial consistant à annuler la population des états excités par un simple poids de Boltzmann $e^{-E/k_B T}$.

Potentiel chimique au seuil de condensation. Intéressons-nous maintenant au potentiel chimique μ pour lequel une fraction condensée impor-

tante apparaît, c’est-à-dire $\mathcal{D}_0 \sim \mathcal{O}(1)$. On a en utilisant (38)

$$\mathcal{D}_0 = \frac{N_0}{L^3} \lambda_T^3 = \frac{Z}{1-Z} \frac{\lambda_T^3}{L^3} \quad (58)$$

et cette quantité devient d’ordre 1 quand la fugacité $Z = e^{\mu/k_B T}$ est elle-même très proche de 1, soit μ très proche de 0. Plus précisément, la relation (58) entraîne que $\mathcal{D}_0 \gtrsim 1$ si

$$|\mu| \lesssim \frac{\hbar^2}{mL^2} \frac{\lambda_T}{L}. \quad (59)$$

Comme $\lambda_T \ll L$, cette condition est satisfaite pour un potentiel chimique beaucoup plus petit (à la limite thermodynamique) que l’écart $2\pi^2\hbar^2/(mL^2)$ entre état fondamental et premier état excité.

Rôle singulier de $p = 0$. Quand on écrit la densité dans l’espace des phases totale

$$\mathcal{D} = \frac{\lambda_T^3}{L^3} \sum_{\mathbf{p}} \frac{Z}{e^{E_{\mathbf{p}}/k_B T} - Z} \quad (60)$$

sous la forme

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_{\text{exc}} \quad (61)$$

et qu’on évalue \mathcal{D}_{exc} par une intégrale, on fait jouer un rôle particulier – et singulier – à l’état $\mathbf{p} = 0$. On peut légitimement s’interroger sur ce caractère particulier; ne devrait-on pas traiter de manière équivalente les tout premiers états excités? La remarque précédente sur la valeur du potentiel chimique au seuil de condensation permet de répondre par la négative à cette interrogation. Utilisons la valeur trouvée pour μ pour comparer les populations de l’état fondamental d’énergie $E_0 = 0$ et du premier niveau excité, d’énergie $E_1 = 2\pi^2\hbar^2/mL^2$ (six fois dégénéré pour une boîte cubique) :

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{1-Z}{e^{E_1/k_B T} - Z} \approx \frac{|\mu|}{E_1 + |\mu|}, \quad (62)$$

ce qui est d’ordre $\lambda_T/L \ll 1$ d’après (59). Il n’y a donc pas de population macroscopique singulière associée aux états excités individuels et il est légitime de les prendre en compte dans le cadre de l’intégrale sur \mathbf{p} .

3-4 Utilisation de la densité d'états en énergie

Dans la mesure où la population moyenne d'un état individuel p ne dépend que de son énergie, on peut paramétrer toutes les intégrales sur p rencontrées ci-dessus par l'énergie $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ plutôt que par l'impulsion p . Le changement de variable $p \rightarrow E$ se fait de la manière suivante

$$\sum_p \dots \rightarrow \left(\frac{L}{2\pi\hbar} \right)^d \int d^d p \dots \rightarrow \int dE \rho^{(d)}(E) \dots \quad (63)$$

où $\rho^{(d)}(E)$ représente la densité d'états à d dimensions, soit pour une boîte de côté L :

$$\rho^{(1)}(E) = \frac{L}{2\pi} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{1/2} E^{-1/2} \quad (64)$$

$$\rho^{(2)}(E) = \frac{L^2}{4\pi} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right) \quad (65)$$

$$\rho^{(3)}(E) = \frac{L^3}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{+1/2}. \quad (66)$$

La densité spatiale associée aux états excités (51) s'écrit dans ces conditions en dimension d

$$\rho_{\text{exc}}^{(d)} = \frac{1}{L^d} \int_0^{+\infty} dE \rho^{(d)}(E) \frac{Z}{e^{E/k_B T} - Z} \quad (67)$$

et l'existence éventuelle d'un phénomène de condensation se ramène à la question : l'intégrale

$$\frac{1}{L^d} \int_0^{+\infty} dE \rho(E) \frac{1}{e^{E/k_B T} - 1} \quad (68)$$

converge-t-elle ? Puisque la densité d'états $\rho(E)$ est une loi de puissance, la convergence en $E = +\infty$ est garantie par la fonction exponentielle $e^{-E/k_B T}$. En revanche, la convergence en $E = 0$ dépend la dimension d'espace puisqu'elle fait apparaître le développement limité

$$\rho^{(d)}(E) \frac{1}{e^{E/k_B T} - 1} \approx \rho^{(d)}(E) \frac{k_B T}{E}. \quad (69)$$



FIGURE 10. Énergie des 100 premiers états à une particule dans une boîte à une dimension (gauche) et à trois dimensions (droite) [unité arbitraire en énergie].

Si la densité d'états tend vers 0 comme une loi de puissance quand E tend vers 0, alors l'intégrale sera convergente en $E = 0$; la densité associée aux états excités (67) sera donc bornée supérieurement et le phénomène de condensation se produira si la densité totale dépasse cette borne. C'est le cas à trois dimensions [cf. (66)]. En dimension réduite en revanche, la densité d'états diverge en $E = 0$ (1D) ou bien elle reste constante (2D) : l'intégrale (68) est alors divergente. Il n'y a donc pas de borne supérieure à la densité des états excités (67) et il n'y a pas de condensation.

Cette différence entre la densité d'états en dimension 1 et dimension 3 est illustrée sur la figure 10. En dimension 1, la divergence de $\rho(E)$ comme $1/\sqrt{E}$ [cf. (64)] signifie qu'il y a une accumulation d'états au voisinage de $E = 0$. Même quand le potentiel chimique est arbitrairement proche de 0, la population totale peut donc se répartir sans singularité macroscopique sur les niveaux les plus bas. En revanche à 3D, la variation de la densité d'états comme \sqrt{E} [cf. (66)] correspond à une raréfaction des états au voisinage de $E = 0$, ce qui conduit à la condensation dans l'état $p = 0$.

3-5 Limite thermodynamique pour un piège

L'utilisation du concept de densité d'états permet également de conclure facilement sur l'existence possible de condensation à la limite thermodynamique dans un piège harmonique (Groot 1950; Bagnato, Prit-

chard, et al. 1987). Rappelons tout d'abord comment cette limite est prise et considérons pour cela un gaz de Boltzmann, avec N atomes confinés dans le potentiel isotrope $V(r) = m\omega^2 r^2/2$. Le profil de densité spatiale s'écrit en dimension d :

$$n(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{N}{\sigma^d} e^{-r^2/2\sigma^2} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2}m\omega^2\sigma^2 \equiv \frac{1}{2}k_B T. \quad (70)$$

La limite thermodynamique est prise telle que

$$N \rightarrow +\infty, \quad \omega \rightarrow 0 \quad \text{avec} \quad T = \text{constante}, \quad n(0) = \text{constante}, \quad (71)$$

ce qui revient à garder constant N/σ^d , et donc $N\omega^d$.

Comme pour le cas d'une boîte, la densité d'état dans un piège harmonique dépend de la dimensionalité. Pour un piège 1D, les niveaux $(j + 1/2)\hbar\omega$ sont non dégénérés ($\xi_j = 1$), équidistants et séparés de $\hbar\omega$, soit

$$\rho^{(1)}(E) = \frac{1}{\hbar\omega}. \quad (72)$$

En dimension 2, le niveau d'énergie $E_j = (j + 1)\hbar\omega$ est dégénéré $\xi_j = j + 1$ fois ; en dimension 3, le niveau $E_j = (j + 3/2)\hbar\omega$ est dégénéré $\xi_j = (j + 1)(j + 2)/2$ fois, de sorte que

$$\rho^{(2)}(E) = \frac{E}{(\hbar\omega)^2}, \quad \rho^{(3)}(E) = \frac{E^2}{2(\hbar\omega)^3}, \quad (73)$$

soit la formule générale (Pitaevskii & Stringari 2016)

$$\rho^{(d)}(E) = \frac{1}{(d-1)!} \frac{E^{d-1}}{(\hbar\omega)^d}. \quad (74)$$

En partant de la somme discrète en dimension d

$$N_{\text{exc}}^{(\text{max})}(T) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j}{e^{E_j/k_B T} - 1}, \quad (75)$$

on obtient en passant à une intégrale

$$N_{\text{exc}}^{(\text{max})}(T) = \frac{1}{(d-1)!} \frac{1}{(\hbar\omega)^d} \int_0^{+\infty} \frac{E^{d-1}}{e^{E/k_B T} - 1} dE. \quad (76)$$

ou encore

$$(\hbar\omega)^d N_{\text{exc}}^{(\text{max})}(T) = \frac{1}{(d-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{E^{d-1}}{e^{E/k_B T} - 1} dE. \quad (77)$$

Deux cas de figure sont alors possibles :

- Si l'intégrale ci-dessus diverge en $E = 0$, le remplacement de la somme discrète (75) par une intégrale n'est pas légitime : le nombre d'atomes dans les états excités est bien sûr borné pour un piège de fréquence finie, mais cette saturation ne survit pas à la limite thermodynamique (71).
- Si l'intégrale qui est écrite ci-dessus est convergente, on a alors condensation à la limite thermodynamique dans le piège harmonique. En effet, quand on prend la limite (71) avec une valeur suffisante de $N\omega^d$, une fraction macroscopique des particules devra s'accumuler dans l'état fondamental, puisque la quantité $N_{\text{exc}}\omega^d$ est bornée.

Revenons maintenant aux densités d'états (74). On constate immédiatement qu'à la limite thermodynamique à une dimension, la densité d'états constante ne permet pas d'assurer la convergence de l'intégrale, et on est alors dans le premier cas (Bagnato & Kleppner 1991; Ketterle & Druten 1996). En dimensions 2 et 3 en revanche, la variation comme E ou E^2 de la densité d'états garantit la convergence de l'intégrale et donc l'existence d'un condensat à la limite thermodynamique. Plus précisément, le calcul de l'intégrale donne

$$2\text{D} : \quad N_{\text{exc}}^{(\text{max})}(T) = \text{Li}_2(1) \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^2 \quad \text{avec} \quad \text{Li}_2(1) = \frac{\pi^2}{6}, \quad (78)$$

et

$$3\text{D} : \quad N_{\text{exc}}^{(\text{max})}(T) = \text{Li}_3(1) \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3 \quad \text{avec} \quad \text{Li}_3(1) = 1.202. \quad (79)$$

En particulier la loi à 3D donnant un nombre d'atomes critiques variant comme $(T/\omega)^3$ a été vérifiée dans de nombreuses expériences, et les déviations à cette loi dues aux interactions entre atomes ont été étudiées expérimentalement [voir par exemple Gerbier, Thywissen, et al. (2004) et Smith, Campbell, et al. (2011)].

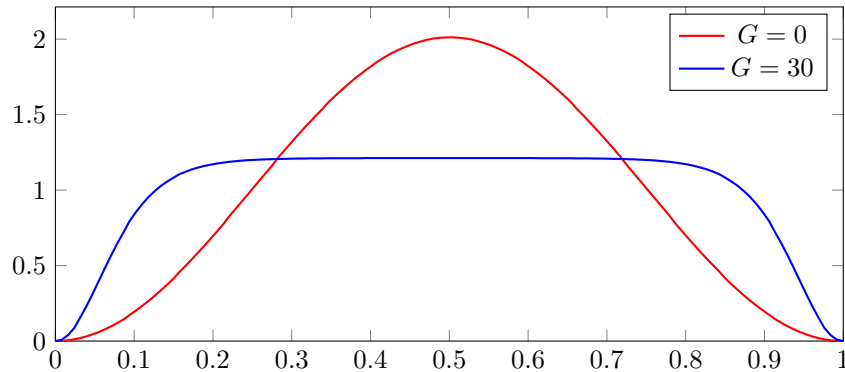


FIGURE 11. Distribution spatiale d'un gaz de Bose à une dimension confiné sur un segment de longueur $L = 1$ (conditions aux limites de Dirichlet). En rouge, distribution en absence d'interaction. En bleu, solution de l'équation de Gross-Pitaevski (cf. chapitre 3) avec $G = 30$ et $\hbar = m = 1$.

4 La condensation de BE au delà du gaz parfait

Pour un gaz parfait, nous avons vu au paragraphe précédent que la condensation de Bose–Einstein se manifeste par une accumulation macroscopique de particules dans un état propre de l'hamiltonien à une particule, en l'occurrence l'état fondamental.

En présence d'interactions, ce critère n'est plus pertinent car les états propres à une particule n'ont aucune raison de jouer un rôle privilégié. Prenons par exemple le cas de l'état fondamental dans une boîte 1D de taille L , avec des conditions aux limites de Dirichlet : $\psi(0) = \psi(L) = 0$. L'état fondamental à une particule est l'arche de sinus $\psi_0(x) \propto \sin(\pi x/L)$. Ceci correspond à la densité

$$\text{Pas d'interaction : } \quad \rho(x) \propto \sin^2(\pi x/L) \quad (80)$$

variant sur une échelle spatiale de l'ordre de la taille de la boîte. En présence d'interactions répulsives assez fortes entre particules, on attend intuitivement que l'état fondamental du fluide corresponde à une répartition très différente de (80), avec une densité quasi-uniforme sur la plus grande partie de l'espace accessible et une décroissance de la densité uniquement

au voisinage immédiat des parois. Cette intuition est bien confirmée par le calcul (cf. figure 11).

4-1 Le critère de Penrose–Onsager

Il faut donc se donner un critère différent pour caractériser une possible condensation de Bose–Einstein dans un fluide en interaction. La proposition de Penrose & Onsager (1956) consiste à partir de l'opérateur densité à N particules $\hat{\rho}$ décrivant l'état du fluide, et à considérer l'opérateur densité à un corps

$$\hat{\rho}_1 = N \text{Tr}_{2,\dots,N}(\hat{\rho}) \quad (81)$$

obtenu en prenant la trace partielle sur $N - 1$ particules. Rappelons que cette opération de trace partielle s'écrit en point de vue position

$$\langle \mathbf{r}' | \hat{\rho}_1 | \mathbf{r} \rangle = N \int d^3 r_2 \dots d^3 r_N \langle \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}', \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N | \hat{\rho} | \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N \rangle \quad (82)$$

ou en point de vue impulsion

$$\langle \mathbf{p}' | \hat{\rho}_1 | \mathbf{p} \rangle = N \int d^3 p_2 \dots d^3 p_N \langle \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}', \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N | \hat{\rho} | \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N \rangle. \quad (83)$$

Notons que même si la particule 1 semble jouer un rôle particulier dans cette définition, ce n'est en réalité pas un problème puisque $\hat{\rho}$ est complètement symétrique par échange de deux particules.

Le calcul des éléments de matrice est simplifié si on adopte le point de vue de la *seconde quantification*. L'élément de matrice de $\hat{\rho}_1$ entre deux états à une particule $|\psi_a\rangle$ et $|\psi_b\rangle$ s'exprime alors à l'aide des opérateurs création et annihilation d'une particule dans l'état a ou b :

$$\langle \psi_b | \hat{\rho}_1 | \psi_a \rangle = \text{Tr} [(|\psi_a\rangle\langle\psi_b|) \hat{\rho}_1] = \text{Tr} \left(\hat{a}^\dagger \hat{b} \hat{\rho} \right). \quad (84)$$

En particulier, pour les éléments de matrice dans la base continue $|\mathbf{r}\rangle$, on a

$$\langle \mathbf{r}' | \hat{\rho}_1 | \mathbf{r} \rangle = \text{Tr} \left(\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\rho} \right), \quad (85)$$

où l'opérateur champ $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ détruit une particule au point \mathbf{r} .

L'opérateur $\hat{\rho}_1$ est hermitien et positif, on peut donc le diagonaliser et toutes ses valeurs propres Π_j , $j = 0, 1, \dots$ sont positives ou nulles. L'opérateur densité à N corps $\hat{\rho}$ étant de trace unité, on a

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_1) = \sum_j \Pi_j = N. \quad (86)$$

Notons Π_0 la plus grande de ces valeurs propres. Suivant Penrose & Onsager (1956), on dit que le système est condensé si Π_0/N est non nulle à la limite thermodynamique, obtenue en faisant tendre N vers l'infini, en gardant les variables intensives (la densité par exemple) constantes :

$$\text{Condensation si et seulement si } \Pi_0 \sim \mathcal{O}(N) \text{ quand } N \rightarrow \infty. \quad (87)$$

Au contraire, si Π_0/N tend vers zéro quand $N \rightarrow \infty$, par exemple comme une loi de puissance $N^{-\alpha}$, on dit que le fluide ne présente pas de condensation de Bose–Einstein.

Dans la suite, nous appellerons Π_0 la *fraction condensée* dans le cas où cette quantité est non nulle. La fonction d'onde à une particule $\psi_0(\mathbf{r})$, état propre normalisé de $\hat{\rho}_1$ pour la valeur propre Π_0 , est appelée *fonction d'onde du condensat* :

$$\hat{\rho}_1 \psi_0(\mathbf{r}) = \Pi_0 \psi_0(\mathbf{r}). \quad (88)$$

Dans le cas du gaz parfait homogène à température T , l'opérateur densité est diagonal en point de vue impulsion. Ses valeurs propres sont égales aux populations des différentes impulsions possibles dans la boîte de volume L^3 :

$$\Pi_{\mathbf{p}} = N_{\mathbf{p}}, \quad (89)$$

de sorte que le critère de Penrose-Onsager redonne bien le critère de condensation vu plus haut : il y accumulation d'une fraction macroscopique $\Pi_0 = N_0$ de particules dans l'état $\mathbf{p} = 0$, la fonction d'onde du condensat étant $\psi_0(\mathbf{r}) = 1/L^{3/2}$.

Condensat fragmenté. On peut trouver des situations où plusieurs valeurs propres Π_j sont macroscopiques (Castin & Herzog 2001; Mueller, Ho, et al. 2006). C'est par exemple le cas pour un gaz homogène de particules

de spin 1, avec une interaction effective antiferromagnétique $\alpha \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{S}}_j$ et $\alpha > 0$. L'énergie d'interaction de spin s'écrit

$$\hat{V} = \alpha \sum_{i,j \neq i} \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{S}}_j = \frac{\alpha}{2} \hat{\mathbf{S}}_{\text{tot}}^2 - \alpha N \hbar^2 \quad (90)$$

où $\hat{\mathbf{S}}_{\text{tot}} = \sum_j \hat{\mathbf{S}}_j$ représente l'opérateur spin total. Pour minimiser l'énergie, les particules s'accumulent dans l'état d'impulsion nulle $\mathbf{p} = 0$ et leurs spins s'intriquent pour former un état de spin total nul. Quand on prend la trace partielle sur $N - 1$ particules, on trouve que le spin individuel de chaque atome apparaît dépolarisé, correspondant à trois valeurs propres égales pour la matrice densité à un corps : $\Pi_0 = \Pi_1 = \Pi_2 = \frac{N}{3}$. Nous reviendrons plus tard (chapitre 3) sur un argument proposé par Nozières (1995) sur le rôle des interactions d'échange, qui préservent un condensat scalaire de la fragmentation.

4-2 L'ordre à longue portée dans un fluide homogène

Nous considérons dans ce paragraphe le cas d'un gaz homogène confiné dans une boîte dont le volume tend vers l'infini, avec des conditions aux limites périodiques. L'opérateur densité du gaz à l'équilibre thermique à température T s'écrit

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\hat{H}/k_B T} \quad \text{avec} \quad \mathcal{Z} = \text{Tr} \left(e^{-\hat{H}/k_B T} \right) \quad (91)$$

où l'hamiltonien \hat{H} contient à la fois l'énergie cinétique des N particules et l'énergie d'interaction entre elles $V_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_N)$. Du fait de l'invariance par translation du problème, l'hamiltonien \hat{H} et donc l'opérateur densité $\hat{\rho}$ commutent avec l'opérateur *impulsion totale*

$$\hat{\mathbf{P}} = \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{p}}_j. \quad (92)$$

On en déduit que l'opérateur densité $\hat{\rho}$ exprimé dans la base des impulsions $|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N\rangle$ n'a un élément de matrice non nul entre $|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N\rangle$ et $|\mathbf{p}'_1, \dots, \mathbf{p}'_N\rangle$ que si

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{p}_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{p}'_j. \quad (93)$$

Quand on prend la trace partielle sur $N - 1$ particules, on somme les éléments de matrice avec $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_2, \dots, \mathbf{p}_N = \mathbf{p}'_N$ [cf. (83)], de sorte que les seuls éléments de matrice non nuls de $\hat{\rho}_1$ sont les éléments diagonaux

$$\langle \mathbf{p}' | \hat{\rho}_1 | \mathbf{p} \rangle = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') N(\mathbf{p}). \quad (94)$$

La base propre de l'opérateur densité à une particule $\hat{\rho}_1$ reste donc la base des ondes planes pour un gaz homogène à l'équilibre, même en présence d'interactions.

En particulier, on s'attend⁷ à ce que l'état correspondant à la plus grande valeur propre Π_0 soit l'état $|\mathbf{p} = 0\rangle$, décrit par la fonction d'onde uniforme sur toute l'étendue du gaz :

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{L^{3/2}}. \quad (95)$$

Partant maintenant de la décomposition de l'opérateur densité à un corps sur la base de ses états propres :

$$\hat{\rho}_1 = \sum_j \Pi_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j| \quad (96)$$

ou encore

$$\langle \mathbf{r}' | \hat{\rho}_1 | \mathbf{r} \rangle = \sum_j \Pi_j \psi_j(\mathbf{r}') \psi_j^*(\mathbf{r}), \quad (97)$$

nous pouvons isoler la contribution de l'état le plus peuplé ψ_0 et écrire :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}' | \hat{\rho}_1 | \mathbf{r} \rangle &= \Pi_0 \psi_0(\mathbf{r}') \psi_0^*(\mathbf{r}) + \sum_{j \neq 0} \Pi_j \psi_j(\mathbf{r}') \psi_j^*(\mathbf{r}) \\ &= \frac{\Pi_0}{L^3} + \sum_{j \neq 0} \Pi_j \psi_j(\mathbf{r}') \psi_j^*(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (98)$$

Le deuxième terme du membre de droite contient une infinité de fonctions oscillant toutes avec des fréquences spatiales différentes quand on varie \mathbf{r} et \mathbf{r}' . Quand on fait tendre la distance $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ vers l'infini, on s'attend donc

7. Ce point n'est pas toujours correct ; en présence d'un potentiel vecteur ou d'un couplage spin-orbite par exemple, l'état fondamental à une particule peut différer de l'état $\mathbf{p} = 0$.

à ce que ces oscillations se brouillent, de sorte qu'il ne reste plus que la contribution de l'état $\mathbf{p} = 0$:

$$\lim_{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty} \langle \mathbf{r}' | \hat{\rho}_1 | \mathbf{r} \rangle = \frac{\Pi_0}{L^3}. \quad (99)$$

Pour un fluide présentant une condensation de Bose-Einstein, $\Pi_0 = \mathcal{O}(N)$ de sorte que cette limite est égale à une fraction significative de la densité totale N/L^3 .

La relation (99) correspond à un ordre non diagonal à longue portée. L'adjectif *non diagonal* décrit le fait que l'on considère l'élément de matrice de $\hat{\rho}_1$ entre deux points distincts \mathbf{r} et \mathbf{r}' de l'espace. L'aspect *longue portée* est lié au fait que cet élément de matrice reste macroscopiquement non nul même quand les points \mathbf{r} et \mathbf{r}' sont arbitrairement éloignés.

Remarque. Dans leur article introduisant ce concept d'ordre non diagonal à longue portée, Penrose & Onsager (1956) prennent la relation

$$\lim_{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty} \langle \mathbf{r}' | \hat{\rho} | \mathbf{r} \rangle = \Psi(\mathbf{r}') \Psi^*(\mathbf{r}) \quad (100)$$

comme point de départ pour définir la fonction d'onde du condensat. Cette relation est plus générale que celle écrite en (99), puisqu'elle s'applique au cas d'un fluide non uniforme placé par exemple dans un potentiel périodique (cf. chapitre 4). La fraction condensée est définie par

$$f_0 \equiv \int |\Psi(\mathbf{r})|^2 d^3r. \quad (101)$$

Penrose & Onsager (1956) montrent ensuite que f_0 est très proche de la valeur propre maximale de $\hat{\rho}_1$, Π_0 , et que la fonction d'onde $\Psi(x)$ est quasiment colinéaire avec $\psi_0(x)$.

4-3 Distribution en impulsion et fonction G_1

Revenons au cas d'un gaz uniforme, obtenu dans le cas d'une boîte avec des conditions aux limites périodiques. Nous avons vu que dans ce cas, l'opérateur densité réduit $\hat{\rho}_1$ est diagonal dans la base des impulsions. Ses

éléments de matrice donnent la distribution en impulsion qui est une *observable à un corps*, donc effectivement calculable à partir de $\hat{\rho}_1$:

$$N(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p} | \hat{\rho}_1 | \mathbf{p} \rangle, \quad (102)$$

et le nombre total de particules est donné par

$$N = \sum_{\mathbf{p}} N(\mathbf{p}) = \frac{L^3}{(2\pi\hbar)^3} \int N(\mathbf{p}) d^3p. \quad (103)$$

On peut relier cette distribution en impulsion aux éléments de matrice de $\hat{\rho}$ dans la base des positions. Pour cela, remarquons d'abord que l'invariance par translation du système entraîne que $\langle \mathbf{r} | \hat{\rho}_1 | \mathbf{r}' \rangle$ ne dépend en fait que de la distance $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Introduisons donc la fonction $G_1(\mathbf{u})$:

$$G_1(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{r}' | \hat{\rho}_1 | \mathbf{r} \rangle \quad \text{avec} \quad \mathbf{u} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}. \quad (104)$$

En utilisant la relation de fermeture, on trouve :

$$\begin{aligned} N(\mathbf{p}) &= \langle \mathbf{p} | \hat{\rho}_1 | \mathbf{p} \rangle \\ &= \iint \langle \mathbf{p} | \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r}' | \hat{\rho}_1 | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle d^3r' d^3r \\ &= \frac{1}{L^3} \iint e^{i(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\mathbf{p}/\hbar} \langle \mathbf{r}' | \hat{\rho}_1 | \mathbf{r} \rangle d^3r' d^3r \\ &= \int G_1(\mathbf{u}) e^{-i\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3u \end{aligned} \quad (105)$$

où l'intégrale porte sur le volume L^3 .

La distribution en impulsion et la fonction G_1 sont donc reliées par une transformation de Fourier, qui peut s'inverser pour donner

$$G_1(\mathbf{u}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int N(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3p. \quad (106)$$

Cette relation étroite entre la distribution en impulsion $N(\mathbf{p})$ et la fonction $G_1(\mathbf{u})$ qui caractérise la cohérence quantique entre deux points de l'espace séparés de \mathbf{u} est bien illustrée par les deux facettes utilisées plus haut pour caractériser la condensation :

— Une valeur propre macroscopique Π_0 (§ 4-1) correspondant à une fraction macroscopique des atomes qui s'accumulent dans le pic d'impulsion nulle, soit une composante

$$\Pi_0 \delta(\mathbf{p}) \quad (107)$$

en distribution de Dirac dans la distribution d'impulsion à la limite continue.

— Un ordre non diagonal à longue portée (§ 4-2), correspondant à une limite finie non nulle Π_0/L^3 pour la fonction $G_1(\mathbf{u})$ quand $|\mathbf{u}| \rightarrow \infty$.

Ces deux critères sont bien entendu équivalents, puisque la transformée de Fourier de la fonction constante Π_0/L^3 , calculée comme indiqué en (105), fait apparaître la distribution de Dirac $\Pi_0 \delta(\mathbf{p})$.

Cas non uniforme. Dans le cas d'un gaz non uniforme, on dispose d'une relation équivalente à (105), avec une complexité légèrement plus grande due au caractère non homogène du gaz. On commence par se donner un point \mathbf{R} dans le gaz et on caractérise l'ordre non diagonal autour de ce point par l'élément de matrice :

$$G_1\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{u}}{2}, \mathbf{R} + \frac{\mathbf{u}}{2}\right) = \left\langle \mathbf{R} + \frac{\mathbf{u}}{2} \left| \hat{\rho}_1 \right| \mathbf{R} - \frac{\mathbf{u}}{2} \right\rangle. \quad (108)$$

Comme ci-dessus, on prend la transformée de Fourier vis-à-vis de la distance \mathbf{u} séparant les deux points :

$$\int \left\langle \mathbf{R} + \frac{\mathbf{u}}{2} \left| \hat{\rho}_1 \right| \mathbf{R} - \frac{\mathbf{u}}{2} \right\rangle e^{-i\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3u, \quad (109)$$

puis on prend la moyenne de ce résultat sur le point \mathbf{R} situé au milieu des deux points $\mathbf{R} \pm \mathbf{u}/2$ qui ont servi de référence :

$$\frac{1}{L^3} \iint \left\langle \mathbf{R} + \frac{\mathbf{u}}{2} \left| \hat{\rho}_1 \right| \mathbf{R} - \frac{\mathbf{u}}{2} \right\rangle e^{-i\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3u d^3R. \quad (110)$$

En utilisant la relation de fermeture sur les ondes planes d'impulsion \mathbf{p} quantifiées dans la boîte de volume L^3 ,

$$\sum_{\mathbf{p}'} |\mathbf{p}'\rangle \langle \mathbf{p}'| = \hat{1} \quad \text{avec} \quad \int e^{i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\cdot\mathbf{u}} d^3u = L^3 \delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}, \quad (111)$$

on arrive à

$$\frac{1}{L^3} \iint G_1 \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{u}}{2}, \mathbf{R} + \frac{\mathbf{u}}{2} \right) e^{-i\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}/\hbar} d^3u d^3R = N(\mathbf{p}). \quad (112)$$

On conserve donc une relation entre distribution en impulsion $N(\mathbf{p})$ et transformée de Fourier de $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ même si le fluide n'est pas uniforme, à condition de prendre la moyenne de la transformée de Fourier (109) sur l'étendue du gaz.

Références

- Bagnato, V., D. E. Pritchard & D. Kleppner (1987), « Bose–Einstein condensation in an external potential », in *Phys. Rev. A* 35, p. 4354.
- Bagnato, V. S. & D. Kleppner (1991), « Bose–Einstein condensation in low-dimensional traps », in *Phys. Rev. A* 44.11, pp. 7439–7441.
- Bose, S. N. (1924), « Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese », in *Z. Phys.* 26, p. 178.
- Castin, Yvan & Christopher Herzog (2001), « Bose–Einstein condensates in symmetry breaking states », in *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IV-Physics* 2.3, pp. 419–443.
- Cohen-Tannoudji, C. (1997-1998), *Condensation de Bose–Einstein des gaz atomiques ultra-froids*, Cours du Collège de France, disponible sur <http://www.phys.ens.fr/cours/college-de-france/index.html>.
- Cohen-Tannoudji, C., J Dalibard & F Laloë (2005), « La condensation de Bose–Einstein dans les gaz », in , ed. by Leduc M. & Le Bellac M., vol. Einstein aujourd'hui, EDP Sciences.
- Dirac, Paul AM (1926), « On the theory of quantum mechanics », in *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 112, 762, The Royal Society, , pp. 661–677.
- Diu, B., C. Guthmann, D. Lederer & B. Roulet (1989), *Physique Statistique*, Hermann.
- Einstein, A. (1924), « Quantentheorie des einatomigen idealen Gases », in *Sitzungsberichte/Physikalische Klasse, Preussische Akademie der Wissenschaften* 22, p. 261.
- (1925a), « Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. II », in *Sitzungsberichte/Physikalische Klasse, Preussische Akademie der Wissenschaften* 1, p. 3.
- (1925b), « Zur Quantentheorie des idealen Gases », in *Sitzungsberichte/Physikalische Klasse, Preussische Akademie der Wissenschaften* 3, p. 18.
- Gaunt, Alexander L., Tobias F. Schmidutz, Igor Gotlibovych, Robert P. Smith & Zoran Hadzibabic (2013), « Bose-Einstein Condensation of Atoms in a Uniform Potential », in *Phys. Rev. Lett.* 110 (20), p. 200406.
- Gerbier, F., J. H. Thywissen, S. Richard, M. Hugbart, P. Bouyer & A. Aspect (2004), « Critical Temperature of a Trapped, Weakly Interacting Bose Gas », in *Phys. Rev. Lett.* 92.3, 030405, p. 030405.
- Groot G. J. Hooyman, C. A. ten Seldam S. R. de (1950), « On the Bose-Einstein Condensation », in *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 203.1073, pp. 266–286.
- Ketterle, W. & N. J. van Druten (1996), « Bose–Einstein condensation of a finite number of particles trapped in one or three dimensions », in *Phys. Rev. A* 54, pp. 656–660.
- Mueller, Erich J., Tin-Lun Ho, Masahito Ueda & Gordon Baym (2006), « Fragmentation of Bose-Einstein condensates », in *Phys. Rev. A* 74 (3), p. 033612.
- Nozières, P. (1995), « Some comments on Bose–Einstein Condensation », in *Bose–Einstein Condensation*, ed. by A. Griffin, D. W. Snoke & S. Stringari, Cambridge: Cambridge University Press.
- Pais, A. (1979), « Einstein and the quantum theory », in *Rev. Mod. Phys.* 51 (4), pp. 863–914.
- Penrose, O. & L. Onsager (1956), « Bose–Einstein condensation and liquid helium », in *Phys. Rev.* 104, p. 576.
- Pitaevskii, L. & S. Stringari (2016), *Bose–Einstein Condensation and Superfluidity*, Oxford: Oxford University Press.
- Schmidutz, Tobias F., Igor Gotlibovych, Alexander L. Gaunt, Robert P. Smith, Nir Navon & Zoran Hadzibabic (2014), « Quantum Joule-Thomson Effect in a Saturated Homogeneous Bose Gas », in *Phys. Rev. Lett.* 112 (4), p. 040403.
- Smith, Robert P., Robert L. D. Campbell, Naaman Tammuz & Zoran Hadzibabic (2011), « Effects of Interactions on the Critical Temperature of a Trapped Bose Gas », in *Phys. Rev. Lett.* 106 (25), p. 250403.
- Tammuz, Naaman, Robert P. Smith, Robert L. D. Campbell, Scott Beattie, Stuart Moulder, Jean Dalibard & Zoran Hadzibabic (2011), « Can a Bose Gas Be Saturated ? », in *Phys. Rev. Lett.* 106 (23), p. 230401.

Chapitre 2

Du gaz de Bose à l'état superfluide

Sommaire

1	Comment caractériser l'ordre à longue portée?	2
1-1	La fonction G_1	2
1-2	Quelques procédures pour accéder à G_1	2
1-3	La méthode de la self-interférence	3
2	Deux critères pour la superfluidité	7
2-1	Un atome unique dans un anneau	7
2-2	L'anneau en rotation lente ($\Omega \ll \Omega_c$)	9
2-3	Existence de courants permanents	10
2-4	L'expérience du NIST	11
3	Vitesse superfluide et vitesse normale	12
3-1	Le modèle à deux fluides	12
3-2	Condensation et vitesse superfluide	13
3-3	Parois solides et vitesse normale.	14
4	Densité superfluide et densité normale	14
4-1	Un fluide classique en rotation	14
4-2	Réduction du moment d'inertie	16
4-3	Les conditions aux limites distordues	17
4-4	Bilan du modèle à deux fluides	19
5	Appendice : changements de référentiel	20

Le but de ce chapitre est d'étudier le lien entre la condensation d'un gaz de particules bosoniques et son éventuelle superfluidité. Nous avons vu au chapitre précédent que la condensation de Bose–Einstein d'un fluide, qu'il soit parfait ou en interaction, se caractérise par une propriété mathématique simple : l'existence d'une valeur propre « macroscopique » pour l'opérateur densité à un corps, traduisant un ordre à longue portée. Nous allons donc commencer par décrire comment on peut accéder en pratique à cette quantité pour des gaz d'atomes froids.

Nous passerons ensuite au phénomène de superfluidité. La définition même de la superfluidité et la détermination des paramètres qui l'accompagnent – densité superfluide, vitesse superfluide – sont nettement moins simples. En fait, la notion même de superfluidité fait appel à des phénomènes physiques variés qu'il importe de bien identifier. Nous allons faire cette identification en prenant deux situations emblématiques de l'étude des superfluides (Leggett 2006); il s'agit « d'expériences de pensée » pour lesquelles le fluide est soit à l'équilibre, soit dans un état métastable. En ce qui concerne les atomes froids, ces expériences de pensée ont été réalisées récemment sur un montage du NIST (groupe de G. Campbell) et nous décrirons brièvement son protocole et ses résultats principaux.

Une fois bien identifiées ces deux situations, nous décrirons le modèle à deux fluides initialement proposé par Tisza (1938), puis approfondi¹ par

1. Nous faisons ici un raccourci historique abusif. Landau ne considérait pas que sa théorie approfondissait celle de Tisza, mais la corrigeait d'erreurs importantes. Il écrivait ainsi en

Landau (1941). Ce modèle a été proposé pour rendre compte de la superfluidité de l'hélium liquide, découverte par Kapitza (1938) et par Allen & Misener (1938). Le lien entre la superfluidité de l'hélium liquide et la condensation de Bose–Einstein (prédite 13 ans plus tôt) fut presque aussitôt proposé par London (1938b) [voir aussi London (1938a)]. Notons que London travaillait à l'époque à l'Institut Henri Poincaré et Tisza au Laboratoire de Physique Expérimentale du Collège de France dans le groupe de Langevin².

Pour définir les différentes quantités pertinentes pour la caractérisation d'un état superfluide, nous allons nous appuyer à plusieurs reprises sur des changements de référentiel, passant du référentiel du laboratoire \mathcal{R} (supposé galiléen) à un autre référentiel \mathcal{R}' , qui pourra être en translation ou en rotation par rapport au laboratoire. Il nous a donc semblé utile de regrouper en appendice le formalisme permettant de traiter ce type de changement de référentiel en physique quantique.

1 Comment caractériser l'ordre à longue portée ?

1-1 La fonction G_1

La fonction G_1 introduite au chapitre précédent constitue la caractérisation la plus directe de l'ordre en phase qui peut apparaître dans un fluide quantique. Elle se construit à partir de l'opérateur densité réduit à une par-

introduction de son article de 1941 (traduction par D. Ter Haar) : *L. Tisza suggested that helium II should be considered as a degenerate ideal Bose gas. He suggested that the atoms found in the normal state (a state of zero energy) move through the liquid without friction. This point of view, however, cannot be considered as satisfactory. Apart from the fact that liquid helium has nothing to do with an ideal gas, atoms in the normal state would not behave as "superfluid". On the contrary, nothing would prevent atoms in a normal state from colliding with excited atoms, i.e. when moving through the liquid they would experience a friction and there would be no superfluidity at all. In this way the explanation advanced by Tisza not only has no foundation in his suggestions but is in direct contradiction to them.*

2. Tisza, d'origine hongroise et ancien élève de Landau, continua sa carrière au MIT à partir de 1941. London, d'origine allemande, quitta son poste à Berlin en 1933 suite aux lois raciales de l'Allemagne nazie. Il occupa ensuite des postes temporaires à Oxford et Paris, avant d'émigrer aux USA en 1939 pour aller travailler à l'Université Duke, en Caroline du Nord.

ticule $\hat{\rho}_1$:

$$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \mathbf{r}' | \hat{\rho}_1 | \mathbf{r} \rangle = \text{Tr} \left(\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\rho} \right), \quad (1)$$

où la seconde expression fait appel à l'opérateur champ $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$ de la seconde quantification, qui crée une particule au point \mathbf{r} . La fonction G_1 caractérise donc les corrélations en phase et en amplitude pouvant exister entre deux points du gaz distants de $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

Comme souligné par Penrose & Onsager (1956), cette fonction G_1 permet de généraliser la notion de condensation de Bose–Einstein à des gaz en interaction. En pratique, on rencontre trois types de situations dans la limite $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$:

- $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ tend vers une limite finie non nulle, notée $\psi_0^*(\mathbf{r}) \psi_0(\mathbf{r}')$: on est en présence d'un condensat et ψ_0 est appelée *fonction d'onde du condensat*. Cette situation se produit à suffisamment basse température pour un gaz de Bose uniforme à 3D, qu'il soit parfait ou en interaction répulsive. Comme nous allons le voir dans ce chapitre, la rigidité de phase qu'elle implique dans le cas du gaz en interaction conduit à un état superfluide.
- $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ tend vers 0, mais avec une décroissance lente (algébrique) ; il n'y a donc pas d'échelle de longueur associée à cette décroissance. Par ailleurs, les interactions répulsives entre atomes réduisent fortement les fluctuations de densité. On parle alors de quasi-condensat (Kagan, Svistunov, et al. 1987), avec un quasi-ordre à longue portée. Cette situation, que l'on peut rencontrer par exemple pour un gaz de Bose homogène à 2D, conduit également à un état superfluide.
- $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ tend vers 0 « rapidement », c'est-à-dire comme une fonction exponentielle ou gaussienne, ce qui permet d'introduire une longueur de corrélation pour caractériser cette décroissance. Cette longueur diverge au point de condensation et sa variation avec la température dans la région critique nous renseigne sur la classe d'universalité de la transition.

1-2 Quelques procédures pour accéder à G_1

Depuis l'observation des premiers condensats avec des gaz d'atomes en 1995, un certain nombre de méthodes ont été développées pour accéder

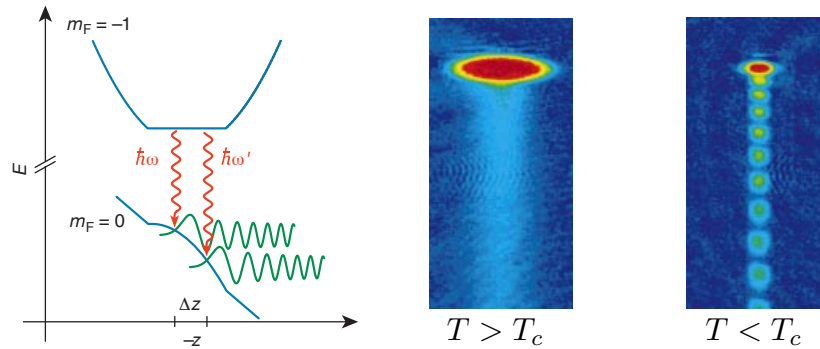


FIGURE 1. Mesure de la fonction G_1 par interférence de deux mini jets atomiques produits par extraction d'atomes d'un gaz piégé magnétiquement. Grâce à deux ondes radio-fréquence ω et ω' , on fait basculer le moment magnétique des atomes situés au voisinage immédiat des points \mathbf{r} et \mathbf{r}' (ou plutôt des surfaces équipotentielles magnétiques passant par ces points). Ces atomes ne sont alors plus piégés et tombent sous l'effet de la gravité. Le contraste des interférences renseigne sur la cohérence en phase entre les points \mathbf{r} et \mathbf{r}' . Figure extraite de Bloch, Hänsch, et al. (2000).

à la fonction de corrélation à un corps $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Il serait trop long de toutes les analyser en détail et nous allons dans la suite (§ 1-3) nous concentrer sur un schéma illustrant bien la puissance des techniques possibles. Mentionnons brièvement quelques autres méthodes qui ont également été mises en œuvre :

- La première technique consiste simplement à mesurer la distribution en impulsion $N(\mathbf{p})$ du gaz et à utiliser la relation de Fourier entre $N(\mathbf{p})$ et $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ vue au cours précédent [voir par exemple Stenger, Inouye, et al. (1999)].
- Il est également possible d'extraire de manière sélective des atomes du voisinage immédiat des points \mathbf{r} et \mathbf{r}' , et de faire interférer les jets atomiques ainsi produits. Cette méthode a été utilisée par Bloch, Hänsch, et al. (2000) et nous avons reproduit sur la figure 1 deux résultats particulièrement significatifs de cette publication, montrant l'absence ou la présence de cohérence entre ces deux points, selon qu'on est au dessus

ou en dessous de la température critique du gaz.

- On peut faire interférer le système que l'on souhaite sonder avec une « référence de phase », c'est-à-dire un gaz composé de la même espèce atomique dont la géométrie est telle que sa phase est quasi-uniforme. C'est ce qui a été mis en œuvre par Corman, Chomaz, et al. (2014) [cf. figure 2] : on sonde la distribution de phase d'un gaz confiné dans un anneau en le faisant interférer avec un petit condensat central : les ondulations des franges d'interférence révèlent les fluctuations de phase le long de l'anneau [voir aussi Eckel, Jendrzejewski, et al. (2014)].
- On peut préparer deux gaz dans des conditions similaires (même forme, même densité, même température) et les faire interférer en laissant se recouvrir par une expansion balistique. L'analyse des interférogrammes donne accès à la fonction $|G_1|^2$, supposée la même pour les deux gaz. Cette technique a été mise en œuvre notamment pour l'étude de gaz de basse dimension [voir par exemple Hadzibabic, Krüger, et al. (2006) pour le cas bidimensionnel et Hofferberth, Lesanovsky, et al. (2007) pour le cas unidimensionnel].
- Depuis une dizaine d'années, on dispose de systèmes condensés hybrides, formés par des combinaisons d'excitons et de photons (Kasprzak, Richard, et al. 2006; Amo, Sanvitto, et al. 2009), voire même par des photons isolés (Klaers, Schmitt, et al. 2010). Ces systèmes possèdent des propriétés superfluides comme montré par Amo, Lefrère, et al. (2009). Une de leurs caractéristiques les plus remarquables est que la lumière qu'ils émettent contient l'information sur la phase locale du fluide ; une analyse interférométrique de cette lumière donne donc un accès direct à la fonction G_1 . Nous repoussons l'étude de ces fluides quantiques au cours d'une année ultérieure, car leur description nécessite la prise en compte des processus dissipatifs entre lumière et matière [voir Carusotto & Ciuti (2013) pour une revue].

1-3 La méthode de la self-interférence

Dans ce paragraphe, nous allons décrire une méthode consistant à faire interférer un gaz atomique, condensé ou non, avec une copie de ce même

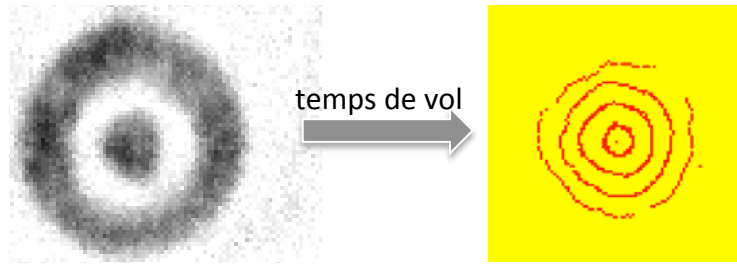


FIGURE 2. Gauche : gaz atomique composé d'un anneau dont on souhaite sonder la distribution de phase, et d'un disque central agissant comme une référence de phase. Droite : figure d'interférence entre l'anneau et le disque, obtenue en relâchant le confinement des atomes et en laissant se recouvrir les nuages issus de l'anneau et du disque. Les ondulations des franges sont essentiellement dues aux fluctuations de la phase dans l'anneau.

gaz déplacée d'une quantité déterminée \mathbf{a} . L'expérience donne accès à

$$\int G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r} + \mathbf{a}) d^3r, \quad (2)$$

ce qui permet de caractériser un éventuel ordre à longue portée en faisant varier \mathbf{a} . Cette expérience a initialement été menée par le groupe du NIST (Hagley, Deng, et al. 1999), puis reprise par plusieurs équipes, notamment par le groupe de Cambridge pour un gaz homogène (Navon, Gaunt, et al. 2015). Nous allons adopter ici une approche suffisamment générale pour qu'elle s'applique aux différentes configurations, puis nous l'illustrerons sur les résultats de Cambridge.

Remarque préliminaire. Le protocole de mesure que nous allons décrire conduit à un résultat qui ne dépend que de l'opérateur densité à un corps $\hat{\rho}_1$. On peut construire une infinité d'états à N corps du gaz conduisant au même opérateur densité à un corps, et donc au même résultat pour la mesure qui nous intéresse. Ainsi, si on considère un développement de l'opérateur $\hat{\rho}_1$ sur sa base propre

$$\hat{\rho}_1 = \sum_j \Pi_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|, \quad \Pi_j \geq 0, \quad \sum_j \Pi_j = N, \quad (3)$$

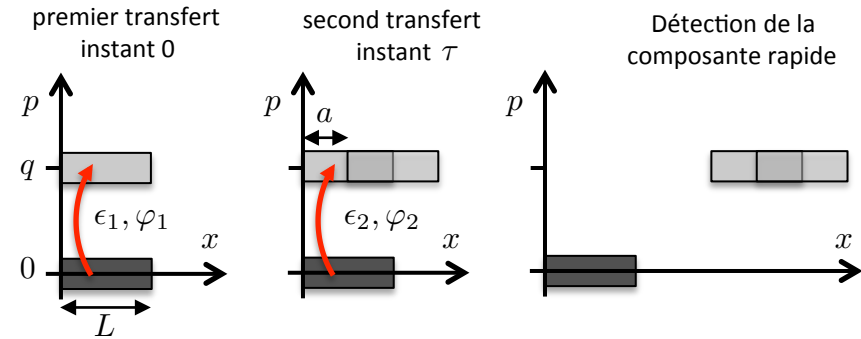


FIGURE 3. Diagramme dans l'espace des phases (x, p) indiquant le principe de la mesure de G_1 [mis en place par Hagley, Deng, et al. (1999) et repris pour un gaz uniforme par Navon, Gaunt, et al. (2015)]. Deux transferts d'impulsions successifs, séparés par une durée τ , provoquent l'éjection d'une (faible) partie du nuage piégé. La quantité d'atomes en jeu dépend du recouvrement entre les deux composantes éjectées, qui est elle-même une fonction de G_1 .

on peut considérer l'opérateur densité à N corps « fictif » :

$$\hat{\rho}_{\text{fict.}} = \frac{1}{N} \sum_j \Pi_j |N : \psi_j\rangle\langle N : \psi_j|. \quad (4)$$

Cet opérateur densité $\hat{\rho}_{\text{fict.}}$, qui redonne bien l'opérateur densité à un corps $\hat{\rho}_1$, correspond à un état *mélange statistique de condensats purs*, c'est-à-dire une superposition incohérente d'états où les N particules occupent toutes le même état ψ_j . La probabilité que ce condensat pur soit dans l'état ψ_j est donnée par Π_j/N . Cette manière de représenter l'état du gaz simplifie notablement l'analyse, mais il serait bien sûr incorrect de l'utiliser pour calculer autre chose que des quantités liées à la matrice densité à un corps ρ_1 . En particulier, cette approche n'est valable que dans la mesure où on peut négliger complètement le rôle des interactions pendant le processus de mesure que nous allons décrire. Si ce n'est pas le cas, l'opérateur $\hat{\rho}_1$ mesuré est différent de l'opérateur $\hat{\rho}_1$ initial.

Le principe de la mesure (figure 3). Le gaz d'atomes, initialement confiné dans un piège harmonique ou dans une boîte, a une distribution en impul-

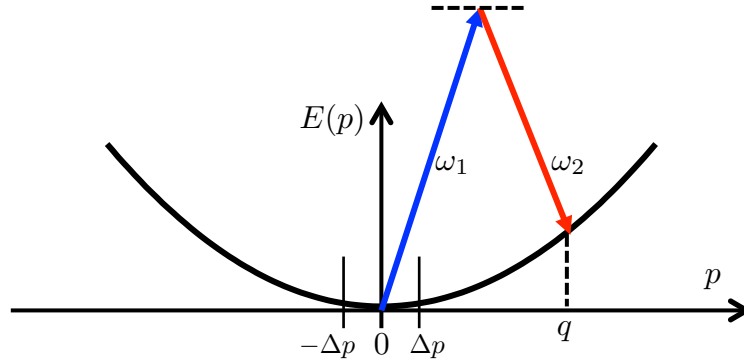


FIGURE 4. Transfert cohérent d'atomes d'impulsion $p \lesssim \Delta p$ vers une classe d'impulsion nettement plus élevée $\sim q$ par un processus absorption-émission stimulée. Le choix des fréquences $\omega_{1,2}$ suivant (6) assure le caractère résonnant du transfert. L'ajustement de la fraction transférée (notée ici ϵ^2) se fait en variant la puissance des faisceaux lumineux.

sion de largeur caractéristique Δp . À un instant donné, on communique l'impulsion \mathbf{q} , avec $|\mathbf{q}| \gg \Delta p$, à une faible fraction des atomes de manière cohérente. On attend un temps τ , pendant lequel ces atomes se déplacent de

$$\mathbf{a} = \mathbf{q}\tau/m, \quad (5)$$

puis on répète l'opération de transfert une seconde fois. On mesure ensuite par une technique de temps de vol le nombre total d'atomes qui ont gagné l'impulsion \mathbf{q} . C'est l'interférence – constructive ou destructive – entre l'excitation lors du premier et du second transfert qui permet de remonter à la quantité (2).

Dans l'expérience initiale de Hagley, Deng, et al. (1999), le transfert cohérent était fait en appliquant une impulsion lumineuse stationnaire d'axe x , qui avait pour effet de créer simultanément plusieurs paquets d'atomes autour des impulsions $\mathbf{q}_n = \pm 2n\hbar\mathbf{k} \mathbf{u}_x$. Dans l'expérience de Navon, Gaunt, et al. (2015), ce transfert est sélectif et ne crée essentiellement que le paquet désiré à l'impulsion \mathbf{q} ; il est induit par une impulsion lumineuse avec deux ondes planes de vecteurs d'onde \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_2 , avec le choix de

fréquences

$$\hbar(\omega_1 - \omega_2) = \frac{q^2}{2m}, \quad \mathbf{q} = \hbar(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \quad (6)$$

ce qui correspond à la condition de diffraction de Bragg pour l'onde de matière sur le réseau lumineux formé par les deux faisceaux. Nous nous limiterons dans ce qui suit à ce transfert sélectif.

Nous allons adopter ici un formalisme directement inspiré du *Supplementary Material* de Navon, Gaunt, et al. (2015). Nous divisons l'espace des impulsions pertinent pour l'expérience en deux domaines, l'un centré autour de 0 et de largeur Δp , l'autre centré autour de q , également de largeur Δp (figure 3). On écrit donc les vecteurs d'état sous forme de spineur à deux composantes, associées respectivement aux domaines autour de 0 (composante du bas) et autour de q (composante du haut) :

$$\begin{pmatrix} \psi_q(\mathbf{r}) \\ \psi_0(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

où ψ_0 et ψ_q ont toutes deux un contenu en impulsion de l'ordre de Δp .

Le transfert cohérent revient à faire basculer des atomes entre les deux composantes³; il se décrit donc dans ce formalisme par une matrice unitaire 2×2 . En nous restreignant à des probabilités de transfert faibles, on peut écrire cette matrice sous la forme

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon e^{-i\varphi} \\ \epsilon e^{i\varphi} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \epsilon \ll 1. \quad (8)$$

Partant d'un gaz dans un état dont les classes d'impulsion significativement peuplées sont voisines de 0 (à Δp près), le premier transfert se décrit par :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \psi(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \epsilon_1 e^{-i\varphi_1} \psi(\mathbf{r}) \\ \approx \psi(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

La fonction initiale $\psi(\mathbf{r})$ est une des fonctions propres normalisées $\psi_j(\mathbf{r})$ de $\hat{\rho}_1$ et sa contribution sera à pondérer au final avec la probabilité Π_j/N .

3. Ce transfert est effectué par une impulsion courte, de durée $t_0 = 0.1$ ms et la vitesse communiquée vaut $q/m = 3$ mm/s. La largeur de la résonance due à l'effet Doppler, $q\Delta p/m$, est alors petite devant la largeur de Fourier $2\pi/t_0$, ce qui assure que toutes les classes d'impulsion pertinentes autour de l'impulsion nulle sont excitées de la même façon.

L'attente de durée τ correspond à la translation de la composante « rapide » de la quantité \mathbf{a} et l'acquisition de la phase⁴ liée à son énergie $q^2/2m$:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 e^{-i\varphi_1} \psi(\mathbf{r}) \\ \approx \psi(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \epsilon_1 e^{-i(\varphi_1 + q^2\tau/2m\hbar)} \psi(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \\ \approx \psi(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Enfin la seconde excitation revient à appliquer une nouvelle fois la matrice \hat{M} , avec des paramètres ϵ_2 et φ_2 :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 e^{-i(\varphi_1 + q^2\tau/2m\hbar)} \psi(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \\ \approx \psi(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \epsilon_1 e^{-i(\varphi_1 + q^2\tau/2m\hbar)} \psi(\mathbf{r} - \mathbf{a}) + \epsilon_2 e^{-i\varphi_2} \psi(\mathbf{r}) \\ \approx \psi(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

où l'on s'est limité aux termes d'ordre 1 en $\epsilon_{1,2}$.

Intéressons-nous à la population totale de la composante supérieure, d'impulsion centrée autour de \mathbf{q} , qui après un temps assez long se sépare du nuage initial (figure 3). Prenons $\epsilon_1 = \epsilon_2 \equiv \epsilon$ pour simplifier les notations. Cette population s'écrit

$$N_q(\mathbf{a}) = N \epsilon^2 \int |\psi(\mathbf{r}) + e^{i\Phi} \psi(\mathbf{r} - \mathbf{a})|^2 d^3r \quad (12)$$

avec

$$\Phi = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{q^2\tau}{2m\hbar}. \quad (13)$$

Il est clair que cette population $N_q(a)$ fait intervenir le terme recherché (2), correspondant à l'interférence entre $\psi(\mathbf{r})$ et $\psi(\mathbf{r} + \mathbf{a})$. La procédure précise pour extraire ce terme dépend des phases $\varphi_{1,2}$ acquises au cours des transferts. Dans l'expérience de Hagley, Deng, et al. (1999), on avait $\varphi_1 = \varphi_2$ de sorte que le signal d'interférence était modulé temporellement à la fréquence $q^2/2m\hbar$. Dans l'expérience de Navon, Gaunt, et al. (2015), la phase de l'oscillateur générant la différence de fréquence $\omega_1 - \omega_2 = q^2/(2m\hbar)$ suit de manière cohérente l'évolution, de sorte que $\Phi = 0$.

Plaçons-nous dans ce deuxième cas pour terminer l'analyse, et considérons un gaz homogène remplissant une boîte cubique de côté L . Les termes

4. La durée maximale utile pour τ est ~ 10 ms ; elle correspond à une séparation complète des deux composantes d'impulsion \mathbf{q} , soit $a = q\tau/m \gtrsim L$, où $L = 26 \mu\text{m}$ est la longueur de l'échantillon.

directs faisant intervenir l'intégrale de $|\psi(\mathbf{r})|^2$ ou $|\psi(\mathbf{r} - \mathbf{a})|^2$ sont égaux à 1 si la fonction d'onde initiale ψ est normalisée. Le terme $\psi(\mathbf{r}) \psi^*(\mathbf{r} - \mathbf{a})$ intervenant dans l'intégrale de recouvrement ne prend des valeurs non nulles que si \mathbf{r} et $\mathbf{r} - \mathbf{a}$ sont tous deux à l'intérieur de la boîte de côté L . Ceci correspond à un sous-volume représentant la fraction $1 - a/L$ du volume total. Pour ces couples de points \mathbf{r} et $\mathbf{r} - \mathbf{a}$ situés tous deux à l'intérieur du gaz, la moyenne sur les différents tirages possibles pour ψ donne

$$\begin{aligned} \langle \psi(\mathbf{r}) \psi^*(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \rangle &= \sum_j \frac{\Pi_j}{N} \psi_j(\mathbf{r}) \psi_j^*(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \\ &= \frac{1}{N} \langle \mathbf{r} | \hat{\rho}_1 | \mathbf{r} - \mathbf{a} \rangle = \frac{1}{N} G_1(\mathbf{a}). \end{aligned} \quad (14)$$

En regroupant les différents termes, on arrive donc à

$$\begin{aligned} N_q(\mathbf{a}) &= 2N \epsilon^2 \left[1 + \left(1 - \frac{a}{L} \right) g_1(\mathbf{a}) \right] \quad \text{si } a < L \\ &= 2N \epsilon^2 \quad \text{si } a > L \end{aligned} \quad (15)$$

où l'on a introduit la fonction de corrélation à un corps réduite⁵

$$g_1(\mathbf{a}) = \frac{G_1(\mathbf{a})}{N/L^3}, \quad (16)$$

prenant la valeur 1 en $\mathbf{a} = 0$.

La mesure de la variation de $N_q(\mathbf{a})$ avec a , c'est-à-dire avec l'intervalle de temps τ séparant les deux transferts, révèle donc de manière directe la fonction g_1 recherchée.

- Pour un condensat pur, la fonction $g_1(a)$ est égale à 1 pour toute valeur de a et la fonction $N_q(a)$ est un simple triangle passant de $4N\epsilon^2$ à $2N\epsilon^2$ quand a varie entre 0 et L .
- Pour un gaz partiellement condensé, de fraction condensée $f_0 = N_0/N$, la fonction $N_q(a)$ varie rapidement au voisinage de $a = 0$, puis décroît ensuite linéairement comme $2N\epsilon^2 [1 + (1 - a/L)f_0]$ jusqu'à $a = L$.
- Pour un gaz non condensé, $N_q(a)$ passe de $4N\epsilon^2$ à $2N\epsilon^2$ sur une longueur de l'ordre de la longueur de cohérence ($\ll L$) et reste constante ensuite.

5. On pourra vérifier que G_1 et g_1 sont réelles pour un gaz à l'équilibre thermique.

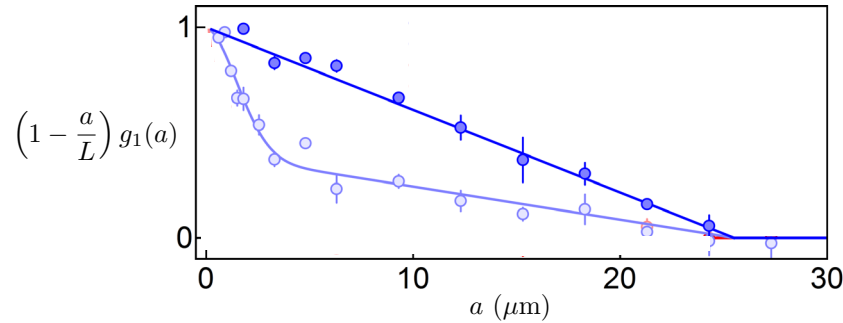


FIGURE 5. Mesure de g_1 par la méthode schématisée en figure 3 pour un gaz confiné dans une boîte de côté $L = 26 \mu\text{m}$. La vitesse q/m vaut 3 mm/s et chaque fraction transférée est $\epsilon^2 = 0.05$. La mesure de N_q est faite 140 ms après les transferts, pour bien séparer les deux nuages d'impulsion \mathbf{q} du nuage initial. Les résultats ont été obtenus avec une température $T \lesssim 0.2 T_c$ pour la courbe supérieure et $T \approx 0.7 T_c$ pour la courbe inférieure. Figure adaptée de Navon, Gaunt, et al. (2015).

Un exemple de mesures de g_1 dans les deux premiers cas est montré en figure 5. Pour conclure, mentionnons une nouvelle fois l'importance de vérifier que les interactions jouent un rôle négligeable durant la durée effective de la mesure τ . En l'occurrence, cette contrainte est largement satisfaite puisque l'énergie d'interaction est inférieure à $h \times 20 \text{ Hz}$.

2 Deux critères pour la superfluidité

Les expériences que nous allons considérer pour définir les propriétés caractéristiques d'un superfluide concernent des récipients toriques ou cylindriques d'axe z et de rayon moyen r_0 , rempli du fluide à étudier (figure 6). Nous nous intéresserons en particulier à l'état du fluide en fonction de la vitesse de rotation Ω de l'anneau autour de l'axe z , vitesse de rotation mesurée dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

Pour simplifier les notations, nous serons amenés dans certains cas à

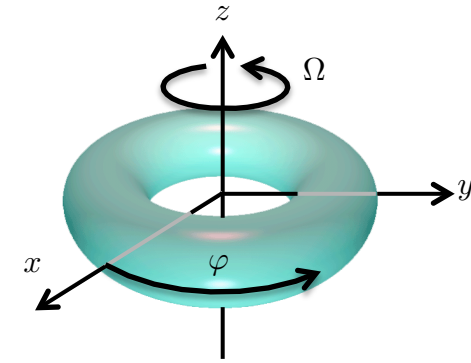


FIGURE 6. Le système modèle considéré ici : le fluide est à l'intérieur d'un anneau d'axe z , les parois de cet anneau pouvant être mises en rotation à vitesse angulaire Ω . La variable φ repère la position azimuthale d'une particule dans l'anneau.

considérer le cas particulier d'un anneau fin, c'est-à-dire tel que la position d'une particule du fluide est caractérisée par le seul angle azimuthal φ , les deux autres variables r et z des coordonnées cylindriques étant fixées à $r = r_0$ et $z = 0$.

Nous allons commencer par rappeler la physique d'une particule unique dans cette géométrie, puis nous passerons aux phénomènes que l'on peut observer quand on place un gaz en interaction dans ce récipient annulaire. Nous décrirons en particulier les résultats expérimentaux obtenus dans le groupe de G. Campbell au NIST (Eckel, Lee, et al. 2014).

Pour terminer cette introduction, signalons qu'il existe pour les systèmes non homogènes d'autres caractérisations de la superfluidité, comme l'existence des modes spécifiques appelés *modes ciseaux* (Guéry-Odelin & Stringari 1999).

2-1 Un atome unique dans un anneau

Considérons pour commencer le mouvement d'une particule unique sur cet anneau supposé assez fin pour que seul le degré de liberté azimu-

théorique soit pertinent. La fonction d'onde de la particule dépend donc uniquement de la variable φ et elle satisfait les conditions aux limites périodiques

$$\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi), \quad \int_0^{2\pi} |\psi(\varphi)|^2 d\varphi = 1, \quad (17)$$

ou, si on préfère travailler avec l'abscisse curviligne $x = r_0\varphi$ le long de l'anneau :

$$\psi(x) = \psi(x + 2\pi r_0), \quad \int_0^{2\pi r_0} |\psi(x)|^2 dx = 1. \quad (18)$$

Anneau au repos. Si le potentiel est constant le long de l'anneau (on néglige la rugosité pour l'instant), le seul terme de l'hamiltonien est l'énergie cinétique qui s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta = -\frac{\hbar^2}{2mr_0^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \quad (19)$$

de sorte que les états et les énergies propres de cet hamiltonien à une particule sont

$$\psi_n(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\varphi}, \quad E_n = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} n^2. \quad (20)$$

Anneau en rotation. Si l'anneau est mis en rotation, la rugosité inévitable des parois va créer un potentiel dépendant du temps sur la particule, rendant impossible la recherche d'états stationnaires dans le référentiel du laboratoire. En revanche, on peut passer dans le référentiel en rotation avec l'anneau où l'on retrouve un « potentiel de rugosité » indépendant du temps. Ce passage dans le référentiel tournant se fait en ajoutant le terme (cf. appendice) :

$$-\Omega L_z = i \hbar \Omega \frac{d}{d\varphi} \quad (21)$$

à l'hamiltonien (19), si bien que l'hamiltonien dans le référentiel tournant peut s'écrire

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} \left(i \frac{d}{d\varphi} + \frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^2 + E_{\text{centrif.}} \quad (22)$$

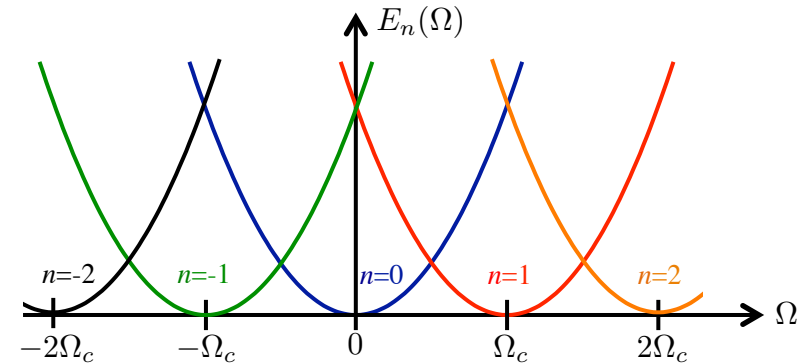


FIGURE 7. Variation avec Ω de l'énergie des états propres à une particule dans l'anneau.

où l'on a introduit la fréquence de rotation caractéristique

$$\Omega_c = \frac{\hbar}{mr_0^2} \quad (23)$$

et l'énergie centrifuge

$$E_{\text{centrif.}} = -\frac{1}{2} m \Omega^2 r_0^2. \quad (24)$$

Nous omettons cette énergie centrifuge dans ce paragraphe puisque c'est une constante vis à vis de la variable φ , que l'on peut éventuellement éliminer en redéfinissant l'origine des énergies pour chaque valeur de Ω .

Les fonctions propres de (22) sont les mêmes ($e^{in\varphi}$) qu'en absence de rotation, mais les énergies sont maintenant :

$$E_n(\Omega) = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} \left(n - \frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^2. \quad (25)$$

Le diagramme énergétique correspondant tracé en fonction de Ω a donc la structure périodique représentée sur la figure 7. En particulier, l'état fon-

damental de la particule est (à $1/\sqrt{2\pi}$ près) :

$$\psi_{-1}(\varphi) = e^{-i\varphi} \quad \text{si} \quad -3\Omega_c/2 < \Omega < -\Omega_c/2 \quad (26)$$

$$\psi_0(\varphi) = 1 \quad \text{si} \quad |\Omega| < \Omega_c/2 \quad (27)$$

$$\psi_{+1}(\varphi) = e^{i\varphi} \quad \text{si} \quad \Omega_c/2 < \Omega < 3\Omega_c/2 \quad (28)$$

...

Cette succession d'états fondamentaux en fonction de la vitesse de rotation Ω se comprend simplement. Dans le référentiel du laboratoire, la vitesse azimuthale associée l'état $\psi_n(\varphi)$ est reliée au gradient de la phase de la fonction d'onde et vaut

$$\mathbf{v}_n = \frac{\hbar}{mr_0} n \mathbf{u}_\varphi. \quad (29)$$

La vitesse de rotation de la paroi de l'anneau est quant à elle

$$\mathbf{v}_{\text{paroi}} = \Omega r_0 \mathbf{u}_\varphi. \quad (30)$$

L'indice n correspondant à l'état fondamental est l'entier qui minimise la différence entre \mathbf{v}_n et $\mathbf{v}_{\text{paroi}}$. En d'autres termes, c'est le meilleur compromis entre le fait d'avoir une particule qui tourne à une vitesse proche de celle des parois, tout en conservant une fonction d'onde qui satisfait les conditions aux limites périodiques (17). En particulier, dans le cas d'une rotation lente

$$v_{\text{paroi}} = \Omega r_0 \ll v_1 = \frac{\hbar}{mr_0} \quad \Leftrightarrow \quad \Omega \ll \Omega_c, \quad (31)$$

l'état fondamental reste l'état $n = 0$. Nous allons voir que cette notion de « compromis » reste pertinente pour tout superfluide décrit par un paramètre d'ordre qui obéit aux mêmes conditions aux limites périodiques que (17).

Rôle de l'énergie centrifuge. Pour aboutir au résultat (25) et au diagramme énergétique périodique en Ω de la figure 7, nous avons omis le terme d'énergie centrifuge apparaissant dans l'hamiltonien (22). Si on conserve l'énergie centrifuge dans cet hamiltonien, le diagramme énergétique prend l'allure représentée sur la figure 8. Comme on passe d'un point de vue à l'autre en ajoutant la constante $-m\Omega^2 r_0^2/2$ à toutes les énergies,

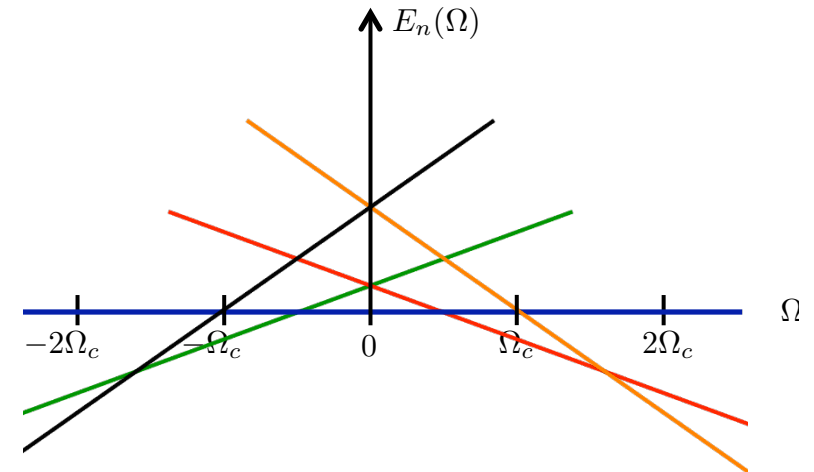


FIGURE 8. Diagramme énergétique de (22) si on garde le terme d'énergie centrifuge. Le code de couleur est le même qu'en figure 7.

les conclusions qui précèdent sur la nature de l'état fondamental à Ω fixé sont inchangées et on peut raisonner indifféremment sur l'un ou l'autre des diagrammes⁶. L'avantage du point de vue adopté ci-dessus est de mieux mettre en évidence la périodicité du problème avec Ω . Le seul cas où il importe de garder trace du terme d'énergie centrifuge se produit quand on est amené à dériver les énergies ou les vecteurs d'état par rapport à Ω (voir par exemple § 4-2).

2-2 L'anneau en rotation lente ($\Omega \ll \Omega_c$)

Si le fluide est décrit par la physique classique, on peut montrer (voir plus loin le paragraphe § 4-1) qu'il va lui aussi se mettre en mouvement pour atteindre le champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ correspondant à une rotation rigide

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}. \quad (32)$$

6. Merci à Hélène Perrin pour une discussion sur ce point !

Cette mise en mouvement se fait par l'intermédiaire des interactions parois-atomes du fluide. Le moment cinétique du gaz à l'équilibre vaut

$$\mathbf{L} = m \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) d^3r, \quad (33)$$

où nous avons noté $\rho(\mathbf{r})$ la densité volumique à l'intérieur de l'anneau ($\int \rho$ est égale au nombre d'atomes N). On peut réécrire ce moment cinétique comme

$$\mathbf{L} = I_{\text{class}} \boldsymbol{\Omega} \quad (34)$$

où I_{class} représente le moment d'inertie du gaz le long de l'axe z :

$$I_{\text{class}} = m \int \rho(\mathbf{r}) (x^2 + y^2) d^3r \approx Nmr_0^2, \quad (35)$$

l'expression approchée étant valable pour un anneau fin.

Pour un fluide quantique, un premier critère de superfluidité est le fait que le fluide ne se met pas entièrement en rotation pour des vitesses faibles de l'anneau. Ce phénomène a été observé pour la première fois avec de l'hélium liquide superfluide par Hess & Fairbank (1967). Le moment cinétique du fluide à l'équilibre est alors inférieur à (34), ce qui correspond à une réduction du moment d'inertie, $I < I_{\text{class}}$. Ce premier critère correspond donc à une certaine rigidité de l'état superfluide : on cherche à le mettre en mouvement de rotation par rapport à un référentiel galiléen, mais on n'y arrive pas, tout du moins pas complètement.

Notons que la condition $\Omega \ll \Omega_c$ s'écrit dans le cas d'un anneau fin :

$$\text{Anneau fin : } \Omega \ll \Omega_c \rightarrow L \ll N\hbar. \quad (36)$$

Cette condition de rotation lente signifie donc que le moment cinétique est beaucoup trop faible pour donner à chaque atome un quantum \hbar de moment cinétique. En revanche, il faut choisir pour cette expérience $\Omega \gg \Omega_c/N$, soit $L \gg \hbar$, de sorte qu'une fraction des N atomes peut être dans un état de moment cinétique non nul.

Cas du gaz parfait. Un gaz parfait condensé de Bose-Einstein (par exemple à température nulle) satisfait ce premier critère. En effet, nous avons vu que l'état fondamental à une particule reste égal à la fonction

$\psi_0(x)$ tant que la fréquence de rotation ne dépasse pas en valeur absolue $\Omega_c/2$ [cf. (27)]. Le gaz parfait vérifie donc bien cette propriété de rigidité vis à vis d'une mise en rotation lente du récipient qui le contient.

2-3 Existence de courants permanents

Supposons maintenant que l'anneau est en mouvement de rotation avec une vitesse de l'ordre ou supérieure à Ω_c de sorte que le gaz est également en rotation même s'il est superfluide ; il est alors décrit par le paramètre d'ordre $e^{i\varphi}$ (ou plus généralement $e^{in\varphi}$ avec $n > 0$). Arrêtons la rotation des parois de l'anneau, qui s'immobilisent donc dans le référentiel du laboratoire. Qu'arrive-t-il au fluide ?

- Si le fluide est classique, donc visqueux, les interactions avec les parois conduisent à une immobilisation relativement rapide.
- Pour un superfluide, le courant qui existait avant l'arrêt de la rotation de l'anneau va pouvoir perdurer pendant un temps considérable. Pour des supraconducteurs, ce temps se compte en années, voire plus. Pour des gaz d'atomes froids, ils peuvent être de plusieurs dizaines de secondes, soit une durée pendant laquelle une fraction importante des atomes est perdue du fait des collisions avec le gaz résiduel présent dans l'enceinte à vide (Ramanathan, Wright, et al. 2011; Moulder, Beattie, et al. 2012).

La propriété mise en avant dans cette deuxième expérience de pensée est donc une propriété de métastabilité : un état qui n'est pas l'état fondamental du système – le superfluide au repos aurait moins d'énergie cinétique – constitue malgré tout un état de quasi-équilibre.

La possibilité de décrire une boucle d'hystérésis accompagne de manière naturelle cette propriété de métastabilité. Quand on fait parcourir à la fréquence de rotation Ω un aller et retour entre la valeur $\Omega = 0$ et une valeur $\gtrsim \Omega_c$, le fluide ne passe pas par les mêmes états à l'aller et au retour. Nous avons représenté de manière schématique sur la figure 9 un paysage énergétique possible du superfluide dans cette variation, en prenant pour abscisse un chemin abstrait dans l'espace de Hilbert. Notons qu'il ne s'agit que d'une des multiples configurations envisageables : on peut très bien rencontrer des situations où plusieurs ψ_n sont simultanément métastables.

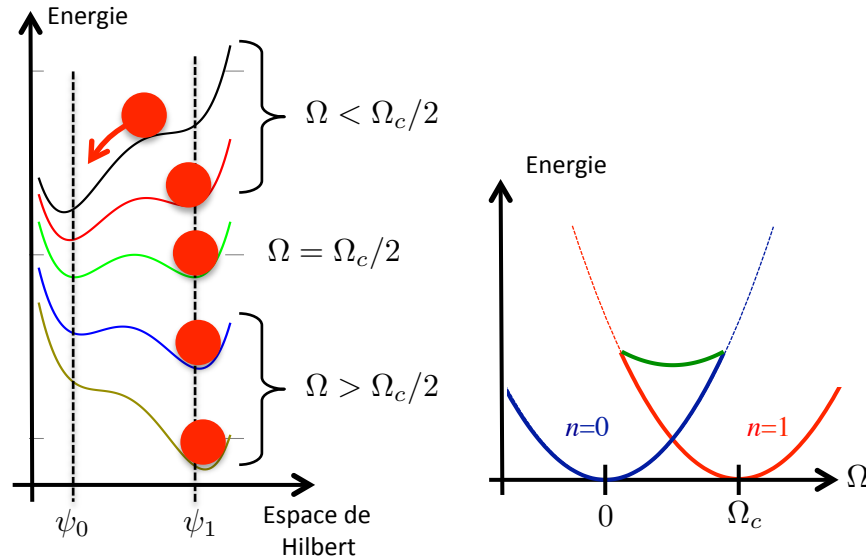


FIGURE 9. Gauche : « paysage énergétique » d'un superfluide dans l'espace de Hilbert pour différentes fréquences de rotation. Pour une fréquence de rotation inférieure à $\Omega_c/2$, on s'attend à ce que comme pour le gaz parfait, le minimum absolu corresponde au paramètre d'ordre ψ_0 qui ne tourne pas. Mais l'état $\psi_1 = e^{i\varphi}$ peut correspondre à un minimum local d'énergie, et donc être métastable. Ce n'est que pour des fréquences Ω nettement plus basses que $\Omega_c/2$ qu'il perdra sa métastabilité et que le superfluide basculera vers ψ_0 . Droite : Variation des extréma de la fonctionnelle d'énergie en fonction de Ω . Pour une plage autour de Ω_c , on a deux minima (bleu et rouge) et un point col (en vert).

Cas du gaz parfait. Le gaz parfait ne satisfait pas ce deuxième critère fondé sur la métastabilité. Plaçons-nous à température nulle pour simplifier l'analyse. Partant de $\Omega = \Omega_c$, le gaz est dans son état fondamental avec toutes les particules dans l'état $\psi_1 : |N : \psi_1\rangle$. Réduisons Ω pour arriver au point $\Omega_c/2$. Au niveau de la particule unique, les états ψ_0 et ψ_1 sont alors dégénérés. Pour le gaz parfait composé de N particules, les $N + 1$ états

$$|N' : \psi_0 ; N - N' : \psi_1\rangle \quad \text{avec } N' = 0, 1, \dots, N \quad (37)$$

sont tous dégénérés et rien ne s'oppose à ce que l'état du gaz bascule de $|N : \psi_1\rangle$ à $|N : \psi_0\rangle$ par transitions successives

$$|N' : \psi_0 ; N - N' : \psi_1\rangle \longrightarrow |N' + 1 : \psi_0 ; N - N' - 1 : \psi_1\rangle. \quad (38)$$

La situation est radicalement différente pour un gaz avec des interactions répulsives. Nous verrons au cours prochain un argument dû à Nozières (1995) montrant que les états $|N' : \psi_0 ; N - N' : \psi_1\rangle$ avec $N' \neq 0$ et $N' \neq N$ (appelés *condensats fragmentés*) sont énergétiquement défavorisés par rapport aux états extrémaux $|N : \psi_0\rangle$ et $|N : \psi_1\rangle$ (qui sont de « vrais » condensats). Ceci protège l'état $|N : \psi_1\rangle$ quand Ω arrive autour de $\Omega_c/2$ et ce n'est que pour des fréquences de rotation nettement plus basses que la transition (dissipative) vers $|N : \psi_0\rangle$ peut s'effectuer. Les interactions répulsives sont donc indispensables pour assurer ce deuxième critère de superfluidité lié à la métastabilité (Ueda & Leggett 1999; Mueller 2002; Baharian & Baym 2013). Une analyse détaillée des processus de dissipation pour le courant superfluide circulant dans cette géométrie annulaire est faite par Dubessy, Liennard, et al. (2012).

2-4 L'expérience du NIST

Cette expérience a montré de manière claire le phénomène d'hystérésis lié à la métastabilité des courants permanents dans un gaz condensé de Bose-Einstein de $\sim 400\,000$ atomes de ^{23}Na à une température de l'ordre de 100 nK. Les atomes sont confinés dans un piège en forme d'anneau constitué par (cf. figure 10) :

- un faisceau d'axe vertical, désaccordé sur le bleu (donc repoussant les atomes), auquel on a fait traverser un masque annulaire ; le rayon moyen de l'anneau est $r_0 \approx 20\ \mu\text{m}$. Du fait de la résolution finie du

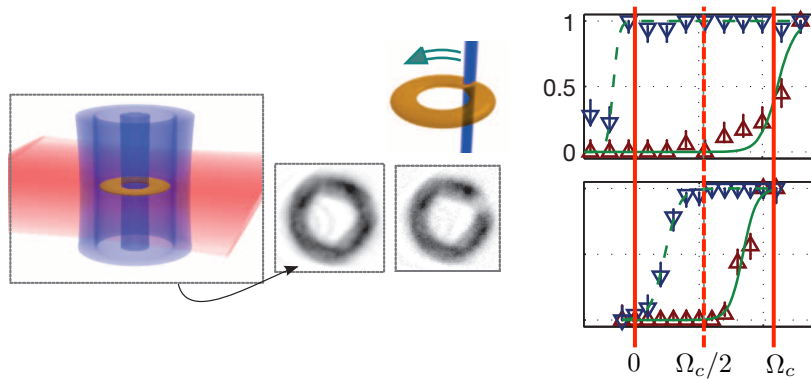


FIGURE 10. Schéma expérimental utilisé par Eckel, Lee, et al. (2014) pour étudier la métastabilité des courants dans un anneau d'atomes de ^{23}Na . La rugosité des parois de l'anneau est générée grâce à un défaut (weak link) tournant à une fréquence Ω ajustable. Droite : deux courbes d'hystérésis montrant l'enroulement moyen $\langle n \rangle$ (moyenne sur ~ 20 réalisations) après avoir laissé le défaut tourner à la vitesse Ω pendant 2 s ; triangles « pointe en haut » : on part de $n = 0$, triangles « pointe en bas » : on part de $n = 1$.

système d'imagerie de ce masque, le potentiel radial de l'anneau est à peu près harmonique, de fréquence ~ 200 Hz.

- une nappe de lumière horizontale, désaccordée sur le rouge, qui attire les atomes au voisinage du plan $z = 0$, avec un confinement harmonique de fréquence ~ 500 Hz.

Le gaz est dans le régime de Thomas–Fermi pour les directions radiales et verticales (largeurs totales $8\ \mu\text{m} \times 3\ \mu\text{m}$). La fréquence de rotation Ω_c déduite de ces valeurs est de 1.2 Hz.

Pour savoir si un courant permanent est présent dans l'anneau, on effectue une expansion balistique en coupant le confinement. L'existence du courant, donc d'un moment cinétique par atome $\ell = n\hbar$, crée une barrière centrifuge $\ell^2/2mr^2$ qui empêche le nuage d'atomes de s'étaler jusqu'au centre. La taille de ce trou observé lors de l'expansion permet de déterminer éventuellement la valeur de n (Moulder, Beattie, et al. 2012; Murray, Krygier, et al. 2013), mais seules les valeurs $n = 0$ et $n = 1$ sont exploitées dans l'expérience que nous décrivons ici.

Nous avons déjà mentionné qu'un supercourant peut subsister pendant de longues durées dans ce type de piège lumineux. Pour simuler des parois rugueuses et avoir la possibilité de mettre cette rugosité en mouvement, Eckel, Lee, et al. (2014) ont ajouté un autre faisceau lumineux, également vertical et désaccordé sur le bleu, créant un défaut local sur l'anneau. La position de ce lien faible (*weak link*) peut être contrôlée par un déflecteur acousto-optique et sa taille est de $6\ \mu\text{m}$ le long de la direction azimuthale (demi-largeur à $1/e^2$).

On peut changer la rugosité effective, et donc l'aire de la boucle d'hystérésis, en variant la puissance du faisceau créant ce lien faible. La préparation du gaz dans l'état $n = 0$ ou l'état $n = 1$ se fait avec le lien faible immobile ou en rotation à la fréquence Ω_c . On génère alors de manière déterministe un état sans courant permanent ou un état avec un enroulement de phase de 2π , correspondant à $n = 1$. On fait ensuite tourner le lien faible pendant 2 s à une fréquence angulaire ajustable entre -0.3 et 1.2 Hz, puis on détecte la présence éventuelle d'un courant permanent.

Deux résultats sont représentés sur la figure 10. Pour la boucle d'hystérésis du haut, obtenue avec une rugosité faible, on voit que le courant permanent $n = 1$ subsiste même si la rugosité est immobile dans le référentiel du laboratoire. La boucle d'hystérésis du bas, réalisée avec une rugosité plus forte, montre que le courant $n = 1$ subsiste légèrement en dessous de la fréquence de transition pour le gaz parfait $\Omega_c/2$, mais disparaît si on amène Ω à zéro. La métastabilité des courants permanents dans un condensat atomique confiné dans un anneau est donc bien mise en évidence dans cette expérience, qui offre de plus la possibilité d'étudier quantitativement les temps de vie moyens des courants en fonction de la rugosité du confinement (Baharian & Baym 2013).

3 Vitesse superfluide et vitesse normale

3-1 Le modèle à deux fluides

Le modèle à deux fluides constitue un moyen relativement simple pour rendre compte des phénomènes que nous venons de décrire. On pose que l'ensemble du gaz/liquide peut être vu comme la superposition de deux

composantes, une partie superfluide d'entropie nulle, de densité ρ_s et de vitesse \mathbf{v}_s , et une partie normale de densité ρ_n et de vitesse \mathbf{v}_n .

Il est essentiel de bien faire la différence entre la fraction condensée du gaz et la fraction superfluide, ou de manière équivalente, entre la fraction non condensée et la fraction normale. Même s'il existe des situations où ces notions coïncident, on connaît également des cas où elles diffèrent :

- Considérons par exemple le cas de l'hélium liquide ; on trouve expérimentalement que ce liquide devient, à la précision de mesure près, entièrement superfluide quand la température tend vers 0 [voir par exemple Ceperley (1995)]. En revanche, la fraction condensée Π_0/N , évaluée à partir d'expériences de diffraction de neutrons, ne dépasse pas 0.1 (Sokol 1995). Cette limitation de la fraction condensée est également présente (dans une moindre mesure) pour un gaz de Bose en interaction. Elle est due au fait que les interactions entre particules créent des paires \mathbf{k} , $-\mathbf{k}$ à partir d'une paire d'atomes initialement d'impulsion nulle ; cet « habillage » de l'état fondamental par des états d'impulsion non nulle vient diminuer la valeur propre associée à l'état $\mathbf{p} = 0$, soit $f_0 < 1$.
- Dans un gaz de Bose à deux dimensions, on n'attend pas de condensation de Bose-Einstein à la limite thermodynamique. On peut définir un ordre en phase local correspondant à un quasi-condensat (Kagan, Svistunov, et al. 1987), mais la fraction condensée Π_0/N tend vers 0 quand la taille du système tend vers l'infini. En revanche une transition superfluide peut se produire à température suffisamment basse et la densité superfluide prend une valeur non nulle, comme prédit par Kosterlitz & Thouless (1973) and Nelson & Kosterlitz (1977) [voir aussi les discussions dans Hadzibabic & Dalibard (2011) et dans l'appendice de l'article de revue de Bloch, Dalibard, et al. (2008)].

Il ne faudrait pas déduire de ce qui précède que (quasi-)condensation et superfluidité sont déconnectées l'une de l'autre. Il y a au contraire une relation profonde entre les deux, comme nous allons le voir pour la définition de la vitesse superfluide ; dans un fluide bosonique 3D, il se produit une seule transition qui conduit à l'apparition simultanée d'une fraction condensée et d'une fraction superfluide. Toutefois il ne faut pas identifier les conséquences des deux phénomènes.

3-2 Condensation et vitesse superfluide

La condensation de Bose-Einstein est caractérisée par l'apparition d'un paramètre d'ordre complexe $\psi_0(\mathbf{r})$, correspondant à l'état propre de plus grande valeur propre pour l'opérateur densité à un corps. Ce paramètre d'ordre peut être écrit sous la forme

$$\psi_0(\mathbf{r}) = |\psi_0(\mathbf{r})| e^{i\theta(\mathbf{r})} \quad (39)$$

et on définit la vitesse superfluide par la relation

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta. \quad (40)$$

Cette définition peut se justifier à partir des remarques suivantes :

- Pour un gaz uniforme et au repos, le paramètre d'ordre ψ_0 doit lui aussi être constant dans l'espace, ce qui donne comme on s'y attend une vitesse superfluide nulle $\mathbf{v}_s = 0$.
- Considérons deux référentiels galiléens \mathcal{R} et \mathcal{R}' , le second étant en mouvement à la vitesse $-\mathbf{v}$ par rapport au premier. Dans ce changement de référentiel, une fonction d'onde à une particule $\psi(\mathbf{r}, t)$ dans le référentiel \mathcal{R} devient après la transformation unitaire décrivant le passage dans le référentiel \mathcal{R}' [cf. eq. (119) de l'appendice avec $\mathbf{v}_0 = -\mathbf{v}$]

$$\psi(\mathbf{r}, t) \longrightarrow \tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) = e^{im(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}-v^2t/2)/\hbar} \psi(\mathbf{r}-\mathbf{v}t, t). \quad (41)$$

Considérons maintenant un superfluide au repos dans \mathcal{R} , décrit par un paramètre d'ordre uniforme

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0 e^{-i\mu t/\hbar}. \quad (42)$$

On s'attend donc à ce que ce superfluide ait une vitesse $+\mathbf{v}$ dans le référentiel \mathcal{R}' . C'est bien le cas si on impose que le paramètre d'ordre soit modifié comme une fonction d'onde dans un changement de référentiel galiléen. En injectant (42) dans (41), on trouve en effet :

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) = \psi_0 e^{im\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}/\hbar} e^{-i(\mu+\frac{1}{2}mv^2)t/\hbar}. \quad (43)$$

En utilisant la définition (40) qui relie la vitesse superfluide au gradient de phase du paramètre d'ordre, on vérifie alors que la vitesse du superfluide dans le référentiel \mathcal{R}' est $\mathbf{v}_s = +\mathbf{v}$, comme attendu.

Irrotationalité d'un superfluide. Puisque la vitesse superfluide est le gradient d'une fonction scalaire $\theta(\mathbf{r})$, on s'attend à ce que cette vitesse soit de rotationnel nul, $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$, sauf là où θ est singulière. Ces zones de singularité de θ se produisent à des endroits où le module du paramètre d'ordre s'annule et où sa phase est donc indéfinie. Ceci correspond par exemple à des lignes de vortex dans un gaz 3D (des points pour un gaz 2D). Une autre formulation de cette propriété d'irrotationalité est

$$\oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{r} = n \frac{2\pi\hbar}{m}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (44)$$

où l'intégrale est prise sur un contour fermé évitant les point de singularité de $\theta(\mathbf{r})$. De ce point de vue, l'observation de réseaux de vortex dans des condensats en rotation uniforme constitue une preuve de l'irrotationalité de la vitesse superfluide : un arrangement régulier de singularités de phase remplace le champ de rotation rigide $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ (Madison, Chevy, et al. 2000; Abo-Shaeer, Raman, et al. 2001).

3-3 Parois solides et vitesse normale.

La vitesse de la composante normale \mathbf{v}_n est définie par rapport aux conditions aux limites imposées au fluide. Si celui-ci est placé dans un récipient rigide (ou un piège laser ou magnétique qui ne se déforme pas dans le temps), la vitesse normale est donc celle du récipient.

Dans le changement de référentiel galiléen envisagé plus haut, la transformation de la vitesse normale est, comme pour la vitesse superfluide, conforme à l'intuition. Si les parois du récipient sont immobiles dans le référentiel \mathcal{R} , la vitesse normale est nulle dans ce référentiel : $\mathbf{v}_n = 0$. Dans le référentiel \mathcal{R}' bougeant à la vitesse $-\mathbf{v}$ par rapport à \mathcal{R} , les parois ont pour vitesse \mathbf{v} et la vitesse normale dans ce référentiel est $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}$.

Dans les deux expériences évoquées plus haut pour un anneau en rotation, la vitesse normale est :

- la vitesse de rotation rigide $\mathbf{v}_n = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ dans le cas où l'anneau tourne à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$;
- nulle dans le cas où la rotation de l'anneau a été stoppée, une fois la transition superfluide traversée.

On peut bien sûr imaginer des situations où la définition que nous venons de poser est ambiguë. C'est par exemple le cas si le fluide est inséré entre deux parois bougeant l'une par rapport à l'autre, comme dans un écoulement de Couette. Leggett (2006) discute les difficultés pouvant émerger de cette définition pour ce type d'écoulement. Par ailleurs, il est important de remarquer qu'il n'y a pas de lien direct entre la vitesse normale définie en référence aux parois confinant le fluide, et la vitesse moyenne que l'on pourrait calculer pour la fraction non condensée de ce fluide.

4 Densité superfluide et densité normale

Dans le paragraphe précédent, nous avons expliqué comment définir, au moins dans des configurations relativement simples, les vitesses des deux composantes superfluide et normale. Il nous reste maintenant à expliquer comment évaluer leurs densités respectives, ρ_s et ρ_n , avec par hypothèse

$$\rho_n + \rho_s = \rho. \quad (45)$$

Nous allons pour cela revenir à l'anneau en rotation lente, pour lequel l'expérience prouve qu'une partie du fluide reste au repos. Nous allons d'abord vérifier que cette propriété est spécifique des fluides quantiques, puis nous verrons comment l'utiliser pour définir ρ_s et ρ_n .

4-1 Un fluide classique en rotation

Considérons une assemblée de N particules confinées dans l'anneau créant le potentiel $V_{\text{trap}}(\mathbf{r})$. Cet anneau est mis en rotation à fréquence angulaire Ω . L'énergie de ces particules évaluée dans le référentiel tournant est alors donnée par l'hamiltonien [cf. appendice, eq. (129)] :

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{j=1}^N \left(\frac{(\hat{\mathbf{p}}_j - \mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}_j))^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\hat{\mathbf{r}}_j) - \frac{1}{2}m\Omega^2(\hat{x}_j^2 + \hat{y}_j^2) \right) \\ &+ V_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_N). \end{aligned} \quad (46)$$

où $V_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_N)$ représente le potentiel d'interaction entre particules.

Sous cette forme, qui est une généralisation directe de (22), on voit que l'effet de la rotation est double :

- elle introduit le potentiel centrifuge $-m\Omega^2(x^2 + y^2)/2$;
- elle crée un « magnétisme artificiel » décrit par le potentiel vecteur

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (47)$$

(on prend par convention une charge unité), correspondant à un champ magnétique uniforme $\mathbf{B} = 2m\boldsymbol{\Omega}$. En termes de force, cette contribution « magnétique » donne naissance à la force de Coriolis $2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}$, qui est le pendant de la force de Lorentz $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ dans un problème de magnétisme. Cette analogie entre magnétisme et rotation a été étudiée en détail dans le cours 2013-14.

L'hamiltonien (46) est valable aussi bien en physique classique que quantique. Intéressons-nous maintenant au courant qui peut exister dans l'anneau en rotation.

Pour caractériser l'état d'équilibre du fluide, nous allons évaluer la valeur moyenne de son moment cinétique dans le référentiel tournant

$$\mathcal{L}(\{\mathbf{r}_j\}, \{\mathbf{p}_j\}) = m \sum_j \mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j, \quad (48)$$

où les \mathbf{r}_j et les \mathbf{v}_j désignent les positions et les vitesses des particules dans le référentiel tournant et où le moment conjugué à \mathbf{r}_j , noté \mathbf{p}_j , s'écrit [cf. appendice, eq. (134)] :

$$\mathbf{p}_j = m(\mathbf{v}_j + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j). \quad (49)$$

Nous supposons le gaz à l'équilibre thermique, de sorte que la valeur moyenne recherchée s'écrit

$$\langle \mathcal{L} \rangle = \frac{Nm}{\mathcal{Z}} \int (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1) e^{-E(\{\mathbf{r}_j\}, \{\mathbf{p}_j\})/k_B T} d\tau \quad (50)$$

où l'élément de volume $d\tau$ dans l'espace des phases représente en fait les $6N$ degrés de libertés

$$d\tau = d^3r_1 \dots d^3r_N d^3p_1 \dots d^3p_N \quad (51)$$

et où le coefficient de normalisation \mathcal{Z} , c'est-à-dire la fonction de partition pour ce fluide classique, est

$$\mathcal{Z} = \int e^{-E(\{\mathbf{r}_j\}, \{\mathbf{p}_j\})/k_B T} d\tau. \quad (52)$$

En utilisant le lien (49) entre la vitesse d'une particule et son impulsion, ainsi que la définition (47) du potentiel vecteur, nous pouvons réécrire la moyenne du moment cinétique comme

$$\langle \mathcal{L} \rangle = \frac{N}{\mathcal{Z}} \int (\mathbf{r}_1 \times [\mathbf{p}_1 - \mathbf{A}(\mathbf{r}_1)]) e^{-E(\{\mathbf{r}_j\}, \{\mathbf{p}_j\})/k_B T} d\tau. \quad (53)$$

On peut alors procéder à un changement de variable dans l'intégrale pour chaque couple $\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j$:

$$\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j \longrightarrow \mathbf{r}_j, \mathbf{p}'_j = \mathbf{p}_j - \mathbf{A}(\mathbf{r}_j). \quad (54)$$

Le jacobien associé à ce changement est égal à 1 et on arrive donc à

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L} \rangle &= \frac{N}{\mathcal{Z}} \int (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}'_1) e^{-E^{(0)}(\{\mathbf{r}_j\}, \{\mathbf{p}'_j\})/k_B T} d\tau' \\ \mathcal{Z} &= \int e^{-E^{(0)}(\{\mathbf{r}_j\}, \{\mathbf{p}'_j\})/k_B T} d\tau' \end{aligned} \quad (55)$$

avec

$$\begin{aligned} E^{(0)}(\{\mathbf{r}_j\}, \{\mathbf{p}'_j\}) &= \sum_{j=1}^N \left(\frac{\mathbf{p}'_j{}^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}_j) - \frac{1}{2}m\Omega^2(x_j^2 + y_j^2) \right) \\ &+ V_{\text{int}}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \end{aligned} \quad (56)$$

et

$$d\tau = d^3r_1 \dots d^3r_N d^3p'_1 \dots d^3p'_N. \quad (57)$$

On se trouve alors face à une expression identique à celle d'un gaz placé dans un anneau immobile dans un référentiel galiléen, le seul effet de la rotation étant de modifier le potentiel de confinement en lui ajoutant le potentiel centrifuge. L'effet du potentiel vecteur, responsable de la force de Coriolis, a entièrement disparu ! De ce fait, rien ne vient briser la chiralité du système et le moment cinétique moyen, mesuré dans le référentiel tournant, est toujours nul :

$$\mathcal{L} = 0. \quad (58)$$

En d'autres termes, le fluide vu dans le référentiel du laboratoire tourne à la vitesse Ω des parois de l'anneau et le moment d'inertie du gaz est égal au moment d'inertie « rigide » I_{class} donné en (35).

En fait, on retrouve ici le célèbre résultat de magnétisme connu sous le nom de *théorème de Bohr – van Leeuwen* : dans un cadre thermodynamique fondé sur la mécanique classique, la magnétisation d'un système de particules chargées plongées dans un champ magnétique est toujours nulle.

4-2 Réduction du moment d'inertie

Nous avons donc prouvé qu'un fluide classique tourne toujours à la vitesse de l'anneau, aussi basse soit-elle. Nous nous plaçons donc à $\Omega \ll \Omega_c$ et nous définissons la densité superfluide comme la fraction restant immobile dans le référentiel du laboratoire, la fraction normale tournant quant à elle à la même vitesse que les parois de l'anneau.

Pour simplifier notre analyse, nous allons supposer que la densité totale ρ est uniforme à l'intérieur de l'anneau. Nous pouvons donc relier les densités normales et superfluide à partir de la réduction du moment d'inertie I par rapport à sa valeur classique

$$\frac{\rho_n}{\rho} = \frac{I}{I_{\text{class}}}, \quad \rho_s = \rho - \rho_n, \quad (59)$$

ce qui signifie que $\rho_n = \rho$ si l'ensemble du fluide tourne avec l'anneau, et $\rho_s = \rho$ si l'ensemble du fluide reste arrêté alors que les parois de l'anneau bougent. En d'autres termes, le moment cinétique mesuré dans le référentiel tournant vaut

$$\text{Ref. tournant : } \langle \mathcal{L}_z \rangle = -\frac{\rho_s}{\rho} I_{\text{class}} \Omega. \quad (60)$$

Il est nul pour un gaz classique d'après l'argument développé en § 4-1 puisque le fluide tourne entièrement avec l'anneau, et il vaut $-I_{\text{class}} \Omega$ dans le cas d'un superfluide parfait puisque ce dernier reste immobile dans le référentiel du laboratoire : il semble donc tourner à la vitesse angulaire $-\Omega$ pour un observateur lié aux parois de l'anneau.

Examinons les conséquences de cette définition sur le plan énergétique.

À l'équilibre thermodynamique, le moment cinétique moyen dans le référentiel tournant se calcule à partir de

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{L}}_z \rangle &= \langle m \sum_j \hat{\mathbf{r}}_j \times \hat{\mathbf{v}}_j \rangle \cdot \mathbf{u}_z \\ &= \langle \sum_j \hat{\mathbf{r}}_j \times \hat{\mathbf{p}}_j \rangle \cdot \mathbf{u}_z - m\Omega \sum_j \langle \hat{x}_j^2 + \hat{y}_j^2 \rangle \\ &= \langle \hat{\mathcal{L}}_z \rangle - \Omega I_{\text{class}}, \end{aligned} \quad (61)$$

où nous avons utilisé encore une fois $m\mathbf{v}_j = \mathbf{p}_j - m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j$ et fait intervenir le moment cinétique dans le référentiel du laboratoire $\hat{\mathbf{L}} = \sum_j \hat{\mathbf{r}}_j \times \hat{\mathbf{p}}_j$. La moyenne thermique est prise avec l'opérateur densité $\exp(-\hat{H}/k_B T)$ où l'hamiltonien \hat{H} dans le référentiel tournant est donné en (22) [ou dans l'appendice à l'équation (129) pour sa version 3D], et comporte notamment le terme $-\Omega \hat{\mathcal{L}}_z$:

$$\langle \hat{\mathcal{L}}_z \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \text{Tr} \left(\hat{\mathcal{L}}_z e^{-\hat{H}/k_B T} \right) \quad (62)$$

où l'on a introduit la fonction de partition quantique

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} \left(e^{-\hat{H}/k_B T} \right). \quad (63)$$

On voit alors qu'il est aisé de réécrire la moyenne recherchée $\langle \hat{\mathcal{L}}_z \rangle$: quand on prend la dérivée de $\exp(-\hat{H}/k_B T)$ par rapport à Ω , on voit précisément apparaître⁷

$$\frac{\hat{\mathcal{L}}_z}{k_B T} e^{-\hat{H}/k_B T} \quad (64)$$

en utilisant le fait que l'hamiltonien est invariant par rotation autour de l'axe Oz et commute donc avec $\hat{\mathcal{L}}_z$. On a donc

$$\langle \hat{\mathcal{L}}_z \rangle = k_B T \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \Omega} = k_B T \frac{\partial(\log \mathcal{Z})}{\partial \Omega} \quad (65)$$

7. Comme on est amené à prendre la dérivée de l'hamiltonien par rapport à Ω , il est important de garder ici le terme d'énergie centrifuge, contrairement à ce que nous avons fait pour passer de (22) à (25), puisque seul comptait à ce moment-là le spectre de l'hamiltonien à Ω fixé.

où la dérivée est prise à température et volume constants. Introduisons finalement l'énergie libre

$$F = -k_B T \log \mathcal{Z} \quad (66)$$

ce qui nous conduit à :

$$\langle \hat{L}_z \rangle = -\frac{\partial F}{\partial \Omega}, \quad (67)$$

soit

$$\frac{\partial F}{\partial \Omega} = -I_{\text{class}} \Omega - \langle \hat{\mathcal{L}}_z \rangle, \quad (68)$$

ou encore, en injectant (60)

$$F(\Omega) = F(0) - \frac{1}{2} I_{\text{class}} \Omega^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho_s}{\rho} I_{\text{class}} \Omega^2. \quad (69)$$

Avant de discuter la signification physique de ce résultat, rappelons que nous l'avons obtenu dans la limite des petits Ω , pour lesquels le superfluide reste au repos. Cette expression de $F(\Omega)$ doit donc être comprise comme les premiers termes d'un développement en puissances de Ω (dans lequel seuls les termes de puissances paires interviennent du fait de la symétrie $\Omega \leftrightarrow -\Omega$).

Il y a donc deux contributions à l'énergie libre mesurée dans le référentiel tournant. La première, en $-I_{\text{class}} \Omega^2 / 2$, correspond simplement à la diminution de l'énergie potentielle des atomes du fait du déconfinement centrifuge. Ce terme était déjà présent pour un gaz classique et ne nécessite pas de discussion particulière. Le second terme

$$\Delta F(\Omega) = \frac{1}{2} \frac{\rho_s}{\rho} I_{\text{class}} \Omega^2 \quad (70)$$

est celui qui est intéressant pour notre propos. Il représente l'énergie que l'on paye, dans le référentiel tournant, du fait que tous les atomes ne sont pas entraînés par le mouvement des parois de l'anneau. Introduisons le volume \mathcal{V} de l'anneau de sorte que le nombre de particules s'écrive $N = \rho \mathcal{V}$. En écrivant le moment d'inertie classique sous la forme

$$I_{\text{class}} = Nm \langle r^2 \rangle, \quad (71)$$

on arrive à l'excès d'énergie libre par unité de volume associé à la fraction superfluide :

$$\frac{\Delta F(\Omega)}{\mathcal{V}} = \frac{1}{2} \rho_s m \langle r^2 \rangle \Omega^2. \quad (72)$$

Le terme $\Delta F(\Omega)$ était absent pour un gaz classique et sa présence ici est directement liée à la contribution du potentiel vecteur dans l'hamiltonien (46). Cette contribution était nulle classiquement du fait du théorème de Bohr–van Leuven, mais elle n'a pas de raison de s'annuler dans une version quantique du problème (on sait que le magnétisme quantique orbital existe...). Pour évaluer la densité superfluide, une voie possible consiste donc à imposer un potentiel vecteur sur le système et à mesurer la variation d'énergie libre ΔF ainsi induite ; c'est ce que nous allons approfondir dans le paragraphe qui suit.

4-3 Les conditions aux limites distordues

Pour prendre en compte le champ de jauge décrit par le potentiel $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = m\Omega \times \mathbf{r}$ apparaissant dans le référentiel tournant, il est commode d'adopter un point de vue où ce champ de jauge est incorporé dans les conditions aux limites. Considérons d'abord le cas de l'anneau au repos dans le référentiel du laboratoire ($\Omega = 0$). Pour construire l'espace de Hilbert à N particules, on peut choisir une base de fonctions d'onde à une particule $\psi(r, \varphi, z)$, états propres de l'hamiltonien à une particule

$$H_1^{(\Omega=0)} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (73)$$

ces fonctions satisfaisant les conditions aux limites périodiques

$$\psi(r, \varphi, z) = \psi(r, \varphi + 2\pi, z). \quad (74)$$

Considérons maintenant le cas de l'anneau en rotation, avec le champ de jauge $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. On peut chercher les états propres de l'hamiltonien

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{(\hat{\mathbf{p}}_j - \mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}_j))^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\hat{\mathbf{r}}_j) \right) + V_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_N). \quad (75)$$

en construisant l'espace de Hilbert à N particules à partir des fonctions d'onde à une particule satisfaisant (74) et états propres de :

$$H_1^{(\Omega)} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}))^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\hat{\mathbf{r}}). \quad (76)$$

Notons que nous avons omis dans cet hamiltonien le potentiel centrifuge, puisque son seul effet est d'abaisser l'énergie de la quantité $I_{\text{class}}\Omega^2/2$.

Au lieu de travailler avec des fonctions à une particule obéissant aux conditions aux limites périodiques (74), on peut choisir d'incorporer le champ de jauge dans ces fonctions d'onde. Pour le montrer, écrivons de manière explicite l'action de l'opérateur $\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}})$ sur une fonction d'onde. En introduisant la base e_r, e_φ, e_z des coordonnées cylindriques, on a

$$\hat{\mathbf{p}} \psi(r, \varphi, z) = -i\hbar \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{\partial \psi}{\partial z} e_z \right) \quad (77)$$

et

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = m\Omega r e_\varphi. \quad (78)$$

Limitons-nous pour simplifier au cas où l'extension radiale de l'anneau est négligeable, de sorte que l'on peut fixer la variable r à la valeur r_0 , les fonctions d'onde à une particule dépendant donc de φ et de z . Effectuons maintenant un changement de ces fonctions de base en posant :

$$\psi(\varphi, z) = e^{i\varphi \Omega/\Omega_c} \tilde{\psi}(\varphi, z) \quad \text{avec} \quad \Omega_c = \frac{\hbar}{mr_0^2}. \quad (79)$$

On trouve que

$$(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 \psi(\varphi, z) = e^{i\varphi \Omega/\Omega_c} \hat{\mathbf{p}}^2 \tilde{\psi}(\varphi, z) \quad (80)$$

de sorte que les fonctions $\tilde{\psi}(\varphi, z)$ sont états propres de $H_1^{(\Omega=0)}$ donné en (73). Le champ de jauge lié à la rotation n'a toutefois pas disparu du problème. Nous l'avons simplement basculé de l'hamiltonien vers les conditions aux limites satisfaites par les fonctions d'onde. D'après (79), nous avons en effet pour les fonctions transformées les conditions aux limites distordues :

$$\tilde{\psi}(\varphi + 2\pi, z) = e^{-i\Theta} \tilde{\psi}(\varphi, z), \quad (81)$$

avec

$$\Theta = 2\pi \frac{\Omega}{\Omega_c} = \frac{AL}{\hbar} \quad (82)$$

où $L = 2\pi r_0$ représente la longueur de l'anneau (à ne pas confondre avec le moment cinétique). La variation d'énergie libre par unité de volume trouvée en (72) s'écrit en terme du potentiel vecteur A ou de la distortion Θ :

$$\frac{\Delta F(\Theta)}{\mathcal{V}} = \frac{A^2}{2m} \rho_s = \frac{\hbar^2 \Theta^2}{2mL^2} \rho_s. \quad (83)$$

En pratique, la relation (83) peut être prise comme définition de la fraction superfluide pour des calculs analytiques ou numériques⁸. Il n'est pas nécessaire de revenir explicitement à la géométrie annulaire, même si c'est elle qui nous a servi pour l'établir. On peut considérer que le gaz est confiné dans une boîte cubique de volume $\mathcal{V} = L^3$ et évaluer l'excès d'énergie libre quand on impose aux fonctions d'onde des conditions aux limites distordues selon une direction de l'espace :

$$\begin{aligned} \psi(x + L, y, z) &= e^{-i\Theta} \psi(x, y, z), \\ \psi(x, y + L, z) &= \psi(x, y, z), \\ \psi(x, y, z + L) &= \psi(x, y, z). \end{aligned} \quad (84)$$

On peut également utiliser la réponse à un champ de jauge artificiel pour mesurer la fraction superfluide, comme proposé dans le contexte des atomes froids par Cooper & Hadzibabic (2010) et Carusotto & Castin (2011).

Retour sur l'hypothèse d'un anneau de faible rayon. Pour simplifier notre analyse et aboutir à l'élimination du potentiel vecteur au profit de conditions aux limites distordues, nous avons supposé que la variable r était figée à la valeur r_0 . Si on ne fait pas cette hypothèse, l'élimination n'est pas possible pour le potentiel vecteur (78) car celui-ci varie linéairement avec r ; il ne peut donc pas être éliminé en tout point r par le terme provenant du gradient de la phase ($\frac{1}{r} \partial_\varphi$) qui donne une contribution en $1/r$. L'origine de cette difficulté est simple à comprendre : la phase accumulée par une particule sur un cercle de rayon r du fait du potentiel vecteur (78) dépend de la valeur de r . Au contraire, dans la version « boîte cubique » donnée en (84), la phase accumulée le long d'une trajectoire $x \rightarrow x + L$ ne dépend pas de la valeur de y et z . Cette difficulté disparaît si on prend

⁸. En dimension réduite, cette définition peut néanmoins conduire à certaines ambiguïtés, comme souligné par Prokof'ev & Svistunov (2000).

un anneau mince, ou encore si on prend le potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \propto \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi$. Ce dernier ne décrit pas un champ de rotation ou un champ magnétique uniforme, mais le champ magnétique créé par un solénoïde infiniment fin centré sur l'axe z .

4-4 Bilan du modèle à deux fluides

À partir des définitions qui précèdent pour les densités et les vitesses des composantes normale et superfluide, nous pouvons établir les lois de changement de référentiel pour l'impulsion et l'énergie libre du fluide, et vérifier ainsi la cohérence du modèle.

Supposons que l'on connaisse, pour un fluide donné, son énergie libre au repos, c'est-à-dire pour $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_s = 0$. Considérons maintenant une expérience dans laquelle le récipient contenant le fluide est en mouvement à la vitesse \mathbf{v}_n et que le superfluide a quant à lui la vitesse \mathbf{v}_s . C'est par exemple le cas si le fluide est confiné dans un tube infini parallèle à l'axe Ox et en mouvement de translation uniforme à la vitesse \mathbf{v}_n dans le référentiel du laboratoire. On peut montrer à partir de ce qui précède que l'impulsion par unité de volume et l'accroissement d'énergie libre par unité de volume sont donnés par

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathcal{V}} = m\rho_n \mathbf{v}_n + m\rho_s \mathbf{v}_s, \quad (85)$$

$$\frac{\Delta F'}{\mathcal{V}} = \frac{1}{2} m\rho_n v_n^2 + \frac{1}{2} m\rho_s v_s^2, \quad (86)$$

dans la limite d'une faible différence de vitesse entre les composantes normales et superfluides. Ce résultat assure la cohérence du modèle.

Pour le montrer, commençons par nous placer dans le référentiel \mathcal{R}' bougeant à la même vitesse \mathbf{v}_n que les parois du tube. Dans ce référentiel, la vitesse normale est par définition nulle et la vitesse superfluide est $\mathbf{v}'_s = \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n$ de sorte que les relations (85-86) deviennent

$$\frac{\mathbf{P}'}{\mathcal{V}} = m\rho_s \mathbf{v}'_s, \quad (87)$$

$$\frac{\Delta F'}{\mathcal{V}} = \frac{1}{2} m\rho_s v_s'^2. \quad (88)$$

Pour prouver ces deux relations, revenons au fait qu'imposer une vitesse relative \mathbf{v}'_s entre les composantes superfluide et normale revient à choisir des conditions aux limites distordues, ou de manière équivalente à appliquer un champ de jauge sur le système. En choisissant une échelle de longueur L grande devant toutes les échelles de longueur caractéristiques du problème, le flux superfluide à vitesse $\mathbf{v}'_s = \hbar \mathbf{K}'_s / m$ peut s'interpréter comme un changement de phase $\Theta = K'_s L$ entre le plan $x = 0$ et $x = L$, ou encore [cf. (82)] comme résultant de l'application d'un champ de jauge uniforme⁹ $\mathbf{A} = -\hbar\Theta/L\mathbf{e}_x = -m\mathbf{v}'_s$ avec des conditions aux limites périodiques entre $x = 0$ et $x = L$. On sait que l'augmentation d'énergie libre par unité de volume s'écrit alors

$$\frac{\Delta F'}{\mathcal{V}} = \frac{\mathbf{A}^2}{2m} \rho_s = \frac{1}{2} m\rho_s v_s'^2 \quad (89)$$

ce qui prouve (88). Pour trouver le changement d'impulsion (87), écrivons explicitement l'hamiltonien du système en présence du champ de jauge uniforme $\mathbf{A} = -m\mathbf{v}'_s$:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{j=1}^N \frac{(\hat{\mathbf{p}}_j - \mathbf{A})^2}{2m} + V_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_N) \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m} + V_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_N) + \hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}'_s + \frac{1}{2} N m v_s'^2 \end{aligned} \quad (90)$$

où l'opérateur $\hat{\mathbf{P}} = \sum_j \hat{\mathbf{p}}_j$ représente l'impulsion totale du fluide. Un calcul de moyenne thermodynamique calqué sur celui du paragraphe § 4-2 conduit alors à

$$\mathbf{P} = -k_B T \frac{\partial(\log \mathcal{Z})}{\partial \mathbf{v}'_s} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}'_s}, \quad (91)$$

d'où la relation (87) recherchée puisque F varie comme $\frac{1}{2} \rho_s v_s'^2$.

Revenons pour finir sur le changement de référentiel qui a consisté à nous placer dans le repère bougeant à la même vitesse que les parois du tube. On peut revenir au référentiel initial en utilisant les relations générales de transformation de l'impulsion et de l'énergie dans un changement

9. Concernant le signe — qui apparaît dans cette expression, rappelons que le potentiel vecteur $m\Omega r \mathbf{e}_\varphi$ en (78) correspondait à un courant superfluide négatif dans le référentiel de l'anneau.

de repère galiléen [cf. appendice, eqs (123-124), avec $\mathbf{v}_0 = -\mathbf{v}_n$] :

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathcal{V}} = \frac{\mathbf{P}'}{\mathcal{V}} + m\rho\mathbf{v}_n \quad (92)$$

$$\frac{\Delta F}{\mathcal{V}} = \frac{\Delta F'}{\mathcal{V}} + \frac{\mathbf{P}'}{\mathcal{V}} \cdot \mathbf{v}_n + \frac{1}{2}m\rho\mathbf{v}_n^2. \quad (93)$$

ce qui termine la démonstration de (85-86).

5 Appendice : changements de référentiel

Nous utilisons dans ce chapitre deux types de changement de référentiel. Partant du référentiel du laboratoire \mathcal{R} toujours supposé galiléen, nous passons à un autre référentiel \mathcal{R}' qui peut être

- en mouvement de translation uniforme par rapport à \mathcal{R} , auquel cas \mathcal{R}' est également galiléen ;
- en mouvement de rotation uniforme par rapport à \mathcal{R} , auquel cas \mathcal{R}' n'est pas galiléen.

Le but de cet appendice est de déterminer comment décrire ces changements de référentiel dans le cadre de la physique quantique en utilisant une transformation unitaire.

Sur le plan pratique, l'intérêt d'un changement de référentiel apparaît clairement quand on considère une situation où le récipient (ou le piège) contenant le fluide est lui-même en mouvement dans le référentiel du laboratoire. L'hamiltonien pour les N particules du fluide s'écrit alors

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\hat{\mathbf{r}}_j, t) \right) + V_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_N), \quad (94)$$

où le terme $V_{\text{trap}}(\mathbf{r}_j, t)$ décrit le potentiel exercé par les parois du récipient sur l'atome j localisé au point \mathbf{r}_j ; le terme V_{int} décrit l'interaction entre les particules du fluide et ne dépend donc que la différence entre coordonnées $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. La dépendance explicite en temps de V_{trap} provient du mouvement des parois ; le but premier de la transformation unitaire est d'éliminer cette dépendance explicite pour se ramener à un hamiltonien indépendant du temps, avec lequel il sera plus simple d'appliquer les principes généraux de la physique statistique.

A1. Transformation unitaire

Rappelons tout d'abord les principes généraux d'une transformation unitaire. Partons d'un système décrit par un hamiltonien $H(t)$ dépendant du temps, et un état évoluant selon l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}(t)|\psi(t)\rangle. \quad (95)$$

On se donne un opérateur $\hat{U}(t)$ et on construit les états transformés

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(t)\rangle. \quad (96)$$

L'équation d'évolution de $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ est donnée elle aussi par une équation de Schrödinger, avec l'hamiltonien $\hat{\tilde{H}}$:

$$i\hbar \frac{\partial |\tilde{\psi}(t)\rangle}{\partial t} = \hat{\tilde{H}}|\tilde{\psi}(t)\rangle, \quad \hat{\tilde{H}} = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger + i\hbar \frac{d\hat{U}}{dt}\hat{U}^\dagger. \quad (97)$$

Notre but dans ce qui suit est de proposer un opérateur \hat{U} tel que le transformé $\hat{\tilde{H}}$ de l'hamiltonien donné en (94) soit indépendant du temps.

A2. Mouvement de translation

Supposons que le récipient contenant les particules est en mouvement à la vitesse \mathbf{v}_0 par rapport au laboratoire. La dépendance en temps du potentiel de piégeage est donc simple :

$$V_{\text{trap}}(\hat{\mathbf{r}}_j, t) = V_{\text{trap}}^{(0)}(\hat{\mathbf{r}}_j - \mathbf{v}_0 t) \quad (98)$$

où $V_{\text{trap}}^{(0)}$ représente le potentiel de confinement pour des parois au repos.

Le but premier de la transformation unitaire est par conséquent de modifier l'opérateur position de chaque particule de sorte que

$$\hat{U} \hat{\mathbf{r}}_j \hat{U}^\dagger = \hat{\mathbf{r}}_j + \mathbf{v}_0 t. \quad (99)$$

L'opérateur qui translate la position de la particule j d'une quantité $\mathbf{v}_0 t$ est simple : il s'agit de

$$\hat{U}_j = \exp(i \hat{\mathbf{p}}_j \cdot \mathbf{v}_0 t / \hbar). \quad (100)$$

Pour nous en convaincre, limitons-nous à une particule pour simplifier les notations, prenons par exemple v_0 le long de l'axe x et utilisons $\hat{p}_x = -i\hbar \partial_x$. L'action de \hat{U} sur une fonction $\psi(\mathbf{r})$ s'écrit alors :

$$\hat{U} \psi(\mathbf{r}) = \exp(v_0 t \partial_x) \psi(\mathbf{r}) = \psi(x + v_0 t, y, z) \quad (101)$$

car on reconnaît en développant l'exponentielle le développement de Taylor de la fonction ψ . On peut également prouver (99-100) en utilisant pour toute fonction régulière $F(p)$:

$$[\hat{x}, F(\hat{p}_x)] = i\hbar F'(\hat{p}_x) \quad \Rightarrow \quad [\hat{x}, e^{-i\hat{p}_x v_0 t/\hbar}] = \hat{x} + v_0 t. \quad (102)$$

Versión minimale. Considérons l'opérateur agissant sur toutes les particules du fluide

$$\hat{U}^{(\min)} = \exp\left(i \hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}_0 t/\hbar\right) \quad \text{avec} \quad \hat{\mathbf{P}} = \sum_j \hat{\mathbf{p}}_j, \quad (103)$$

où $\hat{\mathbf{P}}$ représente l'impulsion totale du gaz. L'étiquette $^{(\min)}$ utilisée ici indique qu'il s'agit de la version minimale permettant de s'affranchir de la dépendance en temps de l'hamiltonien, la version complète étant abordée au paragraphe suivant. Dans la transformation unitaire associée à \hat{U} , les opérateurs impulsion $\hat{\mathbf{p}}_j$ ne sont pas modifiés. Il en va de même pour l'énergie d'interaction entre particules puisque les $\hat{\mathbf{r}}_j$ sont tous translatés de la même quantité et que l'énergie d'interaction ne dépend que des différences $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. En utilisant (97), on arrive donc à l'hamiltonien transformé :

$$\hat{H}^{(\min)} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m} + V_{\text{trap}}^{(0)}(\hat{\mathbf{r}}_j) \right) + V_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_N) - \hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}_0. \quad (104)$$

En introduisant le potentiel vecteur uniforme

$$\mathbf{A} = m\mathbf{v}_0, \quad (105)$$

on peut également écrire cet hamiltonien sous la forme

$$\hat{H}^{(\min)} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{(\hat{\mathbf{p}}_j - \mathbf{A})^2}{2m} + V_{\text{trap}}^{(0)}(\hat{\mathbf{r}}_j) \right) + V_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_N) - \frac{1}{2} N m v_0^2. \quad (106)$$

Nous pourrions nous arrêter à ce stade puisque nous disposons maintenant d'un hamiltonien indépendant du temps. Toutefois cet hamiltonien n'est pas exactement identique à celui utilisé pour l'équation de Schrödinger habituelle, du fait de la présence du terme linéaire en \mathbf{P} dans (104). Ceci complique l'interprétation des phénomènes physiques : ainsi l'opérateur impulsion de chaque particule n'est plus égal à la masse multipliée par l'opérateur vitesse de cette particule.

Comme l'équation de Schrödinger doit être invariante dans un changement de référentiel galiléen, nous savons qu'il doit être possible « d'enrichir » la transformation unitaire (103) pour aboutir à un hamiltonien exactement égal à celui de Schrödinger. Ceci revient à faire une transformation de jauge pour éliminer le potentiel vecteur \mathbf{A} qui apparaît dans (106) ; cette opération est possible puisque \mathbf{A} est uniforme et ne correspond à aucun effet observable. Cette deuxième étape est l'objet du paragraphe suivant.

Versión complète. Pour aboutir à un hamiltonien indépendant du temps identique à celui intervenant dans l'équation de Schrödinger, considérons la transformation unitaire générée par l'opérateur

$$\hat{U} = \exp\left(i (\hat{\mathbf{P}} t - N m \hat{\mathbf{R}}) \cdot \mathbf{v}_0/\hbar\right) \quad \text{avec} \quad \hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_j \hat{\mathbf{r}}_j, \quad \hat{\mathbf{P}} = \sum_j \hat{\mathbf{p}}_j, \quad (107)$$

$\hat{\mathbf{R}}$ représentant donc l'opérateur centre de masse du gaz. En utilisant la formule de Glauber

$$e^{\hat{A} + \hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-[\hat{A}, \hat{B}]/2}, \quad (108)$$

valable quand \hat{A} et \hat{B} commutent tous deux avec leur commutateur, et

$$[\hat{R}_\alpha, \hat{P}_\beta] = i\hbar \delta_{\alpha, \beta}, \quad \alpha, \beta = x, y, z, \quad (109)$$

on peut également écrire \hat{U} sous la forme

$$\hat{U} = \exp\left(i \hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}_0 t/\hbar\right) \exp\left(-i N m \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v}_0/\hbar\right) e^{+i N m v_0^2 t/2\hbar} \quad (110)$$

$$= \exp\left(-i N m \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v}_0/\hbar\right) \exp\left(i \hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}_0 t/\hbar\right) e^{-i N m v_0^2 t/2\hbar}. \quad (111)$$

On peut alors vérifier les relations de commutation suivantes :

$$\hat{U} \hat{\mathbf{r}}_j \hat{U}^\dagger = \hat{\mathbf{r}}_j + \mathbf{v}_0 t \quad (112)$$

pour les positions (inchangée par rapport au paragraphe qui précède) et

$$\hat{U} \hat{\mathbf{p}}_j \hat{U}^\dagger = \hat{\mathbf{p}}_j + m\mathbf{v}_0 \quad (113)$$

pour les impulsions. Le dernier terme de (97) s'écrit dans ce cas (il est plus simple d'utiliser la forme (110) de l'opérateur \hat{U}) :

$$i\hbar \frac{d\hat{U}}{dt} \hat{U}^\dagger = -\hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}_0 - \frac{1}{2} N m v_0^2 \quad (114)$$

si bien que l'hamiltonien total après transformation est

$$\hat{\hat{H}} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m} + V_{\text{trap}}^{(0)}(\hat{\mathbf{r}}_j) \right) + V_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_N). \quad (115)$$

Cet hamiltonien est bien conforme à ce que l'on attend dans le référentiel au repos du récipient contenant le fluide. La signification physique des opérateurs position et impulsion après transformation unitaire est également conforme à l'intuition pour un changement de repère galiléen. En écrivant (112) sous la forme $\hat{\mathbf{r}}_j = \hat{U} \hat{\mathbf{r}}_j \hat{U}^\dagger - \mathbf{v}_0 t$, on voit que l'opérateur \mathbf{r}_j est désormais associé à la quantité physique *position dans un repère lié au référentiel \mathcal{R}'* , alors que la quantité physique *position dans le référentiel \mathcal{R}* , qui était décrite avant transformation par $\hat{\mathbf{r}}_j$, est désormais décrite par $\hat{U} \hat{\mathbf{r}}_j \hat{U}^\dagger$. De même, l'opérateur \mathbf{p}_j après transformation est associé à la quantité physique *quantité de mouvement (masse \times vitesse) dans un repère lié au référentiel \mathcal{R}'* .

A3. Invariance galiléenne de l'équation de Schrödinger

La transformation unitaire trouvée au paragraphe qui précède permet de prouver l'invariance galiléenne de l'équation de Schrödinger, au moins si l'on oublie la présence des parois qui pourraient briser cette invariance. Partons de l'hamiltonien du fluide :

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N \frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m} + V_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_N), \quad (116)$$

dans un référentiel \mathcal{R} . Pour tout choix de \mathbf{v}_0 – correspondant au passage dans un autre référentiel galiléen \mathcal{R}' –, on introduit l'opérateur \hat{U} défini

plus haut (107) et on a le résultat

$$\begin{aligned} \hat{\hat{H}} &= \hat{U} \hat{H} \hat{U}^\dagger + i\hbar \frac{d\hat{U}}{dt} \hat{U}^\dagger \\ &= \hat{U} \hat{H} \hat{U}^\dagger - \hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}_0 - \frac{1}{2} N m v_0^2 \\ &= \hat{H} \end{aligned} \quad (117)$$

L'hamiltonien obtenu après transformation unitaire est identique à l'hamiltonien de départ : c'est l'invariance recherchée.

Ceci permet de générer une infinité de solutions à l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi \quad (118)$$

en partant d'une solution donnée $\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$. On sait en effet d'après ce qui précède que la fonction transformée $\tilde{\Psi} = \hat{U} \Psi$, qui s'écrit explicitement [cf. (111)]

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) &= \hat{U} \Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \\ &= \exp[-i N m (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_0 + v_0^2 t / 2) / \hbar] \Psi(\mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_0 t, \dots, \mathbf{r}_N + \mathbf{v}_0 t, t) \end{aligned} \quad (119)$$

avec $\mathbf{R} = \left(\sum_j \mathbf{r}_j \right) / N$, satisfait l'équation de Schrödinger pour l'hamiltonien transformé, dont nous venons de voir qu'il coïncide avec l'hamiltonien initial.

Dans le cas particulier où l'état Ψ considéré est un état propre de l'impulsion totale et de l'énergie totale avec les valeurs propres \mathbf{P} et E , l'état transformé est également état propre de l'impulsion et de l'énergie. Pour le montrer et trouver les valeurs propres correspondantes, partons de la relation suivante pour l'impulsion

$$\hat{\mathbf{P}} \tilde{\Psi} = \hat{U} \left(\hat{U}^\dagger \hat{\mathbf{P}} \hat{U} \right) \Psi. \quad (120)$$

En utilisant (113) avec $\hat{U}^\dagger(\mathbf{v}_0) = \hat{U}(-\mathbf{v}_0)$

$$\hat{U}^\dagger \hat{\mathbf{P}} \hat{U} = \hat{\mathbf{P}} - N m \mathbf{v}_0 \quad (121)$$

on déduit que $\tilde{\Psi}$ est état propre de l'impulsion avec la valeur propre $\mathbf{P} - N m \mathbf{v}_0$.

Pour l'énergie, on procède de manière similaire :

$$\begin{aligned}\hat{H} \tilde{\Psi} &= \hat{U} \left(\hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} \right) \Psi \\ &= \hat{U} \left(\hat{H} - \hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2} N m v_0^2 \right) \Psi \\ &= \left(E - \hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2} N m v_0^2 \right) \tilde{\Psi}\end{aligned}\quad (122)$$

On a donc dans un changement de repère galiléen :

$$\mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{P} - N m \mathbf{v}_0, \quad (123)$$

$$E \longrightarrow E - \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2} N m v_0^2. \quad (124)$$

A4. Mouvement de rotation

Considérons maintenant le cas où le récipient qui contient le fluide est en mouvement de rotation uniforme à vitesse angulaire Ω autour de l'axe Oz . La dépendance en temps du potentiel de piégeage pour la particule j s'écrit :

$$V_{\text{trap}}(\mathbf{r}_j, t) = V_{\text{trap}}^{(0)}[x_j \cos(\Omega t) + y_j \sin(\Omega t), -x_j \sin(\Omega t) + y_j \cos(\Omega t), z_j]. \quad (125)$$

Nous avons étudié en détail dans le cours 2013-14 (chapitre 4) la transformation unitaire permettant d'éliminer cette dépendance temporelle, qui consiste à passer dans le référentiel tournant à vitesse Ω . Nous allons donc nous contenter de rappeler sans démonstration les résultats principaux.

Posons

$$\hat{U}(t) = \exp\left(i \hat{\mathbf{L}} \cdot \Omega t / \hbar\right) = \exp\left(i L_z \Omega t / \hbar\right) \quad (126)$$

où $\hat{\mathbf{L}}$ est l'opérateur moment cinétique total du système

$$\hat{L}_z = \sum_{j=1}^N \hat{L}_{j,z} \quad \text{avec} \quad \hat{L}_{j,z} = \hat{x}_j \hat{p}_{j,y} - \hat{y}_j \hat{p}_{j,x} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi_j}, \quad (127)$$

où la dernière expression fait référence aux coordonnées cylindriques (r, φ, z) avec $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Pour une particule, l'action de \hat{U}

sur une fonction $\psi(r, \varphi, z)$ est

$$\begin{aligned}\hat{U} \psi(r, \varphi, z) &= \exp\left(\Omega t \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \psi(r, \varphi, z) \\ &= \psi(r, \varphi + \Omega t, z).\end{aligned}\quad (128)$$

Après quelques calculs sans grande difficulté, on trouve l'hamiltonien qui régit l'évolution du fluide piégé après transformation unitaire :

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m} + V_{\text{trap}}^{(0)}(\hat{\mathbf{r}}_j) \right) + V_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_N) - \Omega \hat{L}_z. \quad (129)$$

On peut réécrire cet hamiltonien sous une forme légèrement différente en introduisant le potentiel vecteur

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = m \Omega \times \mathbf{r} \quad (130)$$

et on trouve

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \sum_{j=1}^N \left(\frac{(\hat{\mathbf{p}}_j - \mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}_j))^2}{2m} + V_{\text{trap}}^{(0)}(\hat{\mathbf{r}}_j) - \frac{1}{2} m \Omega^2 (\hat{x}_j^2 + \hat{y}_j^2) \right) \\ &+ V_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_N).\end{aligned}\quad (131)$$

Le résultat trouvé pour \hat{H} appelle deux remarques. Tout d'abord, on note qu'il est bien indépendant du temps : on va pouvoir utiliser cet hamiltonien comme base d'une étude thermodynamique à l'équilibre. On note par ailleurs une très grande similarité entre la forme de la transformation unitaire (126) et son résultat (129) avec ce que nous avons trouvé pour un mouvement de translation dans le cas de la « version minimale ». On pourra comparer par exemple (129) et (104) : on remplace simplement l'opérateur $-\hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}_0$ par l'opérateur $-\hat{\mathbf{L}} \cdot \Omega$.

Toutefois cette similarité est trompeuse. Dans le cas d'une translation, nous avons pu prolonger notre analyse et éliminer complètement la contribution de $-\hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}_0$: cette élimination était possible du fait de l'invariance galiléenne de l'équation de Schrödinger. En d'autres termes, le potentiel vecteur qui apparaissait dans l'écriture (106) pouvait être éliminé car il était de rotationnel nul. Au contraire, le terme $-\hat{\mathbf{L}} \cdot \Omega$ ne peut pas être éliminé

par une autre transformation unitaire : le référentiel tournant est non galiléen et on ne peut pas écrire une équation de Schrödinger « habituelle » dans ce référentiel. Une autre formulation du même point consiste à remarquer que le potentiel vecteur (130) n'est pas de rotationnel nul et ne peut donc pas être éliminé par une transformation de jauge.

Interprétation physique des opérateurs dans le référentiel tournant. Introduisons une base \mathbf{u}_α ($\alpha = x, y, z$) liée au repère galiléen de départ et une base \mathbf{u}'_α liée au référentiel tournant. On peut montrer que l'action de \hat{U} correspond à ce changement de base : le nouvel opérateur position $\hat{U}\hat{\mathbf{r}}_j\hat{U}^\dagger$ correspond à la quantité physique « position de la particule j dans la base \mathbf{u}'_α ».

La présence du terme $-\Omega\hat{L}_z$ dans l'hamiltonien vient modifier la relation usuelle entre vitesse et impulsion. On peut définir l'opérateur vitesse pour une particule j donnée à partir de l'hamiltonien (129) en se plaçant en point de vue de Heisenberg (on omettra l'indice j dans les quelques lignes qui suivent) :

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\mathbf{r}}] \quad (132)$$

ce qui conduit à

$$\hat{v}_x = \frac{\hat{p}_x}{m} + \Omega\hat{y}, \quad \hat{v}_y = \frac{\hat{p}_y}{m} - \Omega\hat{x}, \quad \hat{v}_z = \frac{\hat{p}_z}{m}. \quad (133)$$

En d'autres termes, dans la nouvelle représentation, l'impulsion $\hat{\mathbf{p}}$ et la quantité de mouvement $M\hat{\mathbf{v}}$ sont reliées par la relation

$$\hat{\mathbf{p}} = m\hat{\mathbf{v}} + m\boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{r}}. \quad (134)$$

En utilisant la loi de composition des vitesses, on peut en déduire que l'opérateur impulsion $\hat{\mathbf{p}}$ dans la nouvelle représentation est associé à la quantité physique *masse \times vitesse dans le référentiel galiléen \mathcal{R}* , alors que l'opérateur $\hat{\mathbf{v}}$ est associé à la quantité physique *vitesse dans le référentiel tournant* puisque c'est la dérivée de l'opérateur position dans le référentiel tournant.

Références

- Abo-Shaeer, J. R., C. Raman, J. M. Vogels & W. Ketterle (2001), « Observation of Vortex Lattices in Bose-Einstein Condensates », in *Science* 292, pp. 476–479.
- Allen, J. F. & A. D. Misener (1938), « Flow of liquid helium II », in *Nature* 141, p. 75.
- Amo, A, D Sanvitto, FP Laussy, D Ballarini, E Del Valle, MD Martin, A Lemaître, J Bloch, DN Krizhanovskii, MS Skolnick, et al. (2009), « Collective fluid dynamics of a polariton condensate in a semiconductor microcavity », in *Nature* 457.7227, pp. 291–295.
- Amo, Alberto, Jérôme Lefrère, Simon Pigeon, Claire Adrados, Cristiano Ciuti, Iacopo Carusotto, Romuald Houdré, Elisabeth Giacobino & Alberto Bramati (2009), « Superfluidity of polaritons in semiconductor microcavities », in *Nature Physics* 5.11, pp. 805–810.
- Baharian, Soheil & Gordon Baym (2013), « Bose-Einstein condensates in toroidal traps : Instabilities, swallow-tail loops, and self-trapping », in *Phys. Rev. A* 87 (1), p. 013619.
- Bloch, I., J. Dalibard & W. Zwerger (2008), « Many-body physics with ultracold gases », in *Rev. Mod. Phys* 80.3, 885, p. 885.
- Bloch, I., T. W. Hänsch & T. Esslinger (2000), « Measurement of the spatial coherence of a trapped Bose gas at the phase transition », in *Nature* 403, p. 166.
- Carusotto, Iacopo & Yvan Castin (2011), « Nonequilibrium and local detection of the normal fraction of a trapped two-dimensional Bose gas », in *Physical Review A* 84.5, p. 053637.
- Carusotto, Iacopo & Cristiano Ciuti (2013), « Quantum fluids of light », in *Rev. Mod. Phys.* 85 (1), pp. 299–366.
- Ceperley, D. M. (1995), « Path integrals in the theory of condensed helium », in *Rev. Mod. Phys.* 67, p. 279.
- Cooper, N. R. & Z. Hadzibabic (2010), « Measuring the Superfluid Fraction of an Ultracold Atomic Gas », in *Phys. Rev. Lett.* 104.3, p. 030401.
- Corman, Laura, Lauriane Chomaz, Tom Bienaimé, Rémi Desbuquois, Christof Weitenberg, Sylvain Nascimbene, Jean Dalibard & Jérôme Beugnon (2014), « Quench-induced supercurrents in an annular Bose gas », in *Phys. Rev. Lett* 113.13, p. 135302.

- Dubessy, R., T. Liennard, P. Pedri & H. Perrin (2012), « Critical rotation of an annular superfluid Bose-Einstein condensate », in *Phys. Rev. A* 86 (1), p. 011602.
- Eckel, S., F. Jendrzejewski, A. Kumar, C. J. Lobb & G. K. Campbell (2014), « Interferometric Measurement of the Current-Phase Relationship of a Superfluid Weak Link », in *Phys. Rev. X* 4 (3), p. 031052.
- Eckel, Stephen, Jeffrey G Lee, Fred Jendrzejewski, Noel Murray, Charles W Clark, Christopher J Lobb, William D Phillips, Mark Edwards & Gretchen K Campbell (2014), « Hysteresis in a quantized superfluid/atomtronic/' circuit », in *Nature* 506.7487, pp. 200–203.
- Guéry-Odelin, D. & S. Stringari (1999), « Scissors mode and superfluidity of a trapped Bose–Einstein condensed gas », in *Phys. Rev. Lett.* 83, p. 4452.
- Hadzibabic, Z. & J. Dalibard (2011), « Two-dimensional Bose fluids : An atomic physics perspective », in *Rivista del Nuovo Cimento* 34, p. 389.
- Hadzibabic, Z., P. Krüger, M. Cheneau, B. Battelier & J. Dalibard (2006), « Berezinskii–Kosterlitz–Thouless crossover in a trapped atomic gas », in *Nature* 441, pp. 1118–1121.
- Hagley, E. W., L. Deng, M. Kozuma, M. Trippenbach, Y. B. Band, et al. (1999), « Measurement of the Coherence of a Bose–Einstein condensate », in *Phys. Rev. Lett.* 83, p. 3112.
- Hess, G. B. & W. M. Fairbank (1967), « Measurements of Angular Momentum in Superfluid Helium », in *Phys. Rev. Lett.* 19 (5), pp. 216–218.
- Hofferberth, S., I. Lesanovsky, B. Fischer, T. Schumm & J. Schmiedmayer (2007), « Non-equilibrium coherence dynamics in one-dimensional Bose gases », in *Nature* 449.7160, pp. 324–327.
- Kagan, Y., B. V. Svistunov & G. V. Shlyapnikov (1987), « Influence on inelastic processes of the phase transition in a weakly collisional two-dimensional Bose gas », in *Sov. Phys. JETP* 66, p. 314.
- Kapitza, P. (1938), « Viscosity of liquid helium below the λ -point », in *Nature* 141, p. 74.
- Kasprzak, J., M. Richard, S. Kundermann, A. Baas, P. Jeambrun, et al. (2006), « Bose-Einstein condensation of exciton polaritons », in *Nature* 443.7110, pp. 409–414.
- Klaers, Jan, Julian Schmitt, Frank Vewinger & Martin Weitz (2010), « Bose-Einstein condensation of photons in an optical microcavity », in *Nature* 468.7323, pp. 545–548.
- Kosterlitz, J. M. & D. J. Thouless (1973), « Ordering, metastability and phase transitions in two dimensional systems », in *J. Phys. C : Solid State Physics* 6, p. 1181.
- Landau, L. D. (1941), « The theory of superfluidity of helium II », in *J. Phys. (USSR)* 5, p. 71.
- Leggett, A. J. (2006), *Quantum Liquids*, Oxford University Press.
- London, F. (1938a), « On the Bose–Einstein Condensation », in *Phys. Rev.* 54, p. 947.
- (1938b), « The λ -phenomenon of liquid helium and the Bose–Einstein degeneracy », in *Nature* 141, p. 643.
- Madison, K. W., F. Chevy, W. Wohlleben & J. Dalibard (2000), « Vortices in a stirred Bose±Einstein condensate », in *J. Mod. Opt.* 47, p. 2715.
- Moulder, Stuart, Scott Beattie, Robert P. Smith, Naaman Tammuz & Zoran Hadzibabic (2012), « Quantized supercurrent decay in an annular Bose-Einstein condensate », in *Phys. Rev. A* 86 (1), p. 013629.
- Mueller, Erich J. (2002), « Superfluidity and mean-field energy loops : Hysteretic behavior in Bose-Einstein condensates », in *Phys. Rev. A* 66 (6), p. 063603.
- Murray, Noel, Michael Krygier, Mark Edwards, K. C. Wright, G. K. Campbell & Charles W. Clark (2013), « Probing the circulation of ring-shaped Bose-Einstein condensates », in *Phys. Rev. A* 88 (5), p. 053615.
- Navon, Nir, Alexander L Gaunt, Robert P Smith & Zoran Hadzibabic (2015), « Critical dynamics of spontaneous symmetry breaking in a homogeneous Bose gas », in *Science* 347.6218, pp. 167–170.
- Nelson, D. R. & J. M. Kosterlitz (1977), « Universal Jump in the Superfluid Density of Two-Dimensional Superfluids », in *Phys. Rev. Lett.* 39, p. 1201.
- Nozières, P. (1995), « Some comments on Bose–Einstein Condensation », in *Bose–Einstein Condensation*, ed. by A. Griffin, D. W. Snoke & S. Stringari, Cambridge: Cambridge University Press.
- Penrose, O. & L. Onsager (1956), « Bose–Einstein condensation and liquid helium », in *Phys. Rev.* 104, p. 576.
- Prokof'ev, Nikolai V. & Boris V. Svistunov (2000), « Two definitions of superfluid density », in *Phys. Rev. B* 61 (17), pp. 11282–11284.
- Ramanathan, A., K. C. Wright, S. R. Muniz, M. Zelan, W. T. Hill, C. J. Lobb, K. Helmerson, W. D. Phillips & G. K. Campbell (2011), « Superflow in a Toroidal Bose–Einstein Condensate : An Atom Circuit with a Tunable Weak Link », in *Phys. Rev. Lett.* 106.13, p. 130401.

- Sanvitto, D, FM Marchetti, MH Szymańska, G Tosi, M Baudisch, FP Laussy, DN Krizhanovskii, MS Skolnick, L Marrucci, A Lemaitre, et al. (2010), « Persistent currents and quantized vortices in a polariton superfluid », in *Nature Physics* 6.7, pp. 527–533.
- Sokol, P. E. (1995), « Bose-Einstein Condensation in Liquid Helium », in , *Bose-Einstein Condensation*, ed. by A. Griffin, D.W. Snoke & S. Stringari, Cambridge University Press, , pp. 51–85.
- Stenger, J., S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, D. E. Pritchard & W. Ketterle (1999), « Bragg Spectroscopy of a Bose-Einstein Condensate », in *Phys. Rev. Lett.* 82 (23), pp. 4569–4573.
- Tisza, L. (1938), « Transport Phenomena in Helium II », in *Nature* 141, p. 913.
- Ueda, Masahito & Anthony J. Leggett (1999), « Ground-State Properties of a Rotating Bose-Einstein Condensate with Attractive Interaction », in *Phys. Rev. Lett.* 83 (8), pp. 1489–1493.

Chapitre 3

Gaz en interaction et critère de Landau

Sommaire

1	Quels rôles pour les interactions ?	2
1-1	Interactions et fragmentation	2
1-2	Interactions et hybridation	4
1-3	Interactions et intrication	6
2	L'équation de Gross–Pitaevskii	7
2-1	Structure de l'équation	7
2-2	L'équation de GP pour un gaz dilué	7
2-3	Comment analyser les solutions de GP	8
2-4	Métastabilité et critère de Landau	9
3	L'approche de Bogoliubov (champ classique)	10
3-1	Linéarisation des équations du mouvement	10
3-2	Le spectre de Bogoliubov	11
3-3	Au delà du critère de Landau : les vortex	14
3-4	L'approche « amplitude – phase »	16
4	Quasi-particules à l'équilibre thermique	17
4-1	Populations des modes à l'équilibre	17
4-2	Quasi-particules et densité normale	17
4-3	Fluctuations de phase à 3D	19
5	Appendice 1 : méthode variationnelle	19
6	Appendice 2 : approche de Bogoliubov quantique	20

Dans les deux premiers chapitres de ce cours, nous avons examiné tout à tour les manifestations de la condensation de Bose–Einstein et de la superfluidité pour un gaz atomique. Nous avons décrit le phénomène de condensation pour un gaz parfait, comme proposé par Einstein dès 1924. La superfluidité quant à elle est un phénomène qui requiert des interactions entre particules. En effet, un des critères de superfluidité – l'existence de courants permanents – n'est pas satisfait dans un gaz parfait : ce sont les interactions répulsives entre particules qui assurent qu'un courant peut exister dans un état métastable, en étant protégé par une barrière d'énergie de la relaxation vers l'état fondamental.

Le but de ce chapitre est d'explorer de manière plus détaillée le rôle essentiel des interactions. Nous allons commencer par décrire de manière qualitative différentes facettes de leur impact, en termes de fragmentation, d'hybridation ou encore d'intrication de l'état quantique du fluide. Nous étudierons ensuite la fonctionnelle d'énergie de Gross-Pitaevski, puis le formalisme de Bogoliubov qui lui est associé. Cela nous permettra de déterminer quantitativement le spectre en énergie du gaz en interaction. Nous établirons en particulier le critère de Landau, qui exprime à quelle condition un écoulement superfluide peut être stable vis-à-vis d'une perturbation. Nous examinerons également comment aller au-delà de ce critère en étudiant comment la nucléation de paires de vortex peut freiner un écoulement superfluide.

1 Quels rôles pour les interactions ?

Le rôle des interactions entre particules dans l'émergence d'un condensat de Bose–Einstein est complexe et comporte de nombreuses facettes dont nous n'aborderons qu'une fraction dans le cours de cette année.

La première question concerne le déplacement du seuil de condensation du fait des interactions. La réponse, que nous ne traiterons pas ici, dépend de la nature du confinement. Pour un gaz homogène, on pourra consulter les travaux de Baym, Blaizot, et al. (1999), Holzmänn & Krauth (1999), Holzmänn, Baym, et al. (2001), Kashurnikov, Prokof'ev, et al. (2001) et la revue de Andersen (2004). Les effets apportés par un piège harmonique sont discutés par Dalfovo, Giorgini, et al. (1999) et des mesures précises du déplacement du point critique sont décrites par Gerbier, Thywissen, et al. (2004) et Smith, Campbell, et al. (2011). Une question reliée concerne la classe d'universalité et les exposants critiques associés à la transition. Les mesures de certains exposants sont décrites dans Donner, Ritter, et al. (2007), Navon, Gaunt, et al. (2015) et Chomaz, Corman, et al. (2015).

On peut également s'interroger sur l'influence des interactions sur le condensat lui-même, en cherchant par exemple la structure des excitations du système. Cette question, essentielle pour aborder le problème de la superfluidité, sera traitée ici pour un gaz homogène. On peut également rechercher, à température nulle ou finie, la répartition spatiale des atomes dans le cas où le gaz est confiné dans un potentiel non uniforme; nous ne détaillerons pas ici la résolution de cette question et nous renvoyons le lecteur intéressé aux ouvrages « classiques » du domaine (Pethick & Smith 2002; Pitaevskii & Stringari 2016; Leggett 2006), qui l'abordent généralement dans le cadre de l'approximation de Thomas–Fermi.

Dans ce premier paragraphe, nous allons nous restreindre au cas du gaz à température nulle et examiner de manière qualitative trois effets distincts des interactions sur l'état d'énergie minimale du gaz. Pour commencer, nous allons montrer que les interactions peuvent préserver un condensat de la fragmentation. Nous expliquerons ensuite comment les interactions modifient la fonction d'onde du condensat en hybridant les états à un corps. Nous terminerons par un précurseur de la transformation de Bogoliubov, indiquant comment les interactions peuvent également favoriser l'apparition d'états intriqués à N corps, via une déplétion du condensat.

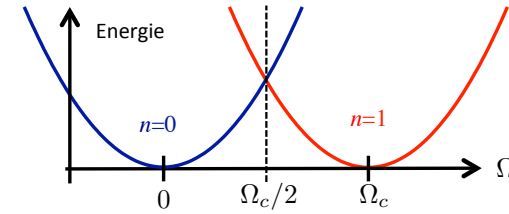


FIGURE 1. Variation de l'énergie des états $e^{in\varphi}$ pour un anneau de rayon r_0 en rotation à la fréquence Ω . Pour $\Omega = \Omega_c/2$, avec $\Omega_c = \hbar/mr_0^2$, les états $n = 0$ et $n = 1$ sont dégénérés.

1-1 Interactions et fragmentation

Considérons pour commencer un gaz parfait confiné dans une boîte avec des conditions aux limites périodiques; nous avons déjà indiqué que dans ce cas, la condensation ne se produit que dans l'état d'impulsion nulle $\mathbf{p} = 0$. Bien que les premiers états excités ne soient qu'à une énergie infinitésimale $\propto L^{-2}$ au dessus du fondamental, leur population ne devient jamais macroscopique.

Dans la mesure où les interactions couplent les différents états à une particule, on pourrait craindre que ce couplage ne vienne fragmenter le condensat, en partageant la population condensée en une multitude de micro-condensats. Nous allons voir que ceci ne se produit pas, bien au contraire : sous certaines hypothèses simples, les interactions assurent qu'un seul état est macroscopiquement peuplé (Nozières 1995).

Pour fixer les idées, revenons au cas de l'anneau en rotation discuté au chapitre 2 (figure 1). Notons r_0 le rayon de l'anneau et Ω la fréquence de rotation. En limitant le mouvement des particules au degré de liberté azimutal φ , nous avons montré que les niveaux d'énergie à une particule sont du type

$$E_n(\Omega) = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} \left(n - \frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^2 \quad \text{avec} \quad \Omega_c = \frac{\hbar}{mr_0^2}, \quad (1)$$

la fonction d'onde associée à l'indice entier n étant $e^{in\varphi}/\sqrt{2\pi}$.

Plaçons-nous à la fréquence de rotation $\Omega = \Omega_c/2$ de sorte que les états

à une particule

$$\psi_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ associé à } n = 0, \quad \psi_b(x) = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \text{ associé à } n = 1, \quad (2)$$

ont exactement la même énergie. En absence d'interactions, on a donc une multitude d'états dégénérés pour le système à N atomes :

$$|N_a, N_b\rangle \equiv |N_a : \psi_a ; N_b : \psi_b\rangle \quad \text{avec} \quad N_a + N_b = N. \quad (3)$$

Si le gaz se trouve dans l'état $|N_a, N_b\rangle$, la matrice densité à un corps $\hat{\rho}_1$ s'écrit dans la base ψ_a, ψ_b

$$\hat{\rho}_1 = \begin{pmatrix} N_a & 0 \\ 0 & N_b \end{pmatrix}, \quad (4)$$

ce qui correspond à un condensat fragmenté.

Prenons maintenant en compte les interactions entre particules, interactions que nous supposerons binaires. Pour évaluer leur effet à l'ordre le plus bas, il suffit de connaître les éléments de matrice

$$V_{\alpha\beta\gamma\delta} = \langle 1 : \psi_\alpha ; 2 : \psi_\beta | \hat{V} | 1 : \psi_\gamma ; 2 : \psi_\delta \rangle \quad \text{avec} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{a, b\}. \quad (5)$$

Compte non tenu des symétries, cela correspond à 16 nombres à préciser, ce qui est beaucoup trop pour notre analyse élémentaire. Nous allons donc simplifier le problème avec deux hypothèses supplémentaires qui sont vérifiées dans le cas de l'anneau en rotation :

— Les interactions ne changent pas le nombre d'atomes dans les états ψ_a et ψ_b . Ainsi nous prenons en compte les processus

$$a + a \rightarrow a + a \quad b + b \rightarrow b + b \quad a + b \rightarrow a + b \quad (6)$$

mais nous supposons qu'il n'y a pas d'élément de matrice non nul pour des processus du type

$$a + a \rightarrow b + b \quad a + b \rightarrow b + b \quad \text{etc.} \quad (7)$$

Dans le cas de l'anneau, ces processus sont interdits car ils ne conservent pas le moment cinétique. Cette première hypothèse nous

laisse, compte tenu des symétries du problème, avec 4 coefficients $V_{\alpha\beta\gamma\delta}$ a priori différents :

$$V_{aaaa}, V_{bbbb}, V_{abab}, V_{abba} \quad (8)$$

puisqu'on trouve en échangeant les rôles des particules 1 et 2 :

$$V_{abab} = V_{baba} \quad \text{et} \quad V_{abba} = V_{baab}. \quad (9)$$

— Les interactions ne favorisent pas de manière « triviale » un des deux états ψ_a ou ψ_b , ce qui revient à poser

$$V_{aaaa} = V_{bbbb} = V_{abab} = V_{baba} \equiv V_0. \quad (10)$$

Cette hypothèse est également bien vérifiée dans le cas de l'anneau car les deux états ψ_a et ψ_b correspondent à la même répartition spatiale.

On se ramène donc à deux coefficients : l'élément de matrice direct V_0 défini ci-dessus, et l'élément de matrice « d'échange », correspondant à une collision où les atomes 1 et 2 permutent leur état durant la collision :

$$V_{\text{ech}} \equiv V_{abba} = V_{baab} = \langle 1 : \psi_a ; 2 : \psi_b | \hat{V} | 1 : \psi_b ; 2 : \psi_a \rangle. \quad (11)$$

Nous supposerons que les interactions sont répulsives, de sorte que V_0 et V_{ech} sont tous deux positifs.

Dans le cas de l'anneau avec une interaction de contact $g \delta(x_1 - x_2)$, les deux coefficients sont égaux entre eux car :

$$V_{\alpha\beta\gamma\delta} = g \int \psi_\alpha^* \psi_\beta^* \psi_\gamma \psi_\delta dx \quad \Rightarrow \quad V_{\text{ech}} = \frac{g}{2\pi r_0} \equiv V_0. \quad (12)$$

On peut alors évaluer simplement l'effet des interactions sur la multiplicité d'états dégénérés $|N_a, N_b\rangle$. Plaçons-nous dans le formalisme de la seconde quantification pour simplifier l'écriture et introduisons les opérateurs annihilation et création \hat{a}, \hat{a}^\dagger et \hat{b}, \hat{b}^\dagger d'une particule dans les états ψ_a et ψ_b . L'hamiltonien correspondant aux interactions s'écrit

$$\begin{aligned} \hat{V} &= \frac{V_0}{2} \left[(\hat{a}^\dagger)^2 (\hat{a})^2 + (\hat{b}^\dagger)^2 (\hat{b})^2 + 2\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{b}^\dagger \hat{b} \right] + V_{\text{ech}} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{b}^\dagger \hat{b} \\ &= \frac{V_0}{2} \left[\hat{N}_a (\hat{N}_a - 1) + \hat{N}_b (\hat{N}_b - 1) + 2\hat{N}_a \hat{N}_b \right] + V_{\text{ech}} \hat{N}_a \hat{N}_b \\ &= \frac{V_0}{2} \hat{N} (\hat{N} - 1) + V_{\text{ech}} \hat{N}_a \hat{N}_b, \end{aligned} \quad (13)$$

où l'on a introduit les opérateurs *nombre de particules* : $\hat{N}_a = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, $\hat{N}_b = \hat{b}^\dagger \hat{b}$, $\hat{N} = \hat{N}_a + \hat{N}_b$. On constate immédiatement que chaque état $|N_a, N_b\rangle$ reste état propre de \hat{V} , mais que la dégénérescence entre eux est levée. L'énergie d'interaction s'écrit en effet

$$E(N_a, N_b) = \frac{V_0}{2} N(N-1) + V_{\text{ech}} N_a N_b. \quad (14)$$

Le terme d'échange vient donc augmenter l'énergie de tout état fragmenté, c'est-à-dire tout état pour lequel N_a et N_b sont tous les deux comparables à N . Cette augmentation est « macroscopique » : en effet, on voit sur (12) que V_{ech} varie comme l'inverse de la longueur de la boîte à une dimension, ou l'inverse du volume à trois dimensions, ce qui signifie que le terme $V_{\text{ech}} N_a N_b$ est un terme en $N\rho$, où ρ est la densité totale de particules.

On constate donc sur cet exemple simple que les interactions répulsives entre particules s'opposent à la fragmentation d'un éventuel condensat et favorisent l'un ou l'autre des états à une composante $|N, 0\rangle$ et $|0, N\rangle$. En particulier, cela vient assurer la métastabilité du courant permanent $|0, N\rangle$ discutée au chapitre 2, même si la fréquence de rotation Ω est choisie inférieure au seuil de stabilité $\Omega_c/2$.

1-2 Interactions et hybridation

Dans l'exemple qui précède, nous avons considéré un anneau unidimensionnel ou plus généralement une boîte avec des conditions aux limites périodiques (CLP), de sorte que les états propres de l'opérateur densité réduit $\hat{\rho}_1$ étaient les mêmes que les états propres de l'hamiltonien à une particule, à savoir les ondes planes.

Dès que l'on quitte le cas des CLP, les interactions viennent modifier ce point. On rencontre souvent des situations où les interactions entre particules peuvent induire des transitions du type

$$a + a \rightarrow a + b. \quad (15)$$

Considérons comme précédemment le cas d'interactions de contact $g \delta(x_1 - x_2)$, de sorte que la transition (15) est décrite par l'élément de matrice :

$$V_{aaab} = g \int |\psi_a(x)|^2 \psi_a^*(x) \psi_b(x) dx. \quad (16)$$

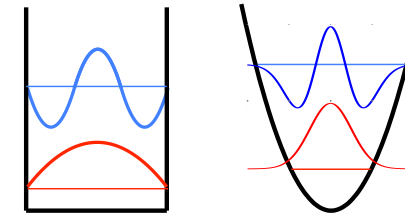


FIGURE 2. Hybridation entre deux états de même parité sous l'effet des interactions. Gauche : puits carré avec conditions aux limites de Dirichlet. Droite : puits harmonique.

Prenons par exemple (figure 2) pour a l'état fondamental dans une boîte avec des conditions aux limites de Dirichlet¹ :

$$\psi_a(x) \propto \sin(\pi x/L) \quad (17)$$

et pour b le deuxième état excité²

$$\psi_b(x) \propto \sin(3\pi x/L). \quad (18)$$

On peut également s'intéresser à un piège harmonique d'état fondamental $\psi_a(x) \propto \exp(-x^2/2a_{\text{oh}}^2)$ et de deuxième état excité $\psi_b(x) \propto (x^2 - a_{\text{oh}}^2/2) \exp(-x^2/2a_{\text{oh}}^2)$.

Utilisons alors une méthode variationnelle pour chercher l'état fondamental du gaz. On prend des fonctions d'essai qui correspondent toujours à un condensat de Bose-Einstein pur, c'est-à-dire tous les atomes placés dans la même fonction d'onde $\psi(x)$:

$$|\Psi\rangle = |1 : \psi\rangle \otimes |2 : \psi\rangle \otimes \dots \otimes |N : \psi\rangle. \quad (19)$$

Toutefois, on n'impose pas à $\psi(x)$ de coïncider avec l'état fondamental $\psi_a(x)$. On l'écrit sous la forme

$$\psi(x) = \cos \theta \psi_a(x) + \sin \theta e^{i\varphi} \psi_b(x) \quad (20)$$

1. On vérifiera que (16) est toujours nul dans le cas de la boîte avec des CLP.

2. Le premier état excité ne ferait pas l'affaire car il est impair alors que l'état fondamental est pair, ce qui entraîne la nullité de V_{aaab} .

et on utilise les angles θ et φ comme paramètres variationnels pour minimiser l'énergie totale

$$E(\theta, \varphi) = N(\cos^2 \theta E_a + \sin^2 \theta E_b) + \frac{V_0}{2} N(N-1) \cos^4 \theta + 2V_{aaab} N(N-1) \cos^3 \theta \sin \theta \cos \varphi + \dots \quad (21)$$

La première ligne correspond à l'énergie à une particule. La deuxième ligne représente l'énergie d'interaction, dans laquelle nous nous sommes limités aux termes dominants pour une interaction faible, telle que le couplage V_{aaab} est petit devant l'écart d'énergie $E_b - E_a$. Nous avons noté comme précédemment $V_0 \equiv V_{aaaa}$. Dans cette hypothèse, on peut se limiter aux termes d'ordre le plus bas en θ et on trouve l'énergie par particule :

$$\frac{1}{N} E(\theta, \varphi) \approx \left[E_a + \frac{V_0 N}{2} \right] + (E_b - E_a) \theta^2 + 2N\theta V_{aaab} \cos \varphi \quad (22)$$

où on a pris $N-1 \approx N$.

On voit que l'hybridation de la fonction d'onde permet d'abaisser l'énergie par un terme linéaire en θ , pourvu que l'on choisisse φ tel que $V_{aaab} \cos \varphi$ soit négatif. Le prix à payer est de promouvoir une fraction des particules dans l'état b , mais ce prix varie comme θ^2 . On est donc certain de pouvoir abaisser l'énergie totale pour θ assez petit.

Pour $V_{aaab} > 0$, le minimum est obtenu en prenant $\varphi = 0$ et

$$\theta = -\frac{V_{aaab} N}{E_b - E_a}. \quad (23)$$

L'énergie minimale par particule vaut

$$\frac{1}{N} E_{\min} \approx E_a + \frac{V_0 N}{2} - \frac{(V_{aaab} N)^2}{E_b - E_a}. \quad (24)$$

Le dernier terme représente l'abaissement d'énergie dû à l'hybridation de la fonction d'onde du condensat. Cet abaissement résulte du compromis annoncé plus haut :

- On augmente l'énergie à une particule en promouvant une fraction θ^2 des atomes de l'état fondamental ψ_a vers l'état excité ψ_b .
- On diminue l'énergie d'interaction répulsive car on obtient une fonction d'onde ψ qui occupe une plus grande zone spatiale.

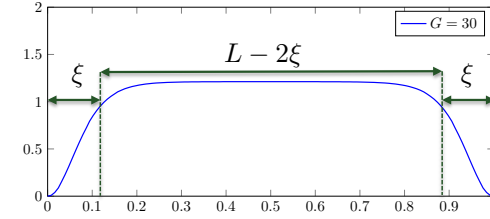


FIGURE 3. Distribution spatiale d'un gaz de Bose 1D confiné sur un segment de longueur $L = 1$ (conditions aux limites de Dirichlet), obtenu en minimisant la fonctionnelle d'énergie de Gross-Pitaevskii (46) avec $G = Ng = 30$ et $\hbar = m = 1$.

Notre traitement est limité à un effet faible des interactions, puisque le nombre de particules N doit être choisi de sorte que $\theta \ll 1$ dans (23). Toutefois ce processus d'hybridation reste valable à plus grande valeur de N , l'hybridation conduisant alors à peupler de manière significative de nombreux états à une particule. L'hybridation optimale est obtenue en minimisant la fonctionnelle d'énergie de Gross-Pitaevskii, donnée ci-dessous en (46) (Pethick & Smith 2002; Pitaevskii & Stringari 2016).

La longueur de cicatrisation (healing length). Pour un gaz dans une boîte à fond plat avec des conditions aux limites de Dirichlet, l'hybridation (20) est significative pour tous les états b tels que l'angle de mélange θ est significatif, c'est-à-dire $|E_b - E_a| \lesssim |V_{aaab} N| \sim \rho g$. Si l'énergie d'interaction par particule ρg est grande devant l'écart entre les premiers niveaux d'énergie, $\sim \hbar^2/mL^2$, de nombreux états à une particule vont être mis en jeu et on aboutit au profil de la figure 3, avec une fonction d'onde uniforme sur presque toute l'étendue de la boîte, cette fonction d'onde tombant à zéro au voisinage de la paroi, sur une zone d'épaisseur ξ .

La valeur de ξ peut être trouvée simplement en minimisant l'énergie totale, c'est-à-dire la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie d'interaction. L'énergie cinétique provient essentiellement du gradient de la fonction d'onde sur les deux bords de la boîte, qui représentent une fraction $2\xi/L$ de la longueur totale, soit

$$E_{\text{cin}} \sim N \frac{\hbar^2}{2m\xi^2} \times \frac{2\xi}{L} \sim N \frac{\hbar^2}{m\xi L}. \quad (25)$$

L'énergie d'interaction correspond est obtenue en posant que les N particules occupent une longueur effective $L - 2\xi$, soit

$$E_{\text{int}} \sim \frac{N(N-1)}{2} \frac{g}{L-2\xi} \approx \frac{N^2 g}{2L} + \frac{N^2 g}{L^2} \xi. \quad (26)$$

La somme de ces deux termes est minimisée en prenant (à un facteur numérique près)

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2mg\rho}}, \quad \rho = \frac{N}{L}, \quad (27)$$

définition valable en dimensions 1, 2 et 3, pourvu que le coefficient g et la densité spatiale ρ soient choisis de manière adaptée.

1-3 Interactions et intrication

Revenons au cas d'une boîte avec des conditions aux limites périodiques. Un autre cas intéressant concerne des collisions du type

$$a + a \longleftrightarrow b + c. \quad (28)$$

ψ_a peut représenter l'état fondamental de la boîte

$$\psi_a(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \quad (29)$$

alors que $\psi_{b,c}$ représentent les deux premiers états excités de vecteur d'onde $k = \pm 2\pi/L$:

$$\psi_b(x) = \frac{e^{i 2\pi x/L}}{\sqrt{L}} \quad \psi_c(x) = \frac{e^{-i 2\pi x/L}}{\sqrt{L}}. \quad (30)$$

Pour l'interaction de contact $g \delta(x_1 - x_2)$, l'élément de matrice correspondant à (28) est non nul :

$$V_{abc} = \frac{g}{L} \equiv V_0, \quad (31)$$

de même que $V_{acb} = V_{bcaa} = V_{cbaa}$. Nous nous intéressons au cas où les interactions sont faibles, et où la population reste majoritairement concentrée dans l'état ψ_a . L'hamiltonien (13) se généralise en

$$\hat{V} \approx V_0 \left[\frac{1}{2} \hat{N}_a (\hat{N}_a - 1) + 2 \hat{N}_a (\hat{N}_b + \hat{N}_c) + (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{b} \hat{c} + \hat{b}^\dagger \hat{c}^\dagger (\hat{a})^2 \right], \quad (32)$$

où l'on a négligé les termes en $N_{b,c}^2$ devant les termes en N_a^2 et en $N_a N_{b,c}$. Contrairement à l'hamiltonien (13) qui conservait séparément les nombres de particules dans les états a et b , ce potentiel couple les secteurs correspondant à des occupations différentes :

$$|N_a, N_b, N_c\rangle \longleftrightarrow |N_a - 2, N_b + 1, N_c + 1\rangle. \quad (33)$$

Prenant la limite d'interactions très faibles, on peut là aussi utiliser une méthode variationnelle et chercher des fonctions d'essai sous la forme

$$|\Psi\rangle = \cos \theta |N, 0, 0\rangle + \sin \theta e^{i\varphi} |N - 2, 1, 1\rangle. \quad (34)$$

L'énergie cinétique à une particule est nulle pour l'état ψ_a et est égale à $\epsilon_1 = 2\pi^2 \hbar^2 / mL^2$ pour les deux états b et c . L'énergie cinétique moyenne pour l'état $|\Psi\rangle$ vaut dans la limite $\theta \ll 1$:

$$E_{\text{cin}} = 2\theta^2 \epsilon_1 \quad (35)$$

Pour évaluer l'énergie d'interaction provenant de (32), il suffit de se limiter au terme d'ordre 1 en θ ce qui donne pour l'énergie moyenne totale

$$E(\Psi) \approx \frac{1}{2} N^2 V_0 + 2\theta^2 \epsilon_1 + 2N\theta \cos \varphi V_0 \quad (36)$$

ce qui est minimum pour $\varphi = 0$ et $\theta \approx -NV_0/2\epsilon_1$. Cette intrication de l'état $|\Psi\rangle$ entre deux états à nombre de particules différents dans ψ_a conduit à l'abaissement d'énergie [voir par exemple Pines & Nozières (1990), § 9.2] :

$$\frac{1}{2} N^2 V_0 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2} N^2 V_0 - \frac{(NV_0)^2}{2\epsilon_1} \quad (37)$$

L'intrication que nous voyons apparaître ici est un précurseur de la transformation de Bogoliubov, dans laquelle le condensat d'impulsion nulle est « habillé » par des paires de particules dans des états $\mathbf{k}, -\mathbf{k}$. Il y a néanmoins plusieurs niveaux de complexité pour arriver au résultat final de Bogoliubov, avec l'énergie de l'état fondamental habillé :

- La prise en compte des termes $\hat{b}^\dagger \hat{c}^\dagger (\hat{a})^2$ à un ordre plus élevé, car l'habillage peut impliquer la création de nombreuses paires $\mathbf{k}, -\mathbf{k}$, au moins pour les énergies ϵ_k plus petites que l'énergie d'interaction $g\rho$.
- la sommation sur tous les modes \mathbf{k} et pas seulement les vecteurs d'onde les plus bas ($\pm 2\pi/L$) comme nous l'avons fait ici.

— La prise en compte des difficultés mathématiques liées à l'utilisation du potentiel de contact, qui induit des divergences des quantités « brutes ». Ces difficultés peuvent se résoudre de plusieurs manières : en utilisant le *pseudo-potential* plutôt qu'une interaction de contact (Lee, Huang, et al. 1957), en éliminant les doubles comptages implicites de diagrammes (Pines & Nozières 1990) ou encore en considérant un gaz sur réseau (Mora & Castin 2003).

2 L'équation de Gross–Pitaevskii

Nous abordons dans ce paragraphe l'équation de Gross–Pitaevskii (GP), ou encore *équation de Schrödinger non-linéaire*, qui décrit l'évolution temporelle du paramètre d'ordre $\phi(\mathbf{r}, t)$ pour un fluide en interaction (Gross 1961; Pitaevskii 1961). Le statut de l'équation de GP dépend fortement du contexte dans laquelle on souhaite l'utiliser. Pour l'hélium liquide, il s'agit essentiellement d'une équation phénoménologique, portant sur le paramètre d'ordre mais sans relation directe avec la fonction d'onde à N corps microscopique $\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$. Pour un gaz atomique dilué, nous verrons qu'on peut la déduire d'une approche variationnelle, à partir d'un *ansatz* simple pour la fonction d'onde Ψ . En optique, on peut obtenir cette équation en étudiant la propagation d'une onde lumineuse dans un milieu non-linéaire, à partir d'une approximation de type eikonale. L'onde se propageant le long de la direction z , l'équation de GP porte alors sur l'amplitude $\phi(x, y, t)$ dans le plan perpendiculaire à z .

2-1 Structure de l'équation

Pour un gaz uniforme, l'équation de GP s'écrit :

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi + G |\phi|^2 \phi \quad (38)$$

dont on peut écrire les solutions stationnaires sous la forme $\phi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}) e^{-i\Omega t}$ où $\phi(\mathbf{r})$ satisfait l'équation indépendante du temps

$$\hbar\Omega \phi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi + G |\phi|^2 \phi. \quad (39)$$

Dans tout ce qui suit, nous supposons la fonction ϕ normalisée sur le volume L^3 accessible aux particules

$$\int_{L^3} |\phi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r = 1. \quad (40)$$

Le paramètre réel G décrit la force des interactions. Pour des interactions en onde s , nous verrons ci-dessous qu'il est relié au nombre d'atomes N dans l'échantillon et à la longueur de diffusion a_s :

$$G = Ng \quad \text{avec} \quad g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}. \quad (41)$$

La nature des solutions de l'équation de GP dépend de manière cruciale du signe du paramètre G . Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur le cas $G > 0$ ce qui correspond à des interactions effective répulsives ($a_s > 0$), pour lequel nous allons voir que le condensat au repos est toujours stable.

2-2 L'équation de GP pour un gaz dilué

Pour un gaz dilué, un moyen simple pour arriver à l'équation de GP passe par la méthode variationnelle, soit dans le cas stationnaire, soit dans le cas dépendant du temps. Commençons par le cas stationnaire ; on se donne un hamiltonien à N particules, que nous écrivons ici en première quantification :

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\hat{\mathbf{r}}_j) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U(\hat{\mathbf{r}}_i - \hat{\mathbf{r}}_j) \quad (42)$$

où $U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ représente l'énergie d'interaction entre deux atomes placés respectivement en \mathbf{r}_i et \mathbf{r}_j , et où $V_{\text{trap}}(\mathbf{r})$ représente un éventuel potentiel de piégeage [absent de (38-39)].

Ansatz de Hartree. La recherche exacte des états propres $\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ de \hat{H} et de leur énergie associée est une tâche compliquée, car la taille de l'espace de Hilbert pertinent croît exponentiellement avec le nombre de particules. La méthode variationnelle consiste à se donner des fonctions d'essai Φ normées, évoluant dans un espace beaucoup plus restreint, et à

chercher les extrema de $E(\Phi) = \langle \Phi | \hat{H} | \Phi \rangle$. Nous utiliserons ici des *fonctions de Hartree* :

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \phi(\mathbf{r}_1) \dots \phi(\mathbf{r}_N), \quad (43)$$

ce qui remplace le problème à N corps initial par un problème à 1 corps, avec la fonctionnelle d'énergie

$$\begin{aligned} \epsilon(\phi) \equiv \frac{1}{N} E(\phi) &= \int \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi|^2 + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) |\phi(\mathbf{r})|^2 \right) d^3r \\ &+ \frac{N-1}{2} \iint U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |\phi(\mathbf{r})|^2 |\phi(\mathbf{r}')|^2 d^3r d^3r' \end{aligned} \quad (44)$$

à minimiser sur $\phi(\mathbf{r})$.

Pour arriver à l'équation de GP, une deuxième étape est nécessaire. Elle consiste à modéliser l'interaction entre deux atomes par le potentiel de contact :

$$U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \text{avec} \quad g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}, \quad (45)$$

de sorte qu'on arrive à la fonctionnelle d'énergie :

$$\epsilon_{\text{GP}}(\phi) = \int \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi|^2 + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) |\phi(\mathbf{r})|^2 + \frac{Ng}{2} |\phi(\mathbf{r})|^4 \right) d^3r. \quad (46)$$

où l'on a pris $N-1 \approx N$.

L'utilisation du potentiel de contact (45) pour décrire l'interaction entre atomes est facile à justifier si ce potentiel est faible en tout point $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ et de portée beaucoup plus courte que les autres dimensions caractéristiques du problème. La longueur de diffusion a_s est alors simplement proportionnelle à l'intégrale du potentiel $U(\mathbf{r})$ sur tout l'espace. Quand le potentiel $U(\mathbf{r})$ ne peut pas être traité perturbativement, en particulier quand ce potentiel admet des états liés, la justification de (46) est plus compliquée et nous l'admettrons ici.

Équation de GP dépendant du temps La méthode variationnelle peut se généraliser aux problèmes dépendant du temps, le principe général étant présenté dans l'appendice 1 de ce chapitre. On commence par déterminer la partie dynamique du lagrangien, adapté à l'ansatz variationnel (43)

$$\frac{1}{N} \int \mathcal{L}_{\text{dyn}}(\Phi) d^3r = \int \frac{i\hbar}{2} (\phi^* \dot{\phi} - \dot{\phi}^* \phi) d^3r, \quad (47)$$

de sorte que l'équation du mouvement de ϕ se déduit du lagrangien

$$L(\phi) = \int \frac{i\hbar}{2} (\phi^* \dot{\phi} - \dot{\phi}^* \phi) d^3r - \epsilon_{\text{GP}}(\phi). \quad (48)$$

Les équations de Lagrange conduisent alors à :

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) \phi + Ng |\phi|^2 \phi, \quad (49)$$

ce qui correspond bien à l'équation que nous avons écrite en (38) dans le cas d'une particule libre ($V_{\text{trap}} = 0$) et $G = Ng$.

2-3 Comment analyser les solutions de GP

Nous allons considérer dans ce qui suit un fluide homogène. L'équation de GP admet alors les solutions en ondes planes :

$$\phi_{\mathbf{K}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \mu t / \hbar)} \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} + \frac{Ng}{L^3} = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} + g\rho \quad (50)$$

avec $\rho = N/L^3$ (densité volumique du fluide). Dans ce qui suit, nous utiliserons la vitesse c_s définie par

$$mc_s^2 = g\rho. \quad (51)$$

Nous verrons au paragraphe suivant que c_s peut s'interpréter comme la vitesse du son dans le gaz condensé.

La valeur de la fonctionnelle d'énergie pour ces solutions est

$$\epsilon_{\text{GP}}(\phi_{\mathbf{K}}) = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} + \frac{1}{2} g\rho. \quad (52)$$

Remarquons que ϵ_{GP} et μ sont différents, du fait de la non-linéarité du problème. Plus précisément, l'énergie du système à N particules est

$$E = N\epsilon_{\text{GP}} = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} N + \frac{N^2 g}{2L^3} \quad (53)$$

et on a donc

$$\mu = \left. \frac{\partial E}{\partial N} \right|_L, \quad (54)$$

ce qui correspond bien à la définition du potentiel chimique.

Ces solutions correspondent à un fluide en mouvement à la vitesse $\mathbf{V} = \hbar\mathbf{K}/m$. Dans le cadre de l'étude de la superfluidité, on va s'intéresser au problème suivant : est-ce qu'une petite perturbation, conduisant à un changement mineur de la fonction d'onde du système, peut abaisser l'énergie totale du fluide ou au contraire toujours la faire croître ? Une autre formulation du problème est de déterminer, partant d'un fluide au repos dans le référentiel du laboratoire, si ce fluide peut être mis en mouvement par une impureté mobile. En d'autres termes, nous nous intéressons

- à la métastabilité de l'ensemble des solutions $\phi_{\mathbf{K}}$ données ci-dessus,
- aux excitations possibles de la solution d'énergie la plus basse $\phi_{\mathbf{K}=0}$.

Nous allons voir que ces deux facettes du problème amènent la même réponse, à savoir une robustesse du fluide vis-à-vis de ces petites perturbations, pourvu que la vitesse relative fluide-perturbation soit inférieure à c_s . Nous traitons la première question portant sur le caractère métastable de $\phi_{\mathbf{K}}$ dans le paragraphe suivant, et nous aborderons le problème des excitations dans la section § 3 à l'aide du formalisme de Bogoliubov.

2-4 Métastabilité et critère de Landau

Pour étudier la métastabilité éventuelle de $\phi_{\mathbf{K}}$, nous allons lui ajouter une petite perturbation

$$\phi_{\mathbf{K}} \longrightarrow \phi_{\mathbf{K}} + \delta\phi \quad (55)$$

et regarder si cela augmente son énergie moyenne. Si c'est le cas pour tout $\delta\phi$, alors $\phi_{\mathbf{K}}$ correspond à un minimum local de ϵ_{GP} vis-à-vis des fonctions de Hartree, en accord avec l'idée d'un courant métastable³.

3. Cette question n'est pertinente que pour un problème non-linéaire comme l'équation de GP. Dans le cas linéaire décrit par un hamiltonien \hat{H} , d'états propres ψ_n avec $E_0 < E_1 < \dots$, un état ψ_n avec $n \neq 0$ n'est pas métastable. En effet, l'état

$$|\psi\rangle = \sqrt{1-|u|^2} |\psi_n\rangle + u |\psi_0\rangle, \quad (56)$$

où u est un nombre complexe tel que $|u| \ll 1$, a pour énergie moyenne

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = (1-|u|^2)E_n + |u|^2E_0 = E_n - |u|^2(E_n - E_0), \quad (57)$$

ce qui est toujours plus petit que E_n pour $u \neq 0$. Il est donc toujours possible d'abaisser l'énergie de ψ_n en le contaminant par des états d'énergies inférieures.

Du fait de l'uniformité du gaz, il est tentant de décomposer cette petite perturbation en série de Fourier et de regarder l'effet séparé de chaque composante de Fourier $e^{i(\mathbf{K}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}}$. Il faut néanmoins prendre en compte le fait que le terme non-linéaire cubique de l'équation de GP, $\psi\psi\psi^*$, va générer à l'ordre dominant du calcul un terme en $e^{i(\mathbf{K}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}}$ en mélangeant le carré du terme principal $e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}$ avec le complexe conjugué $(e^{i(\mathbf{K}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}})^*$ de la perturbation. Nous allons donc écrire notre état perturbé, voisin de $\phi_{\mathbf{K}}$, sous la forme :

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}}{L^{3/2}} (\phi_0 + u e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} + v^* e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}) \quad (58)$$

avec

$$\phi_0 = \sqrt{1-|u|^2-|v|^2} \quad \text{et} \quad |u|, |v| \ll 1. \quad (59)$$

La raison pour laquelle on introduit v^* et non v dans cette fonction apparaîtra plus loin [cf. (62)] : l'énergie fera intervenir les produits u^*v et v^*u ainsi que $|u|^2$ et $|v|^2$, mais pas uv ou u^*v^* : elle pourra donc s'écrire comme une forme quadratique simple entre les deux vecteurs (u, v) et (u^*, v^*) .

Esquissons brièvement le calcul de $\epsilon_{\text{GP}}(\phi)$, qui ne pose aucune difficulté de principe. Le calcul de la densité $N|\phi(\mathbf{r})|^2$ fait apparaître un terme constant et des termes modulés en $\cos(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})$, $\sin(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})$, $\cos(2\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})$ et $\sin(2\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})$. Une fois cette densité élevée au carré et l'intégrale $\int |\phi|^4$ calculée, il reste à l'ordre deux inclus en u et v :

$$\begin{aligned} \frac{Ng}{2} \int |\phi|^4 &= \frac{g\rho}{2} [1 + 2|u + v|^2] \\ &= \frac{g\rho}{2} + g\rho [|u|^2 + |v|^2 + u^*v + uv^*]. \end{aligned} \quad (60)$$

La contribution de l'énergie cinétique à la fonctionnelle d'énergie ϵ_{GP} est :

$$\begin{aligned} &(1-|u|^2-|v|^2) \frac{\hbar^2 K^2}{2m} + |u|^2 \frac{\hbar^2 (\mathbf{K} + \mathbf{q})^2}{2m} + |v|^2 \frac{\hbar^2 (\mathbf{K} - \mathbf{q})^2}{2m} \\ &= \frac{\hbar^2 K^2}{2m} + |u|^2 \frac{\hbar^2}{2m} (q^2 + 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}) + |v|^2 \frac{\hbar^2}{2m} (q^2 - 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (61)$$

Cette fonctionnelle est donc, à l'ordre le plus bas non nul, une forme quadratique en u et v :

$$\Delta\epsilon = \epsilon_{\text{GP}}(u, v) - \epsilon_{\text{GP}}(0) = (u^*, v^*) \hat{\mathcal{H}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (62)$$

où

$$\epsilon_{\text{GP}}(0) = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} + \frac{g\rho}{2} \quad (63)$$

et où $\hat{\mathcal{H}}$ est la matrice symétrique réelle :

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2}{2m} (q^2 + 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}) + g\rho & g\rho \\ g\rho & \frac{\hbar^2}{2m} (q^2 - 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}) + g\rho \end{pmatrix}. \quad (64)$$

Pour que l'état de départ $\phi_{\mathbf{K}}$ soit un minimum local de la fonctionnelle d'énergie, il faut que la matrice $\hat{\mathcal{H}}$ soit positive, c'est-à-dire que ses deux valeurs propres (dont on sait qu'elles sont réelles) soient également positives ou nulles. Ceci se transcrit simplement en écrivant que la trace et le déterminant de $\hat{\mathcal{H}}$ doivent tous deux être positifs quel que soit \mathbf{q} :

$$\text{Tr}(\hat{\mathcal{H}}) \geq 0 \quad : \quad \frac{\hbar^2 q^2}{2m} + g\rho \geq 0 \quad (65)$$

$$\text{Det}(\hat{\mathcal{H}}) \geq 0 \quad : \quad \frac{\hbar^2}{m} \left(\mathbf{K} \cdot \frac{\mathbf{q}}{q} \right)^2 \leq g\rho + \frac{\hbar^2 q^2}{4m} \quad (66)$$

La première inégalité est satisfaite pourvu que le gaz soit en interaction répulsive ($g > 0$), ce que nous avons supposé ici. La contrainte provenant de la deuxième inégalité est la plus forte quand on prend $\mathbf{q} \parallel \mathbf{K}$ et de longueur tendant vers 0, et elle s'écrit alors

$$V = \frac{\hbar K}{m} < c_s = \sqrt{g\rho/m}. \quad (67)$$

Il faut que la vitesse $V = \hbar K/m$ associée à la fonction d'onde $\phi_{\mathbf{K}}$ soit inférieure à la vitesse du son si l'on veut que $\phi_{\mathbf{K}}$ soit un minimum local de la fonctionnelle d'énergie de GP. Quand cette condition est vérifiée, l'état superfluide de vitesse V est « robuste » vis-à-vis de perturbations statiques (par exemple la rugosité des parois), correspondant à une faible modification de la fonctionnelle de GP. C'est le *critère de Landau*, que nous allons retrouver dans la section suivante par l'approche de Bogoliubov et l'analyse des modes propres (u, v) décrivant la dynamique autour de $\phi_{\mathbf{K}}$.

3 L'approche de Bogoliubov (champ classique)

Le paragraphe précédent nous a permis de vérifier que les solutions stationnaires de type onde plane étaient bien des minima locaux de la fonctionnelle d'énergie ϵ_{GP} , pourvu que la vitesse $V = \hbar K/m$ correspondante soit inférieure à la vitesse du son c_s . Pour aller plus loin, il nous faut maintenant déterminer le mouvement de la fonction d'onde du condensat au voisinage de ces minima. En dynamique hamiltonienne usuelle, les petites oscillations au fond d'un puits de potentiel sont caractérisées par la courbure de l'énergie au point d'équilibre. Pour notre problème non-linéaire, nous allons voir que la situation est un peu plus compliquée [Pour une discussion détaillée, voir par exemple Blaizot & Ripka (1986) et Castin (2001)].

3-1 Linéarisation des équations du mouvement

Pour analyser la dynamique des petites perturbations à la solution $\phi_{\mathbf{K}}$, nous prenons comme ci-dessus l'ansatz

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e^{i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \mu t/\hbar)}}{L^{3/2}} [\phi_0(t) + u(t) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} + v^*(t) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}] \quad (68)$$

avec

$$|\phi_0(t)|^2 + |u(t)|^2 + |v(t)|^2 = 1, \quad \mu = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} + g\rho, \quad \rho = \frac{N}{L^3}. \quad (69)$$

L'équation de Gross-Pitaevskii dépendante du temps (49) projetée sur les états $e^{i(\mathbf{K} \pm \mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}}$ détermine les équations du mouvement pour les fonctions u et v^* . En choisissant la convention de phase ϕ_0 réel positif ($\phi_0 \approx 1$), on trouve au premier ordre en ces fonctions :

$$i\hbar \frac{du}{dt} = \left[\frac{\hbar^2}{2m} (q^2 + 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}) + g\rho \right] u + g\rho v \quad (70)$$

et

$$i\hbar \frac{dv^*}{dt} = g\rho u^* + \left[\frac{\hbar^2}{2m} (q^2 - 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}) + g\rho \right] v^*. \quad (71)$$

On reconnaît dans les coefficients qui interviennent dans la première équation les mêmes termes que ceux de la première ligne de la matrice $\hat{\mathcal{H}}$

de (64). De même, la deuxième équation fait intervenir les mêmes coefficients que ceux intervenant dans la seconde ligne de $\hat{\mathcal{H}}$. Toutefois, on ne peut pas en déduire que la dynamique est régie par $\hat{\mathcal{H}}$ car les deux équations (70) et (71) ne portent pas sur les mêmes quantités : la première porte sur le couple (u, v) , la seconde sur le couple (u^*, v^*) .

Pour obtenir un système fermé de deux équations différentielles, il faut prendre le complexe conjugué d'une des deux équations précédentes, par exemple (71), ce qui donne

$$i\hbar \frac{dv}{dt} = -g\rho u - \left[\frac{\hbar^2}{2m} (q^2 - 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}) + g\rho \right] v. \quad (72)$$

On peut alors écrire l'évolution du couple (u, v) de manière compacte :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \hat{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (73)$$

où l'opérateur $\hat{\mathcal{L}}$ se déduit de $\hat{\mathcal{H}}$ en changeant les signes de la 2^{ème} ligne :

$$\hat{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2}{2m} (q^2 + 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}) + g\rho & g\rho \\ -g\rho & -\frac{\hbar^2}{2m} (q^2 - 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}) - g\rho \end{pmatrix}. \quad (74)$$

Intéressons-nous aux solutions du système différentiel (73). Si l'opérateur est diagonalisable, la recherche de ces solutions est simple. À partir des vecteurs propres X_j , $j = 1, 2$ de $\hat{\mathcal{L}}$:

$$\hat{\mathcal{L}}X_j = \epsilon_j X_j, \quad X_j = \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix} \quad (75)$$

on construit deux solutions indépendantes $X_j e^{-i\epsilon_j t/\hbar}$. Toutefois, le fait que l'opérateur $\hat{\mathcal{L}}$ soit diagonalisable n'est pas acquis. En effet, contrairement à l'opérateur $\hat{\mathcal{H}}$, cet opérateur ne présente pas de symétrie particulière : il n'est ni symétrique, ni hermitien.

En fait, si l'on exclut le cas particulier $\mathbf{q} = 0$ qui est sans importance pour notre étude, l'opérateur $\hat{\mathcal{L}}$ est effectivement diagonalisable. Pour le montrer, écrivons-le sous la forme

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{\hbar^2 \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}}{m} \hat{\mathbf{1}} + \hbar\omega_q \begin{pmatrix} \cosh(2\alpha_q) & -\sinh(2\alpha_q) \\ \sinh(2\alpha_q) & -\cosh(2\alpha_q) \end{pmatrix} \quad (76)$$

où on a posé

$$\omega_q = \left[\frac{g\rho}{m} q^2 + \left(\frac{\hbar q^2}{2m} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (77)$$

qui correspond à la fameuse relation de dispersion de Bogoliubov que nous commenterons un peu plus loin, et

$$\tanh(2\alpha_q) = \frac{-g\rho}{\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + g\rho}. \quad (78)$$

On trouve alors les valeurs propres et les vecteurs propres associés :

$$\hbar\omega_q \leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha_q \\ \sinh \alpha_q \end{pmatrix} \quad - \hbar\omega_q \leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh \alpha_q \\ \cosh \alpha_q \end{pmatrix}. \quad (79)$$

On remarque d'abord que ces valeurs propres sont toujours réelles : il n'y a aucune instabilité dynamique, c'est-à-dire aucune croissance exponentielle de u et de v . Par ailleurs, en reportant le résultat pour les valeurs de u et v trouvées en (79) pour $-\omega_q$ dans la fonction d'onde (68), on constate que ce mode est identique au mode correspondant à la valeur propre $+\omega_q$ pour le vecteur d'onde $-\mathbf{q}$. Pour éviter un double comptage des modes, on considérera pour chaque vecteur d'onde \mathbf{q} uniquement le mode (79) correspondant à $+\omega_q$.

3-2 Le spectre de Bogoliubov

Nous allons maintenant analyser les modes propres que nous venons de trouver, en nous restreignant au cas d'un état initial au repos, $\mathbf{K} = 0$, pour simplifier les notations. En injectant (79) dans l'ansatz initial (68), nous pouvons écrire la solution perturbée sous la forme :

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e^{-i\mu t/\hbar}}{L^{3/2}} \left\{ \phi_0(t) + \gamma \left[\cosh \alpha_q e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega_q t)} + \sinh \alpha_q e^{-i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega_q t)} \right] \right\} \quad (80)$$

où $\gamma \ll 1$ repère le degré d'excitation de la perturbation et

$$|\phi_0|^2 + \gamma^2 \cosh(2\alpha_q) = 1. \quad (81)$$

Énergie et impulsion des modes propres. Calculons l'impulsion moyenne par particule associée à cet état. Nous l'obtenons à partir de l'opérateur $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$:

$$\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle = -i\hbar \int \phi^*(\mathbf{r}, t) [\nabla \phi(\mathbf{r}, t)] d^3r = \gamma^2 \hbar \mathbf{q}. \quad (82)$$

L'énergie moyenne par particule se calcule directement à partir de l'opérateur $\hat{\mathcal{H}}$ défini en (62-64) :

$$\epsilon_{\text{GP}}(\mathbf{q}) = \frac{g\rho}{2} + \gamma^2 (\cosh \alpha_q, \sinh \alpha_q) \hat{\mathcal{H}} \begin{pmatrix} \cosh \alpha_q \\ \sinh \alpha_q \end{pmatrix} = \frac{g\rho}{2} + \gamma^2 \hbar \omega_q. \quad (83)$$

La relation de dispersion de Bogoliubov. Créer l'excitation de fonction d'onde (80) revient donc à ajouter à chaque particule l'énergie $\gamma^2 \hbar \omega_q$ et l'impulsion $\gamma^2 \hbar \mathbf{q}$ par rapport à l'état non perturbé $e^{-i\mu t/\hbar}/L^{3/2}$. Ce résultat rend légitime le fait de considérer (77) comme une relation de dispersion.

La relation

$$\omega_q = \left[\frac{g\rho}{m} q^2 + \left(\frac{\hbar q^2}{2m} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (84)$$

présente deux régimes asymptotiques intéressants, selon que le terme dominant est la première ou la seconde contribution à la racine carrée :

— Pour q petit, ω_q se simplifie pour donner

$$\frac{\hbar^2 q^2}{2m} \ll g\rho \Leftrightarrow \frac{\hbar q}{m} \ll c_s : \quad \omega_q \approx c_s q \quad (85)$$

où on a utilisé la définition $c_s^2 = g\rho/m$. On trouve une relation de dispersion linéaire pour la perturbation de vecteur d'onde $\pm \mathbf{q}$, avec une vitesse de propagation donnée par c_s : cette quantité peut donc bien s'interpréter comme la vitesse du son dans le gaz. Notons que dans ce régime, le coefficient α_q est grand et négatif [cf. (78)], de sorte que les poids u et v sont comparables.

— Pour q grand, un développement limité de (84) donne

$$\frac{\hbar^2 q^2}{2m} \gg g\rho \Leftrightarrow \frac{\hbar q}{m} \gg c_s : \quad \hbar \omega_q \approx \frac{\hbar^2 q^2}{2m} + g\rho. \quad (86)$$

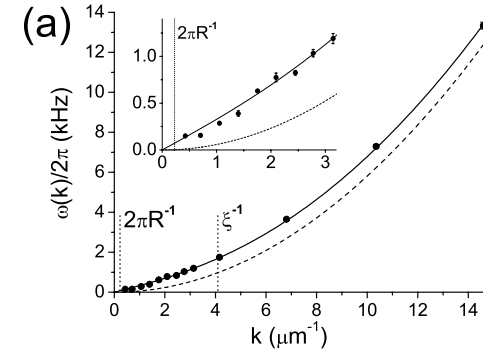


FIGURE 4. Mesure expérimentale du spectre de Bogoliubov par spectroscopie de Bragg extraite de Steinhauer, Ozeri, et al. (2002). La ligne verticale de gauche, à $k = 2\pi/R$, correspond au nombre d'onde le plus petit compatible avec l'extension spatiale du condensat (voir figure 5). La courbe tiretée correspond à la relation de dispersion du gaz parfait. La vitesse du son (pente à l'origine) vaut $c_s = 2.0$ (1) mm/s.

Le premier terme n'est pas une surprise : c'est l'énergie cinétique d'une particule libre. Le second terme est à première vue plus étonnant ; pourquoi faut-il payer l'énergie $g\rho$ pour promouvoir des particules de l'état fondamental à l'état q alors que ces particules se trouvaient déjà en interaction avec le reste du gaz ? La réponse se trouve dans l'argument vu en § 1-1 : en passant de l'état $|N, 0\rangle$ où toutes les particules sont dans l'état fondamental à l'état $|N - n, n\rangle$ où n particules sont devenues quasi-libres en gagnant l'impulsion q , on doit payer l'énergie d'échange $V_{\text{ech}}(N - n)n \approx V_{\text{ech}}Nn$ avec $V_{\text{ech}} = g/L^3$, soit $g\rho$ par particule ainsi promue. Par ailleurs, on trouve en utilisant (78) que $u_q \gg v_q$ dans ce régime, ce qui confirme l'interprétation de l'excitation en terme de particule libre.

— La frontière entre les deux régimes est $q \sim mc_s/\hbar \sim 1/\xi$, où la longueur de cicatrisation ξ , qui représente l'échelle de longueur caractéristique associée aux interactions, a été définie en (27).

Théorème de Goldstone. Le spectre de Bogoliubov possède cette propriété remarquable que $\omega_q \rightarrow 0$ quand $q \rightarrow 0$. À la limite thermodynamique, il n'y a donc pas de gap entre l'énergie de l'état fondamental et celle du premier état excité, ce qui constitue une illustration du théorème général de Goldstone (Hugenholtz & Pines 1959; Gavoret & Nozières 1964). Les modes de basse fréquence décrivent essentiellement des fluctuations de phase. En effet, en utilisant le fait que $u \approx -v$ pour ces modes, on peut écrire la fonction d'onde comme

$$\phi(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{L^{3/2}} [1 + u e^{iqx} + v^* e^{iqx}] \sim \frac{1}{L^{3/2}} [1 + 2iu \sin(qx)], \quad u \ll 1. \quad (87)$$

Cela correspond à l'ordre le plus bas à une amplitude constante et une phase oscillant entre $\pm 2u$. Or il est simple de comprendre pourquoi ces fluctuations de phase à grande échelle coûtent une énergie très faible : le choix de l'état fondamental se fait en lui attribuant une phase particulière, c'est-à-dire en brisant la symétrie $U(1)$ du problème ; nous avons pris cette phase nulle en posant $\phi_0 = 1$, mais n'importe quel autre choix ($\phi_0 = e^{i\theta_0}$) aurait été tout aussi légitime et aurait conduit à la même énergie. Par conséquent, un mode correspondant à une variation spatiale très lente de la phase, se produisant sur une échelle de distance arbitrairement grande, doit être associé à un accroissement d'énergie arbitrairement faible.

Mesure du spectre de Bogoliubov. Les mesures sur les nuages d'atomes froids permettent de vérifier précisément la validité de la relation de dispersion (77). Nous avons représenté sur la figure 4 le résultat obtenu par Steinhauer, Ozeri, et al. (2002) [voir aussi Ozeri, Katz, et al. (2005)]. Cette mesure est faite par spectroscopie de Bragg, technique que nous avons déjà décrite au chapitre 2 et rappelée sur la figure 5. L'accord théorie-expérience, obtenu sans paramètre ajustable, est remarquable. Il concerne aussi bien le régime linéaire, correspondant aux excitations collectives de type phonon se propageant à la vitesse c_s que le régime quadratique correspondant aux excitations individuelles, avec le décalage en énergie $g\rho$.

Le critère de Landau retrouvé. Il existe de multiples façons pour retrouver, à partir de la relation de dispersion de Bogoliubov, le critère de Landau ; rappelons que ce critère exprime la stabilité de l'état superfluide vis-à-vis d'une faible perturbation de vitesse relative inférieure à c_s . Prenons

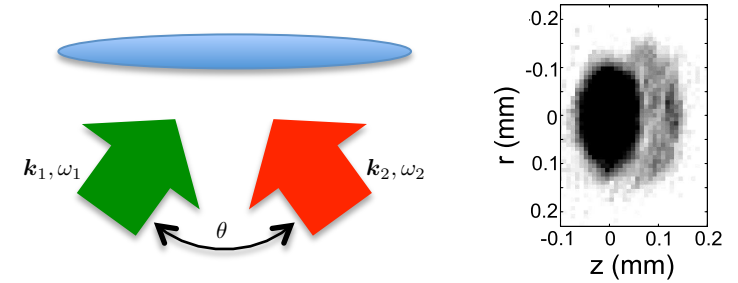


FIGURE 5. Principe de l'expérience de Steinhauer, Ozeri, et al. (2002) permettant de mesurer le spectre de Bogoliubov. Gauche : un condensat en forme de cigare (longueur $56 \mu\text{m}$, diamètre $6 \mu\text{m}$) est éclairé par une impulsion lumineuse constituée de deux faisceaux faisant un angle θ ajustable entre 3 et 130 degrés, de sorte que le transfert d'impulsion $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ dans un processus absorption-émission stimulée est dirigé le long de l'axe du condensat. Droite : après l'impulsion, on procède à une expérience de temps de vol (38 ms) et on mesure le nombre d'atomes ayant gagné l'impulsion $\hbar\mathbf{q}$. Pour chaque valeur de $\hbar\mathbf{q}$ (ici $q = 2.8 \mu\text{m}^{-1}$), on mesure l'énergie $\hbar(\omega_1 - \omega_2)$ qui maximise le nombre d'atomes excités. On obtient ainsi la relation de dispersion de la figure 4.

cette fois-ci notre superfluide au repos et supposons qu'un objet ponctuel de masse M et de vitesse \mathbf{V} se propage à l'intérieur. Pour que cet objet excite le superfluide, il faut qu'il existe un vecteur d'onde \mathbf{q} , une amplitude γ et une vitesse finale \mathbf{V}' de l'objet tels que l'énergie et l'impulsion soient conservées lors de l'excitation :

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}MV'^2 + N\gamma^2\hbar\omega_q \quad (88)$$

$$M\mathbf{V} = M\mathbf{V}' + N\gamma^2\hbar\mathbf{q}. \quad (89)$$

Extrayons \mathbf{V}' de la seconde équation pour la reporter dans la première. On arrive alors à :

$$\omega_q = \mathbf{q} \cdot \mathbf{V} - N\gamma^2 \frac{\hbar q^2}{2M}. \quad (90)$$

Une résolution graphique (cf. figure 6) permet de vérifier que cette équation n'a pas de solution si le module de la vitesse \mathbf{V} est strictement inférieur à la vitesse du son c_s .

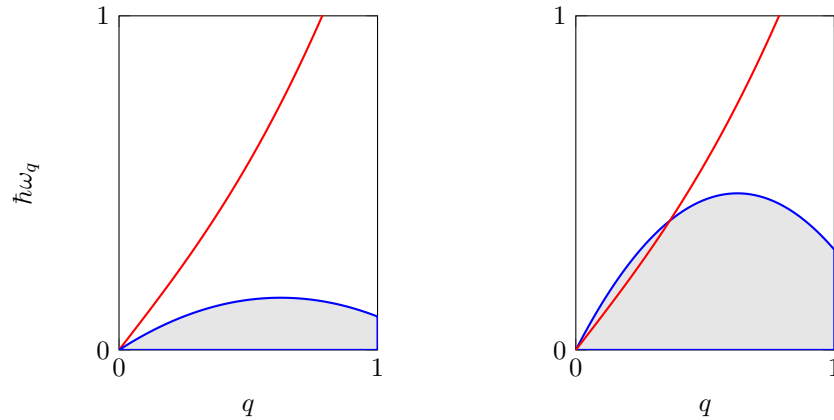


FIGURE 6. Résolution graphique de l'équation (90) : on cherche l'intersection entre le spectre de Bogoliubov (en rouge) et la fonction $\mathbf{q} \cdot \mathbf{V} - N\gamma^2 \frac{\hbar q^2}{2M}$ (en bleu), tracée en prenant ici \mathbf{q} et \mathbf{V} colinéaires. Si V est plus petit que la pente à l'origine de ω_q , c'est-à-dire c_s , il n'y a pas de solution (gauche). Sinon, il y a un domaine fini de valeurs de \mathbf{q} correspondant aux excitations qui peuvent être créées (droite); les unités pour q et ω_q sont arbitraires.

3-3 Au delà du critère de Landau : les vortex

Pour évaluer la métastabilité de l'onde plane $e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}}$, nous avons considéré jusqu'ici une perturbation également de type onde plane en $e^{i(\mathbf{K} \pm \mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}}$. On peut également envisager des perturbations plus localisées, liées en particulier à l'apparition de vortex ou de paires de vortex (Langer & Fisher 1967; Frisch, Pomeau, et al. 1992; Winiecki, McCann, et al. 1999)

Plaçons-nous à deux dimensions pour simplifier l'analyse [cf. Ma (1985), chapitre 30] et considérons un anneau de rayon moyen r_0 (figure 7). Supposons que cet anneau est parcouru par un courant permanent correspondant à un seul quantum de circulation, soit la fonction d'onde $e^{i\varphi}$. Un moyen pour faire disparaître ce courant permanent est de nucléer au sein du superfluide une paire vortex-antivortex, de séparer les membres de cette paire de sorte que le vortex de charge négative aille à l'intérieur de l'anneau et le vortex de charge positive parte à l'infini. À l'issue de ce pro-

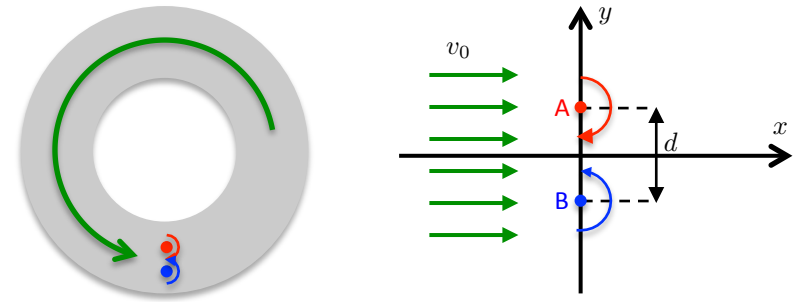


FIGURE 7. Gauche : anneau parcouru par un courant superfluide, avec une paire de vortex s'opposant à la circulation du courant. Droite : géométrie utilisée pour estimer l'énergie cinétique du fluide en fonction de la distance d entre les vortex.

cessus, la circulation dans l'anneau aura décré d'une unité : le superfluide sera au repos.

Pour évaluer la probabilité qu'un tel processus se produise, il faut déterminer l'énergie à payer pour séparer les membres de la paire de vortex par une distance d et comparer cette énergie à l'énergie d'activation thermique. Considérons donc la configuration représentée sur la figure 7 (droite) où le superfluide se propage à vitesse v_0 le long de l'axe x et où deux vortex A et B de charges opposées sont placés en $y = \pm d/2$. Chaque vortex crée un champ de vitesse orthoradial, variant comme l'inverse de la distance au centre r_0 de ce vortex ⁴ :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{m} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \mathbf{e}_\varphi, \tag{91}$$

de sorte que la somme des champs de vitesse des deux vortex s'oppose au flot du superfluide au voisinage de l'origine. À une distance de l'origine grande devant d , les champs de vitesses créés par les deux vortex sont opposés et se compensent pratiquement.

La variation d'énergie entre les situations avec et sans paire de vortex

4. Ce champ de vitesse est formellement identique au champ magnétique créé par une ligne de courant rectiligne, perpendiculaire au plan de la figure.

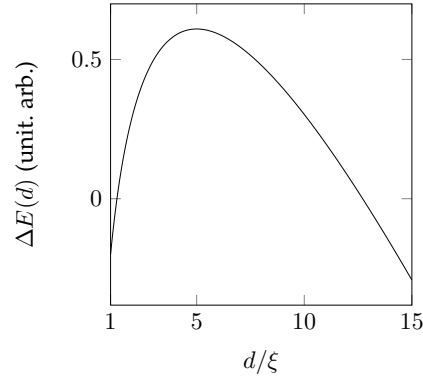


FIGURE 8. Variation de l'énergie d'une paire de vortex dans un superfluide 2D de vitesse v_0 en fonction de la distance d entre les vortex. Courbe tracée pour $mv_0\xi/\hbar = 0.2$.

concerne essentiellement l'énergie cinétique et elle s'écrit

$$\begin{aligned}\Delta E(d) &= \frac{1}{2}m\rho \int (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_B)^2 d^2r - \frac{1}{2}m\rho \int \mathbf{v}_0^2 d^2r \\ &= \frac{1}{2}m\rho \int (\mathbf{v}_A + \mathbf{v}_B)^2 d^2r + m\rho \mathbf{v}_0 \cdot \int (\mathbf{v}_A + \mathbf{v}_B) d^2r.\end{aligned}$$

Le premier terme de cette somme, à savoir l'énergie de la paire de vortex, est toujours positif et est une fonction croissante de leur distance. On ne dispose pas d'un résultat analytique pour cette intégrale, mais on obtient à des termes correctifs au logarithme près (Nozières & Pines 1990):

$$\frac{1}{2}m\rho \int (\mathbf{v}_A + \mathbf{v}_B)^2 d^2r \approx 2\pi \frac{\hbar^2\rho}{m} \log \frac{d}{\xi} \quad (92)$$

où l'on a mis une coupure à courte distance de l'ordre de ξ , qui représente la taille d'un cœur de vortex. Le second terme donne

$$m\rho \mathbf{v}_0 \cdot \int (\mathbf{v}_A + \mathbf{v}_B) d^2r = -2\pi \hbar\rho v_0 d. \quad (93)$$

La variation d'énergie liée à la présence de la paire de vortex vaut donc :

$$\Delta E(d) = 2\pi \hbar\rho \left[\frac{\hbar}{m} \log \left(\frac{d}{\xi} \right) - v_0 d \right] \quad (94)$$

Cette fonction est tracée sur la figure 8; partant de $d \sim \xi$, elle commence par croître pour passer par un maximum en $d_{\max} = \hbar/mv_0$, et décroît ensuite linéairement avec d (dans le cas de l'anneau, cette décroissance s'arrête quand d devient de l'ordre de la largeur de l'anneau). La hauteur de la barrière à franchir, partant de $d = \xi$, est

$$\Delta E_{\max} \approx 2\pi \frac{\hbar^2\rho}{m} \log \frac{c_s}{v_0}, \quad (95)$$

où l'on doit choisir de toute façon $v_0 < c_s$ si l'on souhaite que le superfluide soit stable vis-à-vis du critère de Landau.

Il est intéressant de comparer cette hauteur de barrière à $k_B T$, pour déterminer si elle peut être thermiquement activée. On trouve

$$\frac{\Delta E_{\max}}{k_B T} \approx \rho\lambda_T^2 \log \frac{c_s}{v_0}. \quad (96)$$

Si le superfluide 2D est profondément dans le régime de dégénérescence quantique, $\rho\lambda_T^2 \gg 1$, l'activation thermique est peu probable. En revanche, proche du point de dégénérescence, ce processus joue un rôle important.

Obstacles étendus. Si on place dans le flot du superfluide un obstacle de taille ℓ , il est possible de nucléer une paire de vortex telle que chaque membre parte d'une extrémité de l'obstacle. Ceci réduit la barrière à franchir, puisqu'il suffit que la paire de vortex acquiert par une fluctuation thermique l'énergie

$$\Delta E_{\max} - \Delta E(\ell) \quad (97)$$

pour pouvoir se séparer complètement. En particulier si la vitesse du flot superfluide est telle que

$$d_{\max} = \frac{\hbar}{mv_0} \leq \ell \quad \text{soit} \quad v_0 \geq v_{\text{crit}} \equiv \frac{\hbar}{m\ell}, \quad (98)$$

alors on s'attend à ce que des paires de vortex soient générées de manière continue et que le flot superfluide soit rapidement freiné (Stiessberger & Zwerger 2000; Crescimanno, Koay, et al. 2000). Ce scénario est pertinent en particulier quand la taille ℓ de l'objet est notablement supérieure à la longueur de cicatrisation ξ , puisque la vitesse critique ainsi obtenue est notablement inférieure à la vitesse du son. Une expérience mettant en évidence le caractère superfluide d'un gaz de Bose à 2D quand il est traversé par un objet de taille $\gtrsim \xi$ est décrite par Desbuquois, Chomaz, et al. (2012).

3-4 L'approche « amplitude – phase »

Dans ce qui précède, nous avons analysé les perturbations à la solution $e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}$ en lui ajoutant des termes en ondes planes $e^{i(\mathbf{K}\pm\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}}$, avec des amplitudes $u(t)$ et $v(t)$ évoluant de façon couplée. Une approche équivalente consiste à paramétrer la perturbation plutôt en terme de modulation d'amplitude et de phase de l'onde $e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}$.

Écrivons l'onde perturbée sous la forme :

$$\phi(\mathbf{r}, t) = |\phi(\mathbf{r}, t)| e^{i\theta(\mathbf{r}, t)} \quad (99)$$

où nous allons supposer que la phase θ varie lentement dans l'espace, sans point de singularité (cette hypothèse exclut notamment les vortex). Nous supposons également que les fluctuations d'amplitude sont faibles de sorte que la densité de probabilité associée à $\phi(\mathbf{r}, t)$ peut s'écrire

$$|\phi(\mathbf{r}, t)|^2 = \frac{1}{L^3} (1 + 2\eta(\mathbf{r}, t)) \quad \text{avec} \quad \eta \ll 1 \quad \text{et} \quad \int \eta d^3r = 0. \quad (100)$$

La fonctionnelle d'énergie s'écrit avec ce paramétrage :

$$E = \frac{g\rho}{2}N + \frac{\hbar^2\rho}{2m} \int [\nabla\theta(\mathbf{r})]^2 d^3r + \int \left\{ \frac{\hbar^2\rho}{2m} [\nabla\eta(\mathbf{r})]^2 + 2g\rho^2 [\eta(\mathbf{r})]^2 \right\} d^3r \quad (101)$$

et l'équation de GP conduit aux deux équations couplées

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\hbar}{2m} \nabla^2\eta - \frac{g\rho}{\hbar} (1 + 2\eta), \quad (102)$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m} \nabla^2\theta, \quad (103)$$

qui sont, dans ce point de vue « amplitude–phase », l'équivalent des équations vérifiées par les coefficients u et v .

Si la phase et l'amplitude varient de façon régulière dans l'espace, on peut les décomposer en série de Fourier :

$$\theta(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}}(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}, \quad \eta(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{q}} d_{\mathbf{q}}(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}. \quad (104)$$

Les fonctions θ et η sont réelles, ce qui entraîne $c_{\mathbf{q}}^* = c_{-\mathbf{q}}$ et $d_{\mathbf{q}}^* = d_{-\mathbf{q}}$. De plus, la conservation de la norme entraîne $\int \eta d^3r = 0$, soit $d_0 = 0$. L'évolution des coefficients $c_{\mathbf{q}}$ et $d_{\mathbf{q}}$ déduite de (102–103) s'écrit pour $\mathbf{q} \neq 0$:

$$\hbar \dot{c}_{\mathbf{q}} = -\left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + 2g\rho\right) d_{\mathbf{q}}, \quad (105)$$

$$\hbar \dot{d}_{\mathbf{q}} = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} c_{\mathbf{q}}. \quad (106)$$

Pour $\mathbf{q} = 0$, on obtient $\dot{c}_0 = -g\rho/\hbar$, donnant l'évolution dans le temps de la phase globale du gaz.

En éliminant une des deux variables ($c_{\mathbf{q}}$ ou $d_{\mathbf{q}}$) au profit de l'autre, on obtient l'évolution

$$\ddot{c}_{\mathbf{q}} + \omega_q^2 c_{\mathbf{q}} = 0, \quad \ddot{d}_{\mathbf{q}} + \omega_q^2 d_{\mathbf{q}} = 0, \quad (107)$$

avec la fréquence ω_q donnée par

$$\hbar\omega_q = \left[\frac{\hbar^2 q^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + 2g\rho \right) \right]^{1/2}, \quad (108)$$

ce qui n'est autre que le spectre de Bogoliubov donné en (77).

En notant \bar{c}_q et \bar{d}_q les amplitudes de ces coefficients, nous obtenons par ailleurs :

$$\frac{\bar{d}_q}{\bar{c}_q} = \frac{\hbar\omega_q}{\hbar^2 q^2/2m + 2g\rho} = \left[\frac{\hbar^2 q^2/2m}{\hbar^2 q^2/2m + 2g\rho} \right]^{1/2}. \quad (109)$$

Pour q petit, $\bar{d}_q \ll \bar{c}_q$: on retrouve le fait mentionné plus haut [cf. (87)] que les modes correspondent essentiellement à des fluctuations de phase.

Comme nous le verrons en § 4, un intérêt de cette approche est de permettre d'évaluer simplement les fluctuations de phase et de densité du gaz à l'équilibre thermique.

4 Quasi-particules à l'équilibre thermique

4-1 Populations des modes à l'équilibre

Nous supposons dans ce paragraphe que le gaz est en équilibre à la température T . Les différents modes de Bogoliubov que nous avons déterminés au paragraphe précédent sont donc peuplés thermiquement et nous souhaitons évaluer la moyenne de certaines quantités physiques à cette température. Ceci requiert de connaître le degré d'excitation de chaque mode en fonction de T .

Dans la cadre de la théorie de champ classique que nous avons développée ici, on sait que cette moyenne thermique va donner lieu à des divergences à haute fréquence, au moins à trois dimensions : c'est le problème bien connu du rayonnement du corps noir, qui ne trouve sa solution qu'en passant à une théorie quantique de ces modes, c'est-à-dire en posant que les énergies et les impulsions contenues dans un mode de Bogoliubov sont quantifiées, le quantum étant $(\hbar\omega_q, \hbar\mathbf{q})$. Ceci revient à poser que l'excitation élémentaire dans le formalisme du paragraphe précédent [cf. (115)-(116)] est $|\gamma|^2 = 1/N$, où N est le nombre d'atomes. Comme le nombre d'excitations n'est pas conservé, la population d'un mode \mathbf{q} est donnée par la loi de Bose-Einstein de potentiel chimique nul :

$$\mathcal{N}(\mathbf{q}) = \frac{1}{e^{\hbar\omega_q/k_B T} - 1}. \quad (110)$$

Il est utile d'évaluer également l'amplitude moyenne de l'excitation de chaque mode, c'est-à-dire $\langle |u_q|^2 \rangle$ et $\langle |v_q|^2 \rangle$, ou alors $\langle |c_q|^2 \rangle$ et $\langle |d_q|^2 \rangle$ pour le point de vue amplitude-phase. Considérons par exemple ce deuxième cas et remarquons que la fonctionnelle d'énergie GP s'écrit en fonction de ces coefficients :

$$N\epsilon_{\text{GP}} = \frac{gN^2}{2L^3} + \rho L^3 \sum_{\mathbf{q}} \left[\frac{\hbar^2 q^2}{2m} |c_q|^2 + \left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + 2g\rho \right) |d_q|^2 \right]. \quad (111)$$

Comme pour un oscillateur harmonique mécanique, l'énergie moyenne $\mathcal{N}(\mathbf{q}) \epsilon_q$ du mode \mathbf{q} se partage en parts égales entre le terme provenant

de $\langle |c_q|^2 \rangle$ et celui provenant de $\langle |d_q|^2 \rangle$, de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathcal{N}(\mathbf{q}) \epsilon_q &= \rho L^3 \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \langle |c_q|^2 \rangle \\ \frac{1}{2} \mathcal{N}(\mathbf{q}) \epsilon_q &= \rho L^3 \left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + 2g\rho \right) \langle |d_q|^2 \rangle \end{aligned} \quad (112)$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\langle |c_q|^2 \rangle = \frac{1}{2\rho L^3} \mathcal{N}(\mathbf{q}) \left(\frac{\hbar^2 q^2/2m + 2g\rho}{\hbar^2 q^2/2m} \right)^{1/2} \quad (113)$$

$$\langle |d_q|^2 \rangle = \frac{1}{2\rho L^3} \mathcal{N}(\mathbf{q}) \left(\frac{\hbar^2 q^2/2m}{\hbar^2 q^2/2m + 2g\rho} \right)^{1/2}. \quad (114)$$

Remarque. Dans le cadre de la théorie quantique du gaz de Bose en interaction, la quantification des modes de Bogoliubov apparaît naturellement (cf. appendice 2) : le fait que les atomes soient traités comme des particules quantiques et décrits par des opérateurs création \hat{a}_p^\dagger et annihilation \hat{a}_p avec $[\hat{a}_p, \hat{a}_p^\dagger] = 1$ pour un état d'impulsion \mathbf{p} amène automatiquement une règle de commutation similaire pour les quasi-particules de Bogoliubov.

4-2 Quasi-particules et densité normale

Le traitement que nous avons suivi au paragraphe § 3-2 pour trouver les modes propres de l'opérateur de Bogoliubov $\hat{\mathcal{L}}$ peut être mené sans modification pour l'état de départ $\phi_{\mathbf{K}} = e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}$, correspondant à un superfluide en mouvement à vitesse $\mathbf{V} = \hbar\mathbf{K}/m$. On trouve alors pour l'impulsion et l'énergie par particule :

$$\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle = \hbar\mathbf{K} + \gamma^2 \hbar\mathbf{q}, \quad (115)$$

$$\epsilon_{\text{GP}}(\mathbf{q}) = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} + \frac{g\rho}{2} + \gamma^2 \hbar \left(\omega_q + \frac{\hbar}{m} \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} \right). \quad (116)$$

Ce résultat est bien en accord avec la formule générale de changement de repère galiléen pour l'impulsion et l'énergie vue au chapitre précédent : si une particule possède dans un référentiel \mathcal{R}_0 l'impulsion \mathbf{p}_0 et l'énergie

E_0 , alors son impulsion et son énergie dans le référentiel \mathcal{R} bougeant à la vitesse $-\mathbf{V}$ par rapport à \mathcal{R}_0 sont :

$$\mathbf{p} = m\mathbf{V} + \mathbf{p}_0, \quad E = \frac{1}{2}mV^2 + E_0 + \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{V}. \quad (117)$$

Les résultats (115-116) permettent de calculer simplement les densités normale et superfluide dans le cadre de la théorie de Bogoliubov. Plaçons-nous dans le référentiel du récipient, dans lequel la vitesse normale est par définition nulle, $\mathbf{v}_n = 0$. Supposons que le superfluide a la vitesse $\mathbf{v}_s = \hbar\mathbf{K}/m$ par rapport à ce récipient. L'impulsion par unité de volume s'écrit dans ce cas (chapitre 2) :

$$\frac{\mathbf{P}}{L^3} = m\rho_n\mathbf{v}_n + m\rho_s\mathbf{v}_s = \rho_s \hbar\mathbf{K} \quad (118)$$

Par ailleurs, on peut calculer cette impulsion en sommant (115) sur les N atomes du gaz et sur tous les modes de Bogoliubov. Le degré d'excitation $N\gamma^2$ de chaque mode de Bogoliubov est donné par sa population thermique moyenne $\mathcal{N}(\mathbf{q})$:

$$\frac{\mathbf{P}}{L^3} = \frac{N}{L^3} \hbar\mathbf{K} + \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{q}} \mathcal{N}(\mathbf{q}) \hbar\mathbf{q}. \quad (119)$$

avec pour ce superfluide en mouvement :

$$\mathcal{N}(\mathbf{q}) = \mathcal{N}[\epsilon(\mathbf{q})], \quad (120)$$

où $\mathcal{N}(\epsilon)$ correspond à la loi de Bose-Einstein et $\epsilon(\mathbf{q})$ se déduit de (116)

$$\epsilon(\mathbf{q}) = \hbar\omega_{\mathbf{q}} + \frac{\hbar^2}{m} \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}. \quad (121)$$

L'impulsion totale (119) s'écrit alors

$$\frac{\mathbf{P}}{L^3} = \rho \hbar\mathbf{K} + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathcal{N}(\mathbf{q}) \hbar\mathbf{q} \, d^3q. \quad (122)$$

Plaçons-nous dans la limite des faibles \mathbf{K} , nécessaire pour la validité du modèle à deux fluides. On peut faire un développement limité de $\mathcal{N}(\mathbf{q})$ au premier ordre en K ,

$$\mathcal{N}[\epsilon(\mathbf{q})] = \mathcal{N}[\hbar\omega_{\mathbf{q}}] + \frac{\hbar^2}{m} (\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}) \frac{d\mathcal{N}}{d\epsilon}. \quad (123)$$

La contribution du premier terme à l'intégrale (122) sur \mathbf{q} s'annule du fait de l'isotropie de $\omega_{\mathbf{q}}$ et il reste

$$\frac{\mathbf{P}}{L^3} = \rho \hbar\mathbf{K} + \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^3}{m} \int \frac{d\mathcal{N}}{d\epsilon} \mathbf{q} (\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}) \, d^3q. \quad (124)$$

ce qui peut encore s'écrire du fait de l'isotropie de $\omega_{\mathbf{q}}$:

$$\frac{\mathbf{P}}{L^3} = \hbar\mathbf{K} \left[\rho + \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2}{3m} \int \frac{d\mathcal{N}}{d\epsilon} q^2 \, d^3q \right]. \quad (125)$$

La comparaison de (118) et (125) donne immédiatement (Landau 1941)

$$\rho_n = \rho - \rho_s = -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2}{3m} \int \frac{d\mathcal{N}}{d\epsilon} q^2 \, d^3q \quad (126)$$

ce qui est bien positif puisque $\mathcal{N}(\epsilon)$ est une fonction décroissante de ϵ .

Pitaevskii & Stringari (2016) proposent une discussion détaillée de cette formule de Landau et de sa validité. Indiquons simplement ici quelques éléments :

— Dans le cas de basses températures, $k_B T \ll mc_s^2 = g\rho$, les \mathbf{q} qui contribuent à l'intégrale sont les phonons correspondant à la partie linéaire $\omega_{\mathbf{q}} = c_s q$ de la relation de dispersion. On trouve alors

$$\rho_n = \frac{2\pi^2}{45} \frac{k_B T}{mc_s^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c_s} \right)^3 \quad (127)$$

Cette quantité est plus petite que la densité non condensée

$$\rho_{\text{non cond.}} = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{q}} \langle \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{q}} \rangle \approx \frac{1}{(2\pi)^3} \int \cosh(2\alpha_{\mathbf{q}}) \mathcal{N}(\mathbf{q}) \, d^3q \quad (128)$$

par le facteur $\sim (k_B T / mc_s^2)^2$. À basse température, la densité normale est donc beaucoup plus faible que la densité non condensée, le phénomène de déplétion quantique venant encore renforcer cet écart.

— Pour une température telle que $k_B T \gg mc_s^2$, c'est le régime de particule libre $\omega_{\mathbf{q}} \approx \hbar q^2 / 2m$, $\cosh(2\alpha_{\mathbf{q}}) \approx 1$ qui contribue essentiellement à l'intégrale et il est simple de montrer que ρ_n et $\rho_{\text{non cond.}}$ coïncident, en utilisant une intégration par parties de (126).

Signalons enfin qu'il n'est pas possible d'étendre la validité de (126) jusqu'au point de condensation lui-même. En effet, le nombre de quasi-particules devient tellement grand dans la région critique qu'il n'est plus possible de les traiter comme un gaz parfait de potentiel chimique nul.

4-3 Fluctuations de phase à 3D

Intéressons-nous maintenant aux fluctuations de phase entre deux points $\pm \mathbf{r}/2$ pour voir si la rigidité de phase requise pour un état superfluide est bien présente, au moins à trois dimensions. On a

$$\theta(\mathbf{r}/2) - \theta(-\mathbf{r}/2) = 2i \sum_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}} \sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/2) \quad (129)$$

soit en moyenne quadratique

$$\Delta^2 \theta(\mathbf{r}) \equiv \langle [\theta(\mathbf{r}/2) - \theta(-\mathbf{r}/2)]^2 \rangle = 4 \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int \langle |c_{\mathbf{q}}|^2 \rangle \sin^2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/2) d^3 q \quad (130)$$

En remplaçant $\langle |c_{\mathbf{q}}|^2 \rangle$ par sa valeur (113), on arrive à :

$$\Delta^2 \theta(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^3 \rho} \int \mathcal{N}(\mathbf{q}) \left(\frac{\hbar^2 q^2/2m + 2g\rho}{\hbar^2 q^2/2m} \right)^{1/2} \sin^2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/2) d^3 q. \quad (131)$$

Cette intégrale converge-t-elle ? Quand $q \rightarrow \infty$, la population $\mathcal{N}(\mathbf{q})$ tend vers 0 exponentiellement vite, ce qui assure la convergence. Quand $q \rightarrow 0$, $\mathcal{N}(\mathbf{q}) \sim k_B T / \hbar \omega_{\mathbf{q}}$ diverge comme $1/q$. Cette divergence ainsi que celle du dénominateur $(\hbar^2 q^2/2m)^{1/2}$ sont compensées par le jacobien tridimensionnel : $d^3 q = 4\pi q^2 dq$, de sorte que l'on peut majorer $\sin^2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/2)$ par 1 et obtenir :

$$\Delta^2 \theta(\mathbf{r}) < \frac{1}{\pi^2 \rho} \int_0^{+\infty} \mathcal{N}(q) \left(\frac{\hbar^2 q^2/2m + 2g\rho}{\hbar^2 q^2/2m} \right)^{1/2} q^2 dq. \quad (132)$$

Dans le régime $k_B T \gg mc_s^2 = g\rho$ qui est celui le plus souvent rencontré en pratique, les q contribuant de manière significative à l'intégrale correspondent à $q \lesssim 1/\lambda_T$ et on trouve

$$\Delta^2 \theta(\mathbf{r}) \lesssim \frac{1}{\rho \lambda_T^3} \ll 1 \quad \text{dans le régime dégénéré.} \quad (133)$$

Les fluctuations de phase sont donc faibles, ce qui assure la légitimité du développement de la fonction $\phi(\mathbf{r}, t)$ autour d'une solution de phase uniforme.

On pourra constater qu'à deux dimensions (et *a fortiori* à une dimension), l'argument qui précède ne s'applique plus. Si on se contente de majorer le $\sin^2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/2)$ par 1 dans (131), on obtient un résultat divergent en $q = 0$: les modes de faible vecteur d'onde créent des fluctuations de phases importantes. Une estimation plus soignée de $\Delta\theta$ indique un comportement en $\log(r)$ à 2D [voir par exemple Hadzibabic & Dalibard (2011) pour une revue] et linéaire en r à 1D, correspondant à un comportement algébrique (2D) ou exponentiel⁵ (1D) pour la fonction G_1 :

$$G_1(r) = N \langle \phi^*(-\mathbf{r}/2) \phi(\mathbf{r}/2) \rangle. \quad (134)$$

On retrouve ici le résultat bien connu du théorème de Mermin & Wagner (1966) et Hohenberg (1967).

5 Appendice 1 : méthode variationnelle

La méthode variationnelle, bien connue pour le cas indépendant du temps, peut également être utilisée dans le cas dépendant du temps pour obtenir une évolution approchée de l'état d'un système, de ses modes propres, et de ses éventuelles instabilités.

Lagrangien conduisant à l'équation de Schrödinger. Rappelons pour commencer que l'équation de Schrödinger dépendant du temps

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi \quad (135)$$

s'obtient en écrivant que la fonction $\Psi(t)$ suivie par le système au cours de son évolution d'un instant t_1 à un instant t_2 est celle qui rend l'action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\Psi) dt \quad (136)$$

5. La notion de superfluidité à 1D déduite de l'approche de Bogoliubov est subtile, voir par exemple la discussion de Carusotto & Castin (2004).

extrémale, avec le lagrangien

$$L(\Psi) = \int \mathcal{L}(\Psi) d^3r_1 \dots d^3r_N \quad (137)$$

La densité de lagrangien $\mathcal{L}(\Psi)$ est donnée par

$$\mathcal{L}(\Psi) = \mathcal{L}_{\text{dyn}}(\Psi) - \Psi^* \hat{H} \Psi \quad (138)$$

où la partie dynamique du lagrangien vaut

$$\mathcal{L}_{\text{dyn}}(\Psi) = \frac{i\hbar}{2} (\Psi^* \dot{\Psi} - \dot{\Psi}^* \Psi). \quad (139)$$

Les deux équations de Lagrange obtenues par extrémisation de l'action

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \Psi} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}^*} \right) = \frac{\partial L}{\partial \Psi^*} \quad (140)$$

redonnent alors chacune l'équation de Schrödinger⁶. Notons que la dérivée partielle doit être comprise ici comme une dérivation fonctionnelle, où l'on traite les quatre quantités $\Psi, \Psi^*, \dot{\Psi}, \dot{\Psi}^*$ comme des variables indépendantes.

Lagrangien pour une fonction d'essai variationnelle. Supposons maintenant que l'on se donne une famille de fonctions d'essai normées $\Phi_{\lambda}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ caractérisées par des paramètres réels dépendant du temps $\lambda(t) = [\lambda_1(t), \dots, \lambda_p(t)]$. Pour chaque valeur de λ , on calcule l'énergie moyenne

$$E(\lambda) = \langle \Phi_{\lambda} | \hat{H} | \Phi_{\lambda} \rangle. \quad (141)$$

Par ailleurs, en injectant ces fonctions d'essai dans le lagrangien initial (137), on arrive au lagrangien pour les paramètres λ :

$$L(\lambda) = \dot{\lambda} \cdot P(\lambda) - E(\lambda) \quad (142)$$

avec les p fonctions réelles

$$P_j(\lambda) = \frac{i\hbar}{2} \int \left(\Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_j} - \frac{\partial \Phi^*}{\partial \lambda_j} \Phi \right) d^3r_1 \dots d^3r_N. \quad (143)$$

6. Le fait que les deux équations de Lagrange conduisent à un résultat identique est une conséquence de la structure très simple du terme dépendant du temps dans la densité de lagrangien (138).

Une fois le lagrangien simplifié (142) obtenu, on écrit les équations de Lagrange pour les paramètres λ , ce qui donne l'évolution approchée recherchée. Elle se met sous la forme d'un système différentiel du premier ordre en temps :

$$[M] \dot{\lambda} = \nabla E(\lambda) \quad \text{avec} \quad M_{j,k} = \frac{\partial P_k}{\partial \lambda_j} - \frac{\partial P_j}{\partial \lambda_k}. \quad (144)$$

On retrouve bien que le système sera stationnaire ($\dot{\lambda} = 0$) si les λ sont tels que l'énergie $E(\lambda)$ est extrémale.

6 App. 2 : approche de Bogoliubov quantique

Nous nous sommes placés dans ce chapitre dans le cadre d'une théorie de champ classique, de sorte que les « quanta » d'énergie ou d'impulsion pour les excitations de Bogoliubov n'apparaissent pas explicitement. Dans la théorie de Bogoliubov quantique, légèrement plus longue à développer [voir par exemple Pitaevskii & Stringari (2016)], on trouve que chaque excitation élémentaire est caractérisée par le couple énergie-impulsion $(\hbar\omega_q, \hbar\mathbf{q})$. On arrive alors à l'hamiltonien de quasi-particules et à l'opérateur impulsion

$$\hat{H} = E_0 + \sum_{\mathbf{q}} \hbar\omega_q \hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{q}} \quad (145)$$

$$\hat{P} = \sum_{\mathbf{q}} \hbar\mathbf{q} \hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{q}} \quad (146)$$

où ω_q est défini comme précédemment et où on a pris $\mathbf{K} = 0$. Le lien avec la théorie classique que nous avons développé se fait en prenant $\gamma^2 = 1/N$, ce qui assure que l'énergie totale $N\epsilon_{\text{GP}}$ dans le fluide est augmentée de $\hbar\omega_q$ quand une excitation élémentaire est présente.

Rappelons très brièvement la démarche généralement suivie pour développer cette théorie de Bogoliubov quantique (Pitaevskii & Stringari 2016). On écrit la fonctionnelle d'énergie de GP en seconde quantification qui fait intervenir des produits de deux ou quatre opérateurs de création $\hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger}$ ou de destruction $\hat{a}_{\mathbf{q}}$ d'une particule dans l'état d'impulsion $\hbar\mathbf{q}$. On suppose que l'essentiel de la population est portée par le mode d'impulsion

nulle $\mathbf{q} = 0$; on ne garde donc dans cette fonctionnelle d'énergie que les termes contenant au plus un produit de deux \hat{a}_q^\dagger ou \hat{a}_q avec $\mathbf{q} \neq 0$. Par ailleurs, compte tenu de la forte population de $\mathbf{q} = 0$, on traite \hat{a}_0^\dagger ou \hat{a}_0 comme des nombres classiques. On arrive alors à l'hamiltonien

$$\hat{H} = \frac{N}{2}g\rho + \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \hat{a}_q^\dagger \hat{a}_q + \frac{1}{2}g\rho \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \left(2\hat{a}_q^\dagger \hat{a}_q + \hat{a}_q^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{q}}^\dagger + \hat{a}_q \hat{a}_{-\mathbf{q}} \right). \quad (147)$$

On peut vérifier, avec une démarche similaire à celle évoquée au début de ce chapitre en § 1-3, que l'hamiltonien se met sous la forme diagonale (145) si l'on définit les opérateurs de création (\hat{b}_q^\dagger) et de destruction (\hat{b}_q) d'une quasi-particule dans le mode \mathbf{q} par :

$$\hat{a}_q^\dagger = \cosh \alpha_q \hat{b}_q^\dagger + \sinh \alpha_q \hat{b}_{-\mathbf{q}} \quad \hat{a}_q = \cosh \alpha_q \hat{b}_q + \sinh \alpha_q \hat{b}_{-\mathbf{q}}^\dagger \quad (148)$$

où les coefficients α_q sont identiques à ceux intervenant dans l'approche classique [eq. (78)].

L'intérêt de cette approche de Bogoliubov quantique, en plus de fournir le quantum élémentaire $\gamma^2 = 1/N$, est la détermination de l'état fondamental atteint une fois que les interactions ont apparié les particules comme en § 1-3. Cet état est déterminé par

$$\hat{b}_q |\Psi_{\text{fond}}\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{q} \quad (149)$$

et permet de calculer la déplétion quantique, que l'on trouve proportionnelle à $\sqrt{na^3}$. On a également accès en principe à l'énergie de ce fondamental, mais il est important de noter que l'expression (147) n'est pas adaptée à ce calcul. Comme nous l'avons déjà mentionné en § 1-3, il faut aller au delà du simple potentiel de contact pour obtenir un résultat raisonnable.

Références

Andersen, Jens O. (2004), « Theory of the weakly interacting Bose gas », in *Rev. Mod. Phys.* 76 (2), pp. 599–639.
 Baym, Gordon, Jean-Paul Blaizot, Markus Holzmann, Franck Laloë & Dominique Vautherin (1999), « The Transition Temperature of the Dilute Interacting Bose Gas », in *Phys. Rev. Lett.* 83 (9), pp. 1703–1706.

Blaizot, Jean-Paul & Georges Ripka (1986), *Quantum theory of finite systems*, vol. 3, 9, MIT press Cambridge.
 Carusotto, Iacopo & Yvan Castin (2004), « Superfluidity of the 1D Bose gas », in *Comptes Rendus Physique* 5.1, pp. 107–127.
 Castin, Y (2001), « Bose-Einstein condensates in atomic gases : simple theoretical results », in *Coherent atomic matter waves (Les Houches Summer School 1999)*, ed. by Kaiser R., Westbrook C. & David F., EDP Sciences and Springer-Verlag.
 Chomaz, Lauriane, Laura Corman, Tom Bienaimé, Rémi Desbuquois, Christof Weitenberg, Sylvain Nascimbène, Jérôme Beugnon & Jean Dalibard (2015), « Emergence of coherence via transverse condensation in a uniform quasi-two-dimensional Bose gas », in *Nature communications* 6.
 Crescimanno, M., C. G. Koay, R. Peterson & R. Walsworth (2000), « Analytical Estimate of the Critical Velocity for Vortex Pair Creation in Trapped Bose Condensates », in *Phys. Rev. A* 62, p. 063612.
 Dalfovo, Franco, Stefano Giorgini, Lev P. Pitaevskii & Sandro Stringari (1999), « Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases », in *Rev. Mod. Phys.* 71 (3), pp. 463–512.
 Desbuquois, Rémi, Lauriane Chomaz, Tarik Yefsah, Julian Léonard, Jérôme Beugnon, Christof Weitenberg & Jean Dalibard (2012), « Superfluid behaviour of a two-dimensional Bose gas », in *Nature Physics* 8.9, pp. 645–648.
 Donner, T., S. Ritter, T. Bourdel, A. Ottl, M. Köhl & T. Esslinger (2007), « Critical Behavior of a Trapped Interacting Bose Gas », in *Science* 315.5818, pp. 1556–1558.
 Frisch, T., Y. Pomeau & S. Rica (1992), « Transition to Dissipation in a Model of Superflow », in *Phys. Rev. Lett.* 69, p. 1644.
 Gavoret, J & P Nozières (1964), « Structure of the perturbation expansion for the Bose liquid at zero temperature », in *Annals of Physics (N. Y.)* 28, pp. 349–399.
 Gerbier, F., J. H. Thywissen, S. Richard, M. Hugbart, P. Bouyer & A. Aspect (2004), « Critical Temperature of a Trapped, Weakly Interacting Bose Gas », in *Phys. Rev. Lett.* 92.3, 030405, p. 030405.
 Gross, E. P. (1961), « Structure of Quantized Vortex », in *Il Nuovo Cimento* 20, p. 454.
 Hadzibabic, Z. & J. Dalibard (2011), « Two-dimensional Bose fluids : An atomic physics perspective », in *Rivista del Nuovo Cimento* 34.6, pp. 389–434.

- Hohenberg, P. C. (1967), « Existence of Long-Range Order in One and Two Dimensions », in *Phys. Rev.* 158, p. 383.
- Holzmann, Markus, Gordon Baym, Jean-Paul Blaizot & Franck Lalœ (2001), « Nonanalytic Dependence of the Transition Temperature of the Homogeneous Dilute Bose Gas on Scattering Length », in *Phys. Rev. Lett.* 87 (12), p. 120403.
- Holzmann, Markus & Werner Krauth (1999), « Transition Temperature of the Homogeneous, Weakly Interacting Bose Gas », in *Phys. Rev. Lett.* 83, p. 2687.
- Hughenoltz, N. M. & D. Pines (1959), « Ground-State Energy and Excitation Spectrum of a System of Interacting Bosons », in *Phys. Rev.* 116 (3), pp. 489–506.
- Kashurnikov, V. A., N. V. Prokof'ev & B. V. Svistunov (2001), « Critical Temperature Shift in Weakly Interacting Bose Gas », in *Phys. Rev. Lett.* 87.12, p. 120402.
- Landau, L. D. (1941), « The theory of superfluidity of helium II », in *J. Phys. (USSR)* 5, p. 71.
- Langer, J. S. & Michael E. Fisher (1967), « Intrinsic Critical Velocity of a Superfluid », in *Phys. Rev. Lett.* 19 (10), pp. 560–563.
- Lee, T. D., K. Huang & C. N. Yang (1957), « Eigenvalues and Eigenfunctions of a Bose System of Hard Spheres and Its Low-Temperature Properties », in *Phys. Rev.* 106, p. 1135.
- Leggett, A. J. (2006), *Quantum Liquids*, Oxford University Press.
- Ma, Shang-Keng (1985), *Statistical Mechanics*, World Scientific.
- Mermin, N. D. & H. Wagner (1966), « Absence of Ferromagnetism or Antiferromagnetism in One- or Two-Dimensional Isotropic Heisenberg Models », in *Phys. Rev. Lett.* 17, p. 1133.
- Mora, C. & Y. Castin (2003), « Extension of Bogoliubov theory to quasicondensates », in *Phys. Rev. A* 67, p. 053615.
- Navon, Nir, Alexander L Gaunt, Robert P Smith & Zoran Hadzibabic (2015), « Critical dynamics of spontaneous symmetry breaking in a homogeneous Bose gas », in *Science* 347.6218, pp. 167–170.
- Nozières, P. (1995), « Some comments on Bose–Einstein Condensation », in *Bose–Einstein Condensation*, ed. by A. Griffin, D. W. Snoke & S. Stringari, Cambridge: Cambridge University Press.
- Nozières, P. & D. Pines (1990), *The Theory of Quantum Liquids, Superfluid Bose Liquids*, Addison-Wesley.
- Ozeri, R., N. Katz, J. Steinhauer & N. Davidson (2005), « Colloquium : Bulk Bogoliubov excitations in a Bose-Einstein condensate », in *Rev. Mod. Phys.* 77 (1), pp. 187–205.
- Pethick, C.J. & H. Smith (2002), *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press.
- Pines, David & Philippe Nozières (1990), *The theory of quantum liquids*, Addison-Wesley.
- Pitaevskii, L. & S. Stringari (2016), *Bose–Einstein Condensation and Superfluidity*, Oxford: Oxford University Press.
- Pitaevskii, L. P. (1961), « Vortex lines in an imperfect Bose gas », in *Sov. Phys. JETP* 13, p. 451.
- Smith, Robert P., Robert L. D. Campbell, Naaman Tammuz & Zoran Hadzibabic (2011), « Effects of Interactions on the Critical Temperature of a Trapped Bose Gas », in *Phys. Rev. Lett.* 106 (25), p. 250403.
- Steinhauer, J., R. Ozeri, N. Katz & N. Davidson (2002), « Excitation spectrum of a Bose–Einstein condensate », in *Phys. Phys. Lett.* 88.12, p. 120407.
- Stiessberger, J. S. & W. Zwerger (2000), « Critical Velocity of Superfluid Flow past Large Obstacles in Bose-Condensates », in *Phys. Rev. A* 62, 061601(R).
- Winiecki, T., J. F. McCann & C. S. Adams (1999), « Pressure Drag in Linear and Nonlinear Quantum Fluids », in *Phys. Rev. Lett.* 82, p. 5186.

Chapitre 4

Condensation et superfluidité dans un réseau

Sommaire

1	La limite des liaisons fortes	2
1-1	Le théorème de Bloch	2
1-2	Fonctions de Wannier	2
1-3	L'hamiltonien de Hubbard	4
1-4	Interactions dans le réseau	5
2	Superfluidité et vitesse critique dans un réseau	6
2-1	Études expérimentales	6
2-2	Vitesse critique dans un réseau (limite $U \rightarrow 0$) . .	7
2-3	Vitesse critique dans un réseau (liaisons fortes) .	8
3	Transition superfluide-isolant (cas homogène)	10
3-1	Classe de fonction d'essai : <i>ansatz</i> de Gutzwiller .	11
3-2	L'état fondamental pour l' <i>ansatz</i> de Gutzwiller .	12
3-3	Le point de transition superfluide-isolant	12
3-4	Une approche analytique simple	14
4	Appendice : fonctions de Hartree et états cohérents . .	15

Nous avons étudié dans les chapitres précédents la superfluidité des gaz de Bose homogènes, en absence de potentiel extérieur. Nous abordons maintenant un autre volet de la superfluidité des gaz d'atomes froids, portant sur le comportement du fluide en présence d'un réseau périodique. Cette étude va notamment nous permettre d'étudier la célèbre transition de phase quantique entre l'état superfluide et un état isolant de Mott, transition mise en évidence sur des atomes froids par Greiner, Mandel, et al. (2002).

Notre point de départ sera l'état superfluide, décrit par une approche de Gross-Pitaevskii similaire à celle utilisée dans le cours 3. Nous décrirons quelques expériences qui ont montré que la présence d'un potentiel périodique de réseau peut déstabiliser un courant permanent et briser la superfluidité. Cela nous conduira à la transition de phase superfluide-isolant ; cette transition, initialement étudiée par Fisher, Weichman, et al. (1989) dans un contexte de matière condensée, a été transposée aux atomes froids par Jaksch, Bruder, et al. (1998). Elle est désormais devenue emblématique de la possibilité qu'offrent les systèmes d'atomes froids d'atteindre des états fortement corrélés.

Nous aborderons cette transition superfluide – isolant de Mott par plusieurs approches, d'abord pour un gaz uniforme dans ce chapitre, puis pour un gaz confiné dans un piège harmonique dans le cours prochain.

1 La limite des liaisons fortes

Nous commençons ce chapitre par quelques rappels sur la description quantique du mouvement d'une particule dans un potentiel périodique $V(\mathbf{r})$. Nous renvoyons le lecteur recherchant une description plus détaillée au cours 2012-13.

1-1 Le théorème de Bloch

Nous considérons des atomes en mouvement dans un potentiel périodique $V(\mathbf{r})$, de période spatiale a , créé par exemple par une onde lumineuse stationnaire. En exploitant la périodicité spatiale du potentiel, on montre que l'on peut chercher les états propres de l'hamiltonien à une particule

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + V(\hat{\mathbf{r}}) \quad (1)$$

sous forme d'ondes de Bloch

$$\psi_{n,\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} u_{n,\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \quad \text{d'énergie } E_n(\mathbf{q}). \quad (2)$$

Indiquons sans démonstration quelques propriétés de ces ondes de Bloch, en prenant le cas d'un réseau cubique.

- La fonction $u_{n,\mathbf{q}}(\mathbf{r})$ est périodique sur le réseau.
- L'indice entier $n = 0, 1, 2, \dots$, appelé *indice de bande*, sert à classer les énergies par ordre croissant à \mathbf{q} donné.
- le vecteur \mathbf{q} , appelé *vecteur de Bloch* ou *quasi-moment*, peut être choisi dans la zone de Brillouin

$$-\frac{\pi}{a} < q_j \leq \frac{\pi}{a} \quad \text{avec } j = x, y, z. \quad (3)$$

Cette restriction permet d'éviter tout comptage multiple, puisque les ondes de Bloch associées à (n, \mathbf{q}) et à $(n, \mathbf{q} + \mathbf{Q})$, où \mathbf{Q} est un vecteur de coordonnées multiples de $2\pi/a$ coïncident, à un facteur de phase près.

- Quand \mathbf{q} varie sur l'étendue de la zone de Brillouin, le segment décrit par l'énergie $E_n(\mathbf{q})$ est appelé *bande d'énergie*.

Un exemple de bandes d'énergies est donné en figure 1 pour le problème unidimensionnel $V(x) = V_0 \sin^2(kx)$. Les énergies $E_n(q)$ y sont tracées en unité de *l'énergie de recul*

$$E_r = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (4)$$

qui est l'échelle d'énergie naturelle pour une particule de masse m en mouvement dans ce potentiel de période spatiale $a = \pi/k$.

Nous avons utilisé sur la figure 2 une autre représentation des bandes d'énergie, appelée *schéma de zone répétée*, pour laquelle chaque état figure plusieurs fois. Ce schéma nous sera utile un peu plus loin quand nous étudierons les instabilités d'un condensat en mouvement dans un réseau.

1-2 Fonctions de Wannier

Les ondes de Bloch forment une base de fonctions qui représentent pour un réseau l'équivalent des ondes planes pour l'espace libre. Il est très utile d'introduire une autre base de fonctions orthogonales, les *fonctions de Wannier*, qui pour un choix convenable de la phase des ondes de Bloch, sont localisées au voisinage des minima locaux du réseau $\mathbf{r}_j = a\mathbf{j}$, repérés par le triplet d'entier $\mathbf{j} \equiv (j_x, j_y, j_z)$.

Plaçons-nous à une dimension pour simplifier les notations, le retour à 3D se faisant sans difficulté. Les fonctions de Wannier associées à la bande n s'écrivent :

$$w_{n,j}(x) = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\pi/a}^{+\pi/a} \psi_{n,q}(x) e^{-i\mathbf{j}a\mathbf{q}} dq. \quad (5)$$

Il est immédiat de montrer à partir de la définition (5) que les fonctions de Wannier $w_{n,j}$ se déduisent les unes de autres (à n donné) par translation :

$$w_{n,0}(x - ja) = w_{n,j}(x). \quad (6)$$

Il suffit donc de caractériser les fonctions de Wannier $w_{n,0}(x)$ pour les connaître toutes.

La définition des fonctions de Wannier dépend de la phase que l'on donne à chaque onde de Bloch, cette phase étant à ce stade arbitraire. Pour

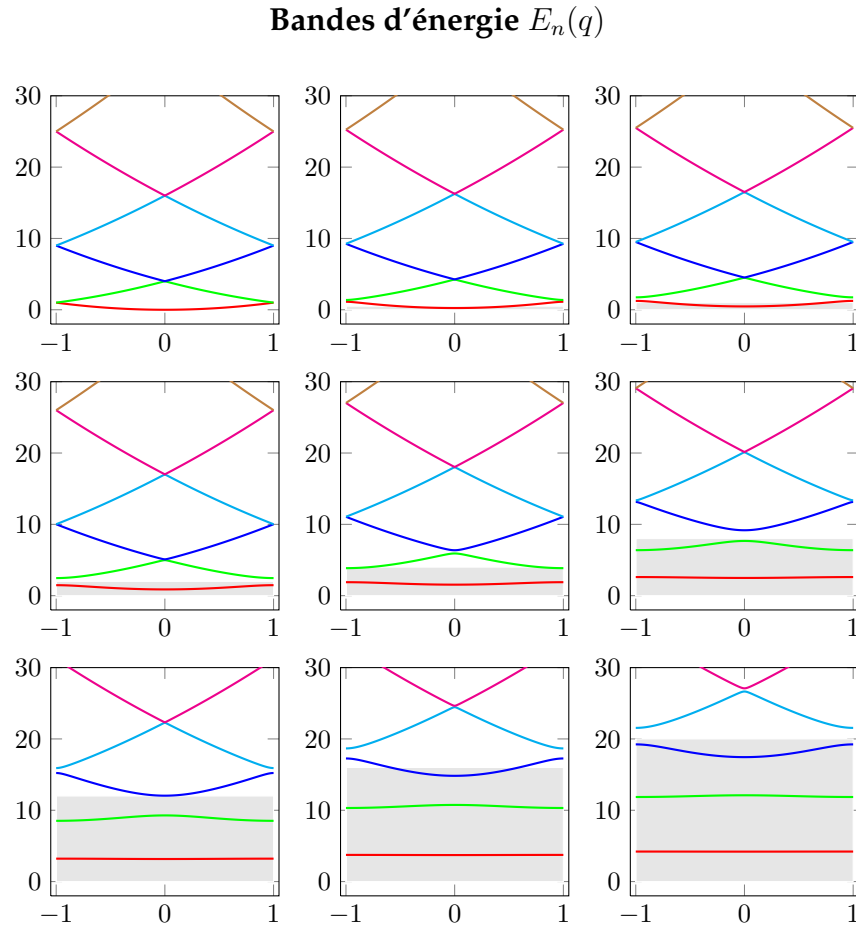


FIGURE 1. Premières bandes d'énergie $E_n(q)$ (unité $E_r = \hbar^2 k^2 / 2m$), en fonction de q/k pour un potentiel $V(x) = V_0 \sin^2(kx)$. De gauche à droite, et de haut en bas : $V_0/E_r = (0, 0.5, 1); (2, 4, 8); (12, 16, 20)$. Le rectangle grisé représente la zone d'énergie inférieure à la hauteur du potentiel V_0 .

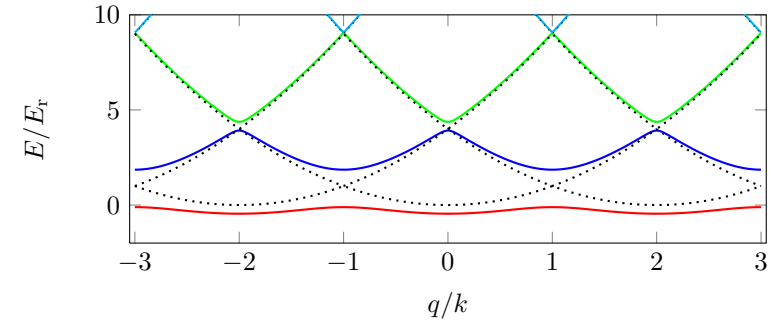


FIGURE 2. Représentation en bande étendue. Chaque état $\psi_{n,q}$ figure plusieurs fois dans ce schéma, qui présente l'intérêt de montrer de manière intuitive les transferts d'impulsion possibles (voir par exemple la figure 7). Le potentiel vaut $V(x) = V_0 \sin^2(kx)$ avec $V_0 = 4 E_r$. Les courbes pointillées représentent le résultat obtenu pour $V_0 = 0$ (particule libre).

un potentiel symétrique par réflexion et pour des bandes d'énergie I_n disjointes, Kohn (1959) a montré qu'il y a un choix unique pour cette phase qui garantit que la fonction de Wannier (i) est réelle, (ii) est paire ou impaire vis-à-vis de $x = 0$ ou $x = a/2$, (iii) décroît exponentiellement vite à l'infini.

La fonction de Wannier associée au site $j = 0$ et à la bande $n = 0$, $w_{0,0}(x)$, est tracée sur la figure 3 pour plusieurs valeurs de l'amplitude V_0 du potentiel sinusoidal $V(x) = V_0 \sin^2(kx)$. Dans la suite, nous utiliserons une expression approchée pour cette fonction de Wannier de la bande fondamentale $w_{0,0}(x)$. Cette expression est obtenue en remplaçant le potentiel $V(x)$ au voisinage de ses minima par une fonction quadratique, i.e. $V(x) \approx V_0 k^2 x^2$ autour de $x = 0$. Elle consiste à prendre pour $w_{0,0}(x)$ la fonction d'onde de l'état fondamental dans ce potentiel harmonique :

$$w_{0,0}(x) \approx \frac{1}{(\pi a_{\text{oh}}^2)^{1/4}} e^{-x^2 / 2a_{\text{oh}}^2} \quad \text{avec} \quad a_{\text{oh}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad \hbar\omega = 2\sqrt{V_0 E_r}. \quad (7)$$

Fonctions de Wannier pour la bande fondamentale

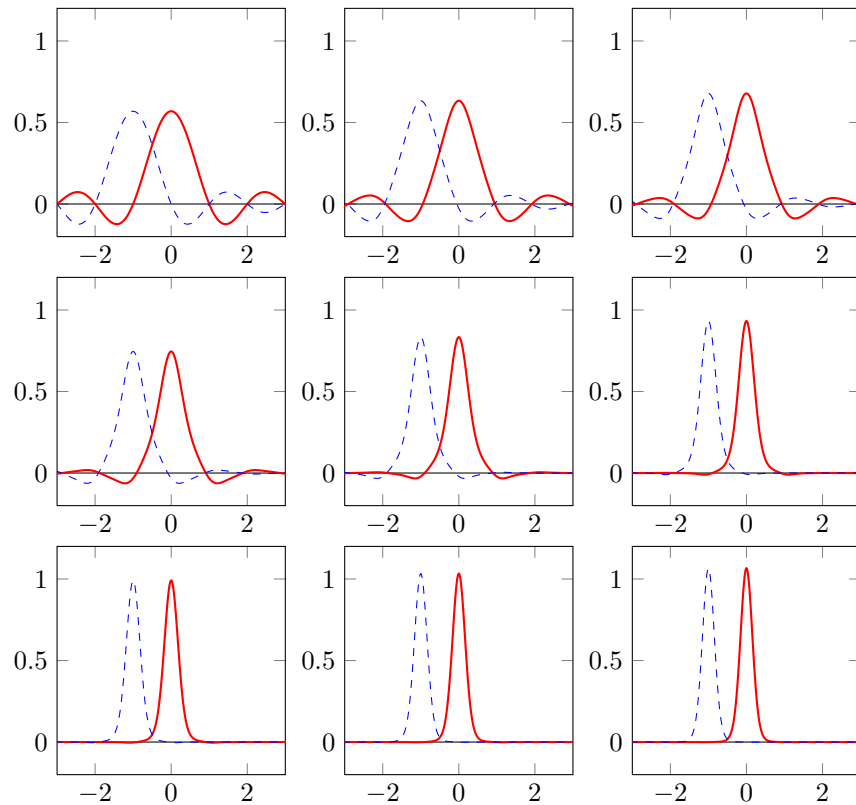


FIGURE 3. Fonctions de Wannier $w_{0,0}(x)$ pour la bande $n = 0$ et le site $j = 0$ en fonction de $x/a = kx/\pi$ pour le potentiel périodique $V(x) = V_0 \sin^2(kx)$. De gauche à droite, et de haut en bas : $V_0/E_F = (0, 0.5, 1); (2, 4, 8); (12, 16, 20)$. Les pointillés indiquent la fonction de Wannier pour la même bande $n = 0$, mais décalée d'un site ($w_{0,-1}(x)$).

1-3 L'hamiltonien de Hubbard

En utilisant la base des fonctions de Wannier, on peut réécrire l'hamiltonien de départ comme une somme d'opérateurs de saut faisant passer la particule de la fonction de Wannier $w_{n,j}$ à une autre fonction de Wannier $w_{n,j'}$, correspondant à la même bande n mais à un autre site j' . Le problème est alors entièrement caractérisé par la donnée des éléments de matrice de saut $J_n(j - j')$.

Dans le cas d'un potentiel de forte modulation, on peut souvent se limiter à des états qui appartiennent à la bande fondamentale. Ceci correspond à une diminution considérable de l'espace de Hilbert et permet de simplifier fortement les notations et les calculs. Plaçons-nous donc dans cette approximation et supposons de plus que l'élément de matrice $J_{n=0}(j = 1)$ (entre proches voisins) est le seul à prendre des valeurs significatives.

En posant

$$J = -J_{n=0}(j = 1), \quad (8)$$

dont on peut montrer qu'il est toujours positif ou nul pour un réseau statique, l'hamiltonien est alors très simple

$$\hat{H} = -J (\hat{T} + \hat{T}^\dagger) \quad (9)$$

où \hat{T} est l'opérateur qui translate la particule d'un site vers la droite :

$$\hat{T} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |w_{j+1}\rangle \langle w_j|. \quad (10)$$

Nous avons noté les fonctions de Wannier $w_j \equiv w_{0,j}$ puisque nous limitons notre espace de travail à la bande $n = 0$. Nous utiliserons également une écriture du même hamiltonien en seconde quantification :

$$\hat{H} = -J \sum_j \hat{b}_{j+1}^\dagger \hat{b}_j + \text{h.c.}, \quad (11)$$

où \hat{b}_j^\dagger crée une particule sur le site j avec la fonction d'onde $w_j(x)$.

Dans ce modèle de Hubbard 1D, représenté graphiquement sur la figure 4, les états de Bloch et leur énergies sont

$$|\psi_q\rangle = \sum_j e^{ijaq} |w_j\rangle, \quad E(q) = -2J \cos(aq). \quad (12)$$

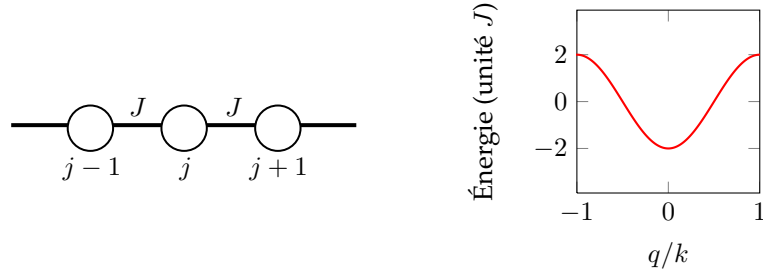


FIGURE 4. Représentation graphique du modèle de Hubbard 1D décrit par l'hamiltonien (11) à gauche, et spectre correspondant à droite (cf. eq. (12)).

La bande fondamentale a pour largeur $2zJ$, où z désigne le nombre de proches voisins d'un site donné ($z = 2$ à une dimension). Ce résultat se transpose sans difficulté à 2D et à 3D, avec $z = 4$ pour un réseau carré et $z = 6$ pour un réseau cubique.

Pour un réseau sinusoïdal, on montre qu'une valeur approchée du coefficient tunnel J dans la limite $V_0 \gg E_r$ est

$$\frac{J}{E_r} \approx \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{V_0}{E_r} \right)^{3/4} \exp \left[-2 \left(\frac{V_0}{E_r} \right)^{1/2} \right]. \quad (13)$$

1-4 Interactions dans le réseau

Comme dans le chapitre 3, nous nous limiterons ici à des interactions de contact entre atomes. Dans le cas 1D, l'hamiltonien d'interaction s'écrit

$$H_{\text{int}} = \frac{g}{2} \sum_{n, n' \neq n} \delta(x_n - x_{n'}), \quad (14)$$

où la somme porte sur les $N(N-1)/2$ paires formées à partir des N atomes présents, et où x_n désigne la position de l'atome n . La constante g décrit la force des interactions.

Dès que la profondeur du réseau devient suffisante (typiquement $10E_r$), cette interaction de contact ne joue un rôle significatif que si les deux atomes de la paire considérée occupent la même fonction de Wannier, le

recouvrement spatial entre deux fonctions de Wannier associées à deux sites différents devenant négligeable. L'écriture de \hat{H}_{int} est alors considérablement simplifiée, surtout si on adopte une écriture de seconde quantification. Il ne reste plus que les termes décrivant l'interaction sur site et le résultat s'écrit dans le cadre de l'approximation de Hubbard :

$$\hat{H}_{\text{int}} \approx \frac{U}{2} \sum_j \hat{n}_j (\hat{n}_j - 1), \quad (15)$$

où on a introduit l'opérateur nombre de particules sur le site j , $\hat{n}_j = \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j$. L'énergie U est l'énergie à fournir pour mettre deux atomes sur le même site ; elle s'écrit explicitement à partir de la fonction de Wannier associée à la bande fondamentale $n = 0$ et à un site donné, $j = 0$ par exemple

$$U = g \int w_{0,0}^4(x) dx \approx \frac{g}{\sqrt{2\pi} a_{\text{oh}}}, \quad (16)$$

où nous avons utilisé l'approximation gaussienne (7) pour la fonction de Wannier de la bande fondamentale.

Les calculs ci-dessus ont été menés pour un réseau 1D. Ils se transposent directement au cas 3D pour un réseau cubique et on obtient

$$U^{(3D)} = \frac{g^{(3D)}}{(\sqrt{2\pi} a_{\text{oh}})^3}. \quad (17)$$

Si on exprime le couplage $g^{(3D)}$ en terme de la longueur de diffusion a_d

$$g^{(3D)} = \frac{4\pi\hbar^2 a_d}{m}, \quad (18)$$

l'énergie sur site $U^{(3D)}$ se met alors sous la forme

$$\frac{U^{(3D)}}{E_r} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} k a_d \left(\frac{V_0}{E_r} \right)^{3/4} \quad (19)$$

que nous allons maintenant commenter.

Ordres de grandeurs. Discutons les valeurs des deux coefficients importants pour décrire la dynamique du gaz dans le réseau dans le régime de

Hubbard, J et U . Nous ferons cette discussion dans le cas 3D puisque nous avons l'expression explicite (19) à notre disposition. En dehors d'une résonance de Feshbach, la longueur de diffusion a une échelle nanométrique (3 nm pour ^{23}Na , 5 nm pour ^{87}Rb). Puisque la lumière utilisée pour le réseau a une longueur d'onde λ micrométrique, le produit $ka_d = 2\pi a_d/\lambda$ est petit, entre 10^{-2} et 10^{-1} . La fréquence E_r/h associée à l'énergie de recul varie de quelques kHz à quelques dizaines de kHz, selon qu'on considère des atomes de masse élevée (Rb par exemple) ou des atomes plus légers (Li par exemple).

Le produit V_0/E_r ne dépasse en général pas quelques dizaines : au delà de cette valeur, l'effet tunnel entre sites devient complètement négligeable et le réseau n'est plus qu'une collection de pièges indépendants. Le coefficient $U^{(3D)}$ évalué à partir de (19) est donc généralement de l'ordre de l'énergie de recul, ou plus petit par un ou deux ordres de grandeur.¹

Le coefficient tunnel J quant à lui est de l'ordre de E_r pour des réseaux peu profonds ($V_0 \sim E_r$) et il décroît exponentiellement vite [cf. (13)] quand on augmente le rapport V_0/E_r . On peut donc passer continuellement du régime dominé par l'énergie cinétique $J \gg U$ au régime dominé par les interactions $J \ll U$: c'est ce qui fait tout l'intérêt des réseaux optiques pour l'étude des phénomènes à N corps (Jaksch, Bruder, et al. 1998).

2 Superfluidité et vitesse critique dans un réseau

Dès que les études expérimentales sur la superfluidité ont pu être menées avec des condensats atomiques, la question s'est posée de savoir si cette superfluidité était maintenue en présence d'un potentiel. Avant de décrire de manière précise la disparition complète de la superfluidité pour un rapport U/J assez grand, nous allons dans ce paragraphe nous intéresser à ce qui peut arriver à un condensat en mouvement dans un réseau. Nous allons montrer qu'une instabilité dynamique peut se produire dès que la vitesse du condensat dépasse une vitesse critique, directement liée à la vitesse de recul $v_r = \hbar k/m$.

1. Il est important que $Un_j(n_j - 1)/2$ reste petit devant $\hbar\omega = 2\sqrt{V_0 E_r}$ pour que la restriction à la bande fondamentale soit légitime.

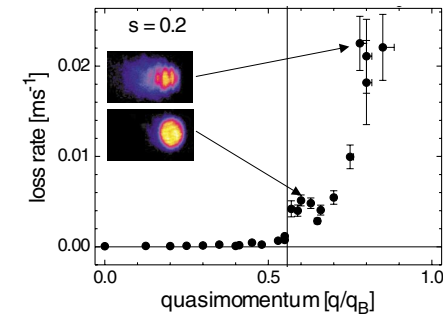


FIGURE 5. Taux de perte pour un condensat en mouvement dans un réseau optique 1D de faible profondeur $V_0 = 0.2 E_r$. Pour un quasi-momentum supérieur à $0.5 q_B$ (avec $q_B = k$), une instabilité dynamique apparaît et le condensat disparaît rapidement. Cette expérience a été menée avec un condensat de rubidium au repos dans un piège magnétique. On superpose à ce condensat un réseau optique à $\lambda = 820$ nm, et ce réseau est mis en mouvement en décalant les fréquences d'une onde progressive par rapport à l'autre. Cette situation est équivalente à celle considérée dans le texte de ce chapitre si l'on se place dans le référentiel du réseau. Figure extraite de Fallani, De Sarlo, et al. (2004).

2-1 Études expérimentales

La première mise en évidence d'une instabilité pour un condensat en mouvement dans un réseau a été obtenue par Fallani, De Sarlo, et al. (2004) (voir figure 5). Cette instabilité a été obtenue avec un réseau de faible profondeur, $V_0 = 0.2 E_r$. Rien de particulier ne se passe pour une vitesse relative entre le réseau et le nuage inférieure à la vitesse critique $\approx 0.5 v_r$, où v_r désigne la vitesse de recul $\hbar k/m$. En revanche, au-dessus de cette vitesse critique, le gaz est fortement chauffé, signature d'une instabilité dynamique sur laquelle nous allons revenir.

Cette expérience a ensuite été reprise et généralisée par Mun, Medley, et al. (2007), qui ont étudié pour le cas d'un réseau plus profond, comment la vitesse critique diminue quand on varie la valeur relative de la force des interactions par rapport à l'effet tunnel entre puits adjacents. Le résultat essentiel est représenté sur la figure 6. Pour des interactions faibles, on

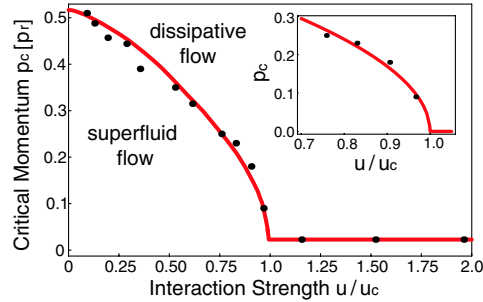


FIGURE 6. Variation de la vitesse critique pour un condensat d'atomes de rubidium placé dans un réseau en mouvement ($\lambda = 1064 \text{ nm}$), le réseau étant 1D ou 3D selon les points. Ce résultat montre la continuité entre le phénomène d'instabilité dynamique mesuré pour de faibles interactions et la transition superfluide-isolant (vitesse critique nulle) pour des interactions suffisamment fortes. Le paramètre u est défini comme $u = U/J$ et $u_c = 34.2 \pm 2.0$ (obtenu pour $V_0 = 13.5 E_r$). Le régime étudié correspond à un remplissage $\bar{n} = 1$ atome par site. Figure extraite de Mun, Medley, et al. (2007).

retrouve le résultat de Fallani, De Sarlo, et al. (2004): la vitesse critique est environ $0.5 v_r$. Quand la force des interactions augmente, la vitesse critique diminue. Elle s'annule quand le potentiel d'interaction U atteint une valeur critique U_c , ce qui signifie que le gaz n'est alors plus superfluide.

Dans la suite de ce paragraphe, nous nous proposons d'analyser la première instabilité, se produisant pour des interactions relativement faibles, à la vitesse $0.5 v_r$. Nous passerons ensuite à la perte complète de superfluidité observée pour des interactions plus fortes, c'est-à-dire la transition superfluide - isolant de Mott. Pour ne pas allonger trop la discussion, nous ne chercherons pas à décrire la totalité de la courbe d'instabilité de la courbe de la figure 6, mais simplement ses points extrêmes. Pour une analyse détaillée de l'ensemble de cette transition, nous renvoyons le lecteur intéressé vers l'article de Altman, Polkovnikov, et al. (2005).

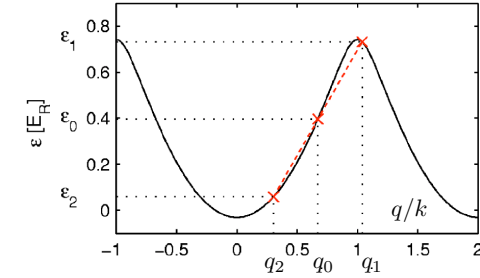


FIGURE 7. Bande fondamentale pour le potentiel $V(x) = V_0 \sin^2(k_L x)$ avec $V_0 = E_r$. On a adopté ici le schéma de « zone répétée ». Un condensat atomique de quasi-moment q_0 peut donner naissance de manière résonnante à deux nuages de quasi-moments q_1 et q_2 [figure adaptée de Hilligsøe & Mølmer (2005)].

2-2 Vitesse critique dans un réseau (limite $U \rightarrow 0$)

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de rendre compte de manière qualitative de l'instabilité dynamique mesurée par Fallani, De Sarlo, et al. (2004) dans un réseau de faible profondeur, quand la vitesse des atomes est $\approx 0.5 v_r$. Cette instabilité a été expliquée initialement par Wu & Niu (2001) [voir aussi Wu & Niu (2003)]; cette interprétation a ensuite été reprise et approfondie par Hilligsøe & Mølmer (2005), article dont nous avons extrait la figure 7.

Cette interprétation est fondée sur la relation de dispersion d'une particule dans le réseau. Alors que cette relation de dispersion dans l'espace libre est convexe ($E = p^2/2m$), elle devient plus « riche » : dans un réseau. En particulier, la concavité de la relation s'inverse aux bords de bande (voir par exemple la figure 1). Il est alors possible de trouver des quasi-moments q_0 qui autorisent la transition :

$$q_0 + q_0 \longrightarrow q_1 + q_2, \quad (20)$$

les quasi-moments q_0 étant toujours tels que $|q_0| \geq k/2$ [cf. la figure 5 de Wu & Niu (2003)]. Ce processus correspond à une collision entre deux atomes du condensat se déplaçant initialement avec le quasi-moment q_0 et finissant avec les quasi-moments q_1 et q_2 , tels que l'impulsion et l'énergie sont

conservées :

$$2E(q_0) = E(q_1) + E(q_2). \quad (21)$$

Dans le plan (q, E) , cette double conservation impulsion-énergie se produit si les trois points $(q_0, E_0), (q_1, E_1), (q_2, E_2)$ sont alignés, avec (q_0, E_0) au milieu des deux autres. Notons que nous utilisons ici le schéma de « zone répétée » pour représenter la bande d'énergie fondamentale. En fait, le point q_1 est en dehors de la zone de Brillouin ; il correspond donc à des atomes dont le quasi-moment (au sens habituel) vaut $q_1 - 2k$, où k est le nombre d'onde du laser servant à créer le réseau.²

Les opticiens reconnaîtront dans ce processus l'équivalent du mélange à quatre ondes en présence d'accord de phase. Il a d'ailleurs été utilisé en tant que tel dans plusieurs expériences, comme par exemple Campbell, Mun, et al. (2006) et Bonneau, Ruaudel, et al. (2013). Plus généralement, il s'agit d'un processus paramétrique qui va vider rapidement le mode q_0 du condensat pour peupler les modes q_1 et q_2 . En principe, on pourrait s'attendre à observer une oscillation cohérente de type Rabi $(q_0, q_0) \leftrightarrow (q_1, q_2)$ comme prédit par Hilligsøe & Mølmer (2005). En pratique, cette oscillation n'a pas été vue dans les expériences de Fallani, De Sarlo, et al. (2004), probablement du fait de déphasages incontrôlés des modes q_1, q_2 .

2-3 Vitesse critique dans un réseau (liaisons fortes)

Dans ce paragraphe, nous allons approfondir l'étude de l'instabilité dynamique apparaissant pour un condensat en mouvement dans un réseau en prenant en compte de manière quantitative les interactions. Pour pouvoir mener les calculs de manière analytique, nous allons limiter notre analyse au cas de l'hamiltonien de Hubbard, valable pour un réseau suffisamment profond. Cette approche a été développée initialement par Wu & Niu (2003) et Smerzi, Trombettoni, et al. (2002). L'article de Wu & Niu (2003) présente par ailleurs des résultats numériques obtenus en dehors de ce régime des liaisons fortes.

2. Dans le cas d'un réseau faible, la relation de dispersion pour la bande fondamentale en schéma de *bande étendue* est très proche d'une série de paraboles $E_0(q) = \hbar^2(q - 2jk)^2/2m$ avec j entier (voir les courbes pointillées de la figure 2). On peut alors vérifier analytiquement que ce type de processus est possible pour pratiquement tout quasi-moment q_0 de la première zone de Brillouin tels que $|q_0| > k/2$.

Pour aller au delà de l'image de la figure 7, dans laquelle on utilise le spectre à une particule, nous allons procéder comme pour le gaz de Bose homogène. Nous allons partir de la solution stationnaire de l'équation de Gross-Pitaevski et étudier la stabilité de cette solution. Dans le cas du gaz de Bose homogène, nous avons trouvé que ces solutions présentaient une instabilité thermodynamique (critère de Landau) quand la vitesse de la solution stationnaire de départ était supérieure à la vitesse du son : des énergies négatives apparaissaient dans le spectre des excitations. Ici, nous allons rencontrer une instabilité plus forte, de nature dynamique, se traduisant par des énergies avec une partie imaginaire non nulle. Ceci entraîne la croissance exponentielle de toute déviation, même très faible, par rapport à l'état stationnaire exact.

Hamiltonien de Bose-Hubbard et fonctions d'essai. Pour simplifier notre analyse, nous allons faire un traitement 1D en utilisant l'hamiltonien de Hubbard à une particule (11), auquel nous ajoutons le terme décrivant l'interaction sur site (15) :

$$\hat{H} = -J \sum_{j=1}^{N_s} (\hat{b}_{j+1}^\dagger \hat{b}_j + \text{h.c.}) + \frac{U}{2} \sum_{j=1}^{N_s} \hat{n}_j (\hat{n}_j - 1). \quad (22)$$

La recherche du spectre et des états propres (approchés) de cet hamiltonien va nous occuper dans l'essentiel de la suite de ce chapitre. Pour cette recherche, nous allons d'abord faire des hypothèses fortes concernant l'état du gaz $|\Psi\rangle$ dans le réseau, qui sont justifiées par la relative simplicité des calculs auxquels elles conduisent. Dans la suite, nous affaiblirons progressivement ces hypothèses, mais posons pour l'instant que :

— L'état $|\Psi\rangle$ est un état factorisé entre les N_s sites :

$$|\Psi\rangle = \prod_{j=1}^{N_s} |\psi_j\rangle. \quad (23)$$

Ceci exclut en particulier les états présentant des corrélations entre sites, comme par exemple pour une situation à $N_s = 2$ sites et $N_a = 2$ atomes : $(|2, 0\rangle + |0, 2\rangle)/\sqrt{2}$.

— Chaque $|\psi_j\rangle$ est lui-même un état cohérent³, c'est-à-dire un état propre de l'opérateur \hat{a}_j avec la valeur propre complexe ψ_j . Comme on étudie un problème de stabilité temporelle, chaque coefficient ψ_j est lui-même dépendant du temps.

On montre dans l'appendice de ce chapitre que ces deux hypothèses reviennent à poser que l'état à N_a atomes est une fonction de Hartree :

$$\Phi_{N_a}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N_a}) = \phi(\mathbf{r}_1) \dots \phi(\mathbf{r}_{N_a}) \quad (25)$$

avec la fonction d'onde à un corps normalisée qui se développe sur les fonctions de Wannier $w_j(x)$ associées aux N_s sites

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_s} \phi_j w_j(\mathbf{r}), \quad \sum_{j=1}^{N_s} |\phi_j|^2 = 1, \quad (26)$$

et le lien entre l'amplitude ψ_j de l'état cohérent et cette fonction d'onde :

$$\psi_j = \sqrt{N_a} \phi_j. \quad (27)$$

Dans ces conditions, l'équation de Gross-Pitaevskii sur le réseau s'écrit

$$i\hbar \dot{\psi}_j = -J(\psi_{j+1} + \psi_{j-1}) + U |\psi_j|^2 \psi_j. \quad (28)$$

Dans le cas sans interaction, nous avons déjà donné les états propres de cet hamiltonien : ce sont les états de Bloch (12) correspond à :

$$\psi_j = \psi_0 e^{ijaq} \quad \text{avec} \quad E(q) = -2J \cos(aq). \quad (29)$$

L'évolution temporelle de $\psi_j(t)$ est alors simplement

$$\psi_j(t) = \psi_0 e^{i[jaq - \omega(q)t]} \quad \text{avec} \quad \hbar\omega(q) \equiv E(q) = -2J \cos(aq). \quad (30)$$

En présence des interactions, il est immédiat de vérifier que ces ondes de Bloch restent des solutions stationnaires, le seul changement étant le déplacement de leur énergie par une quantité proportionnelle à l'amplitude ψ_0 de l'onde (choisie réelle par convention) :

$$\psi_j(t) = \psi_0 e^{i[jaq - \omega(q)t]} \quad \text{avec} \quad \hbar\omega(q) = -2J \cos(aq) + U\psi_0^2. \quad (31)$$

3. Pour rappel, un état cohérent $|\alpha\rangle$ est un état propre de \hat{b} avec la valeur propre α :

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (32)$$

où les $|n\rangle$ sont les états à nombre d'occupation donné, $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$, avec $\hat{n} = \hat{b}^\dagger \hat{b}$.

Perturbation des ondes de Bloch. Nous allons maintenant étudier la stabilité de ces ondes de Bloch, tout comme nous l'avons fait au chapitre 3 pour des ondes planes pour arriver au critère de Landau. On considère donc une onde perturbée correspondant à l'apparition de deux quasi-moments additionnels $q \pm q'$:

$$\tilde{\psi}_j(t) = \left[\psi_0 + u(t) e^{ijaq'} + v^*(t) e^{-ijaq'} \right] e^{i[jaq - \omega(q)t]} \quad \text{avec} \quad |u|, |v| \ll \psi_0. \quad (32)$$

Du fait de la non-linéarité cubique de l'équation d'évolution (28), rappelons qu'il faut ajouter simultanément les deux ondes planes $e^{\pm ijaq'}$ à ψ_0 pour que le calcul soit cohérent.

Injectons (32) dans (28) et limitons-nous à l'ordre 1 en u et v . Nous séparons les contributions des trois ondes planes $e^{ijaq}, e^{ija(q \pm q')}$. La première redonne simplement la relation (31). Les deux autres conduisent aux deux équations couplées :

$$i\hbar \dot{u} = \{-2J \cos[a(q + q')] + 2U\psi_0^2 - \hbar\omega(q)\} u + U\psi_0^2 v \quad (33)$$

$$i\hbar \dot{v}^* = \{-2J \cos[a(q - q')] + 2U\psi_0^2 - \hbar\omega(q)\} v^* + U\psi_0^2 u^*. \quad (34)$$

Nous prenons le complexe conjugué de la seconde équation et mettons le résultat sous la forme matricielle

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \hat{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (35)$$

où $\hat{\mathcal{L}}$ est la matrice 2×2 :

$$\hat{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} 4J \sin[a(q + q'/2)] \sin[aa'/2] + U\psi_0^2 & U\psi_0^2 \\ -U\psi_0^2 & 4J \sin[a(q - q'/2)] \sin[aa'/2] - U\psi_0^2 \end{pmatrix} \quad (36)$$

Il reste à étudier les valeurs propres de cette matrice pour en déduire la stabilité de l'onde de Bloch de départ. Soulignons que (comme dans le cas uniforme vu au chapitre 3) cette matrice réelle n'est pas symétrique, et qu'on ne peut donc rien dire *a priori* sur le caractère réel ou complexe de ses valeurs propres.

Un calcul un peu fastidieux conduit à ces valeurs propres :

$$\lambda_{\pm}(q') = 2J \sin(aq) \sin(aa') \pm 2 \left[4J^2 \sin^4(aa'/2) \cos^2(aq) + 2JU\psi_0^2 \sin^2(aa'/2) \cos(aq) \right]^{1/2} \quad (37)$$

Pour interpréter ce résultat, commençons par deux cas limites simples :

- Pour $U = 0$, la matrice (36) est diagonale et on retrouve simplement que les valeurs propres associées aux perturbations en $e^{ija(q \pm q')}$ ont pour énergie $\hbar\omega(q \pm q')$.
- Pour $U \neq 0$ et $q = 0$, on retrouve pour des perturbations de faible vecteur d'onde $aq' \ll 1$ le spectre de Bogoliubov, avec la vitesse du son c_s définie par

$$m_{\text{eff}} c_s^2 = U \psi_0^2 \quad \text{avec} \quad m_{\text{eff}} = (2Ja^2)^{-1}. \quad (38)$$

Ce résultat est équivalent à celui obtenu pour des particules libres, en remplaçant la masse nue des particules par la masse effective obtenue à partir de la courbure de la bande fondamentale $E_0(q)$ au voisinage de $q = 0$.

Passons maintenant au cas général, $U \neq 0$ et $q \neq 0$; on voit apparaître un phénomène qui ne se produisait pas dans le cas du gaz uniforme : ces valeurs propres peuvent avoir une partie imaginaire non nulle. Il faut pour cela que l'argument de la racine carrée (deuxième ligne de 38) soit négatif, ce qui peut se produire si

$$\cos(aq) < 0 \quad \Leftrightarrow |q| > \frac{\pi}{2a} \quad \text{dans la première zone de Brillouin.} \quad (39)$$

Quand c'est le cas, quelle que soit la valeur de $U \psi_0^2$, il y a toujours une infinité de valeurs de q' proches de 0 qui conduisent à des valeurs $\lambda_{\pm}(q')$ avec une partie imaginaire non nulle. Comme λ_{\pm} sont alors complexes conjuguées l'une de l'autre⁴, une de ces valeurs propres va conduire à une croissance exponentielle de la perturbation $[u(t), v(t)]$: le condensat en mouvement avec le quasi-moment q est instable. Nous retrouvons ainsi le résultat pressenti par la construction graphique de la figure 7, mais dans le régime des liaisons fortes alors que la figure 7 portait sur un réseau de faible profondeur.

4. On pourra consulter le cours de Castin (2001) pour une étude détaillée des valeurs propres de l'opérateur de Bogoliubov et de leurs vecteurs propres associés.

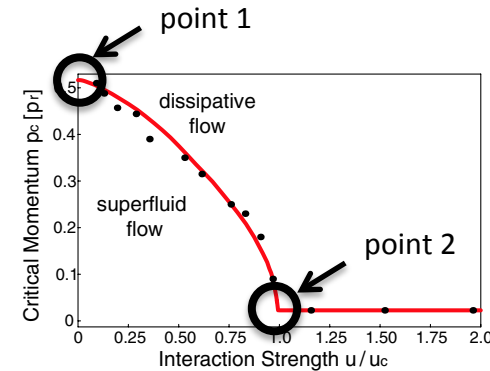


FIGURE 8. Figure identique à la figure 6, sur laquelle nous avons entouré les deux points développés dans ce chapitre. Figure extraite de Mun, Medley, et al. (2007).

3 Transition superfluide-isolant (cas homogène)

Revenons au résultat expérimental obtenu par Mun, Medley, et al. (2007) que nous avons reproduit une nouvelle fois en figure 8. Nous nous sommes concentrés jusqu'ici sur le point 1, qui correspond à un état superfluide pour lequel il existe (comme il se doit) une vitesse critique. Cette vitesse critique est liée à la présence du réseau : nous avons vu que ce réseau, en présence d'interactions arbitrairement faibles, suffit à créer une instabilité dynamique du gaz en mouvement. Nous avons pu rendre compte de manière quantitative et analytique de cette instabilité dans l'approximation des liaisons fortes, en prenant des fonctions d'essai très simples, correspondant à un état cohérent en chaque site du réseau.

Nous allons maintenant passer au point 2. En ce point, la vitesse critique devient nulle, ce qui signifie que la superfluidité est complètement perdue. Aucun flot non dissipatif de particules ne peut avoir lieu, quelle que soit sa vitesse. Pour analyser ce point 2, obtenu pour des interactions suffisamment fortes, nous allons continuer à travailler dans l'approximation des liaisons fortes. Cette approximation est d'autant mieux justifiée que pour obtenir les grandes valeurs de U nécessaires à la disparition de la superfluidité, il faut aller vers des réseaux profonds [cf. (19)]. Toutefois,

nous allons devoir enrichir notre classe de fonctions d'essai par rapport aux produits d'états cohérents envisagés en (23). En effet, en présence d'interactions répulsives, le résultat obtenu en (38) ne donne pas de signe d'instabilité (dynamique ou thermodynamique) pour un condensat avec un quasi-moment q proche de zéro.

Nous allons dans ce paragraphe nous limiter au cas homogène, qui est le plus simple à traiter théoriquement. Dans le chapitre suivant, nous passerons au cas non homogène que l'on rencontre par exemple pour un gaz confiné dans un piège harmonique superposé au réseau.

3-1 Classe de fonction d'essai : *ansatz* de Gutzwiller

Pour décrire la transition entre l'état superfluide et l'état isolant observé sur la figure 8, nous allons conserver des fonctions d'essai du type Gutzwiller (Rokhsar & Kotliar 1991; Krauth, Caffarel, et al. 1992)

$$|\Psi_G\rangle = \prod_j |\Psi_j\rangle, \quad (40)$$

c'est-à-dire un état factorisé par rapport aux différents sites j du réseau. Toutefois, contrairement à ce que nous avons fait au paragraphe précédent, nous ne nous limiterons pas au cas où les $|\Psi_j\rangle$ sont des états cohérents. Notre classe de fonctions d'essai est donc beaucoup plus grande que précédemment, ce qui va nous permettre de décrire (de manière approchée bien sûr) une plus grande variété de phénomènes. Notons également que pour notre recherche de l'état fondamental, nous prendrons le même état Ψ_j en chaque site j du réseau puisque le problème est invariant par translation. Il faut bien sûr relâcher cette hypothèse quand on s'intéresse à la propagation de perturbations dans ce réseau [cf. chapitre 5].

Avant de nous lancer dans l'exploitation de cette classe de fonction d'essai pour la recherche de l'état fondamental, il est utile de la justifier sur les deux cas limites qui vont nous intéresser, $U \ll J$ et $U \gg J$, c'est-à-dire le cas des interactions négligeables et le cas des interactions dominantes. Nous allons considérer pour cela un réseau à N sites avec un taux de remplissage de 1, c'est-à-dire que nous y disposons N atomes.

Cas sans interaction $U = 0$. Si les particules n'interagissent pas entre elles, l'état fondamental du système est un condensat de Bose-Einstein accumulé dans l'état à une particule de plus basse énergie, c'est-à-dire l'état de quasi-moment $q = 0$, d'amplitude égale sur tous les sites j :

$$\begin{aligned} U = 0 \quad \rightarrow \quad |\Psi_{\text{fond}}\rangle &\propto \left(\sum_j \hat{b}_j^\dagger \right)^N |0\rangle \\ &\propto \sum_{\{n_j\}} \frac{(\hat{b}_1^\dagger)^{n_1} \dots (\hat{b}_N^\dagger)^{n_N}}{n_1! \dots n_N!} |0\rangle, \end{aligned} \quad (41)$$

où la somme porte sur tous les N -uplets $\{n_j\}$ tels que

$$\sum_j n_j = N. \quad (42)$$

Pour $N \gg 1$, cet état fondamental – exact dans le cas $U = 0$ – est très proche de l'état produit (40) correspondant à un état cohérent de moyenne 1, soit une particule par site (cf. appendice) :

$$\begin{aligned} |\Psi_G\rangle &\propto \prod_j \left(\sum_{n_j} \frac{(\hat{b}_j^\dagger)^{n_j}}{n_j!} \right) |0\rangle \\ &\propto \sum_{\{n_j\}} \frac{(\hat{b}_1^\dagger)^{n_1} \dots (\hat{b}_N^\dagger)^{n_N}}{n_1! \dots n_N!} |0\rangle. \end{aligned} \quad (43)$$

Cas en interaction forte $U \rightarrow +\infty$. Dans ce cas, le prix énergétique à payer pour mettre deux particules sur le même site devient prohibitif et l'état fondamental est obtenu en mettant exactement une particule par site, ce qui est possible puisque nous nous intéressons ici au cas où le nombre de sites et le nombre de particules coïncident. On a donc

$$U \rightarrow +\infty \quad \rightarrow \quad |\Psi_{\text{fond}}\rangle = \prod_j \hat{b}_j^\dagger |0\rangle \quad (44)$$

ce qui est bien de la forme produit annoncée.

Notre *ansatz* sous forme d'état produit (40) capture donc bien la physique dans les deux cas limite et on peut espérer qu'il décrive, au moins

de manière semi-quantitative, la transition entre les deux états. Mais il faut dès le départ être également conscient de ses limites : notre classe de fonction d'essai ne pourra décrire aucune corrélation entre sites. Si, pour une raison ou une autre, un état (1D) du type

$$|\dots, 2, 0, 2, 0, \dots\rangle, \quad (45)$$

c'est-à-dire un état avec des corrélations entre sites adjacents, était amené à jouer un rôle significatif dans le problème, ce rôle ne sera pas capturé par notre *ansatz*.

3-2 L'état fondamental pour l'*ansatz* de Gutzwiller

Nous partons donc de l'hamiltonien de Hubbard

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j + \frac{U}{2} \sum_j \hat{n}_j (\hat{n}_j - 1) \quad (46)$$

où la somme porte sur tous les couples de proches voisins. Pour un réseau linéaire, carré, cubique, un site j donné est couplé à $z = 2, 4, 6$ proches voisins. Prenons une fonction d'essai du type (40), où chaque Ψ_j possède la même structure :

$$|\Psi_j\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} c(n) |n\rangle_j \quad \sum_n |c(n)|^2 = 1. \quad (47)$$

Le principe de la méthode variationnelle consiste à rechercher les coefficients $c(n)$, représentés symboliquement par le vecteur normé \mathbf{c} , qui minimisent l'énergie moyenne par site

$$\epsilon(\mathbf{c}) = \frac{1}{N_{\text{sites}}} \langle \Psi_G | \hat{H} | \Psi_G \rangle. \quad (48)$$

Le calcul explicite de $\epsilon(\mathbf{c})$ ne pose pas de difficulté. On a

$$\langle \hat{b}_j \rangle = \sum_n \sqrt{n+1} c^*(n) c(n+1) \quad (49)$$

et on calcule les valeurs moyennes des deux termes de l'hamiltonien :

$$\frac{1}{N_{\text{sites}}} \langle -J \sum_{\langle ij \rangle} b_i^\dagger b_j \rangle = -Jz \left| \sum_n \sqrt{n+1} c^*(n) c(n+1) \right|^2 \quad (50)$$

$$\frac{1}{N_{\text{sites}}} \langle \frac{U}{2} \sum_i \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1) \rangle = \frac{U}{2} \sum_n n(n-1) |c(n)|^2. \quad (51)$$

Pour obtenir l'état fondamental (approché), il faut déterminer les amplitudes $c(n)$ qui minimisent la somme de ces deux termes avec la contrainte que \mathbf{c} est normé. Cette minimisation doit passer par une étape numérique, mais nous pouvons remarquer tout de suite que l'on peut se limiter à des coefficients $c(n)$ réels positifs. En effet pour des valeurs données de $|c(n)|$, le terme d'interaction (51) est fixé et le terme d'énergie cinétique (50) est minimisé en prenant la même phase pour tous les $c(n)$.

Les deux paramètres importants pour caractériser le problème sont

- le rapport zJ/U , caractérisant la valeur relative de l'énergie cinétique et des interactions,
- le taux de remplissage du réseau

$$\bar{n} = \frac{N}{N_{\text{sites}}} = \sum_n n |c(n)|^2. \quad (52)$$

Il serait fastidieux de donner systématiquement les coefficients $c(n)$ minimiseurs de l'énergie $\epsilon(\mathbf{c})$ en fonction de ces deux paramètres. Dans ce qui suit, nous allons nous limiter à la variation de l'écart-type Δn

$$\Delta n^2 = \langle n^2 \rangle - \bar{n}^2, \quad \langle n^2 \rangle = \sum_n n^2 |c(n)|^2. \quad (53)$$

ainsi que l'énergie approchée ϵ_f de l'état fondamental. Ces deux paramètres nous permettront de dégager les aspects essentiels de la transition superfluide – isolant de Mott.

3-3 Le point de transition superfluide-isolant

Nous avons tracé sur la figure 9 la variation de la fluctuation relative $\Delta n / \bar{n}$ quand on varie \bar{n} à zJ/U fixé, et sur la figure 10 cette variation quand on varie zJ/U , à \bar{n} fixé.

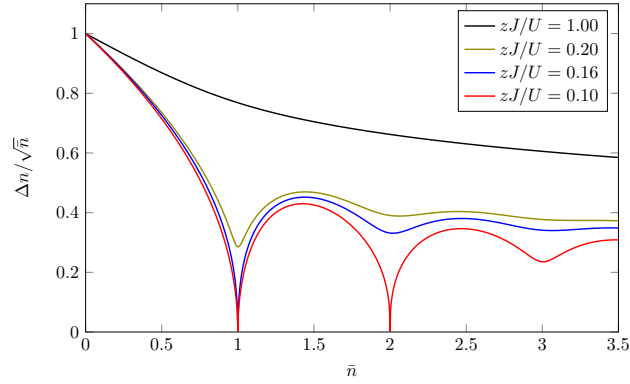


FIGURE 9. Variation de la fluctuation relative $\Delta n / \bar{n}$ du taux d'occupation en fonction du nombre moyen d'atomes par site \bar{n} , pour différentes valeurs de zJ/U .

Considérons pour commencer la figure 9 :

- Pour zJ/U assez grand, typiquement 1, la fluctuation relative décroît doucement quand on augmente \bar{n} : les interactions tendent à diminuer les fluctuations, ce qui est naturel puisque le coût énergétique d'une fluctuation qui mettrait beaucoup d'atomes sur un site devient prohibitif.
- Quand on diminue zJ/U (typiquement autour de 0.2), des structures apparaissent pour \bar{n} voisin d'un nombre entier.
- Pour des valeurs encore plus basses (0.16), Δn est nul au point $\bar{n} = 1$.
- Cette propriété se généralise aux entiers plus grands quand on diminue encore zJ/U .

La figure 10 permet de préciser les valeurs critiques pour lesquelles on bascule vers un état de $\Delta n = 0$. Ces états ne peuvent être obtenus que quand \bar{n} est un nombre entier, toute la population se concentrant alors sur ce nombre entier :

$$\text{Pour } \bar{n} \text{ entier : } \Delta n = 0 \longleftrightarrow C(n) = \delta_{n, \bar{n}} \quad (54)$$

La transition se produit pour $U/(zJ) \approx 6$ pour $\bar{n} = 1$, $U/(zJ) \approx 10$ pour $\bar{n} = 2$, etc.

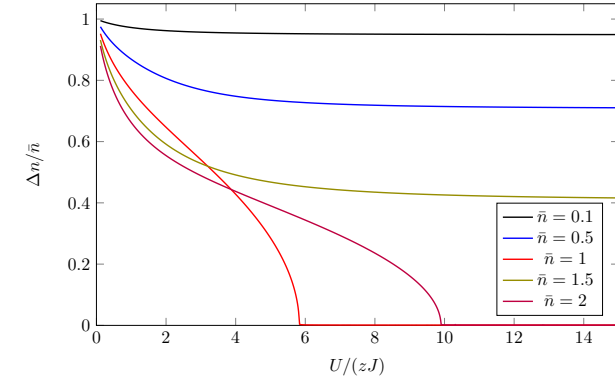


FIGURE 10. Même étude qu'en figure 9 en faisant cette fois-ci varier $U/(zJ)$, pour différentes valeurs de \bar{n} .

Cette bascule vers des états à nombre de particules par site fixé correspond à la transition d'un état superfluide vers un état isolant. Plus précisément, dans le régime des liaisons fortes, on peut caractériser la cohérence spatiale d'un état par la fonction de corrélation $G_1(i, j) = \langle b_i^\dagger b_j \rangle$, qui vaut pour nos fonctions d'essai :

$$G_1(i, j) = \left| \sum_n \sqrt{n+1} c^*(n) c(n+1) \right|^2. \quad (55)$$

Cette fonction est indépendante de la distance entre les sites i et j , et elle s'annule pour un état nombre. L'ordre de phase à longue portée, caractéristique d'un condensat de Bose-Einstein, est alors complètement perdu.

Au contraire, pour un remplissage non entier, le système reste superfluide quel que soit le rapport $U/(zJ)$. La conduction est plutôt de type particule si le remplissage est $\bar{n} = n + \epsilon$, avec n entier et $0 < \epsilon \ll 1$ et plutôt de type trou, si $\bar{n} = n - \epsilon$. Cette phase superfluide est notablement différente de celle obtenue pour un gaz de Bose homogène (sans réseau), pour laquelle toutes les particules participaient à la conduction. Par exemple, pour $\bar{n} = n + \epsilon$, on a $n N_{\text{sites}}$ particules qui sont bloquées dans une phase « isolant de Mott », et ce sont seulement les $\epsilon N_{\text{sites}}$ particules restantes qui peuvent abaisser leur énergie en se délocalisant sur l'ensemble du réseau, maintenant ainsi un (faible) ordre à longue portée.

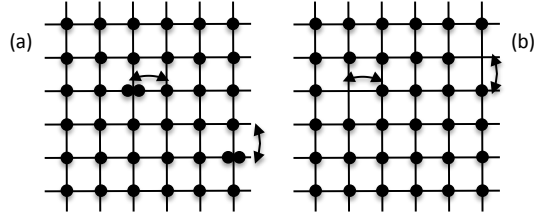


FIGURE 11. Autour du remplissage $\bar{n} = 1$. (a) : réseau avec un facteur de remplissage légèrement plus grand que 1 et une conduction de type « particule » ; (b) : idem pour un facteur de remplissage légèrement inférieur à 1 et une conduction de type « trou ».

3-4 Une approche analytique simple

Nous avons maintenant identifié les points de l'espace des paramètres permettant d'obtenir la transition superfluide-isolant : il faut choisir un facteur de remplissage entier $\bar{n} \in \mathbb{N}$ et des fluctuations Δn faibles autour de \bar{n} . Nous pouvons alors simplifier la forme de nos fonctions d'essai et nous limiter au cas où seuls trois coefficients $c(n)$ jouent un rôle significatif, $c(\bar{n})$ bien sûr, ainsi que $c(\bar{n} \pm 1)$, ce qui correspond au paramétrage suivant :

$$\begin{pmatrix} c(\bar{n} + 1) \\ c(\bar{n}) \\ c(\bar{n} - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i(\eta+\varphi)} \sin \theta \cos \chi \\ \cos \theta \\ e^{i(\eta-\varphi)} \sin \theta \sin \chi \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Pour assurer que la valeur moyenne du nombre de particules par site est bien égale au nombre entier \bar{n} , nous prenons $\chi = \pi/4$, de sorte que $\sin \chi = \cos \chi = 1/\sqrt{2}$. Par ailleurs, on vérifie aisément que la minimisation de l'énergie, plus précisément du terme tunnel (50), est obtenue en prenant $\eta = 0$. La phase φ en revanche peut être choisie quelconque, la valeur qu'elle prend quand on passe de l'état isolant ($\sin \theta = 0$) à l'état superfluide ($\sin \theta \neq 0$) correspondant à une brisure spontanée de symétrie. Dans ce qui suit, nous prendrons $\eta = \varphi = 0$ puisque nous nous intéressons uniquement à l'énergie de l'état fondamental (la phase φ reprendra un rôle

important dans le cours 5), ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} c(\bar{n} + 1) \\ c(\bar{n}) \\ c(\bar{n} - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta / \sqrt{2} \\ \cos \theta \\ \sin \theta / \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Le calcul de l'énergie par site $\epsilon(\theta)$ se fait alors simplement et on trouve :

$$\epsilon(\theta) = \epsilon_0 - \frac{\bar{n}zJ}{4} \sin^2(2\theta) \left[1 + \frac{1}{2\bar{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{\bar{n}}} \right] + \frac{U}{2} \sin^2 \theta, \quad (58)$$

où ϵ_0 est une constante additive indépendante de θ . La transition vers l'état isolant se produit quand le minimum de l'énergie ϵ est atteint pour $\theta = 0$, soit $c(\bar{n}) = 1$ et $c(\bar{n} \pm 1) = 0$. On peut donc étudier le voisinage de cette transition en faisant un développement limité de $\epsilon(\theta)$ au voisinage de $\theta = 0$. Posons pour cela

$$\rho = \frac{1}{2} \sin(2\theta) \quad (59)$$

et utilisons

$$\sin^2 \theta \approx \rho^2 + \rho^4. \quad (60)$$

On peut alors mettre l'énergie par site sous la forme suggestive

$$\epsilon(\rho) \approx \frac{U}{2} \rho^4 - A \rho^2 + \epsilon_0 \quad (61)$$

avec

$$A = \bar{n}zJ \left[1 + \frac{1}{2\bar{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{\bar{n}}} \right] - \frac{U}{2}. \quad (62)$$

On retrouve la forme habituelle de Landau pour décrire le voisinage d'une transition de phase (cf. figure 12) :

- Si le coefficient A est strictement négatif (interactions répulsives dominantes), le minimum est atteint pour $\rho = 0$, c'est-à-dire $\theta = 0$. Revenant à (57), nous voyons que cela correspond à l'état isolant, avec toute la population concentrée sur l'état $|n\rangle$.
- En revanche si $A > 0$, le minimum est atteint pour

$$A > 0 : \quad \rho_{\min}^2 = \frac{A}{U} \quad (63)$$

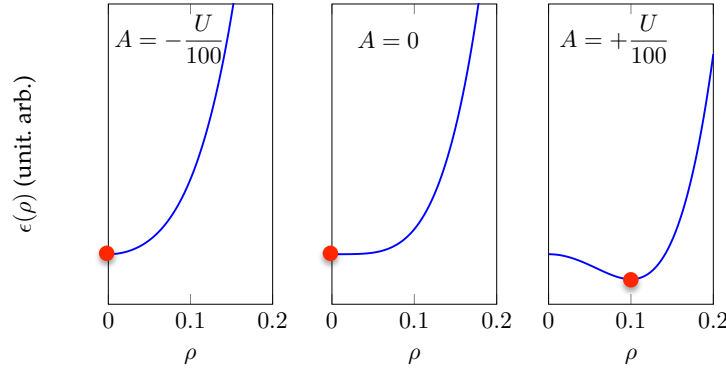


FIGURE 12. Variation avec ρ de l'énergie par site $\epsilon(\rho)$ pour trois valeurs du coefficient A : à gauche, $A < 0$, interactions dominantes et état isolant. Au milieu, $A = 0$, point critique. À droite : $A > 0$, effet tunnel dominant et état superfluide.

ce qui correspond à la phase superfluide, avec une cohérence à longue portée.

La position de la transition peut être précisée dans les deux cas $\bar{n} = 1$ et $\bar{n} \gg 1$. Pour $n = 1$, on trouve au point critique (Fisher, Weichman, et al. 1989)

$$\left. \frac{U}{zJ} \right|_c = 3 + 2\sqrt{2} \approx 5.8, \quad (64)$$

ce qui correspond au résultat de la figure 10. Pour $\bar{n} \gg 1$, on a

$$\left. \frac{U}{zJ} \right|_c \approx 4\bar{n}. \quad (65)$$

4 Appendice : fonct. de Hartree et états cohérents

Le but de cet appendice est de faire le lien entre les fonctions de Hartree introduites au chapitre précédent pour décrire l'état condensé d'un système à N particules, et les états cohérents multisites utilisés dans ce chapitre comme première approximation de l'état superfluide dans un réseau.

L'ansatz de Hartree consiste à écrire, par exemple dans le cadre d'une méthode variationnelle, la fonction d'onde à N_a atomes sous forme un produit d'états à une particule

$$\Phi_{N_a}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N_a}) = \phi(\mathbf{r}_1) \dots \phi(\mathbf{r}_{N_a}). \quad (66)$$

Pour un gaz sur réseau décrit par l'approximation des liaisons fortes, la fonction d'onde à une particule $\phi(\mathbf{r})$ est décrite par N_s coefficients ϕ_j , où N_s est le nombre de sites du réseau :

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_s} \phi_j w_j(\mathbf{r}) \quad \text{avec} \quad \sum_{j=1}^{N_s} |\phi_j|^2 = 1, \quad (67)$$

où $w_j(\mathbf{r})$ est la fonction de Wannier associée au site j . On peut écrire cet état en seconde quantification

$$|\phi\rangle = \left(\sum_{j=1}^{N_s} \phi_j \hat{b}_j^\dagger \right) |\text{vac}\rangle, \quad (68)$$

où \hat{b}_j^\dagger crée une particule sur le site j . L'état de Hartree à N_a atomes donné en (66) s'écrit dans ces conditions

$$|\Phi_{N_a}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_a!}} \left(\sum_{j=1}^{N_s} \phi_j \hat{b}_j^\dagger \right)^{N_a} |\text{vac}\rangle. \quad (69)$$

On peut développer le produit de ces N_a termes pour obtenir :

$$\begin{aligned} |\Phi_{N_a}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N_a!}} \sum_{m_1, \dots, m_{N_s}} \frac{N_a!}{m_1! \dots m_{N_s}!} \phi_1^{m_1} \dots \phi_{N_s}^{m_{N_s}} (b_1^\dagger)^{m_1} \dots (b_{N_s}^\dagger)^{m_{N_s}} |\text{vac}\rangle \\ &\approx \sqrt{N_a!} \sum_{m_1, \dots, m_{N_s}} \frac{\phi_1^{m_1} \dots \phi_{N_s}^{m_{N_s}}}{\sqrt{m_1! \dots m_{N_s}!}} |\text{site } 1 : m_1; \dots; \text{site } N_s : m_{N_s}\rangle. \end{aligned}$$

où le ' au dessus du signe somme signifie que la somme est restreinte aux N_s -uplets m_1, \dots, m_{N_s} tels que $\sum_{j=1}^{N_s} m_j = N_a$.

Passons maintenant aux états cohérents. Un état de Glauber d'amplitude ψ_j sur le site j s'écrit :

$$|\psi_j\rangle = e^{-|\psi_j|^2/2} \sum_{m_j=1}^{+\infty} \frac{\psi_j^{m_j}}{\sqrt{m_j!}} |\text{site } j : m_j\rangle \quad (70)$$

Considérons maintenant l'état cohérent multisites

$$|\Psi\rangle = \prod_{j=1}^{N_s} |\psi_j\rangle \quad (71)$$

en prenant pour amplitude ψ_j sur chaque site $\psi_j = \sqrt{N_a} \phi_j$ et donc $\sum_{j=1}^{N_s} |\psi_j|^2 = N_a$. En reportant l'expression de chaque $|\psi_j\rangle$ dans $|\Psi\rangle$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= e^{-N_a/2} \sum_{m_1, \dots, m_{N_s}} \frac{\psi_1^{m_1} \dots \psi_{N_s}^{m_{N_s}}}{\sqrt{m_1! \dots m_{N_s}!}} |\text{site 1 : } m_1; \dots; \text{site } N_s : m_{N_s}\rangle \\ &= e^{-N_a/2} \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{N_a^{N/2}}{\sqrt{N!}} |\Phi_N\rangle \end{aligned} \quad (72)$$

où on a posé $N = \sum_{j=1}^{N_s} m_j$. Cette expression a une structure très proche de celle obtenue pour $|\Phi\rangle$, la seule différence étant que l'absence de la restriction sur les N_s -uplets m_1, \dots, m_{N_s} . Toutefois, pour des grandes valeurs de N_a , on peut vérifier que l'amplitude de probabilité d'un état $|\Phi_N\rangle$ dans (72) est fortement piquée autour de la valeur $N = N_a$, ce qui assure la quasi-égalité de $|\Phi_{N_a}\rangle$ et de $|\Psi\rangle$.

Références

- Altman, E., A. Polkovnikov, E. Demler, B. I. Halperin & M. D. Lukin (2005), « Superfluid-Insulator Transition in a Moving System of Interacting Bosons », in *Phys. Rev. Lett.* 95 (2), p. 020402.
- Bonneau, M., J. Ruaudel, R. Lopes, J.-C. Jaskula, A. Aspect, D. Boiron & C. I. Westbrook (2013), « Tunable source of correlated atom beams », in *Phys. Rev. A* 87 (6), p. 061603.
- Campbell, Gretchen K., Jongchul Mun, Micah Boyd, Erik W. Streed, Wolfgang Ketterle & David E. Pritchard (2006), « Parametric Amplification of Scattered Atom Pairs », in *Phys. Rev. Lett.* 96 (2), p. 020406.
- Castin, Y (2001), « Bose-Einstein condensates in atomic gases : simple theoretical results », in *Coherent atomic matter waves (Les Houches Summer School 1999)*, ed. by Kaiser R., Westbrook C. & David F., EDP Sciences and Springer-Verlag.

- Fallani, L., L. De Sarlo, J. E. Lye, M. Modugno, R. Saers, C. Fort & M. Inguscio (2004), « Observation of Dynamical Instability for a Bose-Einstein Condensate in a Moving 1D Optical Lattice », in *Phys. Rev. Lett.* 93 (14), p. 140406.
- Fisher, M. P. A., P. B. Weichman, G. Grinstein & D. S. Fisher (1989), « Boson localization and the superfluid-insulator transition », in *Phys. Rev. B* 40, p. 546.
- Greiner, M., O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch & I. Bloch (2002), « Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms », in *Nature* 415, p. 29.
- Hilligsøe, Karen Marie & Klaus Mølmer (2005), « Phase-matched four wave mixing and quantum beam splitting of matter waves in a periodic potential », in *Phys. Rev. A* 71 (4), p. 041602.
- Jaksch, D., C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner & P. Zoller (1998), « Cold Bosonic Atoms in Optical Lattices », in *Phys. Rev. Lett.* 81 (15), pp. 3108–3111.
- Kohn, W. (1959), « Analytic Properties of Bloch Waves and Wannier Functions », in *Phys. Rev.* 115 (4), pp. 809–821.
- Krauth, Werner, Michel Caffarel & Jean-Philippe Bouchaud (1992), « Gutzwiller wave function for a model of strongly interacting bosons », in *Phys. Rev. B* 45 (6), pp. 3137–3140.
- Mun, J., P. Medley, G. K. Campbell, L. G. Marcassa, D. E. Pritchard & W. Ketterle (2007), « Phase diagram for a Bose-Einstein condensate moving in an optical lattice », in *arXiv :0706.3946*.
- Rokhsar, D. S. & B. G. Kotliar (1991), « Gutzwiller projection for bosons », in *Phys. Rev. B* 44, p. 10328.
- Smerzi, A., A. Trombettoni, P. G. Kevrekidis & A. R. Bishop (2002), « Dynamical Superfluid-Insulator Transition in a Chain of Weakly Coupled Bose-Einstein Condensates », in *Phys. Rev. Lett.* 89 (17), p. 170402.
- Wu, B. & Q. Niu (2001), « Landau and dynamical instabilities of the superflow of Bose-Einstein condensates in optical lattices », in *Phys. Rev. A* 64, 061603(R).
- (2003), « Superfluidity of Bose-Einstein condensate in an optical lattice : Landau-Zener tunnelling and dynamical instability », in *New J. Phys.* 5, p. 104.

Chapitre 5

Cohérence et modes collectifs dans un réseau

Sommaire

1	Caractérisation expérimentale de la cohérence	2
1-1	Protocole expérimental	2
1-2	Les pics de Bragg	3
1-3	Visibilité des pics de Bragg	4
1-4	Effets de température finie	5
2	Incompressibilité et gaz piégé	6
2-1	Approche de Gutzwiller et incompressibilité . . .	7
2-2	Au delà de Gutzwiller : calculs numériques . . .	9
2-3	Comment décrire un gaz piégé	10
2-4	La structure en « pièce montée » (<i>wedding cake</i>) . .	11
3	Le mode de Higgs	13
3-1	Paramètre d'ordre et fonctionnelle d'énergie . . .	13
3-2	Dynamique dans le modèle de Landau–Ginzburg	15
3-3	Mode de Goldstone, mode de Higgs	16
4	Le mode de Higgs dans un réseau optique	17
4-1	Le cas d'un mode uniforme	17
4-2	Le lagrangien « relativiste »	18
4-3	Observation du mode de Higgs	20
5	Appendice : identification des modes	20

Nous avons décrit au chapitre précédent le principe de la transition de phase quantique superfluide-isolant de Mott dans un réseau optique uniforme, rempli par des atomes bosoniques. Nous allons maintenant passer à l'étude expérimentale de ce phénomène, en commençant par les expériences « historiques » de Greiner, Mandel, et al. (2002). La cohérence associée à l'état superfluide est sondée dans une expérience de temps de vol, et elle se manifeste par des *pics de Bragg* correspondant à une accumulation d'atomes autour de classes d'impulsions bien précises.

Comme la plupart de ces expériences sont menées avec un piège harmonique superposé au réseau optique, ceci nous amènera à affiner notre description théorique. Après avoir introduit la notion d'incompressibilité de l'état isolant, nous adopterons la variable associée au point de vue grand-canonique, à savoir le potentiel chimique, et nous introduirons l'approximation de densité locale pour décrire la transition. Nous verrons que la transition vers l'état isolant se manifeste alors par des plateaux de densité constante, qui ont effectivement été observés dans les expériences récentes de « microscope atomique ».

Dans la dernière partie, nous reviendrons sur la nature de la transition de phase superfluide-isolant, en partant du modèle bien connu de Landau–Ginsburg pour les transitions du deuxième ordre. Nous aborderons une spécificité de cette transition liée au rôle symétrique qu'y jouent les particules et les trous. Nous expliquerons pourquoi cela permet d'y observer un mode collectif pour lequel l'amplitude du paramètre d'ordre oscille. Ce mode est formellement très proche du mode de Higgs de la physique des

particules, et était absent de la dynamique fondée sur l'équation de Gross-Pitaevskii que nous avons étudiée auparavant pour un gaz uniforme.

1 Caractérisation expérimentale de la cohérence

1-1 Protocole expérimental

La première expérience (Greiner, Mandel, et al. 2002) qui a exploré avec des atomes froids la transition entre état superfluide et état isolant de Mott a consisté à préparer un condensat pratiquement pur de 2×10^5 atomes de rubidium dans un piège harmonique quasi-isotrope de fréquence ~ 24 Hz. Le condensat a un rayon de $26 \mu\text{m}$ et un réseau optique 3D cubique, créant le potentiel

$$V(\mathbf{r}) = V_0 [\sin^2(kx) + \sin^2(ky) + \sin^2(kz)], \quad (1)$$

est branché pour atteindre une profondeur de réseau V_0 donnée, mesurée en unité d'énergie de recul $E_r = \hbar^2 k^2 / 2m$. Le branchement s'effectue relativement lentement (plusieurs dizaines de millisecondes) pour éviter de porter le nuage dans des modes excités¹. À la fin du branchement, environ 1.5×10^5 sites du réseau sont occupés.

La cohérence du gaz dans le réseau est testée par une technique de temps de vol. On coupe brusquement le potentiel de confinement et le réseau optique, on laisse le nuage s'étaler de manière ballistique pendant une durée de 15 ms et on mesure finalement la densité spatiale. Cette durée d'expansion est suffisamment longue pour que la taille finale du nuage soit beaucoup plus grande que la taille initiale. Si on néglige les interactions entre atomes pendant le temps de vol, on sait que la distribution spatiale mesurée est proportionnelle à la distribution en impulsion du nuage avant temps de vol.

Une série de résultats de mesure de densité après temps de vol est montrée sur la figure 1 pour des valeurs croissantes de V_0/E_r . Pour les valeurs les plus basses de V_0 , typiquement jusqu'à $12 E_r$, on observe des pics de

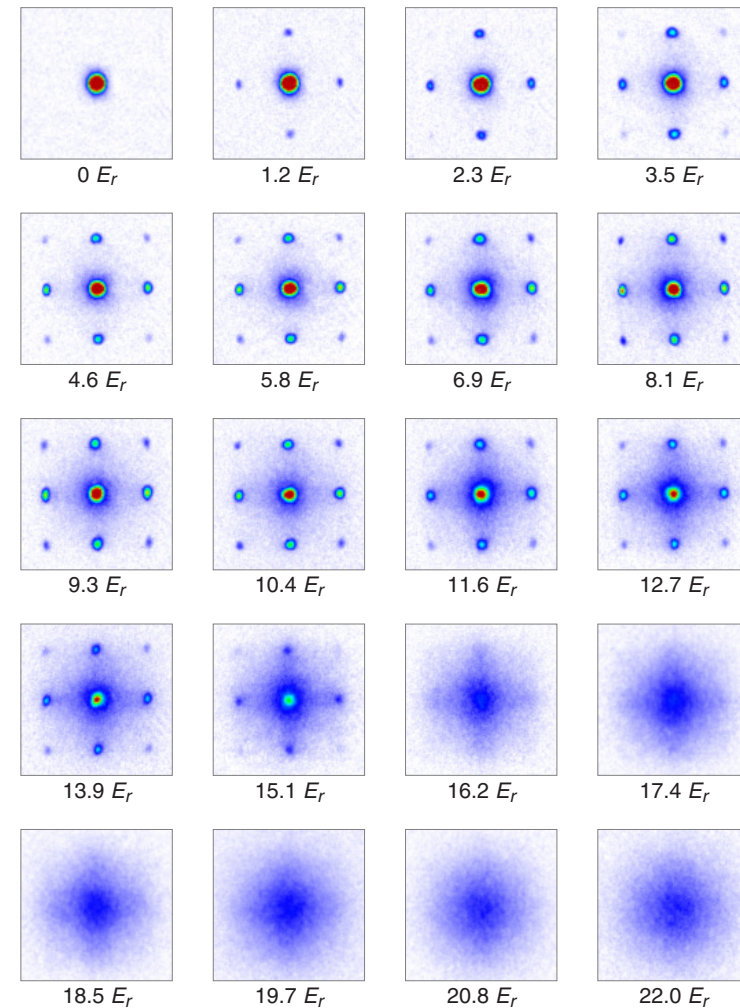


FIGURE 1. Observation de la transition superfluide - isolant de Mott dans un réseau cubique. On mesure la distribution en impulsion des atomes dans un réseau optique de profondeur V_0 (mesurée en unité d'énergie de recul E_r) grâce à une technique de temps de vol. Les pics étroits (pics de Bragg), bien visibles pour $V_0 < 13 E_r$, sont caractéristiques de l'ordre à longue portée de l'état superfluide. Figure extraite de la thèse de M. Greiner, LMU, 2003.

¹. Cette notion de branchement adiabatique est discutée en détail dans Trotzky, Pollet, et al. 2010 et refs. in.

diffraction marqués, qui sont caractéristiques d'une cohérence étendue sur le réseau et donc d'un état superfluide, comme nous allons le retrouver au paragraphe suivant. Pour de plus grandes valeurs de V_0 , un fond diffus apparaît et l'amplitude des pics étroits décroît, puis s'annule pour $V_0 > 17 E_r$.

Avant de relier de manière quantitative la visibilité des pics de diffraction à la cohérence à longue portée dans le réseau, indiquons le domaine de paramètres concernés par la transition visible sur la figure 1. Nous pouvons convertir l'intervalle 12 à $17 E_r$ en un intervalle pour le paramètre pertinent dans le modèle de Bose–Hubbard, U/J , c'est-à-dire le rapport entre énergie d'interaction sur site et amplitude tunnel. Le coefficient U varie relativement lentement avec V_0 , cette variation étant due au fait que les fonctions de Wannier sont de plus en plus compactes quand V_0 augmente (figure 2a). En revanche, l'amplitude tunnel J varie très vite avec V_0 , puisque c'est une fonction exponentiellement décroissante de $(V_0/E_r)^{1/2}$ (figure 2b). Le domaine de transition correspondant à $12 E_r < V_0 < 17 E_r$ est donc large, typiquement $25 J < U < 100 J$ (figure 2c).

1-2 Les pics de Bragg

Comme nous l'avons écrit plus haut, l'expérience conduisant aux résultats de la figure 1 peut être interprétée comme une mesure de la distribution en impulsion initiale, pourvu que l'on puisse négliger à la fois les effets de taille initiale et le rôle des interactions durant le temps de vol². Pour simplifier notre analyse, nous nous placerons ici dans le cadre de cette approximation.

Nous utiliserons ici le formalisme de la seconde quantification, bien adapté à ce problème à N corps. La distribution en vecteur d'onde $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ est donnée par

$$\mathcal{N}(\mathbf{k}) = \langle \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{k}) \hat{\Phi}(\mathbf{k}) \rangle, \quad (2)$$

où la moyenne est prise sur l'état du système avant temps de vol et où $\hat{\Phi}(\mathbf{k})$ est l'opérateur champ en point de vue vecteur d'onde, c'est-à-dire la transformée de Fourier de l'opérateur champ en point de vue position $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$.

2. Une analyse détaillée de ces hypothèses a été menée par Gerbier, Trotzky, et al. (2008).

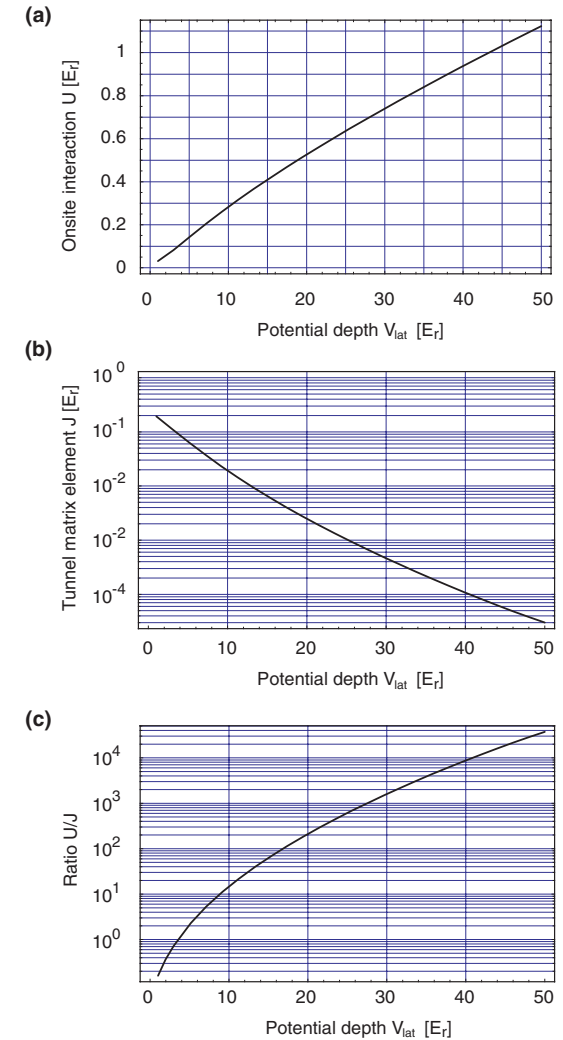


FIGURE 2. Variation de l'énergie sur site U , du coefficient tunnel J et du rapport U/J en fonction de la profondeur du réseau cubique V_0/E_r . Figure extraite de la thèse de M. Greiner, LMU, 2003.

Pour le problème du réseau optique traité en formalisme de Bose-Hubbard, on a

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{j}} w_{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) \hat{b}_{\mathbf{j}} \quad \text{avec } \mathbf{j} = (j_x, j_y, j_z) \in \mathbb{Z}^3, \quad (3)$$

soit, en utilisant le fait que les différentes fonctions de Wannier se déduisent les unes des autres par translation $w_{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = w_0(\mathbf{r} - \mathbf{j}a)$:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(\mathbf{k}) &= \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \left(\sum_{\mathbf{j}} w_{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) \hat{b}_{\mathbf{j}} \right) d^3r \\ &= \tilde{w}_0(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{j}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}a} \hat{b}_{\mathbf{j}} \end{aligned} \quad (4)$$

où l'on a introduit la transformée de Fourier $\tilde{w}_0(\mathbf{k})$ de la fonction de Wannier $w_0(\mathbf{r})$.

Reportons cette expression de l'opérateur champ dans la définition de la distribution en impulsion (2) :

$$\mathcal{N}(\mathbf{k}) = |\tilde{w}_0(\mathbf{k})|^2 \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{j}'} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{j}-\mathbf{j}')a} \langle \hat{b}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{j}'} \rangle. \quad (5)$$

On trouve donc bien que la distribution après temps de vol nous renseigne sur la cohérence de phase entre les différents sites du réseau, caractérisée par la fonction de corrélation à un corps $\langle \hat{b}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{j}'} \rangle$.

Plaçons-nous dans l'hypothèse d'un gaz remplissant le réseau de manière homogène, même si ce n'était pas la situation de l'expérience initiale de Greiner, Mandel, et al. (2002) et discutons les deux cas d'une phase superfluide et d'une phase isolante :

— Pour une phase superfluide, on attend un ordre à longue portée, c'est-à-dire

$$\text{Phase superfluide : } \langle \hat{b}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{j}'} \rangle \sim b_0^2 \neq 0 \quad \text{pour } |\mathbf{j} - \mathbf{j}'| \gg 1. \quad (6)$$

Ceci conduit à une addition cohérente de la contribution des N_s^2 couples $(\mathbf{j}, \mathbf{j}')$ à la somme (5) (N_s représente le nombre de sites du réseau), pourvu que le vecteur \mathbf{k} pointe dans des directions bien précises de l'espace telles que $k_i a$ soit un multiple de 2π ($i = x, y, z$). Cette

interférence constructive dans des directions privilégiées de l'espace est l'analogie de la diffraction de Bragg des rayons X ou des électrons par un cristal, d'où le nom de *pic de Bragg*. La largeur angulaire des pics de Bragg peut être arbitrairement petite, limitée seulement par la taille de l'échantillon ou la résolution expérimentale.

— Pour une phase isolante, on s'attend à ce que la fonction de corrélation $\langle \hat{b}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{j}'} \rangle$ décroisse exponentiellement vite avec la distance $|\mathbf{j} - \mathbf{j}'|a$ sur une échelle de longueur ℓ fonction de U/J :

$$\text{Phase isolante : } \langle \hat{b}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{j}'} \rangle \sim b_0^2 e^{-|\mathbf{j}-\mathbf{j}'|a/\ell}. \quad (7)$$

L'interférence constructive est donc fortement réduite, et cela d'autant plus que ℓ est faible. Les pics ont une largeur angulaire non nulle, proportionnelle à $1/\ell$. Quand ℓ devient tellement petite qu'elle est comparable au pas a du réseau, toute interférence constructive dans les pics de Bragg disparaît, et on atteint le cas limite capturé par l'*ansatz* de Gutzwiller :

$$\text{Phase isolante selon l'ansatz de Gutzwiller : } \langle \hat{b}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{j}'} \rangle = 0 \text{ si } \mathbf{j} \neq \mathbf{j}'. \quad (8)$$

1-3 Visibilité des pics de Bragg

Pour évaluer la visibilité de ces pics, qui donne une estimation de la portée de la cohérence de phase dans le réseau [cf. eq. (5)], Gerbier, Widera, et al. (2005b) ont développé une méthode résumée sur la figure 3 [voir aussi Gerbier, Widera, et al. (2005a)]. Ils ont mesuré le signal $\mathcal{N}(\mathbf{k})$ sur un pic de Bragg, au point \mathbf{k}_1 tel que $k_{1,x} = k$, $k_{1,y} = 0$ ainsi qu'au point \mathbf{k}_2 situé sur la diagonale à la même distance du centre que \mathbf{k}_1 : $k_{2,x} = k_{2,y} = k/\sqrt{2}$. Ils ont ensuite défini la visibilité

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{N}(\mathbf{k}_1) - \mathcal{N}(\mathbf{k}_2)}{\mathcal{N}(\mathbf{k}_1) + \mathcal{N}(\mathbf{k}_2)}. \quad (9)$$

L'intérêt de cette définition est d'annuler (ou presque) la contribution de la fonction de Wannier, qui est quasi-isotrope, au signal pour ne garder que le terme d'interférence. Le résultat de cette analyse est également montré sur la figure 3. On voit que la visibilité est une fonction continue du rapport U/J . Elle ne s'annule pas au point de transition, contrairement à ce

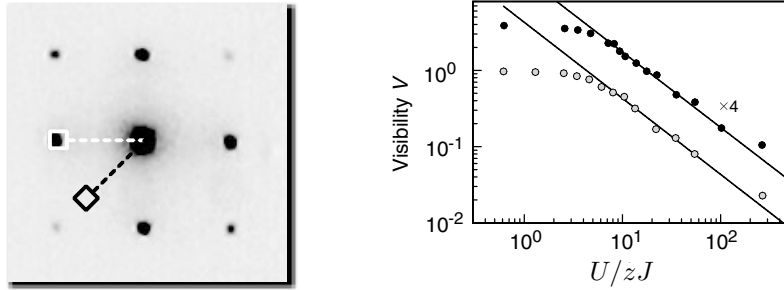


FIGURE 3. (a) La mesure de la visibilité des pics de Bragg se fait en comparant le signal de temps de vol pour deux impulsions de même module, \mathbf{k}_1 (carré blanc) et \mathbf{k}_2 (carré noir) [cf. eq. (9)]. (b) Mesure de la visibilité en fonction du rapport U/zJ , où $z = 6$ est le nombre de proches voisins d'un site donné. Les deux jeux de données correspondent à des nombres d'atomes différents : $N = 5.9 \times 10^5$ (cercles noirs) et 3.6×10^5 (cercles gris). Pour ce cas 3D, la position de la transition à $\bar{n} = 1$ calculée grâce à une méthode Monte Carlo quantique est $(U/zJ)_c = 4.9$ (Capogrosso-Sansone, Prokof'ev, et al. 2007). Figures extraites de Gerbier, Widera, et al. (2005b).

que pourrait suggérer l'ansatz de Gutzwiller (Zwenger 2003; Sengupta & Dupuis 2005), mais elle décroît comme $(U/J)^{-1}$ dans la limite des réseaux profonds.

Cette loi d'échelle se comprend simplement grâce à la théorie des perturbations, en traitant J/U comme un petit paramètre pour l'hamiltonien de Bose-Hubbard (Gerbier, Widera, et al. 2005b)

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j + \frac{U}{2} \sum_j \hat{n}_j (\hat{n}_j - 1). \quad (10)$$

Nous nous plaçons ici à une dimension pour simplifier les notations et nous prenons un remplissage unité pour les sites. Quand le paramètre J/U est nul, l'état fondamental du système est l'isolant de Mott « parfait » :

$$|\Psi_{\text{isol.}}\rangle = |\dots 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots\rangle. \quad (11)$$

Pour J/U petit mais non nul, l'état perturbé s'écrit au premier ordre :

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |\Psi_{\text{isol.}}\rangle + \frac{J}{U} \sum_j \left(\hat{b}_{j+1}^\dagger \hat{b}_j + \hat{b}_{j-1}^\dagger \hat{b}_j \right) |\Psi_{\text{isol.}}\rangle \\ &= |\dots 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots\rangle \\ &+ \sqrt{2} \frac{J}{U} (|\dots 1, 1, 2, 0, 1, 1, \dots\rangle + |\dots 1, 1, 0, 2, 1, 1, \dots\rangle + \dots) \end{aligned} \quad (12)$$

puisque tous les états excités considérés ont la même énergie U au dessus du fondamental. L'interprétation physique de ces états excités est simple : ils correspondent à un défaut localisé de l'isolant de Mott avec un trou sur un site, avec son site voisin, à gauche ou à droite, doublement occupé.

Sur cet état perturbé, on voit que des corrélations entre proches voisins apparaissent :

$$\langle \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_{j+1} \rangle \approx 4 \frac{J}{U}. \quad (13)$$

Une fois injecté dans l'expression (5) pour la distribution en impulsion, ce résultat permet de rendre compte de la loi d'échelle observée en figure 3.

1-4 Effets de température finie

Jusqu'ici, nous avons supposé que le système, qu'il se trouve dans la phase de Mott ou dans la phase superfluide, était à température nulle. Un autre facteur à prendre en compte pour expliquer de manière quantitative la visibilité des pics de Bragg est la température finie de l'échantillon. Nous ne rentrerons pas dans les détails de ces effets thermiques, souvent subtils [voir par exemple Gerbier (2007)]. Mentionnons simplement l'étude très détaillée décrite par Trotzky, Pollet, et al. (2010), qui compare des données expérimentales et des simulations Monte Carlo quantiques pour des nombres de particules comparables (jusqu'à 3×10^5). L'accord théorie-expérience est remarquable et la simulation permet d'assigner une température aux échantillons préparés dans le réseau (figure 4). Grâce à cette comparaison, on peut vérifier que le branchement du réseau se fait bien adiabatiquement, sans ajout d'entropie. Cette étape de vérification est indispensable si l'on souhaite utiliser ce système d'atomes froids sur réseau comme un simulateur de la physique du modèle de Hubbard.

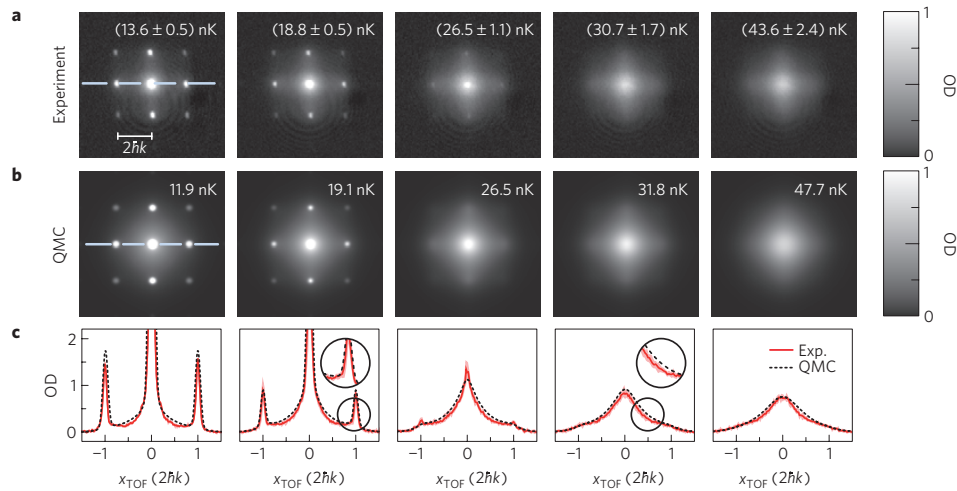


FIGURE 4. Distributions en impulsion mesurées (ligne du haut) et calculées (ligne du bas) pour des atomes dans un réseau optique, pour différentes températures (ici dans le régime superfluide). Les températures indiquées pour les données expérimentales sont obtenues en supposant un suivi adiabatique lors du chargement du réseau. Les températures indiquées pour les données théoriques ont été ajustées de manière à optimiser l'accord avec l'expérience. Figure extraite de Trotzky, Pollet, et al. (2010).

Autres études. Avant de passer aux méthodes d'investigation résolues spatialement, signalons que plusieurs autres techniques ont été développées pour étudier le nuage atomique dans sa globalité, c'est-à-dire le système non homogène obtenu dans la superposition réseau + potentiel confinant (magnétique ou lumineux).

- La première consiste à faire une étude spectroscopique des excitations du gaz, par exemple en modulant temporellement la puissance du réseau. La nature continue ou discrète du spectre permet d'identifier les phases superfluides et isolantes. (Stöferle, Moritz, et al. 2004; Köhl, Moritz, et al. 2005; Haller, Hart, et al. 2010).
- Une méthode consistant à faire une étude du bruit des images obtenues après temps de vol permet de révéler l'ordre spatial dans la phase

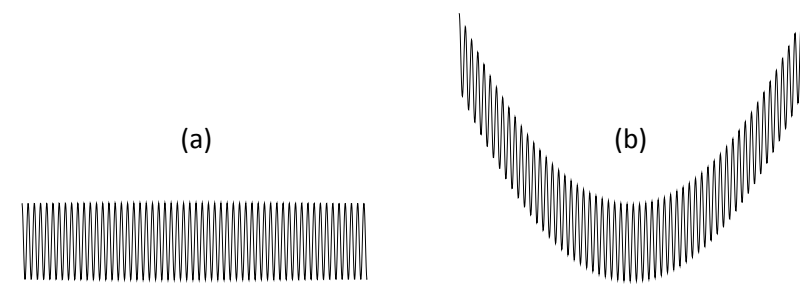


FIGURE 5. (a) Potentiel périodique étudié au chapitre 4. (b) Potentiel périodique superposé à un potentiel de confinement harmonique.

isolante. Cette technique est directement inspirée de l'effet Hanbury-Brown et Twiss (Altman, Demler, et al. 2004; Fölling, Gerbier, et al. 2005; Spielman, Phillips, et al. 2007; Guarrera, Fabbri, et al. 2008).

- L'étude du transport et du temps de mise à l'équilibre spatial d'un nuage d'atomes permet également d'explorer la transition superfluide-isolant [cf. chapitre précédent avec notamment les articles de Mun, Medley, et al. (2007) et Hung, Zhang, et al. (2010)].

Signalons enfin que ces études expérimentales ont pour certaines été menées en dimension réduite : 1D pour Stöferle, Moritz, et al. (2004) and Haller, Hart, et al. (2010) et 2D pour Spielman, Phillips, et al. (2007), Spielman, Phillips, et al. (2008), and Jiménez-García, Compton, et al. (2010), avec dans les deux cas une valeur du point critique U/J en bon accord avec les prédictions théoriques [voir par exemple Wessel, Alet, et al. (2004)].

2 Incompressibilité et gaz piégé

Jusqu'ici, aussi bien notre description théorique que l'interprétation des résultats expérimentaux ont été faites dans l'hypothèse d'un gaz remplissant le réseau de manière homogène. Or, la présence du piège harmonique servant à confiner les atomes sur une échelle de longueur grande devant le pas du réseau change de manière significative la nature du problème (fi-

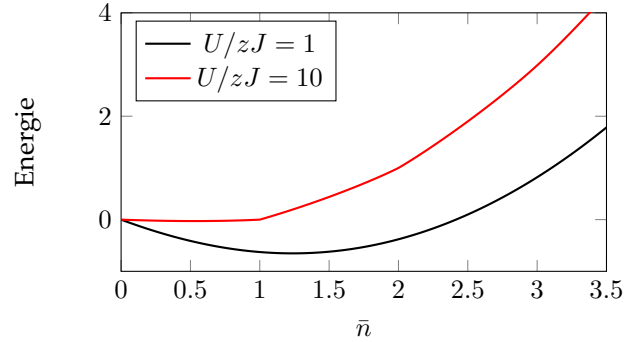


FIGURE 6. Variation de l'énergie par site en fonction du nombre moyen d'atomes par site \bar{n} , pour différentes valeurs de zJ/U .

gure 5). Le gaz n'a pas une densité constante sur toute l'étendue du réseau, de sorte que différentes phases, superfluides et isolantes peuvent être simultanément présentes dans le piège, dans des régions différentes de l'espace.

La notion-clé pour aborder ce problème du gaz piégé est l'*incompressibilité* de l'état isolant, c'est-à-dire le fait que la densité ne change pas si on modifie légèrement le potentiel chimique du fluide. Pour dégager cette notion, nous allons d'abord revenir au cas du gaz homogène et à l'*ansatz* de Gutzwiller développée au chapitre précédent. Nous allons voir que les phases isolantes sont caractérisées par une discontinuité du potentiel chimique, signalant l'incompressibilité du système. Cette incompressibilité subsiste au delà de l'approximation de Gutzwiller et constitue la véritable « signature » de la transition superfluide–isolant de Mott.

2-1 Approche de Gutzwiller et incompressibilité

Au chapitre précédent, nous avons présenté l'*ansatz* de Gutzwiller qui consiste à poser que l'état du gaz est un état factorisé par rapport aux différents sites du réseau, cet état étant le même en chaque site :

$$|\Psi_G\rangle = |\text{site 1} : \Psi\rangle \otimes |\text{site 2} : \Psi\rangle \otimes \dots \otimes |\text{site } N_s : \Psi\rangle. \quad (14)$$

L'état $|\Psi\rangle$ sur un site donné se décompose sur la base de Fock, c'est-à-dire les états à nombre donné de particules :

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} c(n)|n\rangle \quad \sum_n |c(n)|^2 = 1. \quad (15)$$

Les coefficients $\{c(n)\}$ sont déterminés de manière à minimiser l'énergie totale pour un taux de remplissage \bar{n} fixé :

$$\bar{n} = \frac{N_{\text{atomes}}}{N_{\text{sites}}} = \sum_n n |c(n)|^2. \quad (16)$$

Au chapitre précédent, nous nous sommes intéressés essentiellement à la variation de la dispersion Δn avec les deux paramètres du problème, U/J et \bar{n} . Nous avons notamment montré que Δn s'annule pour des remplissages \bar{n} entiers, pourvu que U/J soit assez grand. Ce sont ces phases à $\Delta n = 0$ que nous avons identifiées comme isolantes.

Nous allons maintenant nous intéresser à la variation de l'énergie par site en fonction des deux paramètres U/J et \bar{n} . Nous avons tracé cette variation sur la figure 6. Pour les faibles \bar{n} ($\bar{n} \ll 1$), on constate que l'énergie est négative et varie comme

$$E(\bar{n}) = -zJ\bar{n}, \quad (17)$$

ce qui revient à mettre tous les atomes dans l'état fondamental à une particule, de quasi-moment $\mathbf{q} = 0$ et d'énergie $-zJ$. Quand \bar{n} augmente, les interactions deviennent significatives et l'énergie devient positive. L'approche la plus naïve conduit à une variation quadratique du type

$$\epsilon \approx -zJ\bar{n} + \frac{U}{2}\bar{n}(\bar{n} - 1), \quad (18)$$

ce qui correspond *grosso modo* à la variation observée. Mais les détails de cette variation sont importants, en particulier au voisinage des points de remplissage entier pour lesquels nous avons vu qu'il y avait une perte complète de superfluidité.

Plus précisément, quand on prend U assez grand pour passer le seuil de la transition de Mott pour $\bar{n} = 1$, l'énergie en ce point est nulle : il n'y a ni

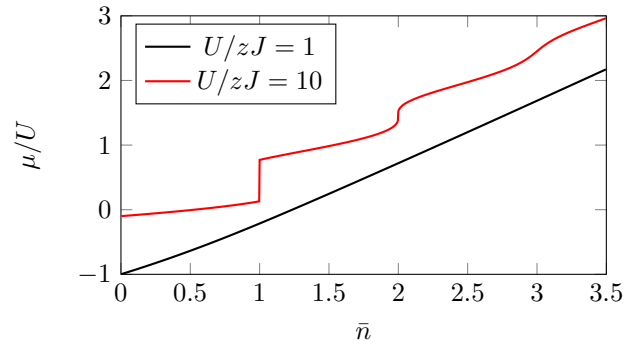


FIGURE 7. Potentiel chimique obtenu à partir de $\mu = \frac{d\epsilon}{d\bar{n}}$.

abaissement d'énergie dû à l'effet tunnel, ni élévation due aux interactions puisqu'il n'y a jamais deux atomes sur le même site.

Dans la limite $U/(zJ) \gg 1$, la variation avec \bar{n} de l'énergie par site ϵ prend une allure de ligne brisée, dont l'enveloppe est proche de la prédiction naïve $\epsilon \sim \frac{U}{2}\bar{n}(\bar{n} - 1)$:

- tant que $\bar{n} < 1$, on met moins d'un atome par site et il n'y a pas de coût à ajouter une particule supplémentaire ;
- pour $1 < \bar{n} < 2$, chaque site est occupé une fois et toute nouvelle particule coûte l'énergie U ;
- pour $n < \bar{n} < n + 1$ avec n entier, certains sites sont occupés par n particules et d'autres par $n + 1$ particules. L'ajout d'une nouvelle particule se fait préférentiellement sur un site occupé par n particules et cela fait varier l'énergie de l'état fondamental par la quantité :

$$\begin{aligned} \frac{U}{zJ} \gg 1 : \quad E(N+1) &= E(N) + \frac{U}{2} [n(n+1) - n(n-1)] \\ &= E(N) + nU. \end{aligned} \quad (19)$$

Potentiel chimique et gap. Par dérivation numérique, on en déduit le potentiel chimique en version microcanonique,

$$\mu = \frac{\partial E}{\partial N} = \frac{d\epsilon}{d\bar{n}}, \quad (20)$$

que l'on trace en fonction de \bar{n} sur la figure 7. Cette variation présente plusieurs caractéristiques importantes.

- Pour des valeurs de U/zJ inférieures au seuil de la première annulation de Δn , la variation de μ en fonction de \bar{n} est continue.
- Quand on atteint le seuil de U/zJ pour lequel Δn s'annule à la valeur $\bar{n} = 1$ ($U/zJ \approx 6$), une discontinuité de μ apparaît. En d'autres termes, on peut définir en ce point deux valeurs du potentiel chimique, $\mu_{\pm}(\bar{n})$.
- Ce type de discontinuité se retrouve pour toutes les valeurs entières de \bar{n} , pourvu que l'on choisisse U/zJ assez grand pour avoir $\Delta n = 0$ en ce point.
- Dans la limite $U/zJ \gg 1$, la variation en ligne brisée de $\epsilon(\bar{n})$ se transcrit en une évolution en marche d'escalier pour sa dérivée μ , avec un saut de $\mu \approx 0$ à $\mu \approx U$ pour $\bar{n} = 1$, de $\mu \approx (n-1)U$ à $\mu \approx nU$ pour $\bar{n} = n$ [cf. (19)].

Cette discontinuité du potentiel chimique est en fait la signature véritable de la transition entre un état superfluide et un état isolant. Si l'on revient à l'énergie du système total $E = N_{\text{sites}}\epsilon$, et qu'on choisit un remplissage entier, par exemple $\bar{n} = 1$ ou de manière équivalente $N = N_{\text{sites}}$, cette discontinuité signifie que l'énergie à payer pour ajouter une particule

$$\mu_+(N) = \frac{E(N+1) - E(N)}{(N+1) - N} = E(N+1) - E(N) \quad (21)$$

est différente de l'énergie gagnée quand on enlève une particule

$$\mu_-(N) = E(N) - E(N-1). \quad (22)$$

En d'autres termes, le gap défini par

$$\Delta(N) = E(N+1) + E(N-1) - 2E(N) = \mu_+(N) - \mu_-(N) \quad (23)$$

est non nul au point de remplissage entier : il faut payer une énergie finie, non nulle à la limite thermodynamique, pour créer dans le système une excitation élémentaire de type particule-trou, où l'on ajoute une particule à un endroit et on crée un trou à un autre. On déduit immédiatement de (19) que la valeur de ce gap est $\sim U$ dans le cas $U \gg J$.

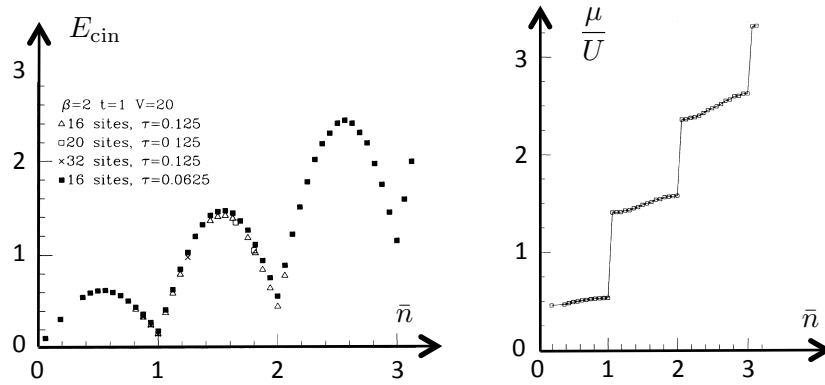


FIGURE 8. Étude de la transition superfluide-isolant de Mott à 1D par une méthode de Monte-Carlo quantique pour un rapport $U/J = 40$ (ici $t \equiv J, V \equiv \frac{U}{2}$). Gauche : variation de l'énergie cinétique avec le taux de remplissage $\rho \equiv \bar{n}$. Droite : variation du potentiel chimique $\rho \equiv \bar{n}$. Figures extraites et adaptées de Batrouni, Scalettar, et al. (1990).

Gap et incompressibilité. Dans ce qui va suivre, nous allons paramétrer le gaz par son potentiel chimique μ plutôt que par le nombre moyen de particules par site \bar{n} . La discontinuité de μ quand \bar{n} passe par une valeur entière devient alors

$$\left. \frac{\partial \mu}{\partial \bar{n}} \right|_{\bar{n}=n} = \infty \quad \longrightarrow \quad \kappa \equiv \left. \frac{\partial \bar{n}}{\partial \mu} \right|_{\mu \in [\mu_-, \mu_+]} = 0. \quad (24)$$

La quantité κ , appelée *compressibilité* du système, s'annule donc quand μ est dans l'intervalle $[\mu_-, \mu_+]$. Le système est alors incompressible : le nombre moyen de particule par site \bar{n} , et donc la densité du fluide, ne varient pas quand on modifie le potentiel chimique.

2-2 Au delà de Gutzwiller : calculs numériques

Le fait que Δn s'annule dès qu'on entre dans la phase isolante est un artefact du choix en fait très restreint de notre classe de fonctions d'essai. En effet, ces fonctions présentent soit un ordre à longue portée avec $\langle \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_i \rangle \neq 0$

pour tout couple de sites (i, j) , soit un écart-type $\Delta n = 0$. Les traitements numériques exacts, fondés sur des méthodes Monte Carlo quantiques, permettent d'aller au delà de cette simplification quelque peu abusive. Ils s'attachent à rechercher des phases incompressibles, telles que $\partial \bar{n} / \partial \mu = 0$. Ces phases incompressibles vont de pair avec l'absence d'ordre à longue portée. En effet cet ordre s'obtient grâce à des particules (et/ou des trous) délocalisés sur l'ensemble du réseau, ce qui n'est pas énergétiquement favorable si l'état fondamental est « protégé » par un gap $\Delta(N)$ non nul.

On a représenté sur la figure 8 un exemple de résultat numérique obtenu par Batrouni, Scalettar, et al. (1990) sur un système unidimensionnel. On y voit apparaître :

- Une réduction forte de l'énergie cinétique, proportionnelle à $\langle \hat{b}_{j+1}^\dagger \hat{b}_j \rangle$ pour des remplissages entiers, mais pas l'annulation complète prédite notre *ansatz* précédent : il reste donc une corrélation de phase non nulle entre sites voisins, et le nombre de particules par sites n'est pas strictement figé.
- L'apparition de plateaux dans le tracé de la densité en fonction du potentiel chimique, confirmant l'incompressibilité du système pour des remplissages entiers.

Pour ce problème 1D, la transition est de type Kosterlitz–Thouless et l'état superfluide à température nulle n'est pas décrit par un vrai ordre à longue portée, mais une décroissance algébrique de la fonction g_1 avec la distance $(i - j)a$ entre les sites considérés. L'approximation de champ moyen ne décrit alors pas très bien la position de la transition, qui est trouvée numériquement à $U/J = 3.37$ (Kühner, White, et al. 2000) pour $\bar{n} = 1$ alors que la prédiction de l'*ansatz* de Gutzwiller vue au chapitre précédent est $U/zJ \approx 5.8$, soit $U/J \approx 11.6$. Signalons également le travail théorique et expérimental récent de Boéris, Gori, et al. (2016), prolongeant cette étude au delà du cas des liaisons fortes considéré ici.

Ces études Monte Carlo ont été généralisées plus récemment à trois dimensions par Capogrosso-Sansone, Prokof'ev, et al. (2007), qui ont trouvé la valeur $U/J \approx 29.34$ pour la position de la transition superfluide-isolant pour un remplissage $\bar{n} = 1$. Ce résultat est relativement proche de la valeur prédite par la méthode variationnelle à la Gutzwiller : $U/zJ \approx 5.8$ avec $z = 6$, soit $U/J \approx 35$.

2-3 Comment décrire un gaz piégé

Pour décrire de manière quantitative le comportement du fluide dans un potentiel extérieur, deux ingrédients supplémentaires sont nécessaires :

- **Le passage aux variables μ, T .** Nous avons utilisé jusqu'ici les variables du point de vue canonique, c'est-à-dire la température et le nombre d'atomes N dans le réseau (ou le taux d'occupation de chaque site \bar{n}). À partir de l'énergie $E(N)$ de l'état fondamental, nous avons pu déterminer le potentiel chimique en point de vue canonique $\mu = \frac{\partial E}{\partial N}$. Nous allons désormais utiliser les variables caractéristiques du point de vue grand-canonique, à savoir le potentiel chimique μ et la température T , et nous en déduisons les autres quantités thermodynamiques du système, comme le taux d'occupation \bar{n} . Ce point de vue correspond physiquement à un système pouvant échanger des particules avec un réservoir, le réservoir imposant son potentiel chimique. Cette situation correspond intuitivement à celle d'un gaz placé dans un potentiel de piégeage $V_{\text{trap}}(\mathbf{r})$: une région donnée autour du point \mathbf{r}_0 ressent un potentiel moyen $\bar{V}_{\text{trap}} \approx V_{\text{trap}}(\mathbf{r}_0)$ et elle échange des particules avec les autres régions du piège, ressentant chacune un potentiel de confinement différent.
- **L'approximation de densité locale.** Supposons que l'on a réussi à déterminer l'état du fluide homogène, sa densité n_{homog} ou son énergie E_{homog} par exemple, en fonction de son potentiel chimique μ et de sa température T .

Plaçons maintenant le fluide dans un potentiel extérieur $V_{\text{trap}}(\mathbf{r})$ qui le confine et posons $V_{\text{trap}}(0) = 0$ au centre du piège ; caractérisons ce fluide par son potentiel chimique μ_0 et sa température T . Si les échelles de longueur typiques du système homogène – la longueur de cicatrisation ou la longueur d'onde thermique par exemple – sont petites devant la taille caractéristique du gaz piégé, on peut faire l'approximation suivante : l'état du fluide au point \mathbf{r} doit être semblable à l'état trouvé pour le fluide homogène pour la même température T et pour le potentiel chimique local

$$\mu(\mathbf{r}) = \mu_0 - V_{\text{trap}}(\mathbf{r}). \quad (25)$$

Dans ces conditions, la mesure d'une quantité thermodynamique comme la densité $n(\mathbf{r}, T)$ sur toute l'étendue du piège permet de re-

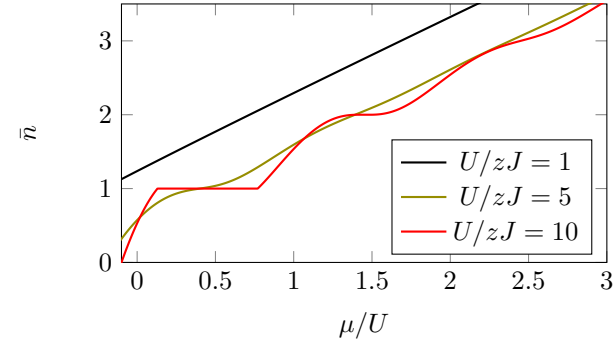


FIGURE 9. Variation du nombre moyen de particules par site \bar{n} avec μ , pour différentes valeurs de U/zJ (point de vue grand canonique).

monter aux propriétés du gaz homogène :

$$n(\mathbf{r}, T) = n_{\text{homog}}[\mu_0 - V_{\text{trap}}(\mathbf{r}), T], \quad (26)$$

c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de la densité $n_{\text{homog}}[\mu, T]$ pour μ variant depuis $-\infty$ jusqu'à la valeur au centre du piège μ_0 . Cette procédure a été mise à profit dans de nombreuses expériences d'atomes froids pour mesurer l'équation d'état de fluides quantiques (Ho & Zhou 2009).

Le principe de l'approche grand-canonique consiste à remplacer l'hamiltonien de Hubbard (10) par l'énergie libre

$$\begin{aligned} \hat{F} &= \hat{H} - \mu \hat{N} \\ &= -J \sum_{\langle ij \rangle} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j + \frac{U}{2} \sum_j \hat{n}_j (\hat{n}_j - 1) - \mu \sum_j \hat{n}_j. \end{aligned} \quad (27)$$

Nous nous intéressons ici à l'état fondamental (température $T = 0$) et nous devons donc chercher l'état fondamental de \hat{F} et son énergie en fonction du potentiel chimique μ . Ce potentiel chimique peut prendre *a priori* toutes les valeurs depuis $-\infty$ (nombre de particules très faible) à $+\infty$ (nombre de particules très élevé). Nous nous intéresserons ici à la région où μ est entre 0 et quelques U , ce qui correspond à des taux de remplissage de quelques unités.

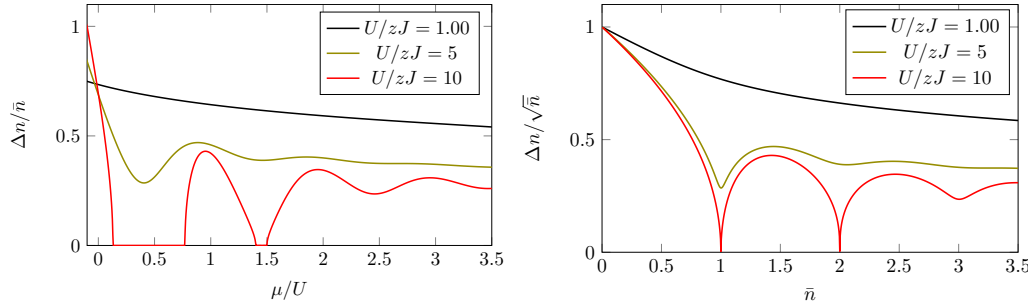


FIGURE 10. Gauche : variation avec μ de la fluctuation relative du nombre de particules par site, pour différentes valeurs de zJ/U . Droite : pour rappel, variation de la même quantité avec \bar{n} (chapitre 4).

Comme dans l'approche développée précédemment, l'ansatz de Gutzwiller

$$|\Psi_G\rangle = |\text{site 1} : \Psi\rangle \otimes |\text{site 2} : \Psi\rangle \otimes \dots \otimes |\text{site } N_s : \Psi\rangle \quad (28)$$

avec

$$|\text{site } j : \Psi\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} c(n) |n\rangle_j \quad \sum_n |c(n)|^2 = 1, \quad (29)$$

permet de capturer une grande partie des phénomènes importants. La minimisation de $\langle \Psi_G | \hat{F} | \Psi_G \rangle$ se fait d'une manière similaire à ce que nous avons vu plus haut, à ceci près que l'on n'impose plus un nombre donné de particule par site

$$\bar{n} = \frac{N_{\text{atomes}}}{N_{\text{sites}}} = \sum_n n |c(n)|^2, \quad (30)$$

mais que l'on se donne une valeur de μ . Une fois le minimum sur $\{c(n)\}$ trouvé pour toute valeur de μ , on connaît les différentes quantités thermodynamiques, y compris le taux d'occupation moyen par site (30).

Un exemple de résultat, montrant la variation de \bar{n} avec μ , est représenté sur la figure 9. On pourra vérifier que cette variation est l'exacte symétrique de celle trouvée précédemment pour μ tracé en fonction de \bar{n} , pour les mêmes valeurs du paramètre zJ/U . Cette symétrie était bien sûr attendue

compte tenu de l'équivalence des ensembles statistiques en ce qui concerne le calcul des valeurs moyennes. Les zones isolantes apparaissent ici comme des plateaux, le long desquels la densité ne change pas bien que le potentiel chimique varie.

En plus de la variation de \bar{n} avec μ , on peut également s'intéresser aux fluctuations Δn . Cette quantité est représentée en figure 10 (gauche) ; on y retrouve les plateaux $\Delta n = 0$ sur les intervalles de valeurs de μ pour lesquels \bar{n} est verrouillé à une valeur entière. Il est important de remarquer que ces situations $\Delta n = 0$, qui sont des points qu'on trace Δn en fonction de \bar{n} (figure 10, droite), sont obtenues pour des segments finis quand on trace Δn en fonction de μ .

Enfin, nous avons tracé en figure 11 un diagramme de phase dans le plan $(zj/U, \mu/U)$ avec une ligne continue séparant

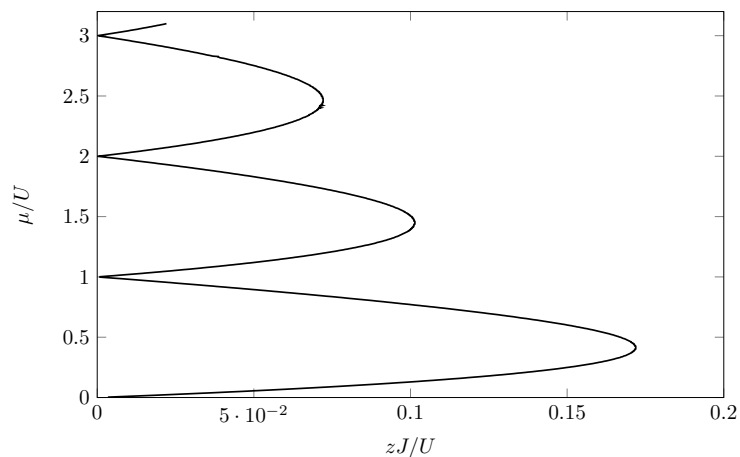
- des lobes correspondant à la phase isolante $\frac{\partial \bar{n}}{\partial \mu} = 0$. Dans le cadre de l'approximation de Gutzwiller, $\Delta n = 0$ pour cette phase ; à chaque lobe est associé une valeur entière donnée de \bar{n} .
- une zone superfluide dans toute la partie droite du plan.

Notons que l'on peut retrouver analytiquement la forme d'un lobe correspondant à un remplissage n donné, au moins au voisinage de sa pointe, en se restreignant à l'ansatz de Gutzwiller tronqué présenté au chapitre précédent, où seuls $c(n)$ et $c(n \pm 1)$ sont non nuls.

2-4 La structure en « pièce montée » (*wedding cake*)

Nous revenons maintenant aux expériences menées dans des pièges harmoniques pour confiner les atomes. Comme nous l'avons indiqué plus haut, le principe de l'approximation de densité locale permet d'utiliser directement le diagramme de la figure 11 pour déterminer l'état stationnaire du nuage.

À température nulle, une configuration donnée du nuage correspond à un choix donné du paramètre zJ/U et une valeur du potentiel chimique au centre du piège μ_0 , soit un point dans le plan $(zj/U, \mu/U)$. L'état du fluide quand on s'éloigne du centre s'obtient par la substitution $\mu \rightarrow \mu_0 - V_{\text{trap}}(\mathbf{r})$, ce qui correspond à la demi-droite verticale $\mu < \mu_0$. Un exemple de cette construction est donné en figure 12. On obtient ainsi une structure qualifiée



(b)

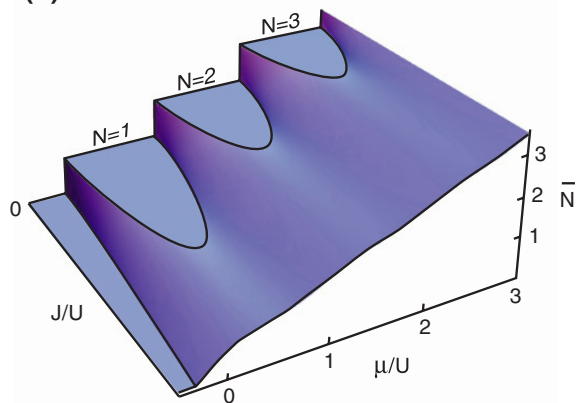


FIGURE 11. Haut : Lobes correspondant à la phase « isolant de Mott » dans le plan $(zJ/U, \mu/U)$. Le reste du plan correspond à la phase superfluide. Bas : représentation 3D de la variation du taux d'occupation par site $\bar{n} \equiv \bar{N}$ en fonction des paramètres de contrôle J/U et μ/U . Cette figure est extraite de la thèse de M. Greiner.

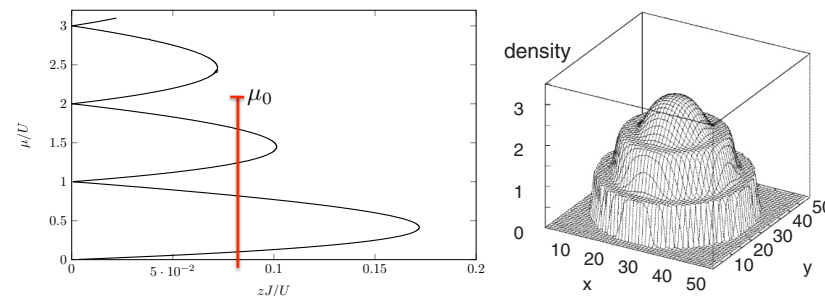


FIGURE 12. Gauche : Principe de l'approximation de densité locale : les différentes phases du gaz piégé s'obtiennent en partant du potentiel chimique central μ_0 et en traçant une demi-droite verticale (en rouge) correspondant aux différents potentiels chimiques $\mu(\mathbf{r}) = \mu_0 - V_{\text{trap}}(\mathbf{r})$ rencontrés quand on s'éloigne du centre du piège. Droite : profil de densité attendu pour la configuration de la figure de gauche. Le centre du piège est superfluide et on traverse deux zones isolantes, avec $\bar{n} = 2$ puis $\bar{n} = 1$ quand on s'éloigne du centre du piège. La figure de droite a été calculée par M. Niemeyer et H. Monien dans une configuration 2D (et publiée par M. Greiner dans sa thèse).

de pièce montée ou de ziggourat selon les auteurs. Les plateaux de densités sont des phases isolantes et correspondent à des remplissages à nombre entier de particules par site ; ils sont séparés par des zones superfluides.

La première mise en évidence de cette structure a été faite par Campbell, Mun, et al. (2006) et Fölling, Widera, et al. (2006). Le principe de l'expérience de Campbell, Mun, et al. (2006) était de sonder le nuage d'atomes de Rb avec une micro-onde accordée sur la transition hyperfine $F = 1 \rightarrow F = 2$. En utilisant le fait que la fréquence de résonance n'est pas exactement la même pour les atomes isolés et pour ceux placés sur un site multiple occupé, il a été possible de reconstruire la structure en pièce montée autour du centre du piège. Fölling, Widera, et al. (2006) utilisent également une micro-onde, mais en présence d'un gradient de champ magnétique. Ceci permet d'induire la transition hyperfine uniquement pour une fine tranche d'atomes. On fait alors une image de cette tranche pour révéler la structure en plateau.

Ces expériences ont reprises plus récemment avec des expériences de

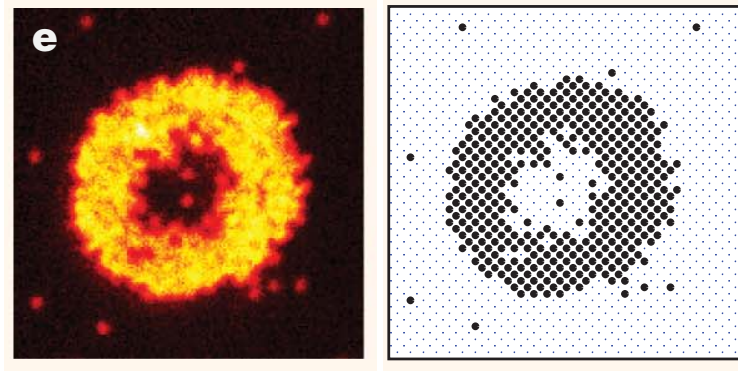


FIGURE 13. Gauche : Exemple de distribution d'atomes dans un piège harmonique superposé à un réseau optique, mesuré avec un « microscope atomique ». Droite : distribution reconstruite, connaissant la réponse optique du système de détection. Cette image révèle deux phases « isolant de Mott », avec $n = 2$ (disque sombre au centre) et $n = 1$ (couronne brillante sur le bord), séparées par une mince zone où le taux de remplissage moyen décroît. Figure extraite de Sherson, Weitenberg, et al. (2010). $V_{x,y} = 23 E_r$.

« microscope atomique », permettant d'imager les atomes en les figeant sur les sites du réseau (Bakr, Peng, et al. 2009; Sherson, Weitenberg, et al. 2010). Nous avons détaillé le principe de ce microscope, qui combine piégeage dipolaire et mélasse optique, dans le cours 2014-15. Rappelons simplement que le profil de densité est en fait binaire, en raison des collisions inélastiques induites par les faisceaux laser de mélasse optique. Par un processus de photo-association, deux atomes occupant le même site peuvent donner naissance à une molécule diatomique qui n'est pas détectée. De ce fait, les sites contenant un nombre impair d'atomes sont vus comme « éclairés » ; les sites contenant un nombre pair d'atomes sont vus comme « sombres », tout comme les sites vides.

Nous montrons sur la figure 13 un exemple de distribution spatiale obtenue pour un gaz piégé à 2D : on y voit deux phases « isolant de Mott » avec un remplissage 2 pour la zone centrale (formant donc un disque sombre) et un remplissage 1 apparaissant comme une couronne brillante.

3 Le mode de Higgs

3-1 Paramètre d'ordre et fonctionnelle d'énergie

La transition entre l'état superfluide et l'état isolant de Mott est un exemple de transition de phase quantique, que l'on peut chercher à décrire de manière approchée par une théorie de champ moyen. Pour préciser la nature de cette transition, plaçons-nous en un point de remplissage entier, $\bar{n} \in \mathbb{N}$, et utilisons une fois encore l'ansatz de Gutzwiller. Nous avons vu au chapitre précédent que l'on peut restreindre la forme des fonctions d'essai aux trois composantes $c(n)$ les plus peuplées, portant sur les états $|\bar{n}\rangle$ et $|\bar{n} \pm 1\rangle$:

$$\begin{pmatrix} c(\bar{n} + 1) \\ c(\bar{n}) \\ c(\bar{n} - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i(\eta+\varphi)} \sin \theta \sin \chi \\ \cos \theta \\ e^{i(\eta-\varphi)} \sin \theta \cos \chi \end{pmatrix}, \quad (31)$$

qui est bien normé pour n'importe quel choix des quatre paramètres réels $\theta, \varphi, \eta, \chi$. Le choix de se placer exactement à un remplissage entier impose des populations égales pour $\bar{n} \pm 1$, soit

$$\chi = \pi/4. \quad (32)$$

Par ailleurs, nous avons vu au chapitre 4 que le minimum d'énergie est atteint pour

$$\eta = 0; \quad (33)$$

fixons pour l'instant ce deuxième paramètre à sa valeur d'équilibre, nous reviendrons sur cette hypothèse en § 4. L'expression générale (31) se simplifie donc en

$$\begin{pmatrix} c(\bar{n} + 1) \\ c(\bar{n}) \\ c(\bar{n} - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \sin \theta / \sqrt{2} \\ \cos \theta \\ e^{-i\varphi} \sin \theta / \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Par ailleurs, nous avons également vu au chapitre 4 que l'énergie ne dépend pas de φ , qui prend donc une valeur aléatoire lors de la transition isolant \rightarrow superfluide.

Définissons maintenant le paramètre d'ordre caractérisant cette transition. En analogie avec ce que nous avons vu pour un gaz homogène, considérons pour cela la valeur moyenne de l'opérateur \hat{b} dans l'état de Gutzwiller $|\Psi_G\rangle$. Nous obtenons à partir de (34), à une constante multiplicative

près

$$\psi = \rho e^{i\varphi} \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{1}{2} \sin(2\theta). \quad (35)$$

Ce paramètre d'ordre est un nombre complexe et nous avons vu au chapitre 4 que l'énergie par site qui lui est associée s'écrit au voisinage de la transition

$$\epsilon(\psi) = \frac{U}{2} |\psi|^4 - A |\psi|^2 \quad (36)$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \bar{n} z J \left[1 + \frac{1}{2\bar{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{\bar{n}}} \right] - \frac{U}{2} \\ &\approx 2\bar{n} z J - \frac{U}{2} \quad \text{pour} \quad \bar{n} \gg 1. \end{aligned} \quad (37)$$

On peut généraliser cette énergie au cas où l'état du gaz n'est pas le même sur chaque site du réseau. Continuons à travailler dans le cadre de l'ansatz de Gutzwiller :

$$|\Psi_G\rangle = |\text{site 1} : \Psi_1\rangle \otimes |\text{site 2} : \Psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\text{site } j : \Psi_j\rangle \otimes \dots \quad (38)$$

mais supposons maintenant que les états ψ_j , et donc les coefficients $c_j(n)$, varient avec l'indice de site j . Si cette variation est assez douce, on peut passer à une limite continue : le paramètre d'ordre ψ_j , qui dépend lui aussi du site j , s'écrit alors comme une fonction complexe $\psi(\mathbf{r})$ de la variable d'espace \mathbf{r} . L'énergie associée à $\psi(\mathbf{r})$ s'écrit

$$E(\psi) = \int \mathcal{H}[\psi(\mathbf{r})] d^3r, \quad (39)$$

où la densité d'énergie est donnée par [cf. appendice et Polkovnikov, Altman, et al. (2005)]

$$\mathcal{H}(\psi) = \frac{U}{2} |\psi|^4 - A |\psi|^2 + B |\nabla \psi|^2. \quad (40)$$

À l'énergie sur site donnée en (36) est venu s'ajouter le terme $B |\nabla \psi|^2$, où le coefficient B est relié au coefficient tunnel J . Ce terme représente l'énergie à payer pour créer des fluctuations spatiales du paramètre d'ordre.

L'état fondamental de (39-40) est obtenu pour un paramètre d'ordre ψ uniforme dans l'espace ($\nabla \psi = 0$).

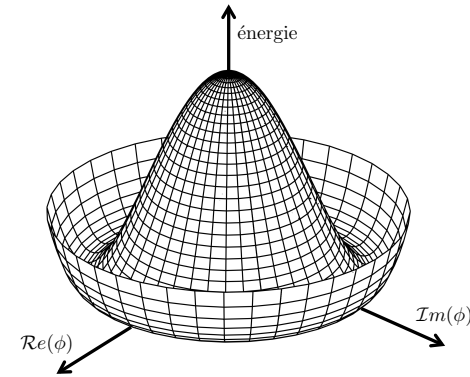


FIGURE 14. Énergie $\epsilon(\rho)$ avec $\rho = |\psi|$ pour un paramètre d'ordre ψ complexe, dans le cas $A > 0$.

- Si $A < 0$, alors le minimum correspond au paramètre d'ordre nul $\psi = 0$. Pour l'ansatz de Gutzwiller, ceci correspond à la phase isolante, avec $c(\bar{n}) = 1$, $c(\bar{n} \pm 1) = 0$.
- Si $A > 0$, le minimum est obtenu pour

$$|\psi|^2 = \frac{A}{U}. \quad (41)$$

Dans ce cas, la variation de $\epsilon(\psi)$ avec les deux composantes réelles et imaginaires de ψ a la forme bien connue de *chapeau mexicain* représentée sur la figure 14 : il y a une infinité de ψ qui minimisent ϵ , puisque seul le module de ψ est imposé. Sa phase peut être choisie de manière quelconque, ce choix correspondant à une brisure spontanée de la symétrie $U(1)$.

Modélisation plus précise. Pour arriver à la fonctionnelle d'énergie (39-40), nous avons notablement simplifié les étapes d'une démarche rigoureuse. Il faut en principe partir de la description de l'état sur site $|\Psi_j\rangle$ en terme de 4 champs :

$$\begin{pmatrix} c_j(\bar{n} + 1) \\ c_j(\bar{n}) \\ c_j(\bar{n} - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i(n_j + \varphi_j)} \sin \theta_j \sin \chi_j \\ \cos \theta_j \\ e^{i(n_j - \varphi_j)} \sin \theta_j \cos \chi_j \end{pmatrix}. \quad (42)$$

et écrire les équations d'évolution couplées de ces 4 champs θ_j , φ_j , η_j et χ_j . On peut alors montrer que l'on peut éliminer les variations des deux champs η_j (qui reste voisin de 0) et χ_j (qui reste voisin de $\pi/4$) pour se ramener à un problème où seuls θ_j et φ_j jouent un rôle, via la fonctionnelle d'énergie déterminée précédemment. Nous reviendrons sur cette procédure en § 4 [voir également l'appendice de chapitre et Polkovnikov, Altman, et al. (2005)]

Lien avec la condensation de Bose–Einstein. La fonctionnelle d'énergie (39-40) est formellement équivalente à celle utilisée pour décrire la condensation de Bose–Einstein d'un gaz homogène. La fonction complexe $\psi(\mathbf{r})$ représente alors l'amplitude de probabilité pour l'état fondamental $\mathbf{p} = 0$. Le terme en $U|\psi|^4$ représente les interactions entre particules, telles que nous les avons modélisées au chapitre 3 avec $U = G$. Le dernier terme représente l'énergie cinétique habituelle avec $B = \hbar^2/2m$. Au voisinage de la température nulle, A est égal au potentiel chimique $\mu = g\rho$.

3-2 Dynamique dans le modèle de Landau–Ginzburg

Intéressons-nous maintenant à la dynamique du problème dans le cas $A > 0$, correspondant au modèle en chapeau mexicain. Intuitivement, si on se réfère à la mécanique classique et que l'on place une particule ponctuelle dans ce type de potentiel, on s'attend à trouver deux types de mouvement.

- Le premier correspond à la rotation de la bille au fond de la rigole, c'est-à-dire un mouvement où l'angle polaire varie linéairement en temps, la distance au centre restant constante. La fréquence associée à ce mouvement peut être arbitrairement basse.
- Le second correspond à une oscillation radiale de la particule, pour un angle polaire donné. Dans l'approximation harmonique, la fréquence de cette oscillation se fait avec une pulsation ω reliée à la courbure du potentiel en $\rho = \rho_{\min}$

$$\omega^2 \propto \left. \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \rho^2} \right|_{\rho=\rho_{\min}} = 4A. \quad (43)$$

Que devient cette intuition quand on passe en mécanique quantique ?

La réponse n'est pas évidente car la question est en fait ambiguë. Il ne suffit pas de se donner la densité d'énergie $\mathcal{H}(\psi)$ pour y répondre. Il faut également connaître le terme dynamique \mathcal{L}_{dyn} qui intervient dans l'action, pour former la densité de lagrangien

$$\mathcal{L}(\psi) = \mathcal{L}_{\text{dyn}}(\psi) - \mathcal{H}(\psi). \quad (44)$$

Pour progresser, limitons-nous à deux cas :

- (i) l'équation de Schrödinger, encore appelé *cas non relativiste*. La densité de Lagrangien (déjà rencontrée au chapitre 3) s'écrit

$$\mathcal{L}_{\text{dyn}}(\psi) = \frac{i\hbar}{2} (\psi^* \dot{\psi} - \psi \dot{\psi}^*). \quad (45)$$

- (ii) la théorie relativiste des champs, pour laquelle on prend

$$\mathcal{L}_{\text{dyn}}(\psi) = \frac{B}{c^2} \dot{\psi}^* \dot{\psi}, \quad (46)$$

où c à la dimension d'une vitesse. Sous cette forme, on peut regrouper les termes de dérivées spatiales de \mathcal{H} et de dérivée temporelle \mathcal{L}_{dyn} sous une forme covariante :

$$\frac{B}{c^2} \dot{\psi}^* \dot{\psi} - B|\nabla\psi|^2 \equiv -B|\partial_\mu\psi|^2. \quad (47)$$

Nous appellerons cette situation « cas relativiste », même si on peut la rencontrer dans un système d'atomes froids, bougeant donc très lentement. La vitesse c correspond alors (par exemple) à la vitesse d'ondes sonores.

Plaçons-nous au voisinage du minimum (41) de $E(\psi)$, en prenant par convention une phase nulle pour le paramètre d'ordre, soit $\psi_{\min} = \psi_0 > 0$. Notons

$$\psi = \psi_0 + \delta_a + i\delta_p \quad (48)$$

où $\delta_{a,p}$ sont des quantités réelles dépendant du temps et de l'espace, et supposées petites devant ψ_0 . La quantité δ_a correspond à un changement d'amplitude de ψ et δ_p à un changement de phase.

Le développement de $\mathcal{H}(\psi)$ au voisinage de ce minimum donne

$$\mathcal{H}(\delta_a, \delta_p) = \epsilon_{\min} + 2A\delta_a^2 + B(\nabla\delta_a)^2 + B(\nabla\delta_p)^2. \quad (49)$$

Comme prévu, cette énergie ne contient pas de terme linéaire en $\delta_{a,p}$ puisqu'on fait un développement au voisinage du minimum. Par ailleurs, cette énergie ne fait pas intervenir directement δ_p mais seulement son gradient, puisqu'un changement uniforme de δ_p correspond à une variation au fond de la rigole du chapeau mexicain, donc sans variation d'énergie. Notons enfin qu'à partir de maintenant, nous choisirons l'origine des énergies en ϵ_{\min} , de sorte que la solution ψ_0 est une solution stationnaire.

La partie dynamique de la densité de lagrangien s'écrit pour les deux cas identifiés ci-dessus :

$$\text{Cas (i) : } \mathcal{L}_{\text{dyn}}(\delta_a, \delta_p) = \hbar \left(\dot{\delta}_a \delta_p - \delta_a \dot{\delta}_p \right) \quad (50)$$

et

$$\text{Cas (ii) : } \mathcal{L}_{\text{dyn}}(\delta_a, \delta_p) = \frac{B}{c^2} \left(\dot{\delta}_a^2 + \dot{\delta}_p^2 \right). \quad (51)$$

Ecrivons maintenant les deux équations de Lagrange pour les deux variables $\delta_{a,p}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_j} \right) = \frac{\partial L}{\partial \delta_j} \quad j = a, p. \quad (52)$$

où $L = \int \mathcal{L}$ et où les dérivées intervenant dans ces équations doivent être comprises comme des dérivées fonctionnelles (Feynman & Hibbs 1965; Schiff 1968). On trouve

$$\begin{aligned} \text{Cas (i) : } \quad \hbar \dot{\delta}_a &= B \nabla^2 \delta_p \\ \hbar \dot{\delta}_p &= -2A \delta_a + B \nabla^2 \delta_a \end{aligned} \quad (53)$$

et

$$\begin{aligned} \text{Cas (ii) : } \quad (B/c^2) \ddot{\delta}_p &= B \nabla^2 \delta_p \\ (B/c^2) \ddot{\delta}_a &= -2A \delta_a + B \nabla^2 \delta_a \end{aligned} \quad (54)$$

Les membres de droite de ces deux systèmes sont identiques, puisqu'ils proviennent de la même fonctionnelle d'énergie (40). En revanche, les membres de gauche sont différents et correspondent à deux structures de modes également différentes, comme nous allons le voir dans le paragraphe qui suit.

3-3 Mode de Goldstone, mode de Higgs

Pour étudier la structure de mode liée aux deux équations du mouvement (57) et (54), nous allons regarder les relations de dispersion auxquelles elles conduisent.

Cas relativiste. Commençons par le cas « relativiste » (54), qui est le plus simple. On dispose dans ce cas de deux équations découplées pour la phase et pour l'amplitude, conduisant donc à deux modes indépendants. Les relations de dispersion déduites de (54) sont :

$$\begin{aligned} \text{Cas (ii) : } \quad \omega^2 &= c^2 k^2 & (55) \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + c^2 k^2 & \text{avec } \omega_0 = c\sqrt{2A/B}, & (56) \end{aligned}$$

que nous allons maintenant discuter.

Le premier mode (55), provenant de la variation de la phase δ_p , est un mode de type phonon. Sa fréquence tend vers 0 quand on considère des vecteurs d'onde k de plus en plus faibles. Ce mode de fréquence nulle est le mode de Goldstone que l'on attend quand on traverse une transition de phase correspondant à la brisure spontanée d'une symétrie continue, en l'occurrence le choix de la phase du paramètre d'ordre ψ : il est logique que cela ne coûte quasiment pas d'énergie de construire des états du système où la phase n'a pas une valeur uniforme comme pour l'état fondamental, mais varie uniquement sur une échelle de longueur arbitrairement grande.

Le deuxième mode (56), provenant de la variation de l'amplitude δ_a , est précisément le mode de Higgs. Sa fréquence ne tend pas vers 0 quand le vecteur d'onde k tend vers 0, mais vers la limite finie ω_0 . Cette limite d'une fréquence non nulle pour $k \rightarrow 0$ correspond à l'image intuitive d'une particule classique oscillant radialement dans le potentiel en chapeau mexicain. Notons que la pulsation ω_0 varie comme \sqrt{A} et s'annule donc au point critique.

Cas non relativiste. Passons maintenant au cas « non relativiste » (57), correspondant par exemple à l'équation de Gross-Pitaevskii pour un gaz de bosons sans spin. Nous retrouvons donc exactement la situation déjà étudiée au chapitre 3 (§ 3.3). Cherchons une solution sous forme d'onde

plane en $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ pour δ_a et δ_p . Le système (57) couple les amplitudes $\bar{\delta}_a$ et $\bar{\delta}_p$ de ces ondes planes et elles doivent donc être solution du système 2×2 :

$$\begin{aligned} \text{Cas (i) : } \quad & i\hbar\omega \bar{\delta}_a + Bk^2 \bar{\delta}_p = 0 \\ & (2A + Bk^2) \bar{\delta}_a - i\hbar\omega \bar{\delta}_p = 0 \end{aligned} \quad (57)$$

Ce système n'admet de solution non nulle que si son déterminant est nul, ce qui donne la relation de dispersion

$$\text{Cas (i) : } (\hbar\omega)^2 = Bk^2 (2A + Bk^2). \quad (58)$$

Ceci n'est autre que la relation de Bogoliubov, écrite pour $A = g\rho$ et $B = \hbar^2/2m$. On a donc toujours un mode tel que $\omega \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow 0$, ce qui était attendu d'après le théorème de Goldstone. En revanche, il n'y a pas de mode de Higgs dans ce cas même si le potentiel en chapeau mexicain est bien là ! Ce potentiel n'est donc pas une garantie de l'existence du mode de Higgs.

4 Le mode de Higgs dans un réseau optique

Nous ne discuterons pas ici le rôle crucial du mode de Higgs, ni du mécanisme de Higgs qui l'accompagne, dans le domaine de la physique des particules et nous aborderons seulement le cas de la matière condensée. Une fois identifiés les deux ingrédients indispensables pour son observation, à savoir le potentiel en chapeau mexicain (40) d'une part, la dynamique de type relativiste (45) d'autre part, il est naturel de rechercher si l'on peut générer ce mode dans des systèmes *a priori* non relativistes, au prix d'une modification de l'hamiltonien et de ses variables dynamiques. Il est clair qu'il faut se tourner vers des problèmes plus riches que celui d'un gaz de bosons uniforme, puisqu'on est alors dans le cas non relativiste simple (57) qui ne conduit qu'à un seul mode, de type Goldstone.

Dans le cadre de la supraconductivité, cette question a été abordée par de nombreux auteurs et le mode de Higgs a finalement pu être identifié dans des expériences menées au début des années 80 [voir par exemple Sooryakumar & Klein (1980) and Sooryakumar & Klein (1981) avec la discussion théorique de Littlewood & Varma (1981), ainsi que Méasson, Gal-

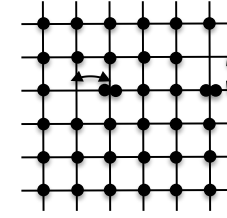


FIGURE 15. Réseau optique pour un remplissage entier (ici $\bar{n} = 1$) : la conduction se fait de manière symétrique par des trous (des sites vides) et des « particules » (des sites doublement occupés).

lais, et al. (2014) pour des expériences récentes]. Une revue détaillée est présentée par Podolsky, Auerbach, et al. (2011) et Pekker & Varma (2014).

Dans le cadre des atomes froids, la discussion théorique d'un mode d'amplitude a été initiée par Altman & Auerbach (2002) et Polkovnikov, Sachdev, et al. (2002), puis reprise de manière plus approfondie par Huber, Altman, et al. (2007). L'idée essentielle est de constater que le lagrangien relativiste correspond à une transition de phase dans un système possédant une symétrie « particule-trou » (figure 15). Cette symétrie se retrouve si on considère un réseau à remplissage entier, la transition de phase correspondant à la transition superfluide–isolant de Mott.

4-1 Le cas d'un mode uniforme

Nous allons nous intéresser dans ce paragraphe au cas particulier d'un mode uniforme, pour lequel tous les états $|\Psi_j\rangle$ aux différents sites du réseau sont égaux. La raison de cette hypothèse simplificatrice est la suivante : le mode de Higgs a pour relation de dispersion $\omega^2 = \omega_0^2 + c^2k^2$, ce qui signifie que sa fréquence reste non nulle même si on considère des excitations de vecteurs d'onde k arbitrairement petits. On s'attend donc également à le trouver pour le cas $k = 0$ qui correspond à une excitation homogène sur tout le système.

Cette hypothèse simplifie considérablement l'analyse, comme nous allons le voir maintenant. Elle va nous permettre de montrer avec des calculs

relativement légers comment on aboutit alors à la partie dynamique du lagrangien sous la forme relativiste $\dot{\psi}^* \dot{\psi}$. Nous dirons ensuite quelques mots sur le cas général où $|\Psi_j\rangle$ varie d'un site à l'autre, ce cas étant détaillé dans l'appendice en fin de chapitre.

Comme indiqué en (42), il faut en principe se donner les 4 champs $\{\theta_j, \chi_j, \eta_j, \varphi_j\}$ pour caractériser l'état du gaz sur le réseau dans le cadre de l'ansatz de Gutzwiller :

$$|\Psi_j\rangle = \begin{pmatrix} e^{i(\eta_j + \varphi_j)} \sin \theta_j \sin \chi_j \\ \cos \theta_j \\ e^{i(\eta_j - \varphi_j)} \sin \theta_j \cos \chi_j \end{pmatrix} \quad (59)$$

Si le mode est uniforme, ces champs ne dépendent pas de j et constituent donc simplement 4 variables $\{\theta, \eta, \varphi, \chi\}$. Imposer au gaz d'être au taux de remplissage \bar{n} entier fixe la valeur de $\chi = \pi/4$ et on se retrouve face à un problème à trois variables $\{\theta, \eta, \varphi\}$ en fonction desquelles l'état du gaz en chaque site s'écrit

$$|\Psi_j\rangle = \begin{pmatrix} e^{i(\eta + \varphi)} \sin \theta / \sqrt{2} \\ \cos \theta \\ e^{i(\eta - \varphi)} \sin \theta / \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (60)$$

L'énergie associée à cet état s'écrit, à l'ordre 2 inclus en η :

$$E(\rho, \eta) = 2nzJ \eta^2 \rho^2 + \epsilon(\rho) \quad \text{avec} \quad \epsilon(\rho) = \frac{U}{2} \rho^4 - A\rho^2 \quad (61)$$

et où

$$\rho = \frac{1}{2} \sin(2\theta) \quad (62)$$

est le module du paramètre d'ordre ψ introduit au paragraphe précédent.

Il nous reste à évaluer la partie dynamique du lagrangien. Partons pour cela de l'expression générale de $\mathcal{L}_{\text{dyn}}(\psi) = \frac{i\hbar}{2} (\dot{\psi}^* \dot{\psi} - \dot{\psi} \dot{\psi}^*)$ pour l'équation de Schrödinger et appliquons-là à $|\Psi_j\rangle$. Un calcul sans difficulté donne

$$\mathcal{L}_{\text{dyn}} \equiv \frac{i\hbar}{2} \left(\langle \dot{\Psi}_j | \dot{\Psi}_j \rangle - \langle \dot{\Psi}_j | \dot{\Psi}_j \rangle \right) = -\hbar \dot{\eta} \rho^2 \quad (63)$$

de sorte que nous sommes ramenés à l'étude du système dynamique à deux variables ρ, η avec, en posant $\hbar = 1$ pour simplifier les notations

$$\mathcal{L}(\rho, \eta) = -\dot{\eta} \rho^2 - 2nzJ \eta^2 \rho^2 - \epsilon(\rho). \quad (64)$$

Remarque. Notons que la variable φ a disparu du problème. Elle n'intervient pas dans l'énergie et elle ne figure pas non plus dans la partie dynamique du lagrangien dans l'hypothèse d'un état uniforme. En fait, cette variable devient pertinente quand on prend en compte les variations spatiales de χ , c'est-à-dire une différence de population entre les états $|n \pm 1\rangle_j$. Cette différence de population se couple à la phase relative φ entre ces deux états pour donner naissance à un mode de Goldstone, dont la fréquence tend vers 0 quand son vecteur d'onde tend vers 0.

4-2 Le lagrangien « relativiste »

Nous souhaitons maintenant montrer comment on peut arriver pour la partie dynamique du lagrangien à la forme relativiste :

$$\mathcal{L}_{\text{dyn}}(\psi) = \frac{B}{c^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (65)$$

nécessaire pour l'observation du mode de Higgs.

Plaçons-nous pour commencer dans le cadre du mode uniforme envisagé au paragraphe précédent et montrons comment l'élimination de la variable η permet d'arriver à la forme souhaitée. Partant du lagrangien (64), nous remarquons d'abord que nous pouvons le remplacer par le lagrangien équivalent

$$\mathcal{L}'(\rho, \eta) = 2\eta \rho \dot{\rho} - 2nzJ \eta^2 \rho^2 - \epsilon(\rho) \quad (66)$$

en lui ajoutant la dérivée totale par rapport au temps $\frac{d}{dt}(\eta \rho^2)$. On fait alors apparaître un carré parfait qui regroupe toute la contribution de la variable η :

$$\mathcal{L}'(\rho, \eta) = -2nzJ \left(\eta \rho - \frac{\dot{\rho}}{2nzJ} \right)^2 + \frac{\dot{\rho}^2}{2nzJ} - \epsilon(\rho). \quad (67)$$

Sous cette forme, on constate que la dynamique de la variable η est figée. Son équation du mouvement se réduit à

$$\eta \rho - \frac{\dot{\rho}}{2nzJ} = 0 \quad (68)$$

ce qui annule le premier terme du lagrangien. Le premier terme (carré parfait) de (67) peut donc être ignoré et on arrive au lagrangien d'une particule

$$\left(\begin{array}{c} e^{i(\eta+\varphi)} \sin \theta \sin \chi \\ \cos \theta \\ e^{i(\eta-\varphi)} \sin \theta \cos \chi \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \rho = \frac{1}{2} \sin 2\theta \\ \eta \end{array} \right\} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)^2 \\ \left. \begin{array}{l} \varphi \\ \chi \end{array} \right\} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ \psi = \rho e^{i\varphi} \end{array} \right.$$

FIGURE 16. Procédure pour aboutir au lagrangien dynamique (65) par élimination des champs $\eta(\mathbf{r})$ et $\chi(\mathbf{r})$ au profit des champs $\rho(\mathbf{r})$ et $\varphi(\mathbf{r})$, puis du paramètre d'ordre complexe $\psi = \rho e^{i\varphi}$.

massive en mouvement dans le potentiel en chapeau mexicain

$$\mathcal{L}''(\rho, \eta) = \frac{1}{2nzJ} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 - \epsilon(\rho), \quad (69)$$

qui correspond bien, pour le cas particulier $\psi = \rho$ du mode uniforme, à la forme recherchée (65) avec

$$\frac{B}{c^2} = \frac{1}{2nzJ}. \quad (70)$$

La fréquence du mode de Higgs (56) se déduit de ce résultat

$$\omega_0 = \sqrt{8} \bar{n}zJ \left(1 - \frac{U}{4\bar{n}zJ} \right)^{1/2}. \quad (71)$$

Elle s'annule au point de transition $U = 4\bar{n}zJ$.

Quand on passe à des modes non uniformes (*cf.* appendice), les quantités $\rho(t)$ et $\eta(t)$ deviennent des champs $\rho(\mathbf{r}, t)$ et $\eta(\mathbf{r}, t)$. La démarche que nous venons de suivre continue à s'appliquer : le champ η (gaussien) peut s'éliminer par intégration et ceci fait apparaître le terme $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)^2$ correspondant au terme dynamique « relativiste » nécessaire pour faire apparaître le

mode de Higgs. En parallèle, le champ $\chi(\mathbf{r}, t)$ s'élimine par intégration pour faire apparaître le terme $\rho^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2$. On remarque finalement que

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)^2 + \rho^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (72)$$

avec $\psi = \rho e^{i\varphi}$, ce qui constitue la partie dynamique relativiste (65) désirée pour le lagrangien. Cette procédure est résumée sur la figure. La prise en compte du couple de variables φ, χ ne modifie pas le résultat (71) pour le mode de Higgs provenant du couple ρ, η . Elle fait simplement apparaître le mode de Goldstone (55), dont la fréquence ω tend vers 0 quand $k \rightarrow 0$ (et donc s'annule dans l'hypothèse du mode uniforme).

Remarque 1. Il est essentiel pour que le traitement qui précède soit valable que l'on se soit placé à un nombre de remplissage entier. C'est grâce à cette hypothèse, qui assure physiquement la symétrie particule-trou, que nous avons pu éliminer les champs σ et η pour aboutir à un lagrangien en $\dot{\rho}^2$ et en $\dot{\varphi}^2$. Si on ne place pas au remplissage entier (ou en son voisinage), des termes d'ordre 1 en $\dot{\rho}$ et en $\dot{\varphi}$ subsistent ; ils dominent les termes en $\dot{\rho}^2$ et en $\dot{\varphi}^2$ et on perd la séparation entre mode de Higgs et mode de Goldstone, à l'instar de ce qui se produit pour les modes de Bogoliubov.

Remarque 2. *Stricto sensu* l'existence du mode de Higgs n'est pas la garantie de son observabilité. En effet, les termes que nous avons négligés dans notre approche parce qu'ils étaient d'un ordre supérieur peuvent rendre ce mode instable, en favorisant sa décroissance en deux (ou plus) modes de Goldstone (Podolsky, Auerbach, et al. 2011). Il faut en pratique évaluer la largeur de ce mode liée aux processus de décroissance et la comparer à la valeur de ω_H elle-même, ce qui revient à définir un « facteur de qualité ». Pour le cas des réseaux optiques, on prédit que ce mode possède un bon facteur de qualité, sauf au voisinage immédiat du point de transition, auquel cas $\omega_H \rightarrow 0$ (Podolsky, Auerbach, et al. 2011).

4-3 Observation du mode de Higgs

L'observation expérimentale du mode de Higgs dans un réseau optique a été décrite dans deux publications récentes, Bissbort, Götze, et al. (2011) et Endres, Fukuhara, et al. (2012). La première publication est basée sur la méthode de spectroscopie de Bragg, déjà décrite au chapitre 2 : on mesure l'énergie transférée au gaz en fonction de la différence de fréquence entre les deux faisceaux d'excitation, pour un transfert donné d'impulsion $\hbar k$. La comparaison entre la courbe mesurée et des simulations numériques permet d'identifier le pic provenant du mode d'amplitude. Notons qu'avec cette méthode, on ne sonde pas le mode de Higgs à vecteur d'onde nul et on ne révèle donc pas complètement sa relation de dispersion en $\omega_k^2 = \omega_0^2 + c^2 k^2$, en particulier le fait que ω_k tend vers une limite finie non nulle quand $k \rightarrow 0$.

La deuxième publication (Endres, Fukuhara, et al. 2012) utilise la technique développée initialement par le groupe de Zurich (Stöferle, Moritz, et al. 2004; Schori, Stöferle, et al. 2004) pour sonder des modes de très bas vecteur d'onde dans un réseau optique 2D au voisinage de $\bar{n} = 1$. On module l'intensité des faisceaux créant le réseau, ce qui a pour effet principal de moduler le terme d'effet tunnel de manière uniforme sur le réseau. On mesure là encore l'échauffement du gaz après une durée de modulation donnée, en fonction de la fréquence de modulation. L'expérience de Endres, Fukuhara, et al. (2012) tire parti d'une détection très précise de la température grâce à un microscope atomique, ce qui permet de réduire fortement l'échauffement minimal détectable. Cela permet en particulier de rester dans un domaine de température compatible avec l'existence de la phase isolante (Gerbier 2007). La fréquence du mode de Higgs est déterminée comme le seuil au dessus duquel on observe cet échauffement (figure 17, droite). Le résultat principal de Endres, Fukuhara, et al. (2012) est représenté sur la gauche de la figure 17, montrant la variation de la fréquence du mode ainsi déterminé en fonction du paramètre J/U contrôlant la transition superfluide–isolant. L'accord théorie expérience est très bon, aussi bien du côté superfluide pour le mode de Higgs que du côté isolant pour le mode d'excitation particule-trou (présentant un gap).

Notons pour terminer que ces deux expériences sur le mode de Higgs ont été faites avec des gaz confinés dans un potentiel harmonique, donc non homogènes. Il serait intéressant de les reprendre avec des systèmes

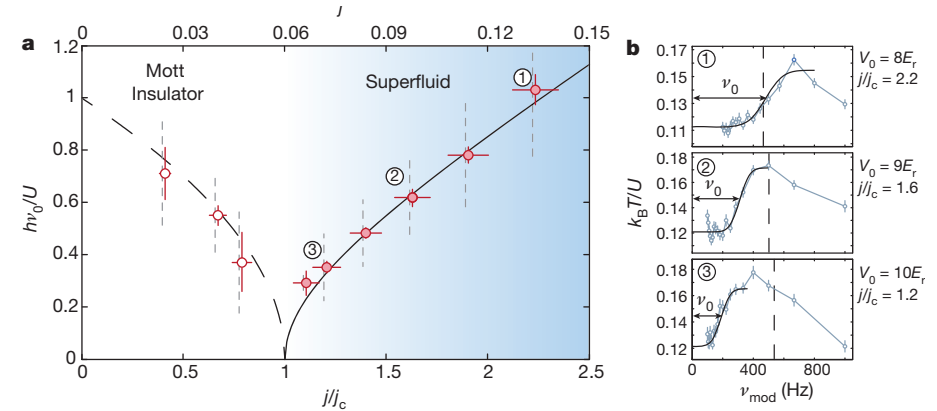


FIGURE 17. Gauche : Variation de la fréquence du mode de Higgs au voisinage du point de transition superfluide – isolant de Mott. Droite : signal d'absorption utilisé pour définir la valeur expérimentale du mode de Higgs. Figure extraite de Endres, Fukuhara, et al. (2012).

homogènes, et étudier si cela permet d'observer le mode de Higgs comme un pic bien défini dans le spectre d'excitation, et non pas comme un seuil pour une probabilité d'excitation variant ensuite de manière douce.

5 Appendice : identification des modes

Le but de cet appendice est de décrire la démarche (relativement longue et complexe !) permettant de faire apparaître les modes de Goldstone et de Higgs dans un réseau optique dans le cadre de l'approximation de Gutzwiller. Comme dans le texte principal du chapitre, nous nous limitons au cas du remplissage entier (n atomes par site en moyenne). Notre traitement suivra de près celui présenté dans l'article de Polkovnikov, Altman, et al. (2005).

Passage à la limite continue. Nous nous plaçons dans le cas général où les excitations du gaz d'atomes sur réseau dépendent du site. Les para-

mètres servant à caractériser l'état sur le site j sont les deux amplitudes θ_j, χ_j et les deux phases η_j, φ_j :

$$|\Psi_j\rangle = \begin{pmatrix} e^{i(\eta_j + \varphi_j)} \sin \theta_j \sin \chi_j \\ \cos \theta_j \\ e^{i(\eta_j - \varphi_j)} \sin \theta_j \cos \chi_j \end{pmatrix}. \quad (73)$$

On suppose que ces quatre paramètres varient lentement d'un site à l'autre, de sorte que l'on peut faire une approximation continue (à 1D pour simplifier les notations³, soit $z = 2$ proches voisins par site)

$$\sum_j \rightarrow \frac{1}{a} \int dx \quad (74)$$

$$f_j \rightarrow f(x) \quad (75)$$

$$f_{j+1} - f_j \rightarrow a \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \dots \quad (76)$$

où a représente le pas du réseau.

On se concentre comme dans ce qui précède sur le cas d'un remplissage entier ($\chi = \pi/4$) et l'on pose $\sigma = -2\chi + \frac{\pi}{2}$ avec $\sigma \ll 1$. On peut alors mettre la densité de lagrangien sous la forme ($\hbar = 1$) :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{dyn}} - \mathcal{H} \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}_{\text{dyn}} = -\dot{\eta}\rho^2 + \dot{\varphi}\rho^2\sigma \quad (77)$$

et pour $\bar{n} \gg 1$

$$\mathcal{H} \approx \epsilon(\rho) + nJ\rho^2(4\eta^2 + \sigma^2) + 2nJa^2 \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 + \rho^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (78)$$

où l'on a posé comme précédemment

$$\epsilon(\rho) = -A\rho^2 + \frac{U}{2}\rho^4 \quad \text{avec} \quad A = 4nJ - \frac{U}{2}. \quad (79)$$

Rappelons que nous sommes ici à une dimension, soit $z = 2$ proches voisins par site, de sorte que cette définition de $\epsilon(\rho)$ coïncide bien avec celle utilisée plus haut pour le potentiel en chapeau mexicain.

3. *Stricto sensu* la nature de la transition est modifiée à une dimension : elle devient une transition de type Kosterlitz-Thouless. Nous utilisons ici cette version 1D simplement pour avoir des expressions plus simples.

Élimination des champs η et σ . En ajoutant la dérivée totale par rapport au temps $\frac{d}{dt}(\eta\rho^2)$, on transforme la partie dynamique du lagrangien en

$$\mathcal{L}_{\text{dyn}} = 2\dot{\rho}\rho\eta + \dot{\varphi}\rho^2\sigma. \quad (80)$$

Sous cette forme, on voit que le lagrangien du problème dépend des champs η et σ , mais pas de leur dérivée. De plus cette variation est quadratique, ce qui correspond à un champ gaussien. Dans le cadre du formalisme de l'intégrale de chemin, la contribution de tous les chemins possibles associés à ces champs se fait alors simplement : ces champs s'éliminent après intégration, ce qui permet d'arriver à une dynamique ne portant que sur les champs ρ et φ .

Plus précisément, on reconnaît dans la densité de lagrangien le début de deux carrés parfaits pour les champs η et σ que l'on souhaite éliminer

$$-4nJ\rho^2\eta^2 + 2\dot{\rho}\rho\eta = -4nJ \left(\rho\eta - \frac{\dot{\rho}}{4nJ} \right)^2 + \frac{\dot{\rho}^2}{4nJ} \quad (81)$$

et

$$-nJ\rho^2\sigma^2 + \dot{\varphi}\rho^2\sigma = -nJ\rho^2 \left(\sigma - \frac{\dot{\varphi}}{2nJ} \right)^2 + \frac{\rho^2\dot{\varphi}^2}{4nJ}. \quad (82)$$

Après intégration sur η et σ , on arrive à la densité de lagrangien

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\rho, \varphi) &= \frac{\dot{\rho}^2}{4nJ} - \epsilon(\rho) - 2nJa^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 \\ &+ \rho^2 \left[\frac{\dot{\varphi}^2}{4nJ} - 2nJa^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (83)$$

C'est bien le lagrangien « relativiste » recherché avec une dépendance quadratique pour les dérivées temporelles des deux champs ρ et φ .

Relations de dispersion pour les champs ρ et φ . La fin de l'analyse est calquée sur ce que nous avons vu plus haut sur les modes d'amplitude et de phase. Le mouvement du champ ρ au voisinage du minimum de $\epsilon(\rho)$ est donné par :

$$\frac{1}{2nJ} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} + 4nJa^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \quad (84)$$

Les mouvements de petite amplitude correspondent à la relation de dispersion

$$\omega^2 = \omega_H^2 + c^2 k^2 \quad (85)$$

avec la fréquence du mode de Higgs

$$\omega_H^2 = 2nJ \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \rho^2} \right). \quad (86)$$

La courbure de ϵ est évaluée au fond du chapeau mexicain, soit

$$\left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \rho^2} \right) = 4A \quad \text{soit} \quad \omega_H = \sqrt{8} \, 2nJ \left(1 - \frac{U}{8nJ} \right)^{1/2}, \quad (87)$$

ce qui coïncide avec (71) pour $z = 2$ proches voisins. La vitesse du son c est quant à elle donnée par

$$c = \sqrt{8} \, nJa. \quad (88)$$

L'équation du mouvement pour le champ φ est donnée par

$$\frac{1}{2nJ} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 4nJa^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (89)$$

ce qui conduit à la relation de dispersion $\omega = ck$, avec la même vitesse du son que (88). On retrouve là le mode de Goldstone associé à la brisure spontanée de la symétrie liée à la phase φ .

Références

Altman, E., E. Demler & M. D. Lukin (2004), « Probing many-body states of ultracold atoms via noise correlations », in *Phys. Rev. A* 70, p. 013603.
 Altman, Ehud & Assa Auerbach (2002), « Oscillating Superfluidity of Bosons in Optical Lattices », in *Phys. Rev. Lett.* 89.25, p. 250404.
 Bakr, W. S., A. Peng, S. Fölling & M. Greiner (2009), « A quantum gas microscope for detecting single atoms in a Hubbard-regime optical lattice », in *Nature* 462, pp. 74–77.
 Batrouni, Ghassan George, Richard T. Scalettar & Gergely T. Zimanyi (1990), « Quantum critical phenomena in one-dimensional Bose systems », in *Phys. Rev. Lett.* 65 (14), pp. 1765–1768.

Bissbort, Ulf, Sören Götze, Yongqiang Li, Jannes Heinze, Jasper S. Krauser, Malte Weinberg, Christoph Becker, Klaus Sengstock & Walter Hofstetter (2011), « Detecting the Amplitude Mode of Strongly Interacting Lattice Bosons by Bragg Scattering », in *Phys. Rev. Lett.* 106 (20), p. 205303.
 Boéris, G., L. Gori, M. D. Hoogerland, A. Kumar, E. Lucioni, et al. (2016), « Mott transition for strongly interacting one-dimensional bosons in a shallow periodic potential », in *Phys. Rev. A* 93 (1), p. 011601.
 Campbell, G.K., J. Mun, M. Boyd, P. Medley, A. E. Leanhardt, L. G. Marcassa, D. E. Pritchard & W. Ketterle (2006), « Imaging the Mott Insulator Shells by Using Atomic Clock Shifts », in *Science* 313, p. 5787.
 Capogrosso-Sansone, B., N. V. Prokof'ev & B. V. Svistunov (2007), « Phase diagram and thermodynamics of the three-dimensional Bose-Hubbard model », in *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)* 75.13, 134302, p. 134302.
 Endres, Manuel, Takeshi Fukuhara, David Pekker, Marc Cheneau, Peter Schauβ, Christian Gross, Eugene Demler, Stefan Kuhr & Immanuel Bloch (2012), « The 'Higgs' amplitude mode at the two-dimensional superfluid/Mott insulator transition », in *Nature* 487.7408, pp. 454–458.
 Feynman, R.P. & A.R. Hibbs (1965), *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw Hill.
 Fölling, S., F. Gerbier, A. Widera, O. Mandel, T. Gericke & I. Bloch (2005), « Spatial quantum noise interferometry in expanding ultracold atom clouds », in *Nature* 434, pp. 481–484.
 Fölling, S., A. Widera, T. Müller, F. Gerbier & I. Bloch (2006), « Formation of spatial shell structures in the superfluid to Mott insulator transition », in *Phys. Rev. Lett.* 97, p. 060403.
 Gerbier, F., S. Trotzky, S. Fölling, U. Schnorrberger, J. D. Thompson, et al. (2008), « Expansion of a Quantum Gas Released from an Optical Lattice », in *Phys. Rev. Lett.* 101 (15), p. 155303.
 Gerbier, F., A. Widera, S. Fölling, O. Mandel, T. Gericke & I. Bloch (2005a), « Interference pattern and visibility of a Mott insulator », in *Phys. Rev. A* 72, p. 053606.
 – (2005b), « Phase coherence of an atomic Mott insulator », in *Phys. Rev. Lett.* 95, p. 050404.
 Gerbier, Fabrice (2007), « Boson Mott Insulators at Finite Temperatures », in *Phys. Rev. Lett.* 99 (12), p. 120405.

- Greiner, M., O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch & I. Bloch (2002), « Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms », in *Nature* 415, p. 29.
- Guarrera, V., N. Fabbri, L. Fallani, C. Fort, K. M. R. van der Stam & M. Inguscio (2008), « Noise Correlation Spectroscopy of the Broken Order of a Mott Insulating Phase », in *Phys. Rev. Lett.* 100 (25), p. 250403.
- Haller, Elmar, Russell Hart, Manfred J. Mark, Johann G. Danzl, Lukas Reichsöllner, Mattias Gustavsson, Marcello Dalmonte, Guido Pupillo & Hanns-Christoph Nagerl (2010), « Pinning quantum phase transition for a Luttinger liquid of strongly interacting bosons », in *Nature* 466.7306, pp. 597–600.
- Ho, T.-L. & Qi Zhou (2009), « Obtaining the phase diagram and thermodynamic quantities of bulk systems from the densities of trapped gases », in *Nature Physics* 6, p. 131.
- Huber, S. D., E. Altman, H. P. Buchler & G. Blatter (2007), « Dynamical properties of ultracold bosons in an optical lattice », in *Phys. Rev. B* 75.8, 085106, p. 085106.
- Hung, Chen-Lung, Xibo Zhang, Nathan Gemelke & Cheng Chin (2010), « Slow Mass Transport and Statistical Evolution of an Atomic Gas across the Superfluid–Mott-Insulator Transition », in *Phys. Rev. Lett.* 104 (16), p. 160403.
- Jiménez-García, K., R. L. Compton, Y.-J. Lin, W. D. Phillips, J. V. Porto & I. B. Spielman (2010), « Phases of a Two-Dimensional Bose Gas in an Optical Lattice », in *Phys. Rev. Lett.* 105 (11), p. 110401.
- Köhl, M., H. Moritz, T. Stöferle, C. Schori & T. Esslinger (2005), « Superfluid to Mott insulator transition in one, two, and three dimensions », in *Journal of Low Temperature Physics* 138, p. 635.
- Kühner, T. D., S. R. White & H. Monien (2000), « One-dimensional Bose-Hubbard model with nearest neighbor interaction », in *Phys. Rev. B* 61, p. 12474.
- Littlewood, P. B. & C. M. Varma (1981), « Gauge-Invariant Theory of the Dynamical Interaction of Charge Density Waves and Superconductivity », in *Phys. Rev. Lett.* 47 (11), pp. 811–814.
- Méasson, M.-A., Y. Gallais, M. Cazayous, B. Clair, P. Rodière, L. Cario & A. Sacuto (2014), « Amplitude Higgs mode in the $2H - \text{NbSe}_2$ superconductor », in *Phys. Rev. B* 89 (6), p. 060503.
- Mun, J., P. Medley, G. K. Campbell, L. G. Marcassa, D. E. Pritchard & W. Ketterle (2007), « Phase diagram for a Bose–Einstein condensate moving in an optical lattice », in *arXiv :0706.3946*.
- Pekker, David & CM Varma (2014), « Amplitude/Higgs modes in condensed matter physics », in *arXiv :1406.2968*.
- Podolsky, Daniel, Assa Auerbach & Daniel P. Arovas (2011), « Visibility of the amplitude (Higgs) mode in condensed matter », in *Phys. Rev. B* 84 (17), p. 174522.
- Polkovnikov, A., E. Altman, E. Demler, B. Halperin & M. D. Lukin (2005), « Decay of superfluid currents in a moving system of strongly interacting bosons », in *Phys. Rev. A* 71, p. 063613.
- Polkovnikov, A., S. Sachdev & S. M. Girvin (2002), « Nonequilibrium Gross-Pitaevskii dynamics of boson lattice models », in *Phys. Rev. A* 66, p. 053607.
- Schiff, Leonard I (1968), « Quantum Mechanics 3rd, Chap. 14 », in *New York : McGraw-Hill*.
- Schori, C., T. Stöferle, H. Moritz, H. Köhl & T. Esslinger (2004), « Excitations of a Superfluid in a Three-Dimensional Optical Lattice », in *Phys. Rev. Lett.* 93, p. 240402.
- Sengupta, K. & N. Dupuis (2005), « Mott-insulator-to-superfluid transition in the Bose-Hubbard model : A strong-coupling approach », in *Phys. Rev. A* 71 (3), p. 033629.
- Sherson, Jacob F., Christof Weitenberg, Manuel Endres, Marc Cheneau, Immanuel Bloch & Stefan Kuhr (2010), « Single-atom-resolved fluorescence imaging of an atomic Mott insulator », in *Nature* 467.7311, 68.
- Sooryakumar, R. & M. V. Klein (1980), « Raman Scattering by Superconducting-Gap Excitations and Their Coupling to Charge-Density Waves », in *Phys. Rev. Lett.* 45 (8), pp. 660–662.
- (1981), « Raman scattering from superconducting gap excitations in the presence of a magnetic field », in *Phys. Rev. B* 23 (7), pp. 3213–3221.
- Spielman, I. B., W. D. Phillips & J. V. Porto (2007), « The Mott insulator transition in two dimensions », in *Phys. Rev. Lett.* 98, p. 080404, eprint: cond-mat/0606216.
- (2008), « Condensate Fraction in a 2D Bose Gas Measured across the Mott-Insulator Transition », in *Phys. Rev. Lett.* 100 (12), p. 120402.
- Stöferle, T., H. Moritz, C. Schori, M. Köhl & T. Esslinger (2004), « Transition from a Strongly Interacting 1D Superfluid to a Mott Insulator », in *Phys. Rev. Lett.* 92, p. 130403.

- Trotzky, S., L. Pollet, F. Gerbier, U. Schnorrberger, I. Bloch, N. V. Prokof'ev, B. Svistunov & M. Troyer (2010), « Suppression of the critical temperature for superfluidity near the Mott transition », in *Nature Physics* 6.12, 998–1004.
- Wessel, S., F. Alet, M. Troyer & G. George Batrouni (2004), « Quantum Monte Carlo simulations of confined bosonic atoms in optical lattices », in *Phys. Rev. A* 70, p. 053615.
- Zwinger, W. (2003), « Mott-Hubbard transition of cold atoms in optical lattices », in *J. Opt. B* 5, S9.