Chapitre 3

Les vertus des raies étroites

Sommaire

1	Refroidissement monochromatique							
	1-1	Modèle sans recul « spontané »	2					
	1-2	État stationnaire	3					
	1-3	Prise en compte du recul « spontané »	4					
	1-4	État stationnaire et lois d'échelle	5					
2	Com	ment structurer la raie de résonance						
	2-1	Élargissement par modulation de phase	7					
	2-2	Lois d'échelle pour une raie élargie	8					
3	Expé	ériences de refroidissement en raie étroite 9						
	3-1	Mesures de température	9					
	3-2	Le rôle des effets collectifs	11					
	3-3	Piège magnéto-optique en raie étroite	12					
4	Vers	la condensation						
	4-1	La statistique de Maxwell–Boltzmann	13					
	4-2	La statistique de Bose–Einstein	15					
	4-3	Condensation dans un micro-puits	15					
	4-4	L'expérience d'Innsbruck (2013)	18					

Nous nous sommes intéressés dans le chapitre précédent au refroidissement Doppler en raie large, c'est-à-dire un refroidissement opérant sur une raie atomique avec une largeur naturelle Γ du niveau excité grande devant la pulsation de recul $\omega_{\rm r} = \hbar k^2/2M$. Nous avons alors trouvé une température proportionnelle à cette largeur naturelle Γ . Il est naturel de se demander ce que devient la température limite quand on cherche à utiliser des raies de plus en plus étroites, en s'approchant de la situation $\Gamma \sim \omega_{\rm r}$, voire même au delà. La loi $T \propto \Gamma$ reste-t-elle valable, ou est-elle remplacée par une autre limite ?

Cette question pouvait sembler académique il y a une quinzaine d'années, mais elle est désormais très pertinente sur le plan expérimental : un grand intérêt est en effet porté aux atomes à deux électrons externes, notamment sur le plan métrologique et sur celui des gaz quantiques dégénérés. Or, ces atomes ont naturellement des raies de résonance étroites; ces raies couplent le secteur où le spin total des deux électrons externes est S = 0 (singulet de spin) et celui pour lequel S = 1 (triplet de spin). Par exemple, pour l'atome de strontium, la raie à 689 nm couplant l'état fondamental ${}^{1}S_{0}$ et l'état excité ${}^{3}P_{1}$ a pour largeur $\Gamma/2\pi = 7.5$ kHz, ce qui est comparable à la fréquence de recul $\omega_{\rm r}/2\pi = 4.7$ kHz (voir table 3.1). Le refroidissement de cet atome présente un intérêt métrologique considérable puisque c'est avec lui que le groupe de Jun Ye à Boulder a récemment démontré le fonctionnement d'une horloge optique avec une précision au niveau record de 2×10^{-18} (Bloom et al. 2014; Nicholson et al. 2015).

Comme nous l'avons indiqué dans le cours précédent, l'absorption ou

	A	$ \lambda $	$\Gamma/2\pi$	$\omega_{\rm r}/2\pi$	$E_{\rm r}/k_{\rm B}$	$v_{\rm r}$
		nm	kHz	kHz	nK	cm/s
Mg	24	457	0.031	40	1.9	3.6
Ca	40	657	0.40	12	0.55	1.5
Zn	64	309	6.0	32	1.6	2.0
Sr	84	689	7.6	5.0	0.24	0.69
Cd	114	326	70	16	0.79	1.1

TABLE 3.1. Raies étroites (intercombinaison) ${}^{1}S_{0} \leftrightarrow {}^{3}P_{1}$ pour quelques espèces atomiques à deux électrons externes (données extraites de la thèse de doctorat de Zeb Barber, Boulder, et refs. in).

l'émission d'un seul photon suffit dans ce cas à changer notablement le paramètre de saturation de l'atome. On ne peut donc plus adopter une approche de type Fokker–Planck puisque l'approximation des petits pas n'est pas valable. Il faut revenir à une description du mouvement dans laquelle chaque saut est pris en compte de manière discrète. Pour simplifier, nous allons traiter d'abord le cas unidimensionnel; l'extension à trois dimensions pourra ensuite se faire sans difficulté, via un traitement numérique. Grâce à cette approche, nous allons montrer que la distribution stationnaire a une largeur minimale donnée par la vitesse de recul $v_r = \hbar k/M$.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous passerons à la description de quelques expériences récentes. Nous verrons que cette méthode de refroidissement permet d'atteindre des températures en dessous du microkelvin, nous aborderons le problème du chauffage lié à la diffusion multiple dans l'échantillon, et nous discuterons la possibilité d'obtenir un gaz quantique dégénéré à partir des nuages refroidis sur raie étroite. Nous terminerons notre discussion par le schéma développé par Stellmer et al. (2013) pour obtenir un condensat de Bose–Einstein sans aucune évaporation, dans un nuage continûment refroidi par laser.

1 Refroidissement monochromatique

Nous allons développer dans ce paragraphe un modèle simple de refroidissement en raie étroite, en ajoutant un à un les ingrédients permettant de se rapprocher d'une situation réelle. Nous allons tout d'abord traiter une situation uni-dimensionnelle le long d'une direction donnée de l'espace (z), en supposant que les photons spontanés n'emportent aucune impulsion le long de cet axe. Nous verrons ensuite comment prendre en compte cette impulsion, puis nous passerons au cas 3D.

1-1 Modèle sans recul « spontané »

Nous considérons ici un atome à deux niveaux g, e, mobile le long de l'axe z, et nous supposons cet atome éclairé par deux ondes se propageant le long de l'axe z, de vecteur d'onde $\pm ku_z$. Nous supposons ces ondes de faible intensité, de sorte que la probabilité par unité de temps pour que l'atome absorbe un photon est en bonne approximation donnée par la somme des probabilités associées à chacune des deux ondes. Dans ce premier paragraphe, nous allons supposer de plus que les photons spontanés sont émis perpendiculairement à l'axe considéré¹.

Considérons un atome initialement dans l'état interne g avec la vitesse v. Cet atome peut absorber un photon dans l'onde allant dans le sens +z ou dans l'onde allant dans le sens -z, sa vitesse augmentant ou diminuant de v_r (figure 3.1). Nous avons vu dans les chapitres précédents que les taux pour ces deux processus sont donnés par $\Gamma s_{\pm}(v)/2$ avec

$$s_{\pm}(v) = \frac{2|\kappa|^2}{\Gamma^2 + 4\Delta_v^2}.$$
(3.1)

Dans cette équation, la grandeur κ correspond à la pulsation de Rabi de chaque onde, caractérisant le couplage dipolaire électrique de l'atome avec le champ électromagnétique. Le désaccord Δ_v se calcule en comparant l'énergie E_i de l'état initial (avant absorption, atome dans l'état g en présence de N photons laser) et l'énergie E_f de l'état final (après absorption,

^{1.} Notre modèle est donc optimiste puisqu'il néglige totalement le chauffage dû aux reculs lors des processus d'émission spontanée. Une autre version, pessimiste celle-là mais également simple à traiter analytiquement, serait de supposer que les photons spontanés se propagent eux aussi selon l'axe z.



FIGURE 3.1. Modèle discret pour le refroidissement Doppler en raie étroite. L'absorption d'un photon change la vitesse atomique de $\pm v_r$. L'émission spontanée est supposée se faire dans le plan perpendiculaire à l'axe du refroidissement et la vitesse de l'atome est donc inchangée lors de ce processus.

atome dans l'état e en présence de N - 1 photons laser) :

$$E_i = E_g + \frac{1}{2}Mv^2 + N\hbar\omega_{\rm L}, \qquad (3.2)$$

$$E_f = E_e + \frac{1}{2}M(v \pm v_r)^2 + (N-1)\hbar\omega_L, \qquad (3.3)$$

c'est-à-dire, en posant $\Delta = \omega_{\rm L} - \omega_{\rm A}$ avec $\hbar \omega_{\rm A} = E_e - E_g$:

$$\Delta_v = \Delta \mp kv - \omega_{\rm r}.\tag{3.4}$$

Une fois dans l'état excité, l'atome retombe dans l'état fondamental en émettant de manière spontanée un photon. Comme indiqué plus haut, nous supposons dans un premier temps que ce photon se propage dans le plan orthogonal à l'axe z, ce qui ne modifie pas la vitesse v selon cet axe.

En notant $\mathcal{P}(v, t)$ la distribution en vitesse à l'instant t, on a donc l'équation d'évolution :

$$\frac{\partial \mathcal{P}(v,t)}{\partial t} = - \frac{\Gamma}{2} \left[s_+(v) + s_-(v) \right] \mathcal{P}(v)$$

$$+ \frac{\Gamma}{2} s_+(v-v_r) \mathcal{P}(v-v_r) + \frac{\Gamma}{2} s_-(v+v_r) \mathcal{P}(v+v_r).$$
(3.5)

Dans ce modèle, on couple donc une chaine infinie, mais discrète, de classes de vitesses :

$$\dots \leftrightarrow v - 2v_{\mathbf{r}} \leftrightarrow v - v_{\mathbf{r}} \leftrightarrow v \leftrightarrow v + v_{\mathbf{r}} \leftrightarrow \dots$$
(3.6)



FIGURE 3.2. Pour trouver le régime stationnaire de (3.5), on écrit l'égalité des flux traversant une frontière fictive située à $v + v_r/2$.

1-2 État stationnaire

Pour évaluer l'état stationnaire de ce modèle 1D de refroidissement en raie étroite, le plus simple est de considérer une frontière virtuelle située entre v et $v + v_r$ et d'écrire l'égalité des flux traversant cette frontière de droite à gauche et de gauche à droite (figure 3.2) :

$$s_{+}(v) \mathcal{P}(v) = s_{-}(v + v_{\rm r}) \mathcal{P}(v + v_{\rm r}).$$
 (3.7)

ou encore

$$\frac{\mathcal{P}(v+v_{\rm r})}{\mathcal{P}(v)} = \frac{(\Delta+\omega_{\rm r}+kv)^2 + \Gamma^2/4}{(\Delta-\omega_{\rm r}-kv)^2 + \Gamma^2/4}.$$
(3.8)

Intéressons-nous tout d'abord au cas particulier $\Delta = -\omega_r$ et considérons la famille $v_n = (n - \frac{1}{2})v_r$:

$$\dots \leftrightarrow -\frac{3}{2}v_{\rm r} \quad \leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}v_{\rm r} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2}v_{\rm r} \quad \leftrightarrow \quad \frac{3}{2}v_{\rm r} \quad \leftrightarrow \dots \tag{3.9}$$

La relation (3.8) devient dans la limite $\Gamma \rightarrow 0$:

$$\frac{\mathcal{P}(v_{n+1})}{\mathcal{P}(v_n)} = \frac{(n-\frac{1}{2})^2}{(n+\frac{1}{2})^2}, \quad \text{soit} \quad \mathcal{P}(v_n) \propto \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2} \propto \frac{1}{v_n^2}.$$
 (3.10)

Ce cas particulier nous révèle un point important : dans la limite d'une raie étroite, la distribution en vitesse n'est plus une gaussienne contrairement

au cas d'une raie large, pour lequel l'équation de Fokker–Planck était valable. Cette distribution en vitesse décroît comme une loi de puissance $v^{-\alpha}$, en l'occurrence $\alpha = 2$ pour le choix $\Delta = -\omega_r$.

Comme nous allons le voir dans ce qui suit, cette décroissance « molle » en loi de puissance va poser des questions nouvelles par rapport au cas gaussien : à quelle condition le moment d'ordre deux $\langle v^2 \rangle$ qui entre dans la définition de l'énergie cinétique est-il défini [ce n'est manifestement pas le cas pour (3.10)] ? La distribution $\mathcal{P}(v)$ est-elle toujours normalisable ?

Pour répondre à ces questions, prenons maintenant un désaccord Δ quelconque. Il n'y a pas de solution exacte comme pour le cas particulier $\Delta = -\omega_r$, mais on peut montrer que le comportement aux grandes vitesses reste un comportement en loi de puissance

$$\mathcal{P}(v) \propto |v|^{-\alpha}.$$
 (3.11)

Pour déterminer α , utilisons le développement aux grandes vitesses

$$\frac{\mathcal{P}(v+v_{\rm r})}{\mathcal{P}(v)} \approx 1 - \alpha \frac{v_{\rm r}}{v}.$$
(3.12)

Un développement en puissances de 1/v du membre de droite de (3.8) donne le terme dominant :

$$1 + 4\frac{\Delta}{kv} = 1 + 2\frac{\Delta}{\omega_{\rm r}} \frac{v_{\rm r}}{v}$$
(3.13)

dont on déduit l'exposant de la loi de puissance de \mathcal{P}

$$\mathcal{P}(v) \propto |v|^{-\alpha}$$
 avec $\alpha = 2\frac{|\Delta|}{\omega_{\rm r}}$, (3.14)

où Δ est négatif. La condition nécessaire pour que ce traitement ait un sens est que la distribution \mathcal{P} soit normalisable, c'est-à-dire :

$$\mathcal{P}$$
 normalisable : $|\Delta| > \frac{1}{2}\omega_{\rm r}$. (3.15)

Si on veut que $\int v^2 \mathcal{P}(v) dv$ converge pour que l'énergie cinétique moyenne soit finie, la contrainte est plus forte :

Energie cinétique définie :
$$|\Delta| > \frac{3}{2}\omega_{\rm r}$$
. (3.16)

Le cas particulier $\Delta = -\omega_r$ étudié plus haut correspond à une distribution en $1/v^2$, donc normalisable mais d'énergie cinétique moyenne infinie.

Avant de discuter la valeur précise de la largeur de la distribution en vitesse et de l'énergie cinétique moyenne, la leçon que nous pouvons tirer est que lorsque la largeur de raie Γ devient très faible, on ne peut pas espérer que la limite Doppler en raie large $k_{\rm B}T = \hbar\Gamma/2$, obtenue pour $\Delta = -\Gamma/2$, reste valable. Le désaccord ne doit pas être choisi plus petit que la fréquence de recul, à un facteur multiplicatif près de l'ordre de l'unité. Les classes de vitesse v = 0, $v = \pm v_{\rm r}$ ont alors des populations comparables d'après (3.8) et l'énergie cinétique obtenue est donc au moins d'ordre $E_{\rm r}$.

1-3 Prise en compte du recul « spontané »

Le modèle 1D développé précédemment, dans lequel on négligeait l'impulsion emportée par les photons de fluorescence, nous a permis de résoudre très simplement l'équation d'évolution (3.5). Toutefois ce modèle pêche par optimisme, dans la mesure où il néglige une source de chauffage importante. Nous nous proposons maintenant d'aller au delà de cette approximation et de prendre en compte les reculs aléatoires dus aux phénomène d'émission spontanée. Nous allons le faire d'abord dans un modèle 1D, puis généraliser nos résultats à 3D.

Considérons pour commencer un refroidissement en raie étroite le long de l'axe *z*. La projection sur cet axe de l'impulsion $\hbar k$ d'un photon émis spontanément est une variable continue comprise entre $-\hbar k$ et $\hbar k$ (figure 3.3). Pour prendre en compte cette variable, nous modifions les termes d'alimentation de la population de la classe de vitesse *v* [seconde ligne de (3.5)] de la manière suivante :

$$s_{+}(v-v_{\rm r})\mathcal{P}(v-v_{\rm r}) \longrightarrow \int_{-v_{\rm r}}^{v_{\rm r}} \mathcal{N}(v') s_{+}(v-v_{\rm r}+v') \mathcal{P}(v-v_{\rm r}+v') \, \mathrm{d}v'$$

$$s_{-}(v+v_{\rm r})\mathcal{P}(v+v_{\rm r}) \longrightarrow \int_{-v_{\rm r}}^{v_{\rm r}} \mathcal{N}(v') s_{-}(v+v_{\rm r}+v') \mathcal{P}(v+v_{\rm r}+v') \, \mathrm{d}v'$$

où $\mathcal{N}(v')$ est la densité de probabilité pour qu'un photon émis spontanément ait une impulsion $\hbar k_z = Mv'$ selon l'axe z. Cette quantité se calcule à partir des formules classiques d'électromagnétisme donnant le rayonnement d'un dipole oscillant. On trouve en prenant (par exemple) le cas



FIGURE 3.3. Modèle continu pour le refroidissement Doppler en raie étroite. L'absorption d'un photon (trait plein) change la vitesse atomique de $\pm v_r$. Un photon émis spontanément (trait pointillé) a une composante d'impulsion non nulle le long de l'axe du refroidissement, avec une densité de probabilité donnée par (3.17).

d'une polarisation circulaire le long de l'axe z :

$$\mathcal{N}(v') = \frac{3}{8v_{\rm r}} \left(1 + \frac{v'^2}{v_{\rm r}^2} \right). \tag{3.17}$$

Nous montrons sur la figure 3.4 le résultat de l'évolution trouvée pour l'évolution de la distribution $\mathcal{P}(v)$, , calculée pour $\omega_r = \Gamma$. Quelques faits marquants se dégagent de cette évolution :

- Comme prévue, la distribution finale obtenue a une largeur de l'ordre de la vitesse de recul.
- Cette distribution n'est pas une fonction monotone de v pour v > 0. Des trous apparaissent pour les vitesses auxquelles la résonance se produit avec une des deux ondes laser et pour les multiples de ces vitesses.
- Un examen détaillé de la solution aux temps longs montre que les ailes de cette distribution varient comme une loi de puissance, $\mathcal{P}(v) \propto |v|^{-\alpha}$, comme dans le modèle discret développé précédemment.

1-4 État stationnaire et lois d'échelle

Dans le cadre du modèle continu du paragraphe précédent, nous pouvons chercher numériquement le désaccord qui minimise l'énergie cinétique moyenne

$$E_c = \frac{1}{2}M\langle v^2 \rangle \equiv \frac{1}{2}k_{\rm B}T_{\rm eff}$$
(3.18)



FIGURE 3.4. Évolution de la distribution en vitesse à une dimension pour le refroidissement Doppler sur une raie étroite $\Gamma = \omega_r$ [figure extraite de Castin et al. (1989)]. Le désaccord vaut $\Delta = -1.5 \omega_r$ et la fréquence de Rabi $\kappa = \omega_r$. La transition atomique est de type $J_g = 0 \leftrightarrow J_e = 1$ et les deux faisceaux se propageant selon $\pm z$ sont polarisés σ_{\pm} .

pour chaque valeur du rapport Γ/ω_r , et étudier ensuite comment cette température effective minimale $T_{\rm eff,\,min}$ varie avec Γ/ω_r . Notons que la définition d'une « température » dans cette situation est discutable, puisque nous avons vu que les distributions stationnaires ne sont pas gaussiennes, mais varient en loi de puissance pour les grandes vitesses.

Le résultat pour $T_{\rm eff, min}$ fonction de $\Gamma/\omega_{\rm r}$ est représenté sur la figure 3.5, tirée de Castin et al. (1989). Pour une raie étroite, cette température minimale est obtenue pour $\Delta \approx -3.4 \omega_{\rm r}$ et conduit à $E_c \approx 0.53 E_{\rm r}$ ou encore

raie étroite 1D:
$$k_{\rm B}T_{\rm eff, min} \approx 1.06 E_{\rm r}, \quad \sqrt{\langle v^2 \rangle} \approx 0.73 v_{\rm r}.$$
 (3.19)

Pour une raie large, on retrouve la limite Doppler trouvée au chapitre pré-



FIGURE 3.5. Energie cinétique minimale en fonction du rapport Γ/ω_r [figure extraite de Castin et al. (1989)].

cédent ; elle s'écrit dans le modèle unidimensionnel étudié ici :

raie large 1D:
$$k_{\rm B}T_{\rm eff,\,min} = \frac{7}{10} \frac{\hbar\Gamma}{2}.$$
 (3.20)

Le coefficient 7/10 trouvé dans ce modèle 1D par rapport au résultat 3D s'explique simplement : le chauffage lié au recul des photons émis spontanément correspond à $\langle p^2 \rangle = \frac{2}{5}\hbar^2 k^2$. Alors qu'à 3D, le coefficient de diffusion en impulsion dû aux reculs lors des émissions spontanées est égal à celui provenant du caractère aléatoire de la direction des photons absorbés, sa contribution est réduite ici par un facteur 2/5, d'où une réduction globale de la diffusion par le facteur

$$\frac{1+\frac{2}{5}}{1+1} = \frac{7}{10}.$$
(3.21)

Pour finir, nous pouvons extrapoler ces résultats à trois dimensions, en multipliant les résultats 1D par le facteur 10/7. Nous obtenons alors une estimation de la température minimale attendue :

raie étroite 3D :
$$k_{\rm B}T_{\rm eff,\,min} \approx 1.5 E_{\rm r}, \qquad \sqrt{\langle v^2 \rangle} \approx 0.9 v_{\rm r}.$$
 (3.22)

En conclusion, la température minimale que l'on obtient par refroidissement Doppler sur raie étroite est limitée par le recul dû à un seul photon. Le régime conduisant à cette température minimale est très différent de celui trouvé pour une raie large : le désaccord optimal est de l'ordre de $-3\,\omega_{\rm r}$, le taux d'excitation total d'un atome

$$s_{\text{tot}}(v) = s_{+}(v) + s_{-}(v)$$
 (3.23)

est faible au voisinage de v = 0 et ne prend des valeurs appréciables que pour $v \approx \pm 2 v_r$. Il se dégage ainsi l'idée que les atomes sont accumulés dans une région « sombre » de l'espace des vitesses (figure 3.6) : quand l'atome est dans cette région sombre, il reste longtemps à la même vitesse car le taux de diffusion de photons $\Gamma s_{\mathrm{tot}}/2$ est très faible. Quand une diffusion de photon se produit, l'atome peut se rapprocher d'une des deux zones « brillantes » situées à $v \approx \pm 2 v_r$. La diffusion de photons se fait alors avec un taux élevé, et l'absorption a lieu avec une quasi-certitude dans l'onde se propageant en sens contraire de l'atome : par exemple, si $v \approx +2 v_r$, alors $s_{-}(v) \gg s_{+}(v)$. Ce dernier point est essentiel pour garantir que l'atome ne franchisse pratiquement jamais le mur brillant : si cela se produit et que l'atome acquiert une vitesse de 3 ou $4v_r$, alors il lui faudra un temps considérable pour revenir au voisinage de la vitesse nulle. C'est la raison pour laquelle il faut choisir un désaccord Δ notablement plus grand que $\omega_{\rm r}$. Nous verrons dans le paragraphe qui suit comment l'utilisation de faisceaux polychromatiques permet d'assouplir cette contrainte.

2 Comment structurer la raie de résonance

D'après ce qui précède, le refroidissement en raie étroite fournit un moyen de refroidir les atomes à une température de l'ordre du recul associé à un seul photon. Mais l'inconvénient associé à une raie étroite apparaît clairement sur la figure 3.6 : pour qu'un atome de vitesse v quelconque soit refroidi, il faut que cette vitesse soit proche de la classe de vitesse résonnante avec les lasers, $kv \sim \Delta$ à Γ près. Comme Γ est supposé petit, de l'ordre de la fréquence de recul ω_r , seule une classe de vitesse de faible largeur (de l'ordre de v_r) va être concernée. Comment peut-on remédier à ce manque d'efficacité ?

Un première solution est d'élargir la raie par saturation. Nous avons vu que lorsque la fréquence de Rabi qui caractérise le couplage atome-laser



FIGURE 3.6. Variation de $s_+(v)$ (tirets bleus), $s_-(v)$ (tirets rouges) et $s_{tot}(v)$ (trait continu noir) pour une raie étroite, $\Gamma = \omega_r$, $\Delta = -3 \omega_r$ et $\kappa = \omega_r/2$.

devient plus grande que la largeur naturelle Γ , la largeur effective de la résonance est augmentée :

$$\Gamma \longrightarrow \Gamma_{\text{eff}} = \sqrt{\Gamma^2 + 2|\kappa|^2}.$$
 (3.24)

On peut donc choisir $|\kappa|$ grand devant la pulsation de recul $\omega_{\rm r}$, pour assurer que la plage de capture en vitesse de la mélasse optique soit grande devant $v_{\rm r}$. Mais on perd alors le bénéfice d'une raie étroite : tout se passe comme si on utilisait une raie de résonance de largeur $\Gamma_{\rm eff} \gg \omega_{\rm r}$, et la température que l'on va atteindre sera donnée par $k_{\rm B}T \sim \hbar\Gamma_{\rm eff}$, ce qui est grand devant l'énergie de recul.

2-1 Élargissement par modulation de phase

Il est nettement plus judicieux d'élargir la raie en prenant une excitation polychromatique, qui peut être obtenue en introduisant des bandes latérales grâce une modulation de phase de l'onde lumineuse :

$$e^{i\omega_{\rm L}t} \to e^{i[\omega_{\rm L}t+\phi(t)]}.$$
 (3.25)

Considérons par exemple une modulation de phase $\phi(t)$ de période T pour laquelle la phase varie localement quadratiquement avec le temps. On se donne $T_0 < T$ et on prend pour la période $-T_0/2 < t < T - T_0/2$:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \alpha(t^2 - T_0^2/4) \quad \text{si } |t| < T_0/2, \\ \phi(t) &= -\beta(t - T_0/2)(t - T + T_0/2) \quad \text{si } T_0/2 < t < T - T_0/2, \end{aligned}$$
 (3.26)

que l'on reproduit ensuite périodiquement. On impose $\alpha T_0 = \beta(T - T_0)$ pour assurer la continuité et la dérivabilité de $\phi(t)$ en T_0 . La fréquence de l'onde, égale à la dérivée de la phase, a alors une variation en « dent de scie » et couvre un intervalle de fréquence entre $\omega_L - \Omega/2$ et $\omega_L + \Omega/2$, avec $\Omega = 2\alpha T_0$. Une analyse de Fourier montre que le spectre de la lumière est composé d'harmoniques séparées par la pulsation $2\pi/T$, avec des poids comparables si la dent de scie est suffisamment asymétrique (T_0 proche de T). Un exemple est représenté sur la figure 3.7. Les harmoniques situées en dehors de la plage [$\omega_L - \Omega/2, \omega_L + \Omega/2$] ont des poids négligeables devant celles situées à l'intérieur de cette plage.

Pour obtenir une excitation significative et uniforme de l'atome sur une large plage de vitesses, il suffit alors de choisir l'écart entre harmoniques $2\pi/T$ de l'ordre de la largeur naturelle Γ . Un exemple de profil obtenu en sommant indépendamment les contributions des différentes composantes de Fourier est représenté sur la figure 3.8 dans le cas d'une raie très étroite ($\Gamma = 0.2 \omega_r$).

Dans la suite, nous allons modéliser ce profil par la forme rectangulaire représentée sur la figure 3.9. Nous discutons ici le cas 1D, mais cette modélisation s'étendra ensuite sans difficulté à trois dimensions. Séparons l'espace des vitesses en trois zones :

- La zone centrale *A* correspond à des vitesses faibles $|v| < v_0$. Ces atomes sont « presque dans le noir », c'est-à-dire qu'ils ont une probabilité faible d'absorber un photon. Nous notons γ_a la probabilité par unité de temps pour un processus d'absorption, qui se fait selon un sens aléatoire.
- La zone intermédiaire *B* correspondant à $v_0 < |v| < v_1$. Dans cette zone, les atomes absorbent des photons avec un taux γ_b élevé. Cette



FIGURE 3.7. Exemple de spectre obtenu par modulation quadratique de la phase (3.26) avec $T_0 = 0.99 T$ et $\alpha = 20\pi/(TT_0)$ (soit 20 harmoniques significative-ment peuplées).

absorption est directive : elle se fait dans le faisceau lumineux qui se propage en sens contraire de l'atome et elle tend donc à ramener l'atome vers la vitesse nulle.

– La zone *C* correspondant à des atomes de grande vitesse $|v| > v_1$. Ces atomes ont une probabilité négligeable d'absorber un photon. La vitesse v_1 peut être choisie en principe arbitrairement grande devant la vitesse de recul et ces classes de vitesse $|v| > v_1$ joueront un rôle négligeable dans la suite.

2-2 Lois d'échelle pour une raie élargie

L'élargissement de la raie d'excitation par modulation de phase peut avoir deux vertus. La première est d'accélérer la décroissance de la distribution de vitesse $\mathcal{P}(v)$ aux grandes vitesses. Nous avons vu que pour une excitation monochromatique, cette décroissance se faisait avec une loi de



FIGURE 3.8. Paramètre de saturation $s_+(v)$ (tirets bleus), $s_-(v)$ (tirets rouges) et $s_{tot}(v)$ (trait continu noir) en fonction de la vitesse v. Paramètres pour cette figure : $\Gamma = 0.2 \omega_r$, $\kappa = 0.4 \omega_r$, Δ moyen $= -5 \omega_r$, 100 harmoniques significativement peuplées avec un écart entre harmoniques de $0.1 \omega_r$.

puissance $|v|^{-\alpha}$, avec $\alpha = 2|\Delta|/\omega_r$. Pour la raie élargie que nous considérons ici, le désaccord effectif correspond au centre du profil d'excitation rectangulaire et peut donc être grand devant ω_r . L'exposant de la loi de puissance est donc grand devant 1, ce qui assure la convergence de tous les moments pertinents de cette distribution en vitesse.

La seconde vertu est d'abaisser l'énergie moyenne des atomes refroidis, au moins dans le cas où $\Gamma \ll \omega_r$. Pour éclaircir ce point, nous allons faire un raisonnement statistique simple, basé sur la modélisation du taux d'absorption représentée sur la figure 3.9. Notons P_a et P_b les populations respectives des zones A et B et supposons que la vitesse frontière v_0 est notablement plus petite que la vitesse de recul v_r ; en régime stationnaire, il y a équilibre entre les flux entrant et sortant de chaque zone :

– Le flux sortant de la zone *A* est simplement donné par

$$\Phi_{A \to B} \approx P_a \gamma_a. \tag{3.27}$$

En effet, puisque $v_0 \ll v_r$, un atome situé initialement dans la zone *A* et qui subit une diffusion de photon quitte en général cette zone en raison du recul aléatoire lié à l'émission spontanée.

– Le flux entrant dans la zone *A* correspond à des atomes de la zone *B* qui ont subi un processus absorption – émission spontanée, et qui par chance sont arrivés dans une classe de vitesse $|v| < v_0$. Comme les atomes de la zone *B* ont une vitesse de l'ordre de la vitesse de recul v_r ,



FIGURE 3.9. Modélisation du taux d'absorption : une zone centrale avec un faible taux γ_a et une zone périphérique avec un taux nettement plus fort γ_b . La largeur de la zone centrale v_0 est plus petite que la vitesse de recul.

le flux entrant dans la zone *A* s'écrit :

$$\Phi_{B \to A} \approx P_b \gamma_b \left(\frac{v_0}{v_r}\right)^D \tag{3.28}$$

où *D* est la dimension de l'espace des vitesses que l'on souhaite refroidir. Notons tout de suite que le facteur $(v_0/v_r)^D$ rend le refroidissement tri-dimensionnel beaucoup plus délicat que son équivalent 1D, à v_0 et v_r donnés; ce point sera confirmé dans la suite.

L'égalité des deux flux correspondant au régime stationnaire entraine donc :

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{\gamma_b}{\gamma_a} \left(\frac{v_0}{v_r}\right)^D.$$
(3.29)

Il reste à évaluer le rapport γ_b/γ_a . Dans l'hypothèse d'une raie de résonance élargie par modulation de phase comme en figure 3.8, le taux résiduel d'absorption autour de la vitesse nulle correspond à la somme des ailes des différentes lorentziennes correspondant à chacune des harmoniques de la raie élargie. On trouve donc à un coefficient numérique près :

$$\gamma_a \approx \gamma_b \frac{\Gamma}{|\Delta_{\min}|}$$
 où l'on suppose $\Gamma \ll |\Delta_{\min}|,$ (3.30)

où Δ_{\min} est la valeur du désaccord pour l'harmonique la plus proche de résonance. Cette valeur est directement reliée à la vitesse frontière v_0 :

§3. Expériences de refroidissement en raie étroite

 $kv_0 = |\Delta_{\min}|$ de sorte que l'on arrive à

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{v_0^{D+1}}{v_r^D \,\delta v_{\rm res}} \qquad \text{avec} \quad \delta v_{\rm res} = \Gamma/k \ll v_r. \tag{3.31}$$

La nature de l'optimisation possible est alors claire : on cherche à avoir au moins une fraction des atomes (ceux de la zone A) les plus froids possibles, donc une vitesse frontière v_0 aussi basse que possible. Mais on veut en même temps que cette fraction soit significative, donc que P_a ne soit pas trop petit comparé à P_b .

Imposons pour fixer les idées $P_a = P_b$. Ceci fixe la valeur de v_0 :

$$\frac{v_0}{v_{\rm r}} = \left(\frac{\Gamma}{\omega_{\rm r}}\right)^{\frac{1}{D+1}}.$$
(3.32)

À une dimension, le gain est significatif comparé au refroidissement monochromatique si $\Gamma \ll \omega_r$. On a en effet $v_0 = \sqrt{v_r \, \delta v_{res}} \ll v_r$ (Wallis & Ertmer 1989). À trois dimensions en revanche, le gain n'est que marginal par rapport à v_r , puisque le rapport Γ/ω_r n'intervient qu'à la puissance 1/4. L'intérêt principal d'élargir la raie est dans ce cas d'augmenter la zone de capture de la mélasse optique (c'est le premier argument que nous avons mentionné).

3 Expériences de refroidissement en raie étroite

3-1 Mesures de température

Les premières expériences de refroidissement en raie étroite ont été menées sur l'atome de strontium (isotope 88) dans le groupe de H. Katori au Japon (Katori et al. 1999; Ido et al. 2000).

L'atome de strontium possède deux raies de résonance importantes pour la suite (figure 3.10); la première, une raie large, correspond à la transition $5s^2 {}^1S_0 \leftrightarrow 5s5p {}^1P_1$, avec la longueur d'onde $\lambda_1 = 461$ nm et la largeur $\Gamma_1/2\pi = 32$ MHz. Cette raie est utilisée pour pré-refroidir les atomes dans un piège magnéto-optique. La seconde raie, étroite, correspond à la transition d'intercombinaison $5s^2 {}^1S_0 \leftrightarrow 5s5p {}^3P_1$, $\lambda_2 = 689$ nm



FIGURE 3.10. Niveaux d'énergie pertinents pour l'atome de strontium. L'état excité pour la transition de raie large $5s5p \ ^1P_1$ peut se désexciter vers le niveau $5s4d \ ^1D_2$, ce qui peut nécessiter la mise en place d'un schéma de repompage.

et $\Gamma_2/2\pi = 7.6$ kHz. Katori et al. (1999) ont montré qu'ils pouvaient transférer les atomes pré-refroidis sur la raie large dans un piège magnéto-optique pour la raie étroite, en élargissant cette raie par modulation de phase. Ils ont ensuite éteint cette modulation de phase pour obtenir un échantillon refroidi en lumière monochromatique. En diminuant autant que possible la puissance du laser (jusqu'au seuil pour lequel la force de pression de radiation ne compense plus la gravité), ils ont pu atteindre une température de 400 nK, soit 1.7 $E_{\rm r}/k_{\rm B}$. La vitesse quadratique moyenne correspondante est

$$v_0 = \sqrt{\frac{k_{\rm B}T}{M}} = 6.1 \,\mathrm{mm/s} = 0.9 \,v_{\rm r}.$$
 (3.33)

Katori et al. (1999) ont également mesuré la densité dans l'espace des phases du nuage refroidi, et montré qu'elle pouvait atteindre 10^{-2} , dépassant ainsi par plusieurs ordres de grandeur celle mesurée dans un piège magnéto-optique en raie large ($\sim 10^{-6}$). Ils attribuent la limite observée pour cette densité dans l'espace des phases au chauffage lié à la diffusion multiple de photons, sur lequel nous allons revenir un peu plus loin. Pour la géométrie de leur échantillon, ils observent une augmentation de la température avec la densité spatiale :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}n} = 400\,\mathrm{nK}/(10^{12}\,\mathrm{cm}^{-3}) \tag{3.34}$$

sur la plage n = 0.1– $0.5 \, 10^{12} \, \mathrm{cm}^{-3}$. La densité dans l'espace des phases



FIGURE 3.11. Gauche : Évolution de la température en fonction du désaccord pour un nuage d'atomes de ⁸⁸Sr confinés dans un piège dipolaire. Les températures indiquées résultent de l'extrapolation à faible nombre d'atomes des températures effectivement mesurées. Droite : influence du nombre d'atomes sur la température [figure extraite de Chalony et al. (2011)].

variant comme $n/T^{3/2}$, cette loi favorise le régime « basse densité – basse température ».

Ido et al. (2000) ont ensuite amélioré ce résultat en appliquant le refroidissement en raie étroite à des atomes de strontium confinés dans un piège dipolaire. En réduisant la puissance du piège dipolaire, ils ont atteint une densité dans l'espace de phases de 0.1 (à un facteur 20 de la condensation). Notons que l'équilibre obtenu correspondait probablement à une combinaison de refroidissement lumineux et de refroidissement par évaporation.

Une étude détaillée de la température obtenue dans un refroidissement en raie étroite a également été faite par le groupe de Nice pour ⁸⁸Sr (Chalony et al. 2011). Cette étude a porté à la fois sur des atomes confinés dans un piège dipolaire et sur des atomes libres. Pour des atomes piégés, la variation de la température avec le désaccord est en bon accord avec les modèles théoriques présentés plus haut (Castin et al. 1989). La température minimale mesurée est de ~ 400 nK comme pour Katori et al. (1999), et la température minimale déduite d'une extrapolation à très faible nombre d'atomes est de ~ 200 nK (figure 3.11). Par ailleurs, des effets d'augmentation de température en fonction du nombre d'atomes ont été clairement observés là aussi : la température est multipliée par deux pour un nombre d'atomes correspondant à une épaisseur optique du nuage de l'ordre de l'unité (dans sa direction transverse). Nous allons revenir sur ce résultat dans le paragraphe suivant. Pour des atomes libres, le profil de vitesse mesuré est en bon accord avec celui montré en figure 3.4, avec des trous correspondant aux classes de vitesse résonantes et des ailes notables, non gaussiennes.

3-2 Le rôle des effets collectifs

Dans la confrontation théorie - expérience que nous venons de décrire, les effets collectifs jouent un rôle important. Les modélisations théoriques que nous avons présentées auparavant portaient sur le cas d'un atome unique couplé au rayonnement. Dans les expériences, on refroidit un grand nombre de particules (de 10^4 à 10^7) et il est important de préciser à quelle condition on peut espérer que les prédictions « à un atome » soient valables.

Le problème le plus important, déjà rencontré pour le piège magnétooptique en raie large, est la diffusion multiple des photons. Dans le cas du piège magnéto-optique, nous avons indiqué que cette diffusion multiple était à l'origine d'une force de répulsion entre les atomes, qui augmentait la taille à l'équilibre du nuage piégé. La diffusion multiple crée également un chauffage, à cause des reculs aléatoires qu'elle entraine. Dans ce qui suit, nous allons estimer les paramètres du nuage d'atomes à partir desquels ces effets deviennent significatifs.

Pour être refroidis à la température désirée, les atomes sont en permanence éclairés par les faisceaux lumineux de refroidissement et chaque atome diffuse les photons incidents avec un taux γ . Les photons émis ont à peu près la même longueur d'onde que les photons incidents ; ils peuvent donc être également diffusés, avec une section efficace proche de la section efficace de diffusion résonante

$$\sigma = \frac{3}{2\pi}\lambda^2.$$
 (3.35)

Remarquons la très grande valeur de cette section efficace de résonance (le micron carré), bien supérieure à la dimension géométrique d'un atome (l'angström carré).

Le libre parcours moyen d'un photon dans l'assemblée atomique est

donné par $1/(n\sigma)$. La réabsorption devient significative quand ce libre parcours moyen est de l'ordre de la taille *L* du nuage, soit en utilisant $\sigma \sim \lambda^2$:

réabsorption significative si :
$$n\lambda^2 L \gtrsim 1.$$
 (3.36)

§3. Expériences de refroidissement en raie étroite

On peut retrouver ce critère en cherchant quand le taux de diffusion γ' dû à la réabsorption devient comparable au taux de diffusion γ des photons laser incidents : il y a $N\gamma$ photons laser diffusés par seconde, et la probabilité qu'un atome donné réabsorbe un photon diffusé par un autre atome à une distance moyenne $\sim L/2$ est $\sim \sigma/L^2$. Le taux γ' vaut donc

$$\gamma' \sim \frac{\sigma}{L^2} N\gamma \tag{3.37}$$

de sorte que $\gamma' \sim \gamma$ quand $n\sigma L \sim 1$. Remarquons par ailleurs que quand ce critère est vérifié, l'absorption des faisceaux laser incidents devient significative : le milieu atomique est optiquement épais.

Comme nous l'avons écrit plus haut, dès que γ' devient de l'ordre de γ , la dynamique du refroidissement est modifiée : les reculs aléatoires qui accompagnent les phénomènes de diffusion multiple engendrent un chauffage supplémentaire des atomes piégés et la température d'équilibre augmente. Nous discuterons dans un chapitre ultérieur certains « remèdes » qui ont été envisagés pour lutter contre ce chauffage lié à la diffusion multiple. Dans ce chapitre, nous nous contenterons d'en évoquer un, mis en œuvre dans les expériences présentées dans ce chapitre : il s'agit de prendre un nuage de forte anisotropie (« cigare » ou « crêpe »), de sorte qu'au moins une des dimensions linéaires du nuage est petite, de l'ordre de quelques longueurs d'onde optique seulement. Les photons peuvent alors s'échapper facilement dans cette direction, bien que le piège puisse contenir un grand nombre d'atomes.

Remarque. Les effets collectifs qui se produisent lors de l'interaction d'un nuage atomique avec une lumière résonnante ne se limitent pas aux phénomènes de diffusion multiple. Les densités atomiques effectivement atteintes correspondent à une distance moyenne entre atomes de l'ordre de la longueur d'onde optique. Quand un atome excité et un atome dans l'état fondamental sont séparés par une distance aussi faible, il faut prendre en compte l'interaction dipole-dipole entre atomes (Julienne et al. 1992).



FIGURE 3.12. Schéma de base du piège magnéto-optique. On s'intéresse ici au cas où la force de pression de radiation ne prend des valeurs significatives qu'au voisinage de $\pm x_0$.

Celle-ci donne naissance à de multiples courbes de potentiel, attractives ou répulsives, et l'accélération correspondante peut également contribuer de manière très significative au chauffage du gaz, voire à une perte d'atomes par l'intermédiaire de collisions inélastiques assistées par la lumière [voir par exemple Fuhrmanek et al. (2012) et refs. in].

3-3 Piège magnéto-optique en raie étroite

Le fonctionnement d'un piège magnéto-optique en raie étroite est notablement différent du traditionnel piège en raie large. Ce fonctionnement a été étudié en détail par le groupe de Boulder (Loftus et al. 2004) et nous résumons ici leur analyse. Considérons une transition atomique $J_g = 0 \leftrightarrow J_e = 1$, un gradient de champ magnétique b' le long de l'axe x, éclairons les atomes par une paire d'ondes monochromatiques contrepropageantes (figure 3.12), et supposons que les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\omega_{\rm r} \lesssim \Gamma \sqrt{1 + \frac{2|\kappa|^2}{\Gamma^2}} \ll |\Delta|. \tag{3.38}$$

La première inégalité permet d'utiliser un calcul semi-classique pour la force agissant sur un atome au repos :

$$F = F_{+} + F_{-} \qquad \text{avec} \quad F_{\pm}(z) = \pm \hbar k \Gamma \frac{|\kappa|^2}{4(\Delta \mp \mu b' x)^2 + \Gamma^2 + 2|\kappa|^2} \quad (3.39)$$

La seconde indique que la force ne prendra des valeurs significatives que dans deux régions bien localisées de l'axe $x : F_{\pm}$ est non nulle en $x = \mp |\Delta|/\mu b'$. On réalise alors l'équivalent de « murs » pour les atomes, avec un puits de potentiel² presque carré. Selon l'axe vertical, il faut en plus prendre en compte la gravité, qui n'est pas négligeable devant la force de pression de radiation pour une raie étroite : pour l'atome de strontium, la force maximale de pression de radiation $\hbar k\Gamma/2$ ne vaut que 16 fois le poids de l'atome. Le potentiel combiné lumière+gravité a alors une forme de boîte penchée, et les atomes s'accumulent en dessous du point de champ magnétique nul. Les images de la figure 3.14, extraites de Loftus et al. (2004), illustrent bien la dissymétrie du piège dans ce régime.

4 Vers la condensation

Nous venons de voir que les expériences de refroidissement en raie étroite permettent de produire des gaz très froids (en dessous du microkelvin), avec des densité spatiales relativement élevées puisque la distance moyenne entre particules, $n^{1/3}$, n'est que deux à trois fois supérieure à la longueur d'onde thermique

$$\lambda_T = \frac{\hbar\sqrt{2\pi}}{\sqrt{Mk_{\rm B}T}}.\tag{3.40}$$

Ces gaz (composés d'atomes de spin nul, donc de bosons) sont au seuil du régime de dégénérescence quantique et sont de bons candidats pour produire, moyennant une étape supplémentaire « légère », un condensat de Bose–Einstein. Cette étape a été franchie dans l'expérience de Stellmer

^{2.} La notion de puits de potentiel est à prendre « avec des pincettes » : à une dimension, connaissant une force F(x), on peut toujours définir le potentiel $V(x) = -\int^x F(x') dx'$. À plusieurs dimensions, il n'est pas garanti que la force de pression de radiation du piège magnéto-optique dérive d'un potentiel (il faudrait vérifier que $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ pour les trois composantes i, j de l'espace).



FIGURE 3.13. Piège magnéto-optique avec une raie étroite. Haut : force de pression de radiation (en unité de $F_{\text{max}} = \hbar k \Gamma/2$) pour une excitation très désaccordée : $\Delta = -40 \Gamma$, $\kappa = 5 \Gamma$, en fonction de la position mesurée en unité de $x_0 = |\Delta|/\mu b'$. Milieu : potentiel correspondant à cette force de pression de radiation sur un axe horizontal. Bas : potentiel total lumière+gravité sur l'axe vertical, calculé pour $Mg = 0.1 F_{\text{max}}$.



FIGURE 3.14. Images in situ d'un piège magnéto-optique de strontium fonctionnant sur la raie étroite. Les lignes pointillées correspondent aux contours le long desquels la force de pression de radiation est maximale ($|\kappa| \approx 11 \Gamma \approx 2\pi \times 83 \text{ kHz}$, $\Delta = 2\pi \times \delta$). Figure extraite de Loftus et al. (2004).

et al. (2013), qui s'inspirait d'une méthode proposée par Pinkse et al. (1997) et mise au point expérimentalement par Stamper-Kurn et al. (1998).

Le caractère remarquable de l'expérience de Stellmer et al. (2013) est qu'elle ne requiert à aucun moment le recours à une évaporation ou une perte d'atomes. Dans la mesure où cette condensation sans évaporation est fondée de manière subtile sur les propriétés particulières de la statistique de Bose–Einstein, nous allons commencer par rappeler les propriétés principales de cette statistique, en la comparant à la statistique de Maxwell– Boltzmann. Nous ne décrirons pas ici le mécanisme standard de la condensation de Bose–Einstein à la limite thermodynamique [voir par exemple Huang (1987) et Diu et al. (1989)], mais nous développerons un modèle simplifié de la méthode de Stamper-Kurn et al. (1998) et Stellmer et al. (2013). Nous verrons comment une accumulation macroscopique de particules peut se produire en changeant la forme du potentiel de confinement, puis nous présenterons les principales caractéristiques de l'expérience de Stellmer et al. (2013).

4-1 La statistique de Maxwell-Boltzmann

On va s'intéresser dans ce qui suit à un gaz de particules sans interaction, confiné dans une boîte cubique de côté L (figure 3.15). Nous prendrons des conditions aux limites périodiques, de sorte que les états propres



FIGURE 3.15. À gauche, puits de potentiel cubique de côté L. À droite, niveaux d'énergie à une particule $E_p = p^2/2M$, où l'impulsion p est quantifiée selon (3.42). Le trait rouge représente la position du potentiel chimique μ pour le gaz parfait contenu dans cette boîte. Pour la statistique de Maxwell—Boltzmann, μ peut prendre n'importe quelle valeur, mais seules les valeurs suffisamment négatives sont physiquement pertinentes car ce sont elles qui correspondent à des probabilités d'occupation $n(p) \ll 1$ pour tous les p. Pour la statistique de Bose–Einstein, les seules valeurs mathématiquement acceptables de μ sont négatives. La condensation de Bose–Einstein (accumulation macroscopique d'atomes dans l'état p = 0) se produit quand μ est suffisamment proche de 0.

de l'hamiltonien à une particule sont les ondes planes

$$\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}/\hbar}}{L^{3/2}} \qquad \mathsf{d'\acute{e}nergie} \ E_p = \frac{p^2}{2M}, \tag{3.41}$$

avec la condition de quantification dans la boîte

$$p_j = \frac{2\pi\hbar}{L} n_j, \qquad j = x, y, z, \quad n_j \in \mathbb{Z}.$$
(3.42)

En thermodynamique, l'état du gaz dans la boîte de volume $V = L^3$ est déterminé par deux variables thermodynamiques indépendantes. Connaissant ces deux variables, on en déduit alors les autres quantités thermodynamiques comme la pression ($P = Nk_{\rm B}T/V$), l'énergie interne $(\frac{3}{2}k_{\rm B}T)$, l'entropie, etc. Dans ce qui suit, nous prendrons comme couple de variables la température T et le potentiel chimique μ , bien adaptés au calcul de l'occupation des états à une particule.

Dans la statistique de Maxwell–Boltzmann, le nombre moyen de particules occupant un état d'impulsion p s'écrit

$$n^{(\text{Boltz.})}(\boldsymbol{p}) = \mathrm{e}^{(\mu - E_p)/k_{\mathrm{B}}T}.$$
 (3.43)

Le nombre total de particules N s'obtient en sommant la contribution de tous les états, et en remplaçant cette somme discrète par une intégrale dans la limite d'une grande boîte :

$$N = \sum_{\boldsymbol{p}} n^{(\text{Boltz.})}(\boldsymbol{p}) = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 \int e^{(\mu - E_p)/k_{\text{B}}T} \, \mathrm{d}^3 p, \qquad (3.44)$$

ce qui donne après calcul de l'intégrale

$$N = Z \frac{L^3}{\lambda_T^3} \tag{3.45}$$

où l'on a introduit la fugacité du gaz :

$$Z = \mathrm{e}^{\mu/k_{\mathrm{B}}T}.$$
 (3.46)

Dans la statistique de Maxwell–Boltzmann, le potentiel chimique peut prendre une valeur quelconque, positive ou négative. Toutefois, on remarque sur (3.43) que pour $\mu > 0$ (ou plus généralement μ supérieur à l'énergie du niveau fondamental), l'occupation des niveaux d'énergie les plus bas devient plus grande que 1. Dans le cas de particules indiscernables, l'utilisation de la statistique de Maxwell–Boltzmann pour $\mu > 0$ est alors incorrecte, même si elle ne conduit pas à une singularité mathématique : la nature statistique des particules joue en effet un rôle important quand $n(\mathbf{p})$ approche l'unité et il faut se tourner vers la statistique de Bose– Einstein ou celle de Fermi–Dirac selon que l'on à affaire à des bosons (particules de spin entier) ou des fermions (particules de spin demi-entier). Dans ce qui suit, nous allons nous concentrer sur la statistique de Bose–Einstein.

4-2 La statistique de Bose–Einstein

Dans la statistique de Bose-Einstein, l'occupation moyenne d'un état est donnée par

$$n^{(\text{Bose})}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{\mathrm{e}^{(E_p - \mu)/k_{\mathrm{B}}T} - 1}.$$
 (3.47)

Une remarque peut immédiatement être faite sur cette expression. Pour que la population de chaque état soit définie et positive, la valeur du potentiel chimique μ doit toujours être strictement plus petite que l'énergie de l'état fondamental du système, en l'occurrence l'énergie nulle pour nos particules dans une boîte. Contrairement à la statistique de Maxwell-Boltzmann (et celle de Fermi-Dirac), il y a donc une contrainte mathématique sur le potentiel chimique pour la statistique de Bose-Einstein (figure 3.15) :

$$\mu < E_{\text{fondamental}}, \quad \text{soit pour } E_p = \frac{p^2}{2M}: \quad \mu < 0.$$
(3.48)

Une seconde remarque concerne le lien entre statistiques de Bose-Einstein et de Maxwell–Boltzmann. Considérons dans le cadre de la statistique de Bose–Einstein un état faiblement peuplé, c'est-à-dire $n(\mathbf{p}) \ll 1$. Ceci signifie que le dénominateur de (3.47) est grand devant 1, et donc que $e^{(E_p-\mu)/k_BT} \gg 1$. On a donc pour ces niveaux faiblement peuplés :

$$n(\boldsymbol{p}) \ll 1:$$
 $n^{(\text{Bose})}(\boldsymbol{p}) \approx n^{(\text{Boltz.})}(\boldsymbol{p}) = Z e^{-E_p/k_{\text{B}}T}.$ (3.49)

Cette approximation sera valable pour tous les niveaux, y compris le niveaux fondamental, si on prend $Z \ll 1$, c'est-à-dire μ négatif avec $|\mu| \gg k_{\rm B}T$.

Le nombre total d'atomes dans la statistique de Bose–Einstein est obtenu comme pour la statistique de Maxwell–Boltzmann par la somme

$$N = \sum_{\boldsymbol{p}} n^{(\text{Bose})}(\boldsymbol{p}). \tag{3.50}$$

Il est tentant de remplacer là aussi la somme discrète par une intégrale, ce qui donne via un calcul simple :

$$N = g_{3/2}(Z) \frac{L^3}{\lambda_T^3} \qquad \text{avec} \quad g_\alpha(Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Z^n}{n^\alpha} \text{ fonction polylogarithme.}$$
(3.51)

La similarité avec le résultat trouvé pour la statistique de Maxwell-Boltzmann est frappante. En particulier, pour $Z \ll 1$, on a $g_{3/2}(Z) \approx Z$ et les deux résultats sont comparables, comme annoncé ci-dessus.

Toutefois cette similarité est également trompeuse. Pour la statistique de Maxwell–Boltzmann, le résultat (3.45) permet toujours de trouver une valeur de la fugacité (ou du potentiel chimique) qui rend compte d'un nombre donné d'atomes N. Au contraire, pour la statistique de Bose–Einstein, nous avons vu que les valeurs de Z sont limitées à l'intervalle [0,1]; la fonction $g_{3/2}(Z)$ prend donc des valeurs comprises entre 0 et $g_{3/2}(1) \approx 2.612$ de sorte que le nombre d'atomes ainsi calculé ne peut pas dépasser

$$N_{\rm max} = 2.612 \frac{L^3}{\lambda_T^3}.$$
 (3.52)

D'où vient le fait que le nombre d'atomes que l'on peut mettre dans le gaz soit ainsi borné supérieurement ? La réponse à cette question est la condensation de Bose–Einstein. Nous n'allons pas l'étudier en détail ici, mais rappelons son origine : le passage de la somme discrète (3.50) à l'intégrale (3.51) n'est légitime que si le potentiel chimique est suffisamment loin de sa valeur maximale $\mu = 0$. Quand μ tend vers l'énergie du fondamental (ici E = 0), la population du niveau fondamental diverge [*cf.* (3.47)]. Or, cette divergence est négligée dans le passage à l'intégrale (3.51). Quand *Z* s'approche de 1, il faut donc traiter avec plus de soin la population de ce niveau. On trouve alors qu'une fraction macroscopique des particules peut s'y accumuler, via un mécanisme qui devient une transition de phase à la limite thermodynamique.

La condensation se produit donc quand le nombre d'atomes N atteint la valeur (3.52), ce qui correspond à la densité dans l'espace des phases $\mathcal{D} = n\lambda_T^3$ avec $n = N/L^3$: $\mathcal{D}_{\max} = 2.612$. Cette valeur est atteinte quand la distance moyenne entre particules, $n^{-1/3}$, est de l'ordre de la longueur d'onde thermique λ_T .

4-3 Condensation dans un micro-puits

Avant de décrire en détail l'expérience de Stellmer et al. (2013), nous allons présenter un modèle simple permettant de comprendre comment il est





FIGURE 3.16. micro-puits de taille ℓ au milieu d'une boîte cubique de taille beaucoup plus grande L. On suppose que le micro-puits ne contient qu'un seul état lié $|\phi_0\rangle$, d'énergie $\epsilon_0 < 0$. Pour un gaz décrit parla statistique de Bose–Einstein, le potentiel chimique est nécessairement inférieur à ϵ_0 .

possible d'obtenir un gaz quantique dégénéré, en l'occurrence un condensat de Bose–Einstein, en partant d'un gaz non dégénéré et de simples transformations du potentiel confinant le gaz.

Reprenons notre gaz de N atomes à température T, confiné dans une boîte cubique de côté L, avec l'occupation n(p) de chaque état donnée par (3.47). Rappelons pour commencer qu'une déformation « triviale » du potentiel, consistant à augmenter ou diminuer la taille L de la boîte ne va rien donner de spectaculaire. Si on fait cette déformation très lentement pour réaliser une transformation adiabatique, la densité dans l'espace des phases va rester constante ; nous avions montré ce point pour un potentiel harmonique dans le chapitre d'introduction de ce cours. Si on fait cette déformation de manière non adiabatique, la situation ne sera que pire puisque l'entropie augmentera et la densité dans l'espace des phases diminuera.

Nous allons nous intéresser dans ce qui suit à la déformation « non tri-

FIGURE 3.17. *Peuplement du micro-puits par collision élastique entre deux particules.*

viale » suivante : nous supposons qu'à un instant donné, on crée brusquement un puit de potentiel $V(\mathbf{r})$ très localisé (figure 3.16). Le volume ℓ^3 sur lequel $V(\mathbf{r})$ est non nul est petit devant L^3 . La forme exacte de $V(\mathbf{r})$ importe peu; la seule hypothèse importante pour ce qui suit est qu'il y ait dans ce puits un et un seul état lié $|\phi_0\rangle$ d'énergie $\epsilon_0 < 0$. Dans ce qui suit, nous allons prendre $|\epsilon_0| \sim k_{\rm B}T$. Les états propres dans la boîte avec ce micro-puits additionnel sont donc l'état $|\phi_0\rangle$ et les états étendus $|\psi_p\rangle$ formés à partir des ondes planes (3.41), mais légèrement distordus pour assurer leur orthogonalité avec $|\phi_0\rangle$.

Comme le branchement de ce puits est soudain et que le volume concerné ℓ^3 est très faible, on peut considérer en bonne approximation que les N atomes restent sur les états étendus $|\psi_p\rangle$ au moment du branchement. Toutefois, une fois le branchement effectué, des collisions entre atomes³ vont conduire à une thermalisation du gaz.

^{3.} L'existence de ces collisions entraine que le gaz n'est pas vraiment un gaz idéal, donc qu'il y a des déviations par rapport au modèle du gaz parfait. Mais ces déviations peuvent être rendues arbitrairement faibles, si on accepte que le temps de relaxation soit long.

Au bout d'un temps suffisant, que nous ne chercherons pas à caractériser, un nouvel équilibre thermodynamique est atteint grâce aux collisions élastiques qui peuvent peupler le micro-puits (figure 3.17). Cet équilibre est décrit par une température T' et un potentiel chimique μ' , qui sont les deux inconnues du problème. Cet équilibre correspond à N_0 atomes dans l'état $|\phi_0\rangle$ et $N' = N - N_0$ dans les états $|\psi_p\rangle$. Notre but est de montrer qu'il est possible de trouver des situations où N_0 est du même ordre que N: c'est la définition d'une condensation de Bose–Einstein, avec une accumulation d'un nombre macroscopique d'atomes dans un état quantique individuel.

L'occupation des états étendus $|\psi_p\rangle$ est donnée par la loi de Bose

$$n'(\mathbf{p}) = \frac{1}{e^{\left(\frac{p^2}{2M} - \mu'\right)/k_{\rm B}T'} - 1}$$
(3.53)

et l'occupation de l'état fondamental $|\phi_0\rangle$ vaut

$$N_0 = \frac{1}{e^{(\epsilon_0 - \mu')/k_{\rm B}T'} - 1}.$$
(3.54)

La conservation du nombre de particules s'écrit

$$N = N_0 + \sum_{\boldsymbol{p}} n'(\boldsymbol{p}), \tag{3.55}$$

ce qui fournit une première contrainte sur les deux inconnues μ' et T'. La deuxième contrainte provient de la conservation de l'énergie. Une fois le micro-puits branché, le gaz est un système isolé et l'énergie totale est conservée. On a donc égalité entre les énergies initiale et finale

$$E_i = \sum_{\mathbf{p}} \frac{p^2}{2M} n(\mathbf{p}), \qquad E_f = N_0 \epsilon_0 + \sum_{\mathbf{p}} \frac{p^2}{2M} n'(\mathbf{p}).$$
 (3.56)

La résolution de ce problème à deux inconnues se fait aisément par un programme numérique. Les paramètres d'entrée sont

– La fugacité initiale du gaz $Z = e^{\mu/k_B T}$. Nous supposerons le gaz initialement faiblement dégénéré et nous prendrons Z = 0.5, pour lequel lois de Bose et de Boltzmann donnent des résultats voisins aussi bien pour le nombre d'atomes que pour l'énergie.



FIGURE 3.18. Évolution de la fraction condensée et de la température finale dans le système « boîte+micro-piège » en fonction du paramètre de contrôle $\eta = |\epsilon_0|/k_{\rm B}T$ pour un état initial faiblement dégénéré Z = 0.5. Courbe en trait plein bleue : traitement exact à partir de (3.53)-(3.56), dans le cas $L = 100 \lambda_T$. Courbe en pointillé rouge : traitement approché (3.60).

- L'énergie de l'état lié ϵ_0 , mesurée en unité de $k_{\rm B}T$.
- Le rapport L/λ_T entre la taille de la boîte et la longueur d'onde thermique initiale. Nous prendrons ici $L/\lambda_T = 100$.

Les conditions données ci-dessus correspondent à un nombre total d'atomes $N = g_{3/2}(Z) (L/\lambda_T)^3 \approx 620\,000$. Les résultats sont indiqués sur la figure 3.18. Prenons par exemple $\epsilon_0 = -3k_{\rm B}T$; la résolution numérique indique alors qu'après thermalisation, 23% des atomes se sont accumulés sur le niveau microscopique, et la température du gaz est devenue $T' \approx 1.8 T$: le gaz s'est réchauffé (comme on pouvait l'anticiper d'après la figure 3.17), mais une fraction condensée significative est apparue.

Remarque 1. On peut résoudre le problème de manière approchée et quasi-analytique en remarquant (i) que dans l'exemple ci-dessus, les occupations des états étendus sont données en bonne approximation par la loi de Boltzmann et (ii) que le potentiel chimique μ' est pratiquement égal à l'énergie ϵ_0 de l'état lié puisque ce dernier est macroscopiquement occupé. On a alors pour la fugacité finale

$$Z' \approx e^{\epsilon_0/k_{\rm B}T'} = e^{-\eta/x}$$
 avec $\eta = \frac{|\epsilon_0|}{k_{\rm B}T}$, $x = \frac{T'}{T}$ (3.57)

et les lois de conservation du nombre de particules et de l'énergie s'écrivent :

$$N = N_0 + N' \quad \text{avec} \quad N \approx Z \frac{L^3}{\lambda_T^3}, \quad N' \approx Z' \frac{L^3}{\lambda_T'^3}, \quad (3.58)$$

$$\frac{3}{2} N k_{\rm B} T = N_0 \epsilon_0 + \frac{3}{2} N' k_{\rm B} T', \quad (3.59)$$

soit en prenant pour inconnues x = T'/T et la fraction condensée $f_0 = N_0/N$:

$$1 = f_0 + \frac{x^{3/2} e^{-\eta/x}}{Z},$$

$$1 = -\frac{2}{3} f_0 \eta + (1 - f_0) x.$$
(3.60)

La résolution de ce système donne un résultat voisin de celui obtenu par le calcul exact (figure 3.18). On constate que dans cette approximation, le résultat ne dépend plus du rapport L/λ_T , mais simplement de la fugacité initiale Z et du choix du rapport $\eta = |\epsilon_0|/k_{\rm B}T$.

Remarque 2. La fraction condensée obtenue ici est de l'ordre de 20% et elle ne varie que très doucement avec le paramètre de contrôle $|\epsilon_0|/k_{\rm B}T$. Toutefois, on remarque que le condensat formé dans l'état $|\phi_0\rangle$ est très localisé dans l'espace; on peut alors mettre à profit une évaporation très efficace, consistant à évacuer tous les atomes en dehors du volume ℓ^3 . Les atomes dans l'état $|\phi_0\rangle$ ne seront pas affectés, alors que pratiquement tous les atomes non condensés $[N'(1 - \frac{\ell^3}{L^3})]$ seront éliminés. On obtiendra alors un condensat quasi pur au prix d'une perte d'atomes de 4/5 environ. Cette méthode qui consiste à tirer parti de la forme du potentiel de confinement pour localiser l'entropie dans des zones particulières de l'espace a été proposée dans un contexte légèrement différent par différents auteurs (voir par exemple Bernier et al. (2009) et refs. in).

Remarque 3. Nous avons négligé ici les interactions entre atomes, sauf pour ce qui est de la thermalisation du gaz. En pratique, ces interactions peuvent jouer un rôle important car les N_0 atomes sont accumulés dans une toute petite région de l'espace, ce qui correspond à une grande densité spatiale. L'énergie de champ moyen va donc déplacer la position du niveau ϵ_0 et les collisions inélastiques, via la recombinaison à trois corps conduisant à la formation de molécules, peuvent jouer un rôle important. Notre cas limite d'un puits extrêmement étroit doit donc être considéré comme un modèle simple à analyser, mais pas nécessairement une situation optimale sur le plan pratique.

4-4 L'expérience d'Innsbruck (2013)

Dans leur expérience, Stellmer et al. (2013) sont partis d'un gaz de $N \approx 10^7$ atomes de ⁸⁴Sr, refroidis à $T = 0.9 \,\mu\text{K}$ grâce la raie étroite à 689 nm que nous avons déjà mentionnée. Ce gaz est confiné dans une pince optique (piège dipolaire) formée par un faisceau gaussien fortement focalisé de longueur d'onde $\lambda = 1065$ nm. Le faisceau est elliptique avec des rayons à $1/e^2$ (waists) de $w_y = 300 \,\mu\text{m}$ et $w_z = 17 \,\mu\text{m}$. Les fréquences d'oscillation dans le piège sont selon les trois axes x, y, z de l'espace 6, 35 et 600 Hz. La profondeur du piège est de 9 μ K, bien supérieure à la température des atomes de sorte que les pertes par évaporation sont négligeables. Cette pince optique joue le rôle de la boîte de volume L^3 de notre modèle.

Pour créer le micro-puits qui va induire la condensation, Stellmer et al. superposent une deuxième pince optique, beaucoup focalisée que la première (figure 3.19ab). Cette deuxième pince optique se propage quasiverticalement; elle crée dans le plan horizontal un creux de potentiel de rayon $\sim 20 \,\mu$ m, caractérisé par des fréquences d'oscillation de 250 Hz. Pour « aider » les atomes à s'accumuler dans ce micro-puits, Stellmer et al. ajoutent un faisceau supplémentaire, de taille et de direction voisines de la micro-pince optique, dont le but est de rendre les atomes transparents aux lasers de refroidissement. Ce faisceau, qui a pour longueur d'onde 688 nm, crée un déplacement lumineux important du niveau excité ${}^{3}P_{1}$ (plus de 1000 Γ).

L'expérience permet d'observer la formation d'un condensat de Bose-Einstein à l'intérieur de la micro-pince optique. La fraction condensée est



FIGURE 3.19. Expérience de Stellmer et al. (2013) menée à Innsbruck. (a) Des atomes de ⁸⁴Sr sont refroidis par effet Doppler sur une raie étroite dans une « grosse » pince optique jouant le rôle de réservoir. On superpose une micro-pince optique (dimple), dans laquelle environ 10% des atomes vont s'accumuler. (b) Les atomes dans le micro-puits sont rendus transparents à la lumière de refroidissement grâce à un faisceau auxiliaire qui déplace fortement le niveau excité. Les conditions sont telles qu'un condensat apparaît dans cette micro-puits. On observe après temps de vol la distribution bi-modale habituelle révélant le condensat (composante centrale étroite) et la fraction non-condensée (piédestal plus large). La fraction condensée est de l'ordre de 1%.

faible (~ 1%), ce qui rend le condensat difficile à détecter au milieu des 99% d'atomes restants, confinés essentiellement dans la première grosse pince optique. Mais on peut tirer profit du fait que les atomes dans la micro-pince sont devenus transparents à la lumière de refroidissement pour observer ce condensat : la pression de radiation d'un flash intense de lumière peut pousser hors de la zone de détection tous les atomes sauf ceux confinés dans cette micro-pince. On détecte après un temps de vol un nuage dont la distribution en vitesse est bimodale, signature usuelle d'un condensat dans un piège harmonique anisotrope (figure 3.19cd). Cette formation est réversible, car on peut brancher et éteindre la micro-pince de nombreuses fois et voir ainsi le condensat se former, puis disparaître.

Même si les performances absolues de cette expérience en terme de nombre d'atomes condensés restent en deçà de ce que l'on obtient par évaporation, elle constitue un pas important vers la réalisation de systèmes quantiques dissipatifs avec des gaz d'atomes froids. Le condensat est alimenté en permanence par un réservoir d'atomes refroidis par laser, réservoir qui peut lui-même se remplir continûment à partir d'une vapeur atomique à la température ambiante. La transposition de cette expérience à des gaz d'atomes fermioniques permettrait de réaliser une situation voisine de celle des électrons dans un métal (normal ou supraconducteur) : on aurait alors un système quantique dissipatif, en contact avec un thermostat imposant en permanence sa température au système.

Références

- Bernier, Jean-Sébastien, Corinna Kollath, Antoine Georges, Lorenzo De Leo, Fabrice Gerbier, Christophe Salomon & Michael Köhl (2009), « Cooling fermionic atoms in optical lattices by shaping the confinement », in *Phys. Rev. A* 79 (6), p. 061601.
- Bloom, BJ, TL Nicholson, JR Williams, SL Campbell, M Bishof, X Zhang, W Zhang, SL Bromley & J Ye (2014), « An optical lattice clock with accuracy and stability at the 10-18 level », in *Nature* 506.7486, pp. 71–75.
- Castin, Y., H. Wallis & J. Dalibard (1989), « Limit of Doppler cooling », in J. *Opt. Soc. Am. B* 6, p. 2046.
- Chalony, M., A. Kastberg, B. Klappauf & D. Wilkowski (2011), « Doppler Cooling to the Quantum Limit », in *Phys. Rev. Lett.* 107 (24), p. 243002.

- Diu, B., C. Guthmann, D. Lederer & B. Roulet (1989), *Physique Statistique*, Hermann.
- Fuhrmanek, A., R. Bourgain, Y. R. P. Sortais & A. Browaeys (2012), « Lightassisted collisions between a few cold atoms in a microscopic dipole trap », in *Phys. Rev. A* 85 (6), p. 062708.
- Huang, K. (1987), Statistical Mechanics, New York: Wiley.
- Ido, Tetsuya, Yoshitomo Isoya & Hidetoshi Katori (2000), « Optical-dipole trapping of Sr atoms at a high phase-space density », in *Phys. Rev. A* 61 (6), p. 061403.
- Julienne, P.S., A.M. Smith & K. Burnett (1992), « Theory of Collisions between Laser Cooled Atoms », in *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*, ed. by David Bates & Benjamin Bederson, vol. 30, Academic Press, , p. 141.
- Katori, H., T. Ido, Y. Isoya & M. Kuwata-Gonokami (1999), « Magnetooptical trapping and cooling of Strontium atoms down to the photon recoil temperature », in *Phys. Rev. Lett.* 82, p. 116.
- Loftus, Thomas H., Tetsuya Ido, Martin M. Boyd, Andrew D. Ludlow & Jun Ye (2004), « Narrow line cooling and momentum-space crystals », in *Phys. Rev. A* 70 (6), p. 063413.
- Nicholson, TL, SL Campbell, RB Hutson, GE Marti, BJ Bloom, RL McNally, W Zhang, MD Barrett, MS Safronova, GF Strouse, et al. (2015), «Systematic evaluation of an atomic clock at 2 [times] 10-18 total uncertainty », in *Nature communications* 6.
- Pinkse, P. W. H., A. Mosk, M. Weidemüller, M. W. Reynolds, T. W. Hijmans & J. T. M. Walraven (1997), « Adiabatically changing the phasespace density of a trapped Bose gas », in *Phys. Rev. Lett.* 78, p. 990.
- Stamper-Kurn, D. M., H.-J. Miesner, A. P. Chikkatur, S. Inouye, J. Stenger & W. Ketterle (1998), « Reversible formation of a Bose–Einstein condensate », in *Phys. Rev. Lett.* 81, p. 2194.
- Stellmer, Simon, Benjamin Pasquiou, Rudolf Grimm & Florian Schreck (2013), « Laser Cooling to Quantum Degeneracy », in *Phys. Rev. Lett.* 110 (26), p. 263003.
- Wallis, H & W Ertmer (1989), « Broadband laser cooling on narrow transitions », in *JOSA B* 6.11, pp. 2211–2219.