

La matière topologique et son exploration avec les gaz quantiques

Les pompes adiabatiques

http://www.phys.ens.fr/~dalibard/2018_CdF.html

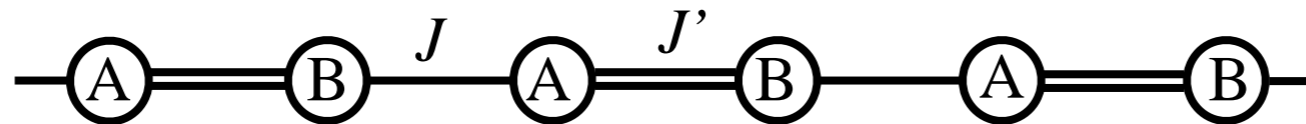
Jean Dalibard
Chaire *Atomes et rayonnement*
Année 2017-18



COLLÈGE
DE FRANCE
— 1530 —

Un bref résumé des cours précédents...

Problèmes périodiques 1D simples, comme le modèle de SSH (Su, Schrieffer et Heeger)



$$E_A = E_B = 0$$

Identification d'une classification topologique

Principe de cette classification :

Cellule unité à deux sites
+
théorème de Bloch



Représentation
par un
pseudo-spin 1/2

$$|u_q^{(\pm)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp e^{i\phi_q} \end{pmatrix}$$

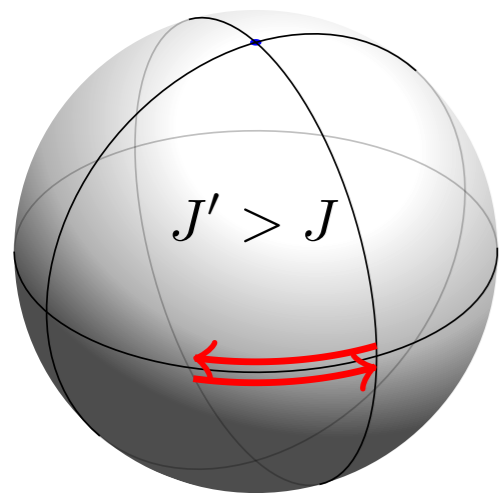
Etats propres : $e^{iqx} \underbrace{u_q(x)}_{\text{périodique}}$

moment de Bloch q : $-\pi/a \leq q < \pi/a$

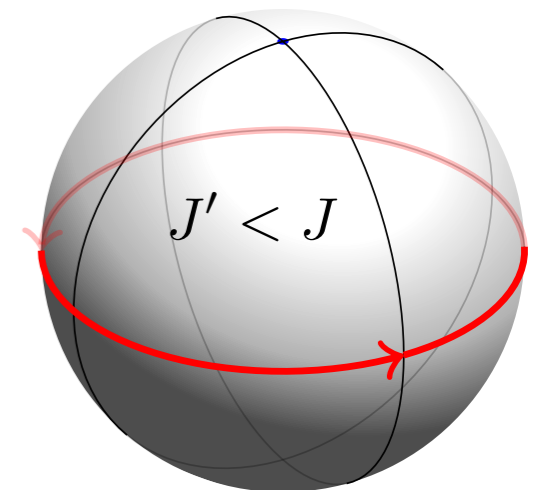
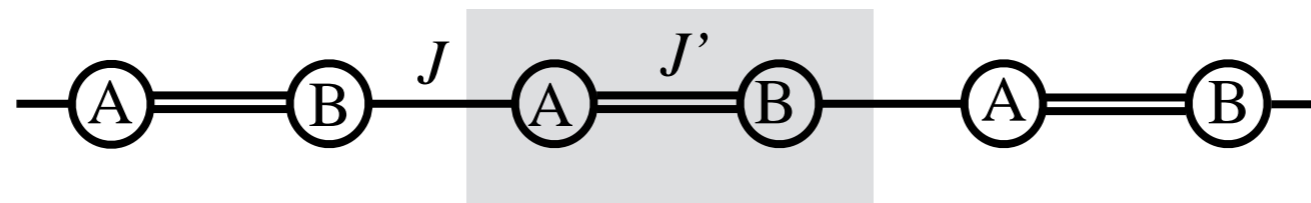
Un bref résumé des cours précédents (suite)

Caractérisation topologique d'une bande d'énergie fondée sur l'enroulement de ses vecteurs propres sur la sphère de Bloch quand le moment parcourt la zone de Brillouin

Pour le modèle SSH, $|u_q^{(-)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\phi_q} \end{pmatrix}$ reste sur l'équateur de la sphère



cas « normal »



cas « topologique »

Manifestation physique de cette classification topologique : états de bord robustes

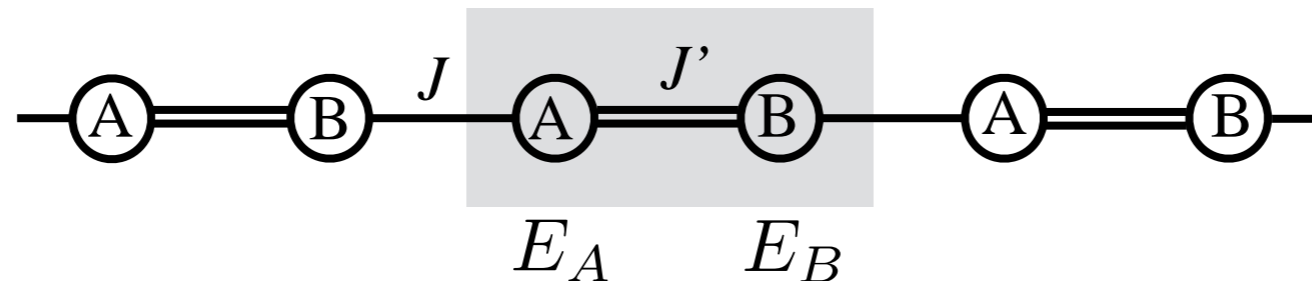


But de ce cours

Pour des situations uni-dimensionnelles, explorer des problèmes dépendant du temps

Quelle est l'influence de la robustesse topologique sur l'évolution du système ?

Enrichissement léger par rapport au modèle SSH : on relâche la contrainte $E_A = E_B$



On garde une cellule unité à deux sites : l'approche « pseudo-spin 1/2 » reste valable

Pompe adiabatique et quantification du déplacement dans une évolution périodique

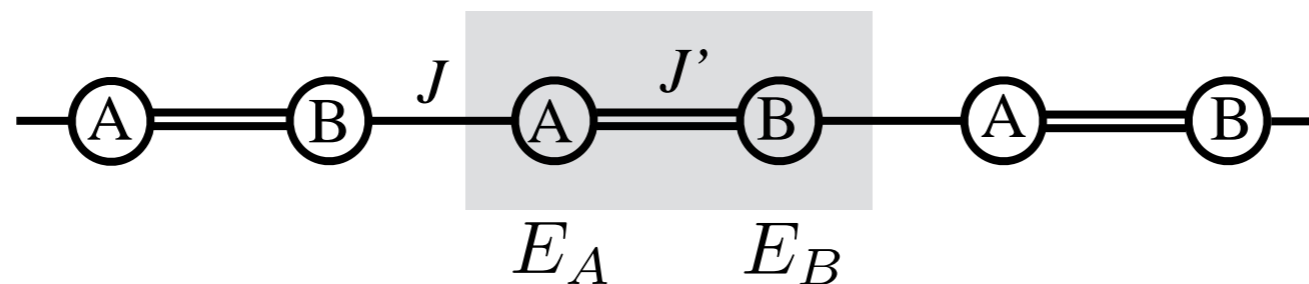
1.

Au delà de SSH: le modèle de Rice-Mele

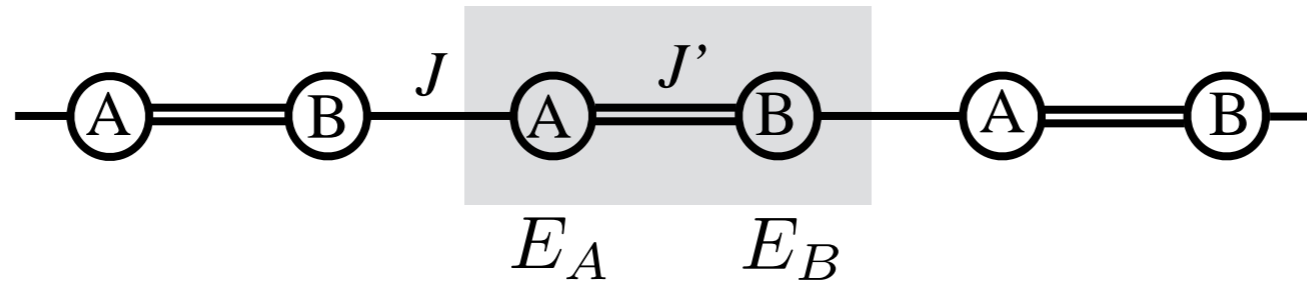
M.J. Rice and E.J. Mele

Elementary excitations of a linearly conjugated diatomic polymer

Phys. Rev. Lett. **49**, 1455 (1982)



Rappel sur les hamiltoniens « à deux sites »



Chaîne périodique infinie décrite dans un modèle de liaisons fortes

$$|\psi_q\rangle = \sum_j e^{ijqa} (\alpha_q |A_j\rangle + \beta_q |B_j\rangle)$$

$$|u_q\rangle = \alpha_q \left(\sum_j |A_j\rangle \right) + \beta_q \left(\sum_j |B_j\rangle \right) \longrightarrow |u_q\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_q \\ \beta_q \end{pmatrix}$$

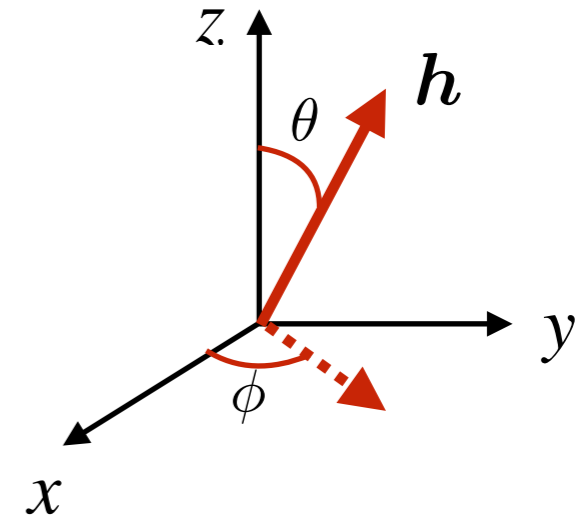
Hamiltonien « périodique » permettant de trouver $|u_q\rangle$: matrice 2x2 hermitienne

$$\hat{H}_q = E_0(q) \hat{1} - \mathbf{h}(q) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\} : \text{matrices de Pauli} \\ \mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix} : \text{trois composantes réelles} \end{array} \right.$$

Paramétrisation énergies - angles

Le problème pour le pseudo-spin 1/2 est entièrement caractérisé par $E_0(q), \mathbf{h}(q)$

Repérons le vecteur \mathbf{h} par son module $|\mathbf{h}|$
et ses angles en coordonnées sphériques θ, ϕ

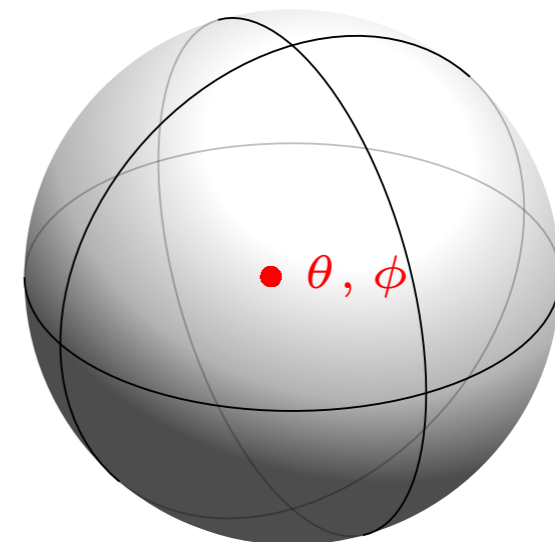


L'hamiltonien périodique devient :

$$\hat{H}_q = E_0(q) \hat{1} - |\mathbf{h}(q)| \begin{pmatrix} \cos \theta_q & e^{-i\phi_q} \sin \theta_q \\ e^{i\phi_q} \sin \theta_q & -\cos \theta_q \end{pmatrix}$$

Energies : $E_0 \pm |\mathbf{h}|$

$$\text{Etats propres : } \begin{cases} |u^{(-)}\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \\ |u^{(+)}\rangle = \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ -e^{i\phi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \end{cases}$$



La connexion de Berry

Outil pour calculer la phase géométrique accumulée sur un contour fermé

Pour la bande inférieure :

$$|u^{(-)}\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}}^{(-)}(q) = i\langle u_q^{(-)} | \partial_q u_q^{(-)} \rangle = -\frac{d\phi_q}{dq} \sin^2(\theta_q/2) \\ = \frac{1}{2} \frac{d\phi_q}{dq} (-1 + \cos \theta_q)$$

De même pour la bande supérieure :

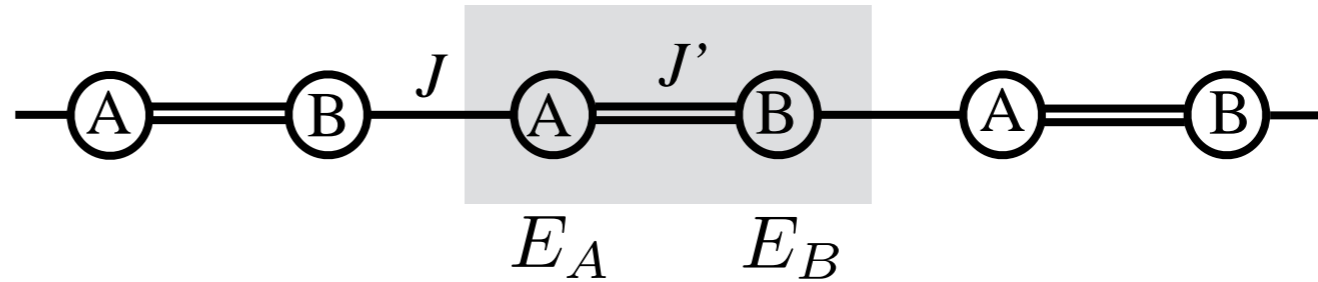
$$|u^{(+)}\rangle = \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ -e^{i\phi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \longrightarrow \mathcal{A}^{(+)}(q) = -\frac{1}{2} \frac{d\phi_q}{dq} (1 + \cos \theta_q)$$

Quantité qui dépend du choix de jauge :

$$|\tilde{u}^{(-)}\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}}^{(-)}(q) = \frac{1}{2} \frac{d\phi_q}{dq} (1 + \cos \theta_q)$$

Le modèle de Rice-Mele

Modèle SSH « enrichi » :



Hamiltonien périodique :

$$\hat{H}_q = \begin{pmatrix} E_A & -(J' + J e^{-iqa}) \\ -(J' + J e^{iqa}) & E_B \end{pmatrix}$$

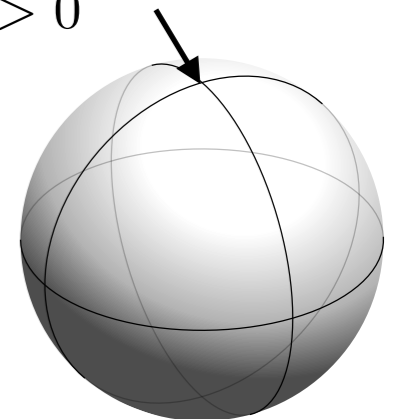
$$= \frac{1}{2}(E_A + E_B) \hat{1} - \begin{pmatrix} \Delta & J' + J e^{-iqa} \\ J' + J e^{iqa} & -\Delta \end{pmatrix}$$

Nous prendrons $E_A + E_B = 0$, $2\Delta = E_B - E_A$ pouvant être positif ou négatif

$$\hat{H}_q = -\mathbf{h}(q) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{h}(q) = \begin{pmatrix} J' + J \cos(qa) \\ J \sin(qa) \\ \Delta \end{pmatrix}$$

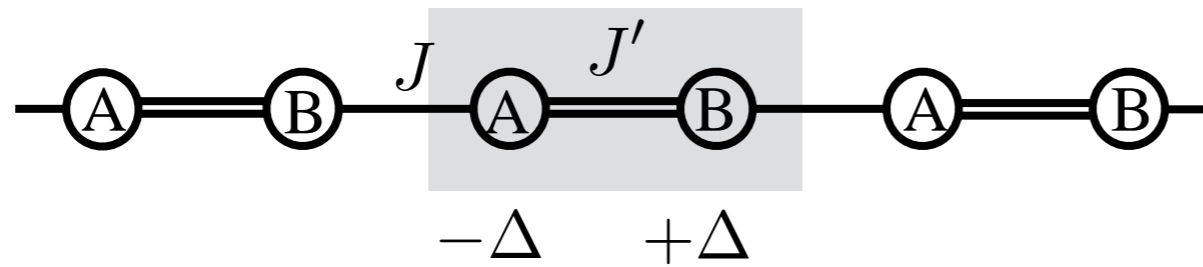
$$qa = \pi, J' = J$$

$$\Delta > 0$$



Tout point de la sphère de Bloch peut être désormais être atteint

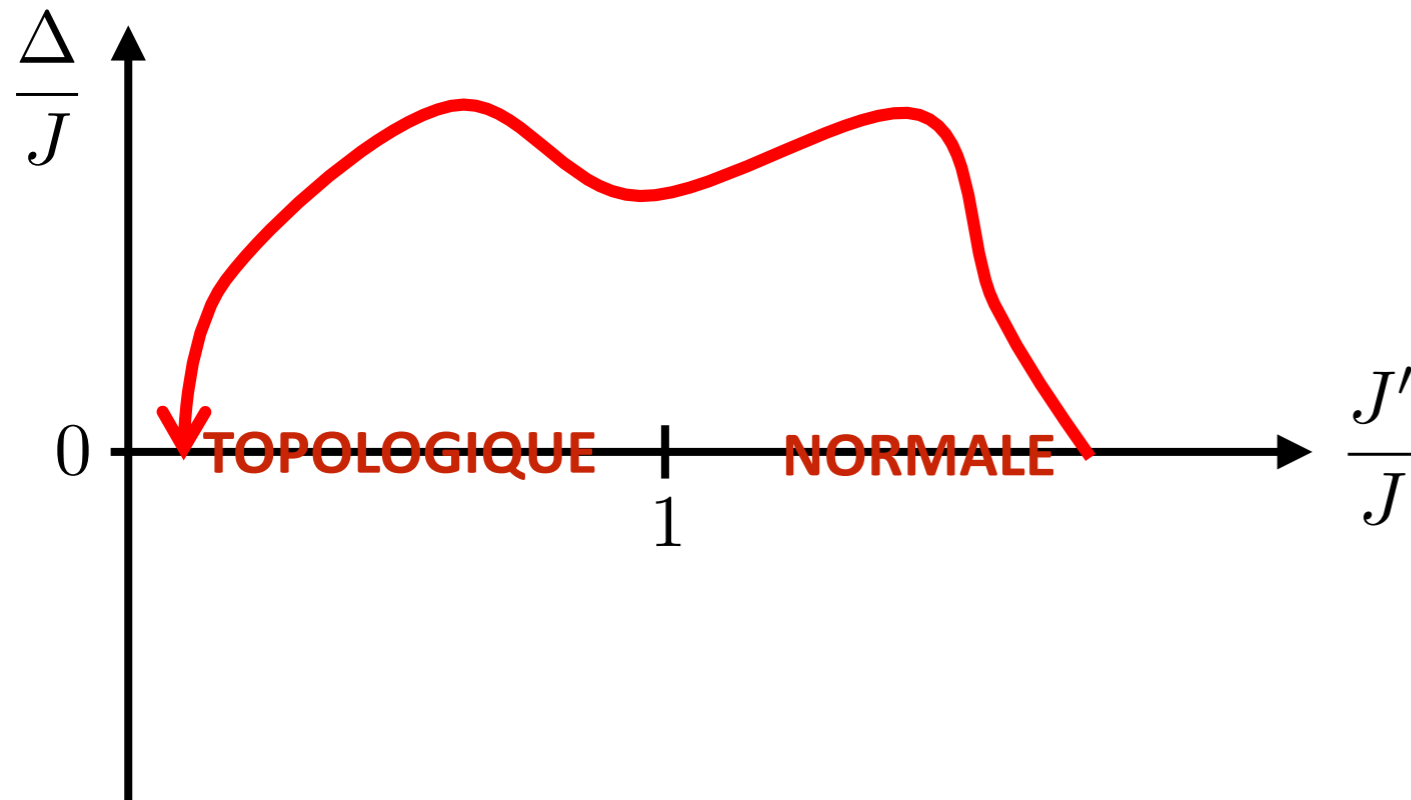
Quel diagramme de phase pour le modèle RM ?



$$\mathbf{h}(q) = \begin{pmatrix} J' + J \cos(qa) \\ J \sin(qa) \\ \Delta \end{pmatrix}$$

$$E_q^{(\pm)} = \pm |\mathbf{h}(q)|$$

Deux paramètres sans dimension : $\frac{J'}{J}$ et $\frac{\Delta}{J}$



Modèle SSH : $\Delta = 0$

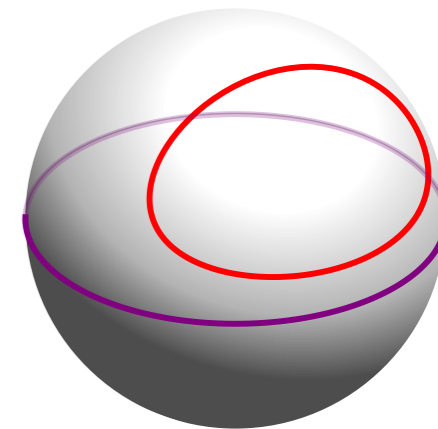
On passe de la phase normale à la phase topologique à travers le point singulier $J' = J$ pour lequel le gap s'annule.

Symétrie de sous-réseau

Modèle RM : le gap ne s'annule pas, sauf en $J' = J, \Delta = 0$

La perte de la symétrie de sous-réseau entraîne la perte de la robustesse topologique

Phase de Zak pour le modèle RM



$$\Phi_{\text{Zak}}^{(-)} = \int_{\text{BZ}} \mathcal{A}^{(-)}(q) dq \quad \text{avec} \quad \mathcal{A}^{(-)}(q) = \frac{1}{2} \frac{d\phi_q}{dq} (-1 + \cos \theta_q)$$

Les angles θ_q et ϕ_q se calculent par :

$$\mathbf{h}(q) = \begin{pmatrix} J' + J \cos(qa) \\ J \sin(qa) \\ \Delta \end{pmatrix}$$

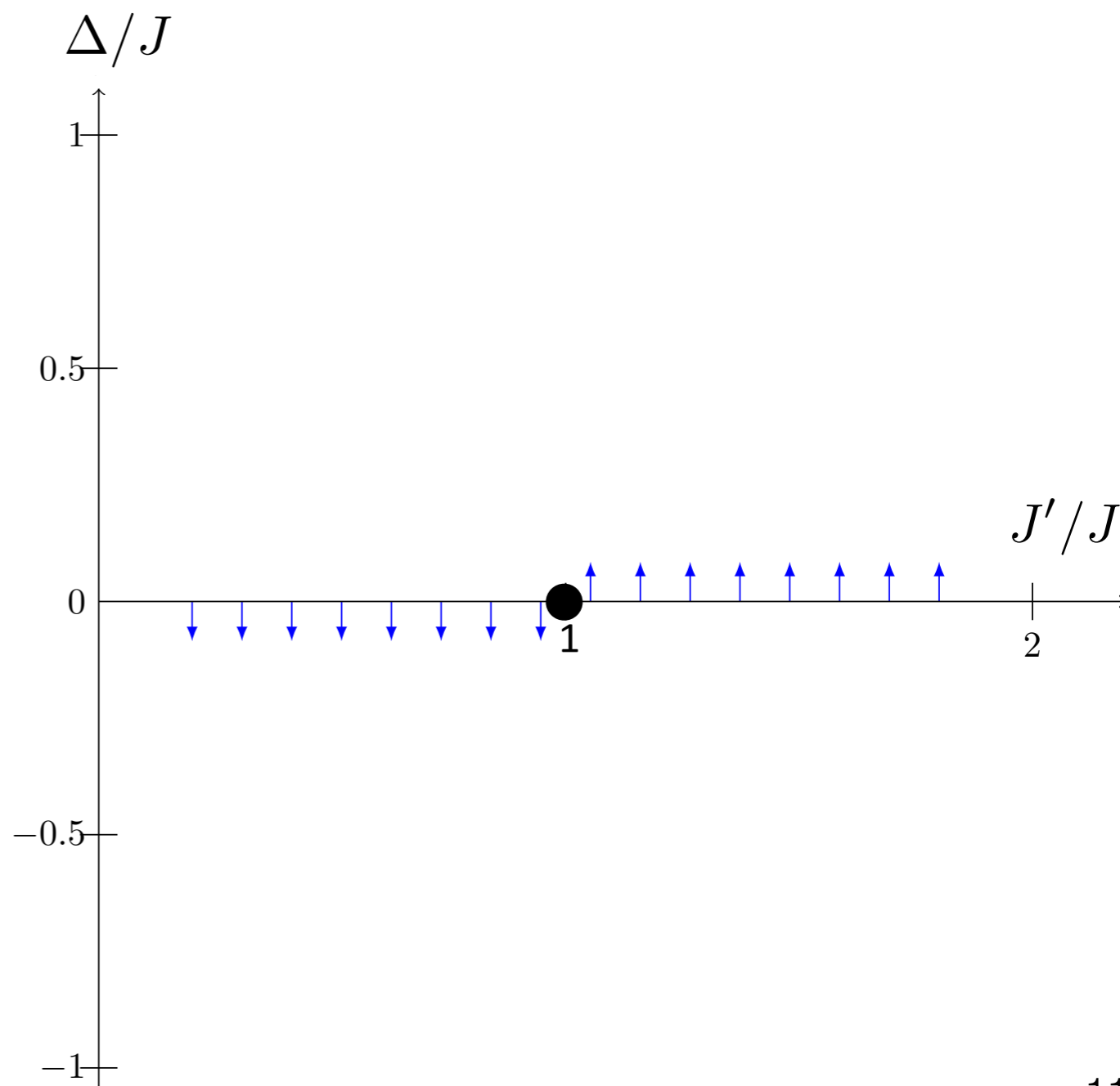
$$= |\mathbf{h}| \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Représentation graphique de $\Phi_{\text{Zak}}^{(-)}$ par l'orientation d'un vecteur unitaire

$$\uparrow : \Phi_{\text{Zak}}^{(-)} = 0$$

$$\leftarrow : \Phi_{\text{Zak}}^{(-)} = \pi/2$$

$$\downarrow : \Phi_{\text{Zak}}^{(-)} = \pi$$



2.

Réseaux et super-réseaux optiques

Réseau optique à une dimension



Onde lumineuse stationnaire : intensité modulée dans l'espace

$$I(x) = I_0 \sin^2(kx) \quad \text{période spatiale : } a = \lambda/2$$

Dipôle électrique oscillant induit dans l'atome : $\mathbf{D} = \alpha \mathbf{E}_{\text{lumiere}}$

$$\text{Potential dipolaire : } V(x) = V_0 \sin^2(kx)$$

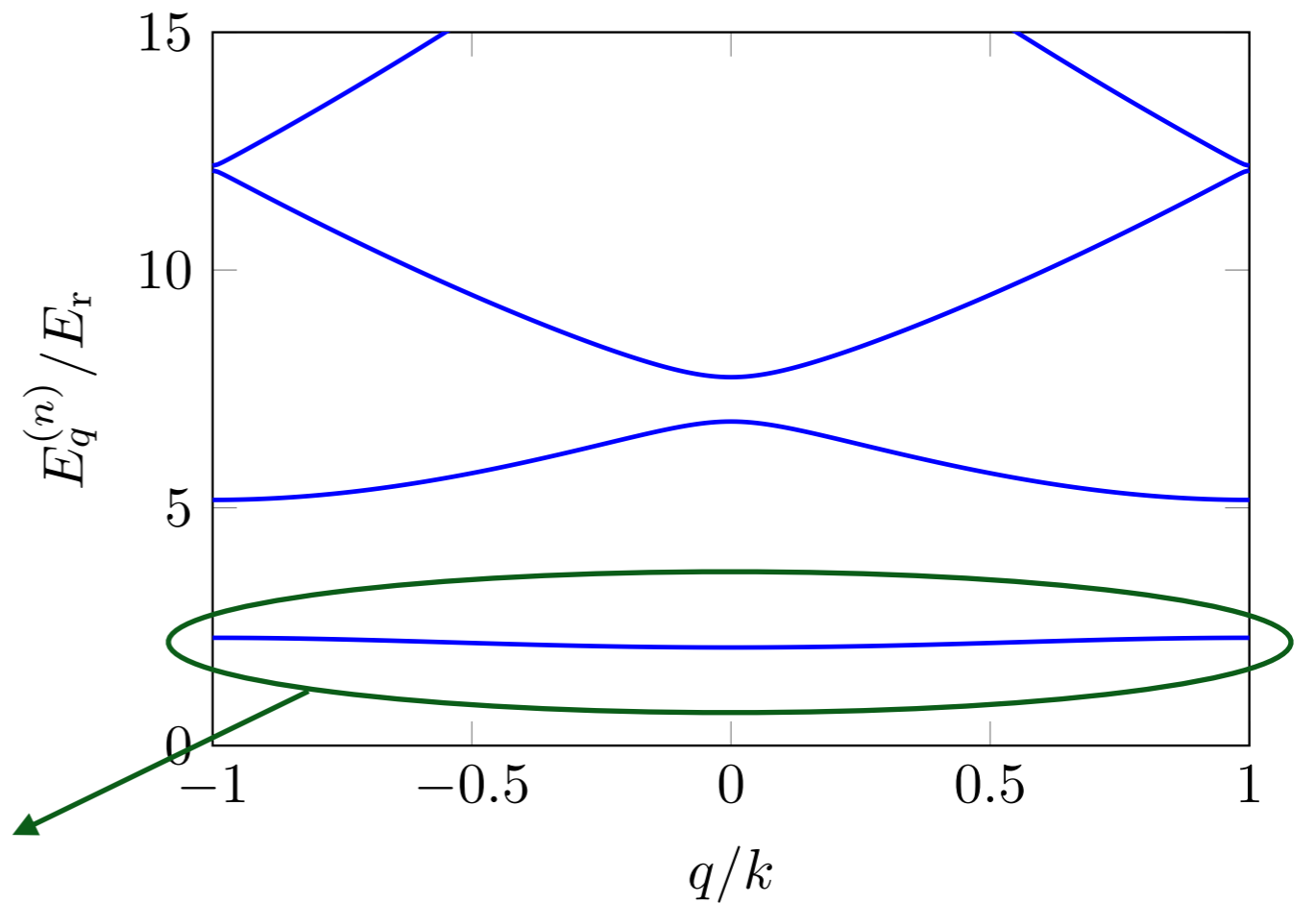
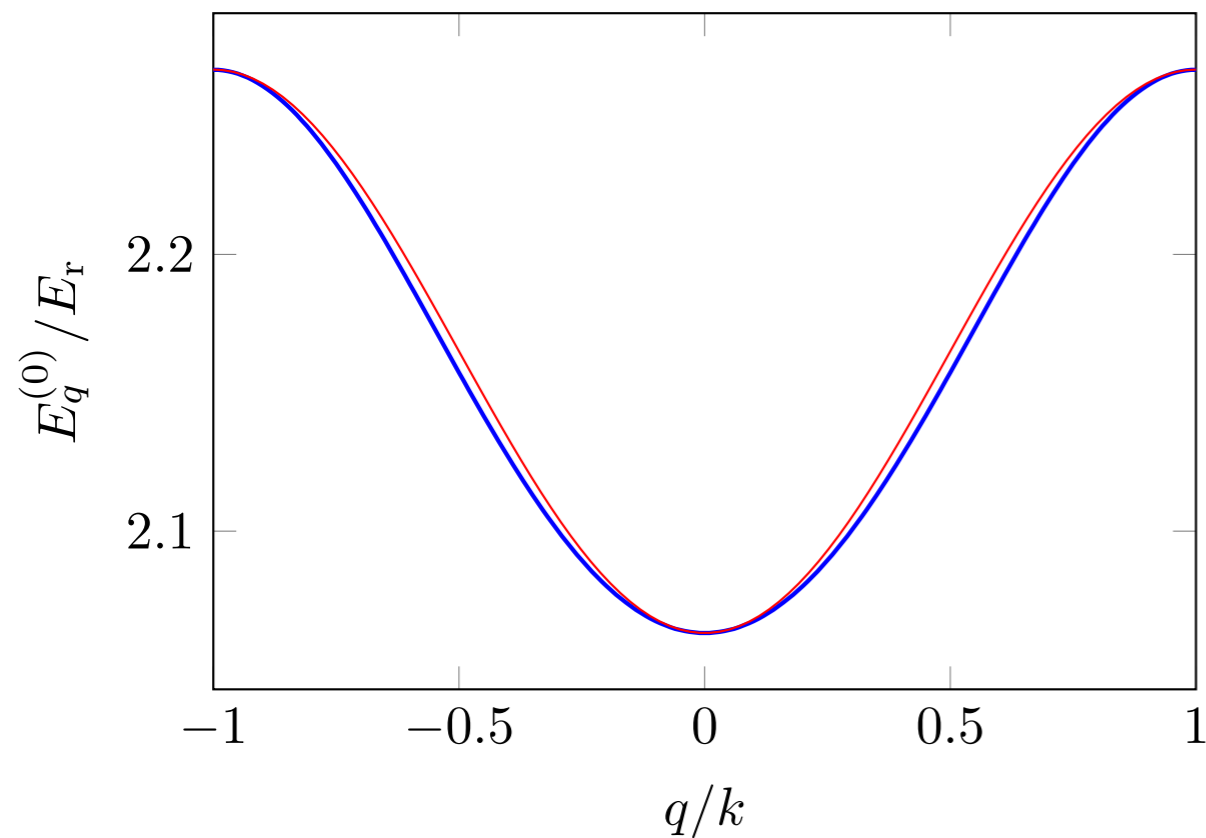
Unités naturelles pour ce problème :

- longueur : $\lambda = 2\pi/k$ micron
- énergie : $E_{\text{recul}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ 3-30 kHz

Bandes d'énergie pour un réseau simple

$$V(x) = V_0 \sin^2(kx)$$

Tracé pour $V_0 = 6E_r$



Bande fondamentale bien décrite par un hamiltonien de Hubbard avec

$$E_q = -2J \cos(qa) + \text{cte.}$$

$$J \approx 0.05 E_r$$

SSH et Rice-Mele : le super-réseau optique

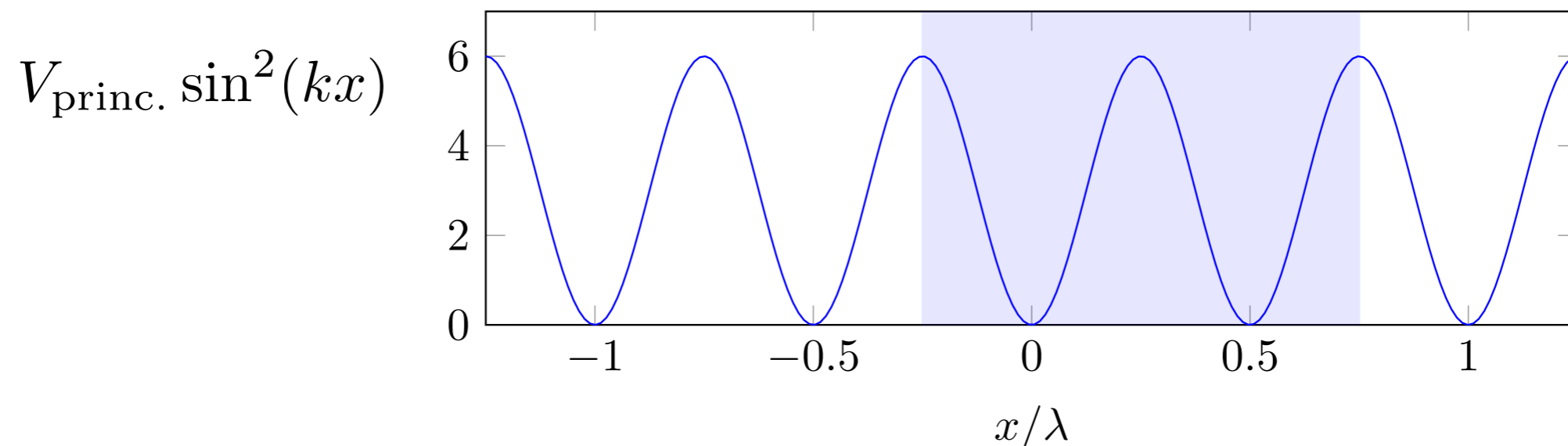


Deux ondes stationnaires à λ et 2λ (typiquement $\lambda=532$ nm)

$$V(x) = V_{\text{princ.}} \sin^2(kx) + V_{\text{sec.}} \sin^2[(kx + \phi)/2]$$

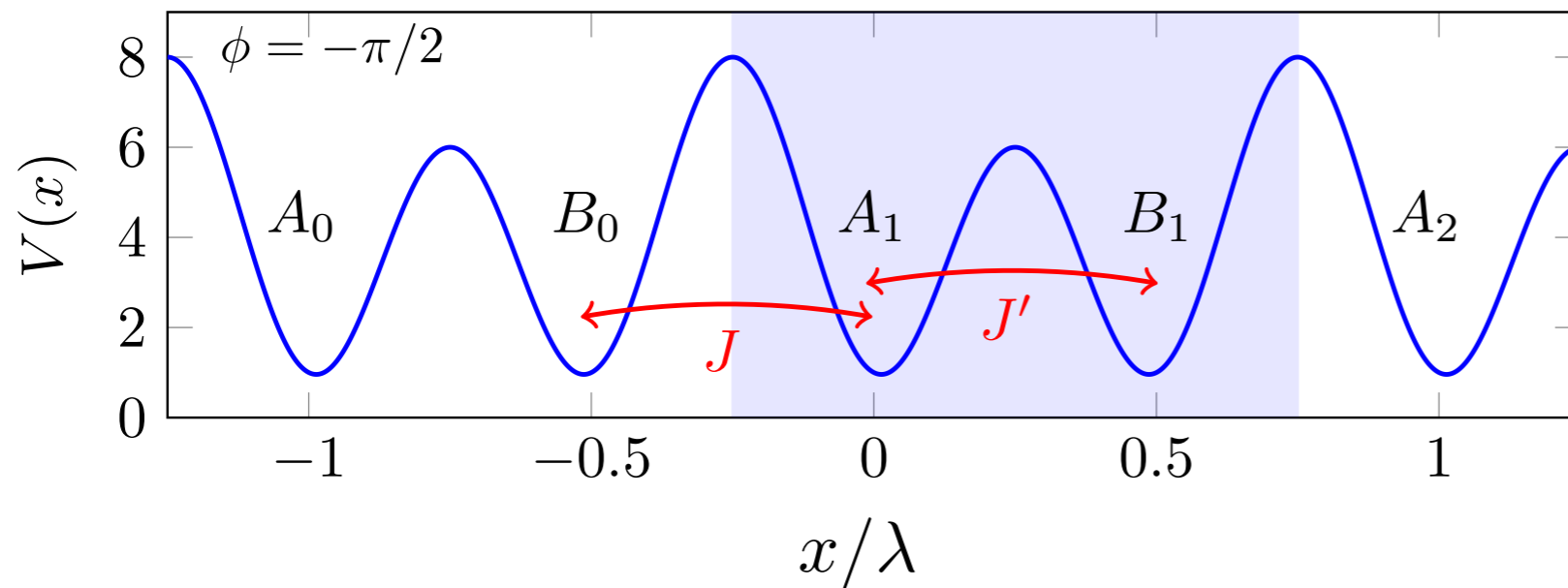
L'intensité du réseau principal (de courte longueur d'onde) est grande devant celle du réseau secondaire (de grande longueur d'onde)

Potentiel du réseau principal : minima en $x = n \lambda/2$



Potentiel du super-réseau

$$V(x) = V_{\text{princ.}} \sin^2(kx) + V_{\text{sec.}} \sin^2[(kx + \phi)/2]$$

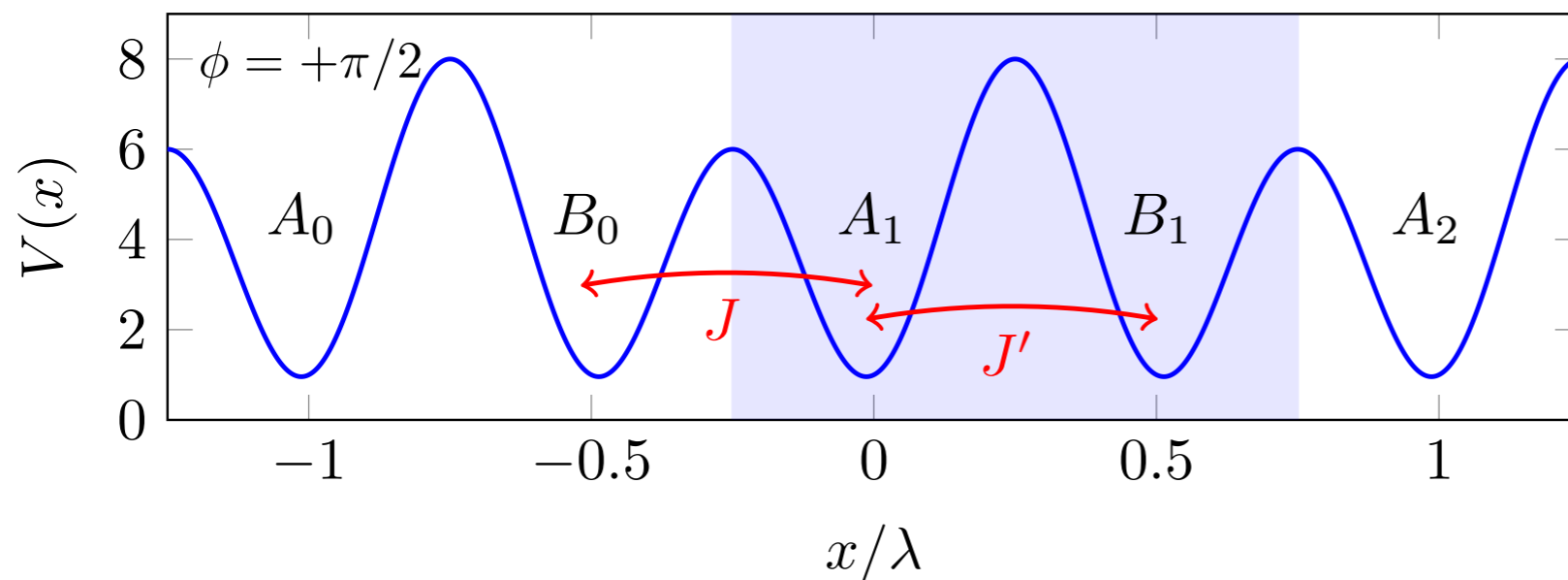


$$\phi = \pm\pi/2$$



Même valeur du
potentiel secondaire
pour tous les minima
du potentiel principal

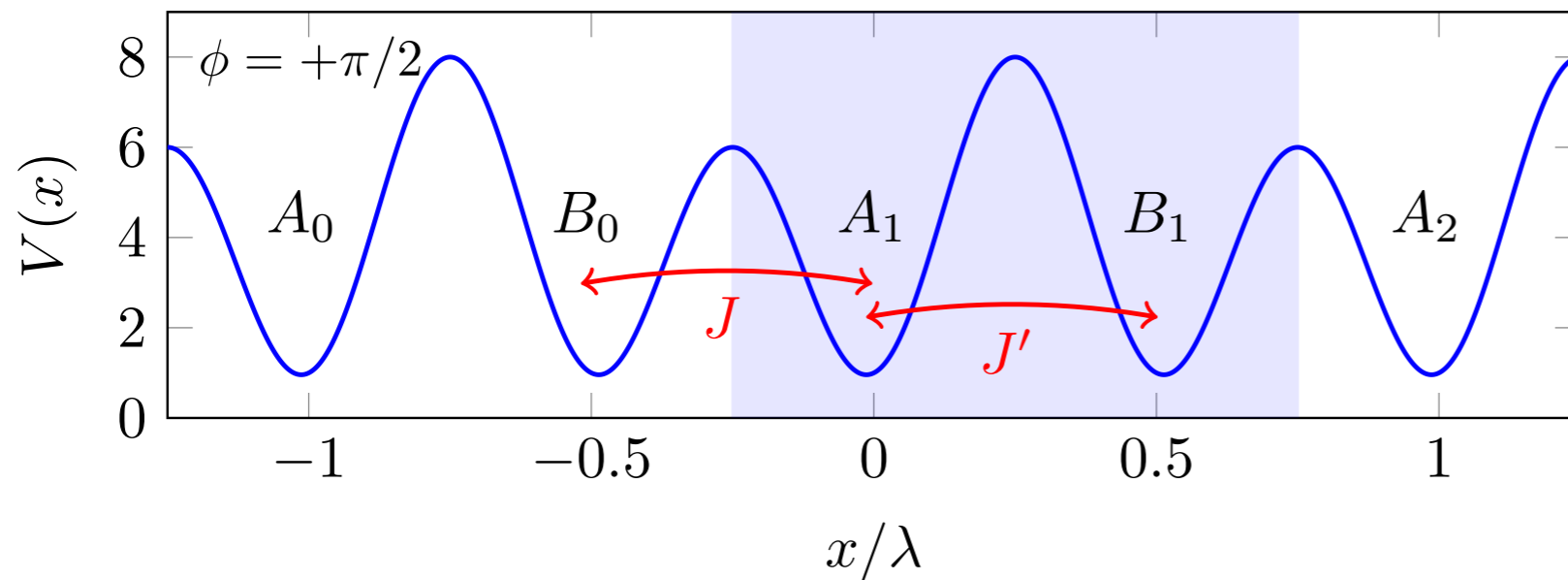
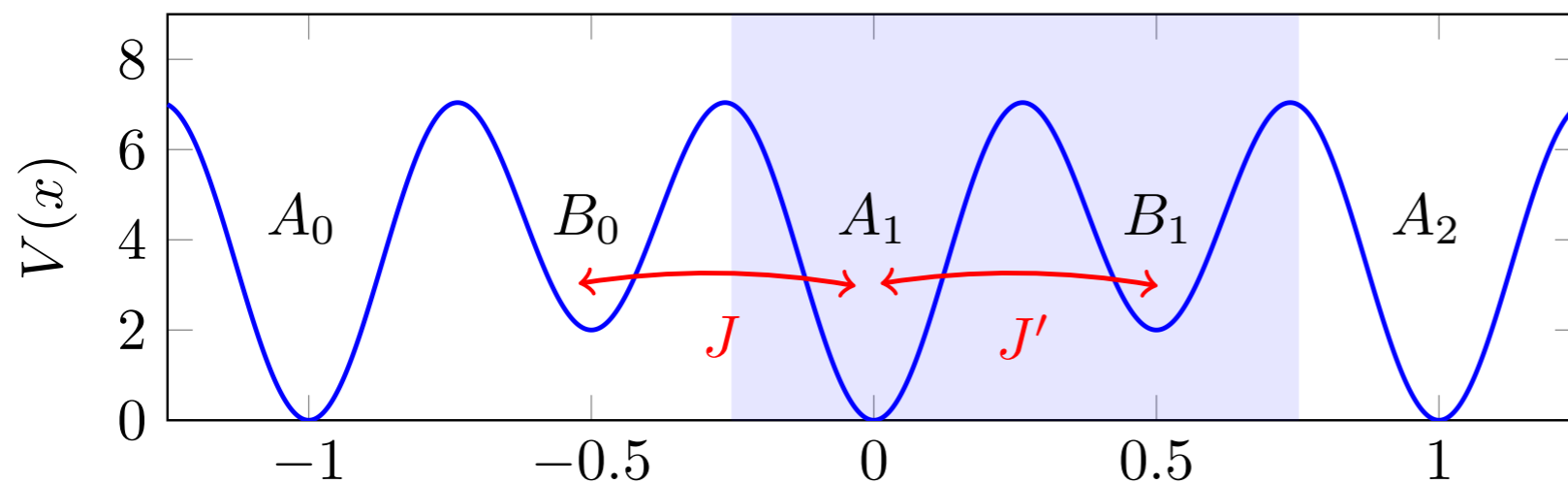
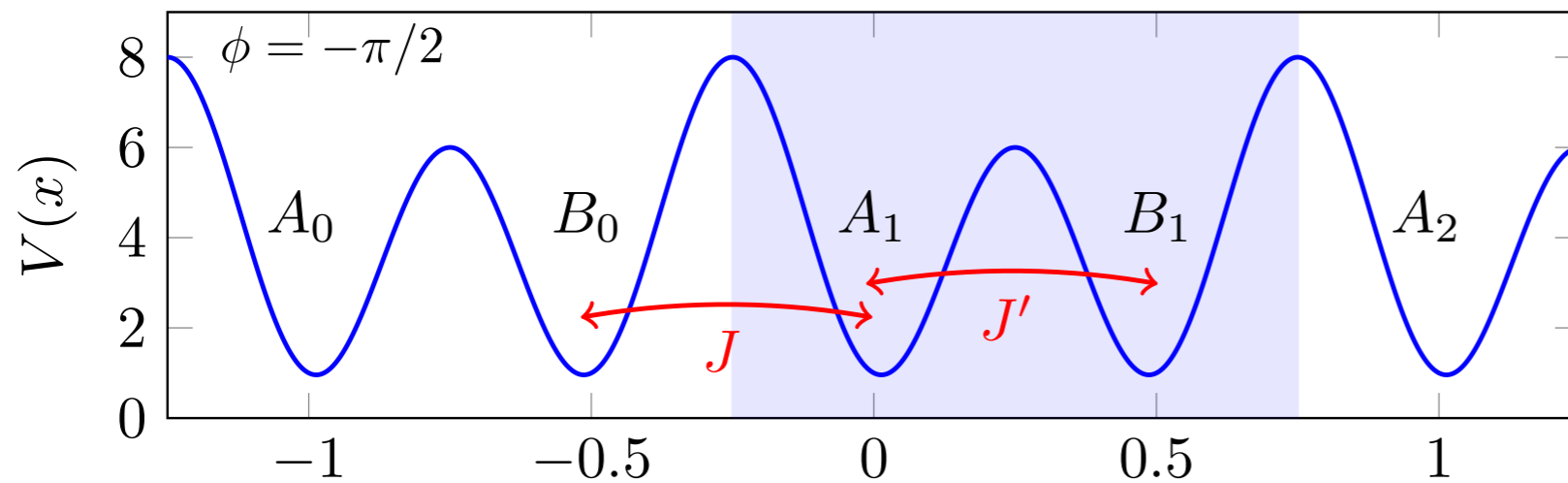
Augmente une
barrière sur deux



Réalise les deux
dimérisations
du réseau SSH

Potentiel du super-réseau

$$V(x) = V_{\text{princ.}} \sin^2(kx) + V_{\text{sec.}} \sin^2[(kx + \phi)/2]$$



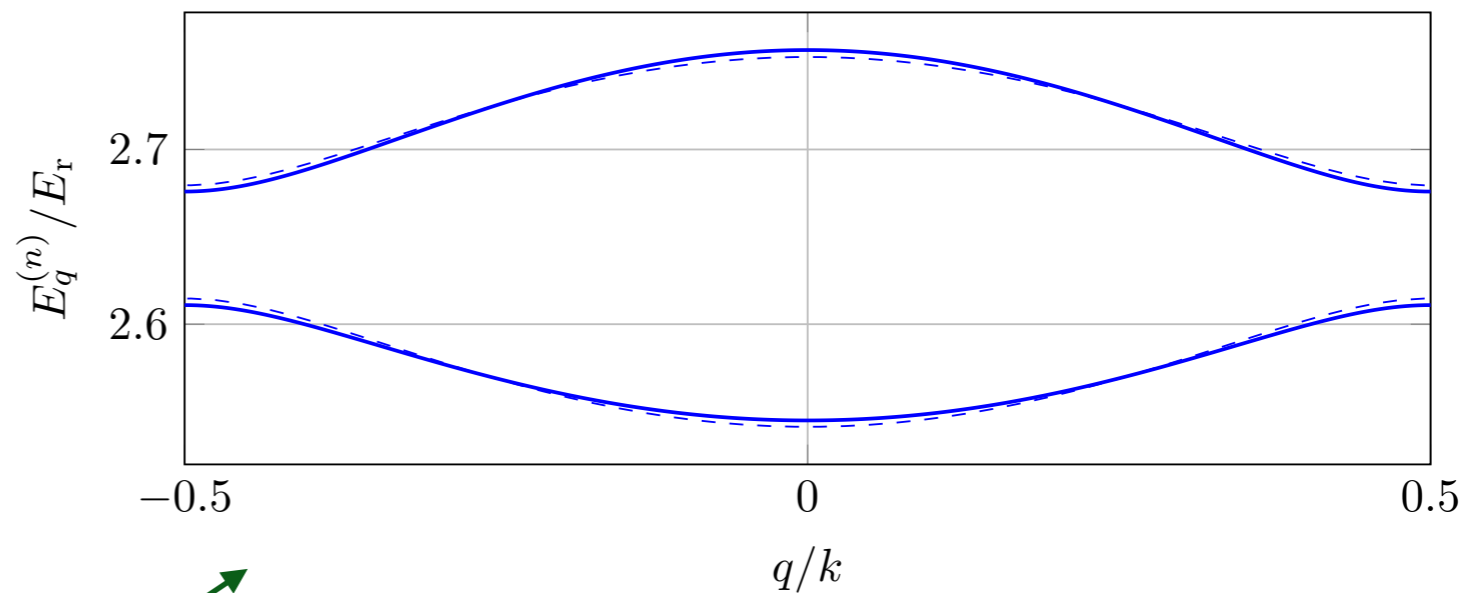
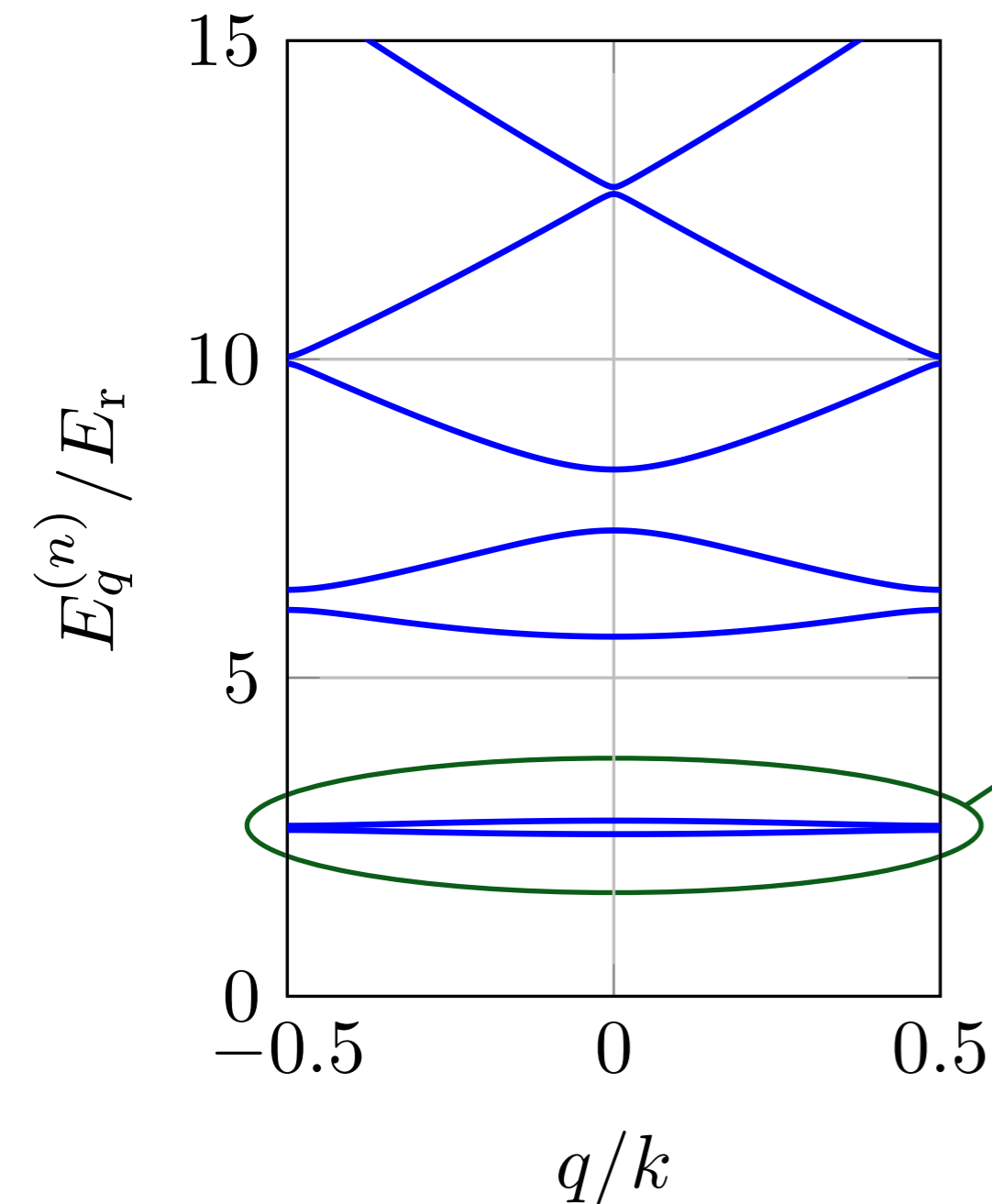
$\phi = 0$
 Décale un minimum sur deux, avec la même hauteur de barrière partout :

$$J = J', \Delta > 0$$

Bandes d'énergie du super-réseau

$$V(x) = V_{\text{princ.}} \sin^2(kx) + V_{\text{sec.}} \sin^2[(kx + \phi)/2]$$

$$V_{\text{princ.}} = 6 E_r \quad V_{\text{sec.}} = E_r \quad \phi = \pi/2$$



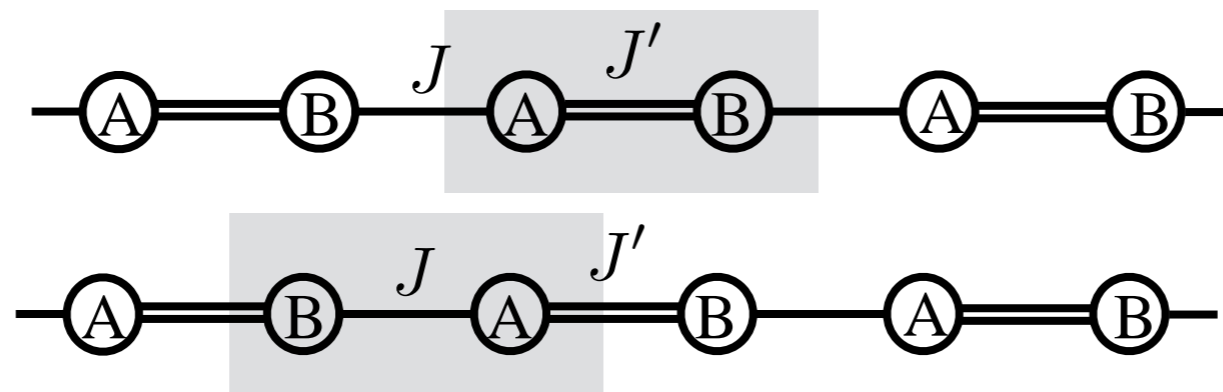
Bon accord avec le modèle SSH (tiretés)

$$J = 0.07 E_r \quad J' = 0.04 E_r$$

Mesure de la phase de Zak dans un super-réseau

M. Atala et al., Nat. Phys. **9**, 795 (2013)

Rappel préliminaire : pour une chaîne SSH infinie, la phase de Zak n'est pas véritablement un invariant topologique : dépend du choix de paramétrisation A-B



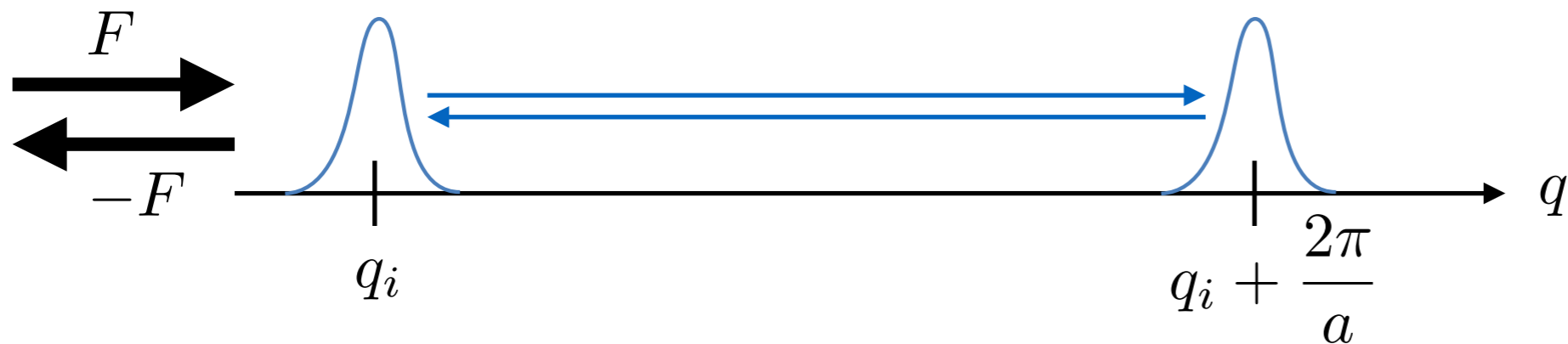
Une fois ce choix fait, on trouve :

$$\Delta\Phi \equiv \Phi_{\text{Zak}}^{[J' > J]} - \Phi_{\text{Zak}}^{[J' < J]} = \pm\pi$$

Procédure suivie à Munich :

Mesure de la différence de phase $\Delta\Phi$ par une méthode interférométrique en inversant les valeurs de J et de J' au cours de la séquence expérimentale

Expérience de Munich (simplifiée)



- On prépare une particule dans un paquet d'ondes autour du moment q_i dans un super-réseau SSH avec $\phi = -\pi/2$, $J' > J$
- On applique une force uniforme F qui accélère la particule (oscillations de Bloch)

$$\hbar \frac{dq}{dt} = F \quad \longrightarrow \quad q(t) = q_i + Ft/\hbar$$

- Quand le moment de Bloch a parcouru une largeur de zone de Brillouin, on change la dimérisation :

$$\phi = +\pi/2, \quad J' < J$$

et on inverse le signe de la force F

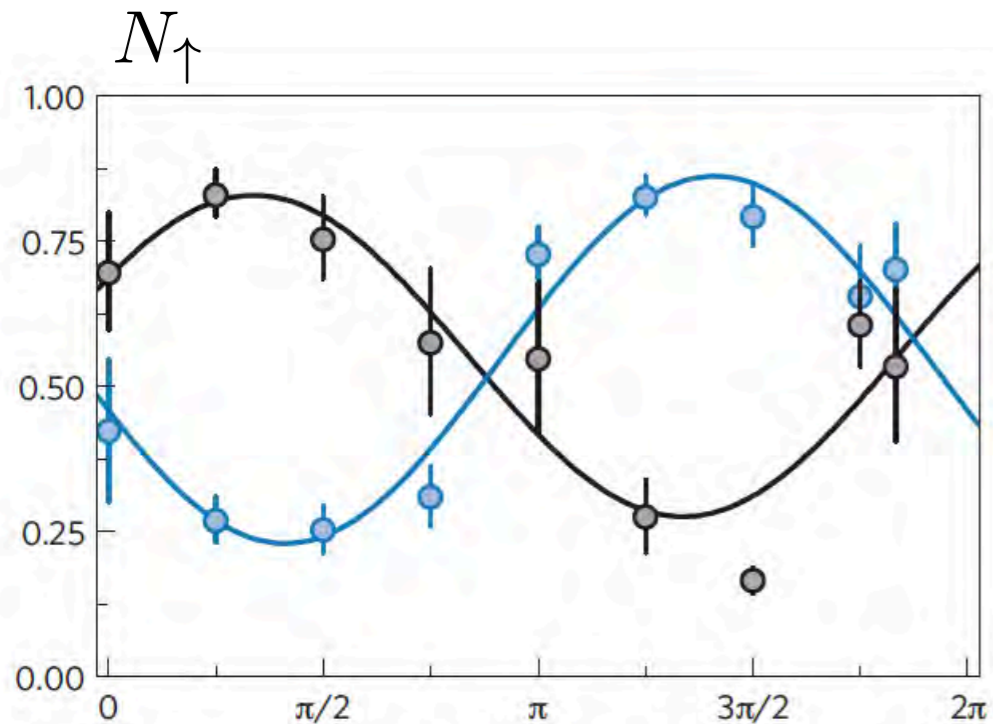
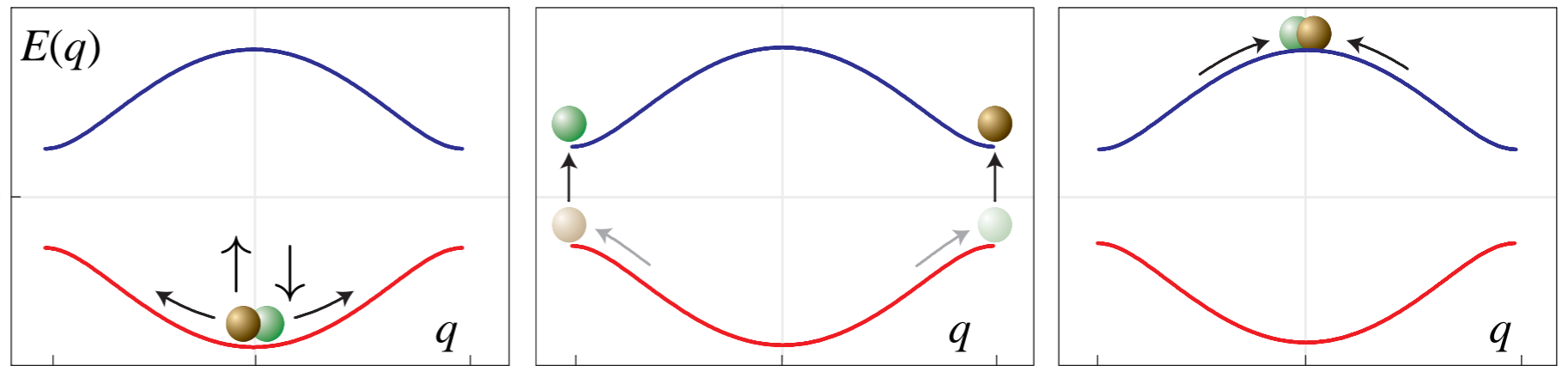
- On mesure la phase accumulée quand le moment a repris la valeur q_i

Expérience de Munich (plus réaliste)

La force qui induit les oscillations de Bloch résulte d'un gradient de champ magnétique : on utilise une technique d'écho de spin pour compenser les fluctuations du champ

Mesure interférométrique de la phase par une série d'impulsions micro-ondes

Séquence $\frac{\pi}{2} - \pi - \frac{\pi}{2}$



Phase de l'impulsion micro-onde finale

Bleu : avec changement de dimérisation SSH

$$\phi = -\pi/2 \longrightarrow \phi = +\pi/2$$

en milieu de séquence

Noir : sans changement

$$\Delta\Phi = 0.97(2)\pi$$

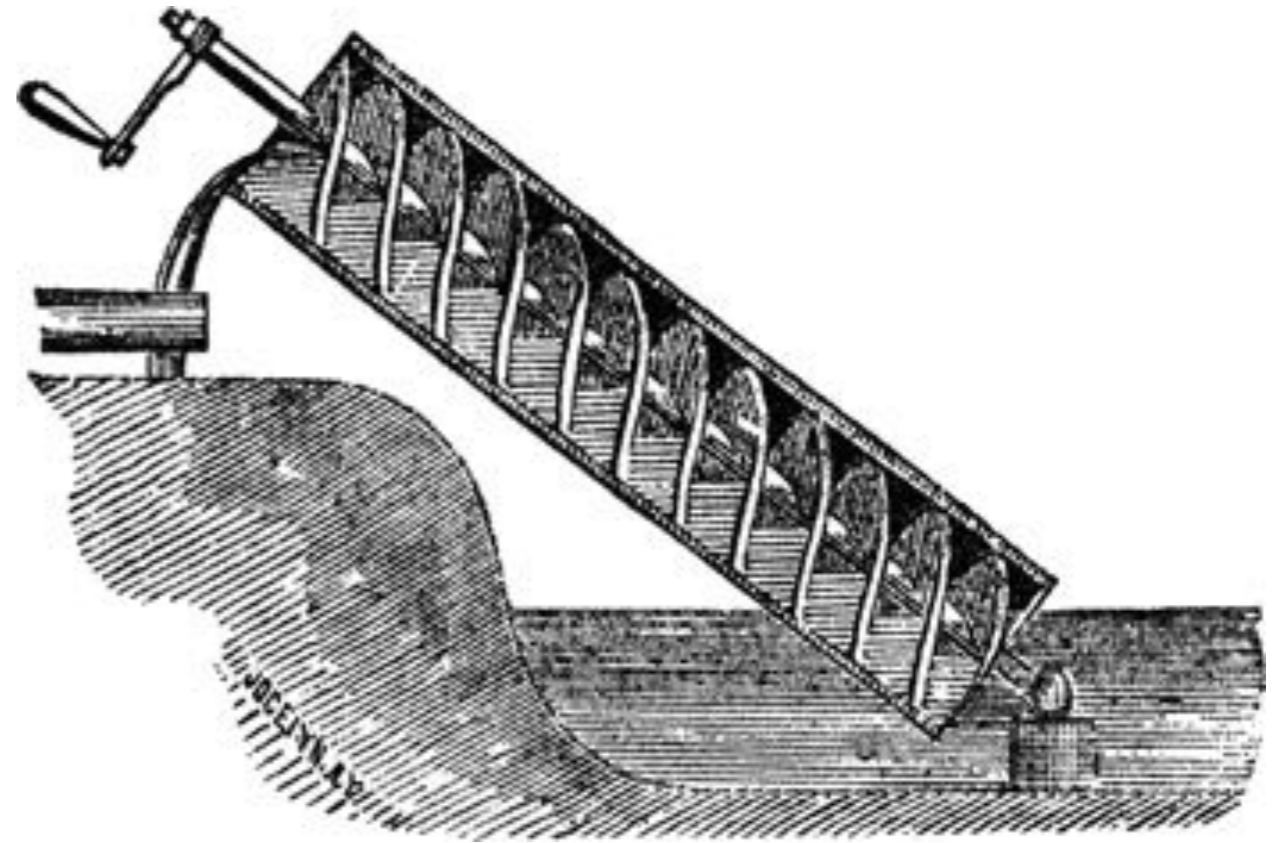
Mesure étendue ensuite au modèle Rice-Mele

3.

Pompe adiabatique
dans le modèle de Rice-Mele

Le principe d'une pompe adiabatique

- Changement cyclique des paramètres qui contrôlent l'état d'un fluide
- Après un cycle, le fluide n'est pas revenu à son état initial, mais une certaine quantité de matière a été transportée
- Cette quantité transportée ne dépend pas de la durée du cycle



Version quantique :

Quantification de la quantité transportée ou du déplacement

D.J. Thouless, Phys. Rev. B 27, 6083 (1983)

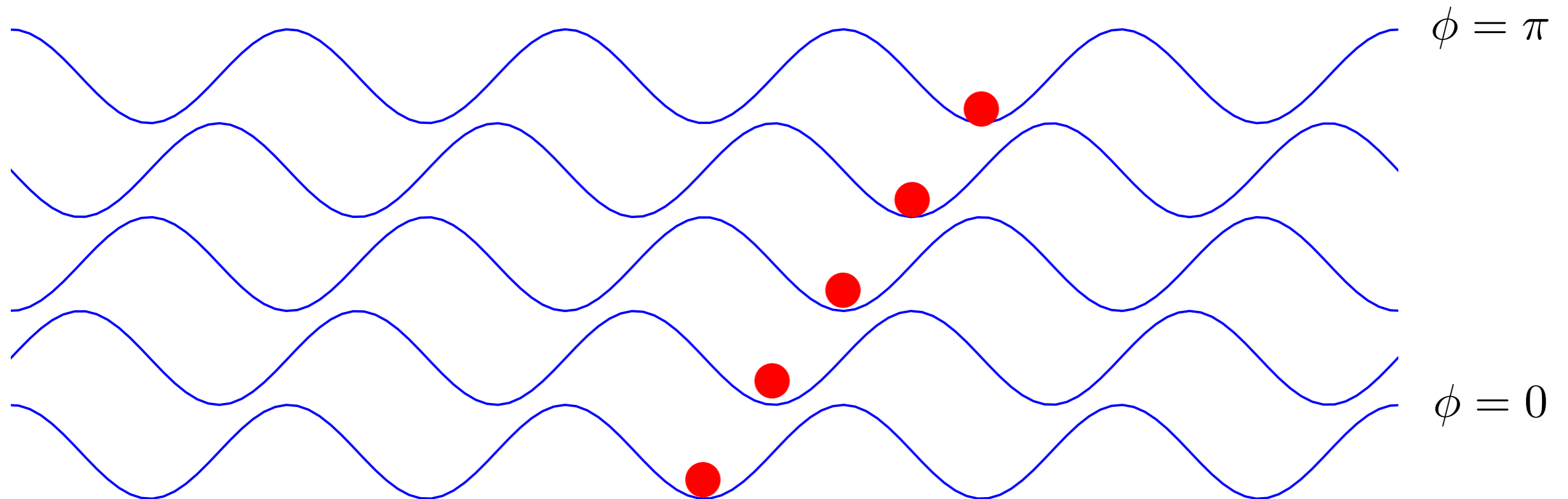
Un premier exemple (presque trop simple...)

Une onde stationnaire translatée $V(x) = V_0 \sin^2(kx - \phi)$

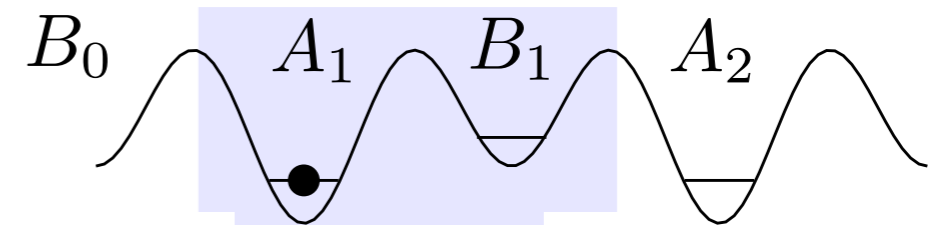
Réseau très profond : pas d'effet tunnel

A l'instant initial, $\phi = 0$

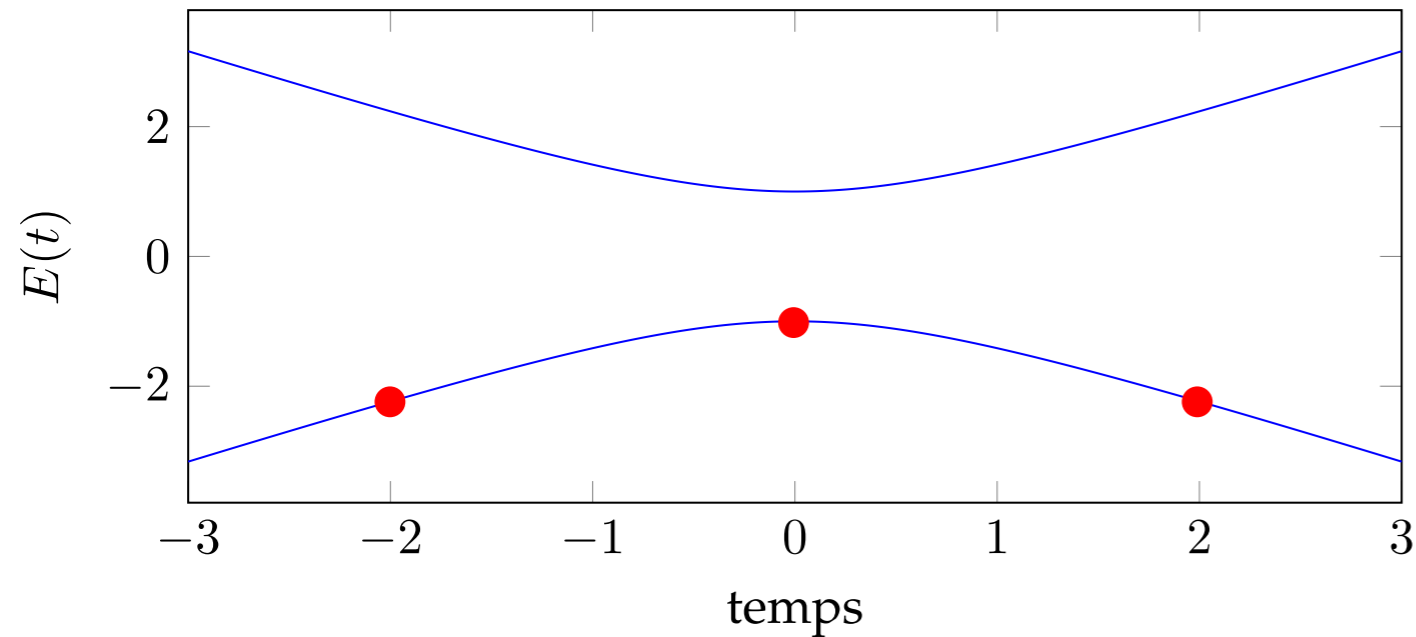
La phase ϕ augmente lentement avec le temps



Un deuxième exemple (un peu moins simple...)



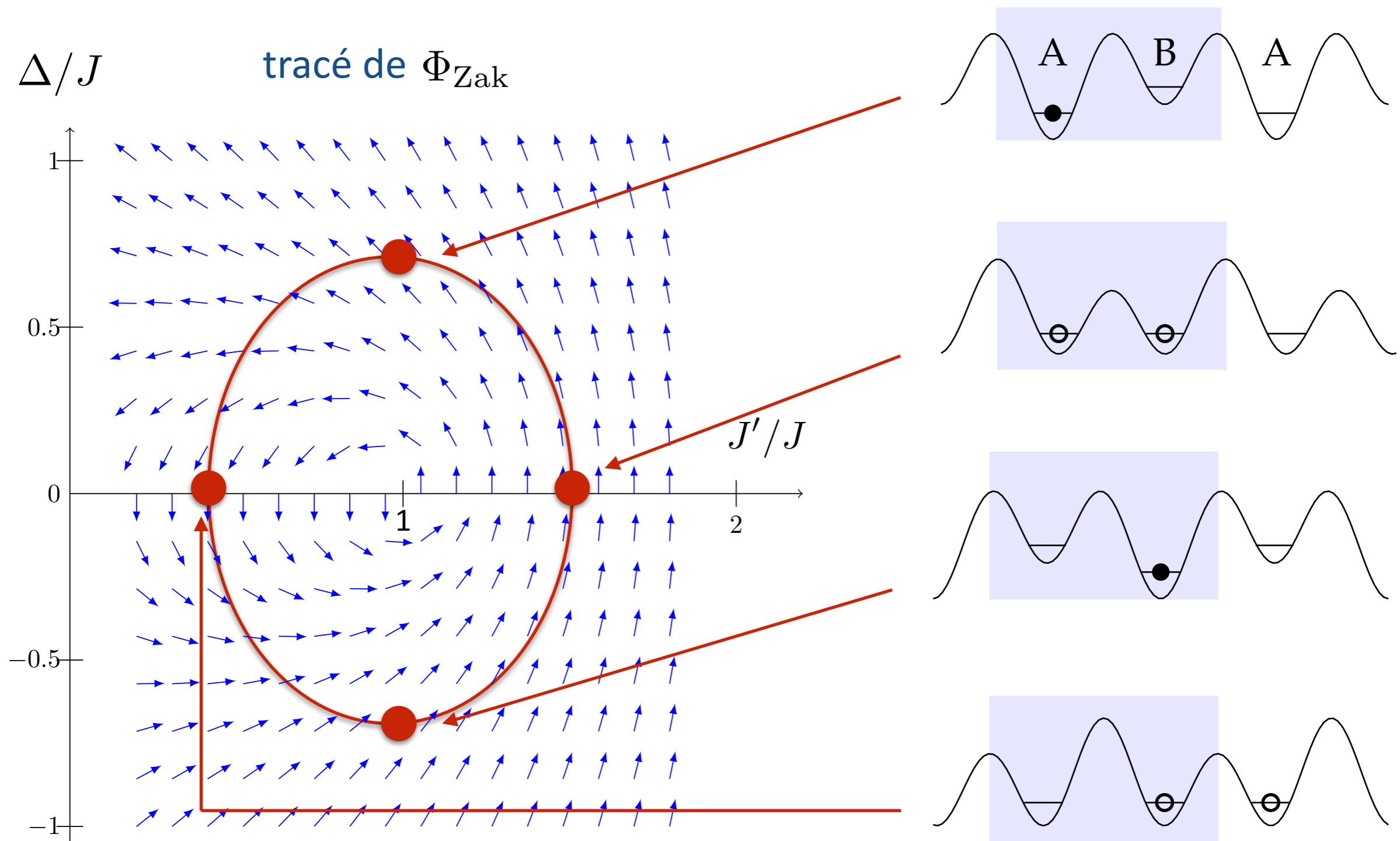
Super-réseau profond : pas d'effet tunnel
à travers les barrières hautes



Une particule initialement en A_1 finit en A_2

Une particule initialement en B_1 finit en ... B_0

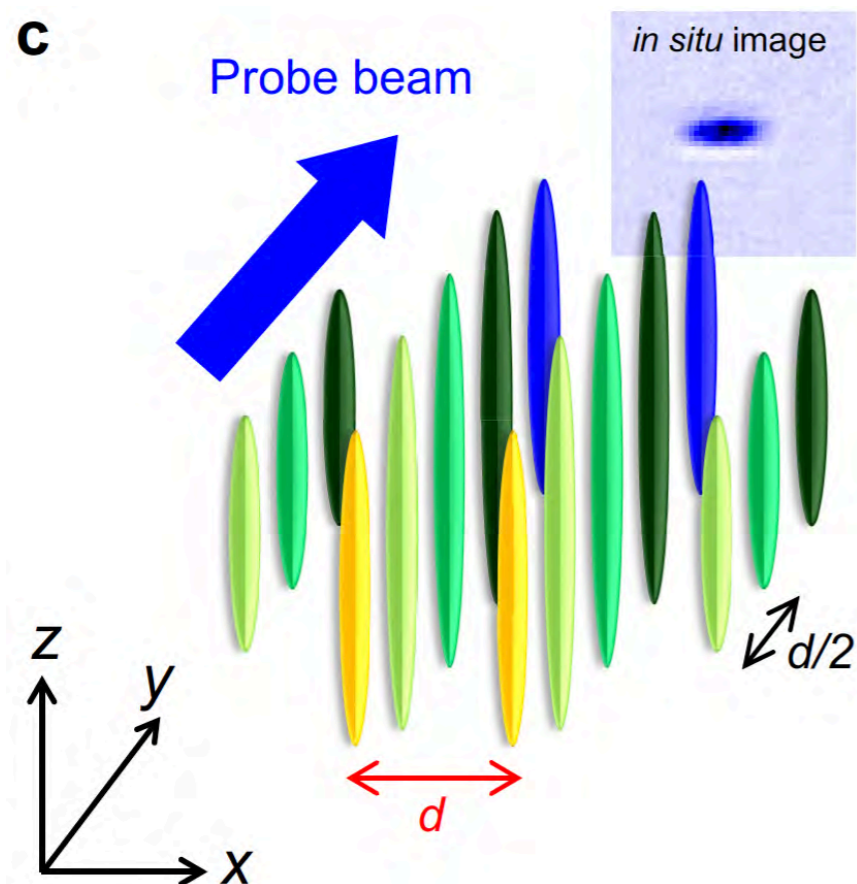
Schéma général pour une pompe adiabatique



L'expérience de Kyoto

Les expériences d'atomes froids ont permis la réalisation pratique de la proposition de Thouless (1983) : Kyoto, Munich, Maryland

S. Nakajima et al., Nature Phys. **12**, 96 (2016)



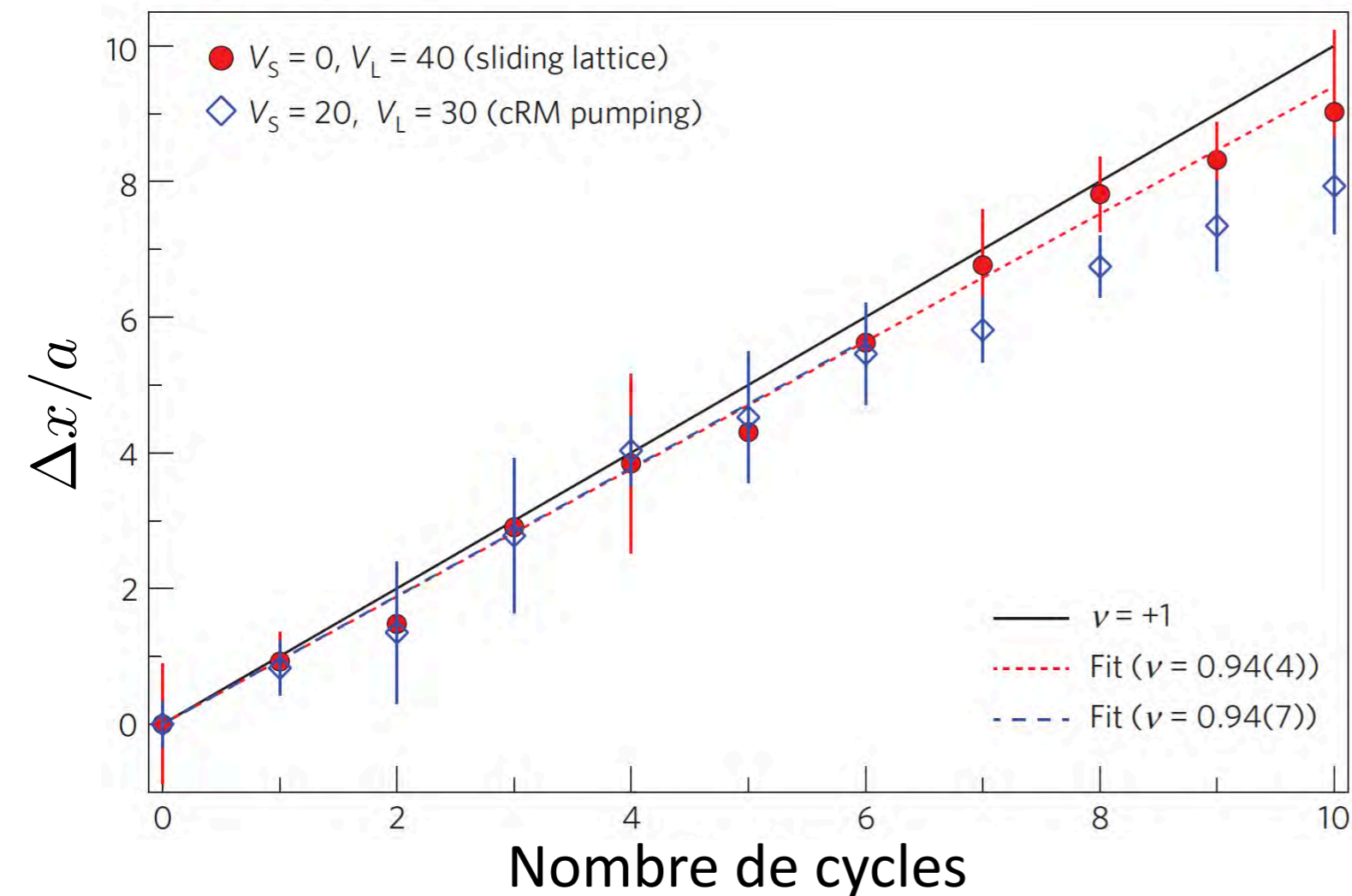
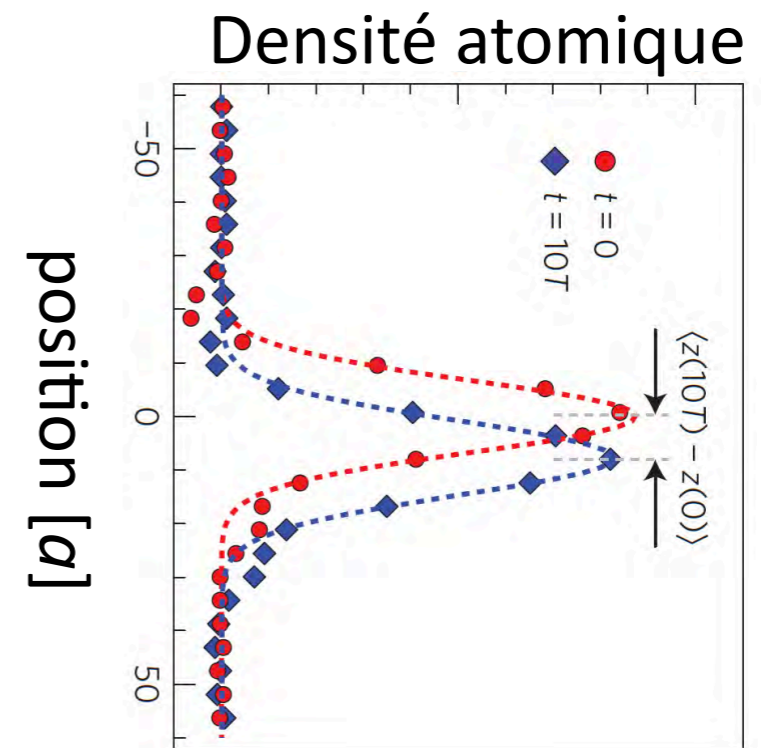
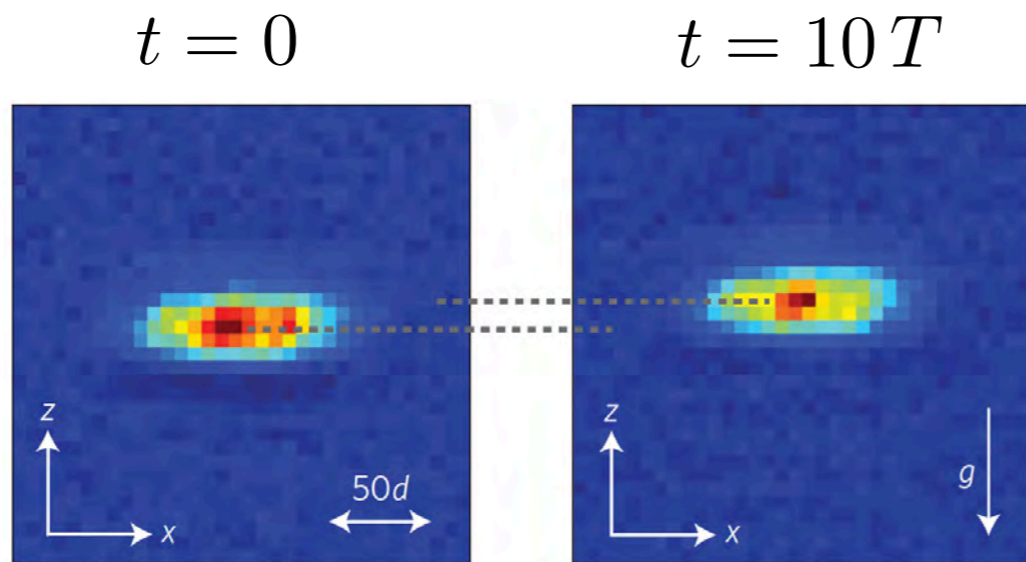
10 000 atomes de ^{171}Yb (fermions)

Série de tubes verticaux indépendants

Un super-réseau optique le long de chaque tube (périodes 266 et 532 nm)

Taux de remplissage : 0.7 atome/cellule

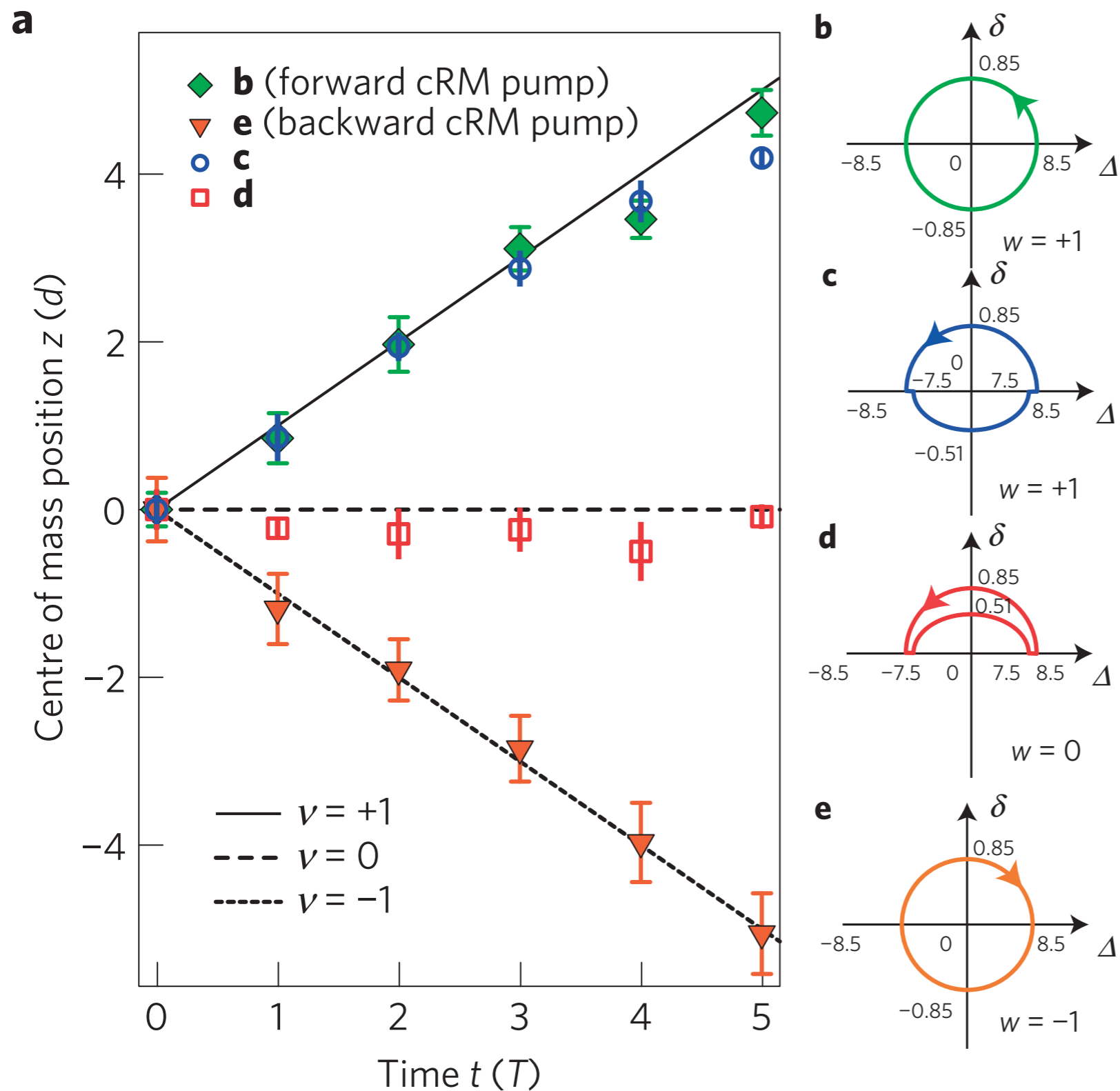
Déplacement après plusieurs cycles de pompe



Rouge : simple translation du réseau

Bleu : boucle dans le plan (J', Δ)

Robustesse topologique de la pompe adiabatique



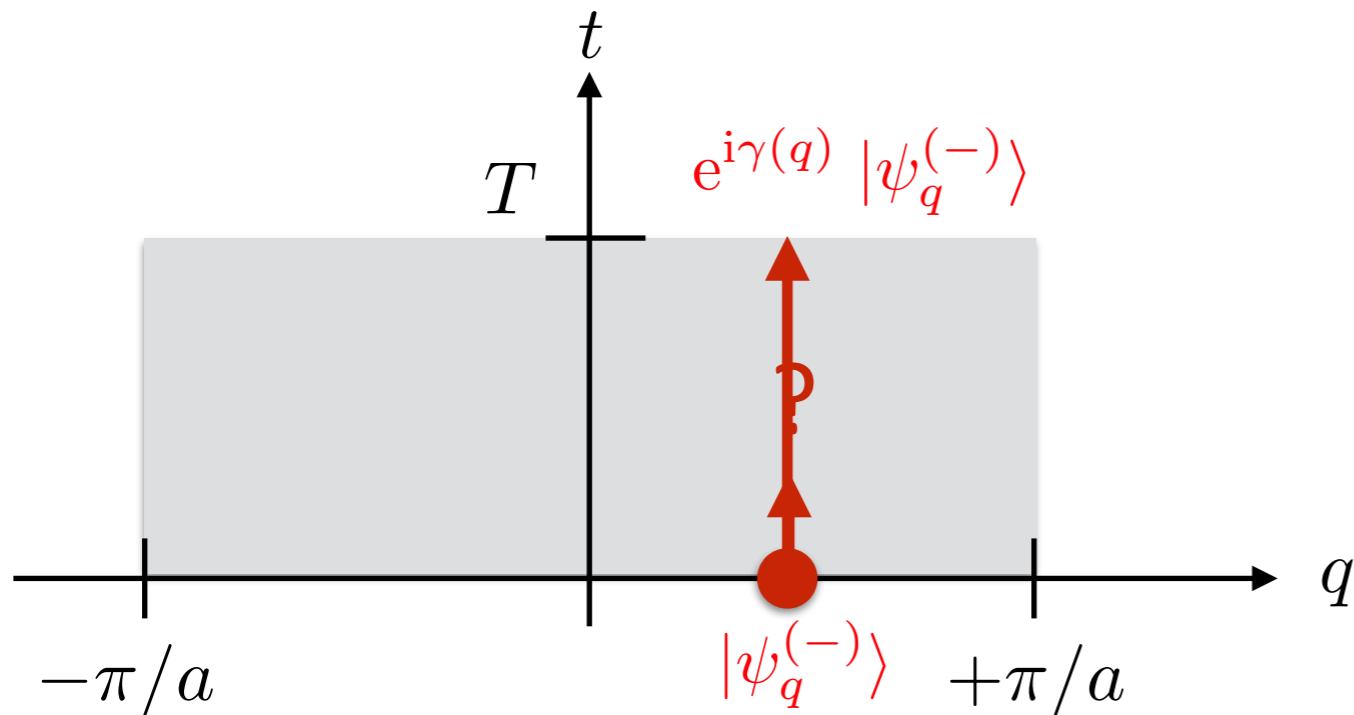
$$2\delta = J' - J$$

S. Nakajima et al.
Nature Phys. **12**, 96 (2016)

4.

Pompe adiabatique et phase de Berry

Hamiltonien cyclant et théorème de Bloch



On part à l'instant $t = 0$ d'un état de Bloch de la bande fondamentale.

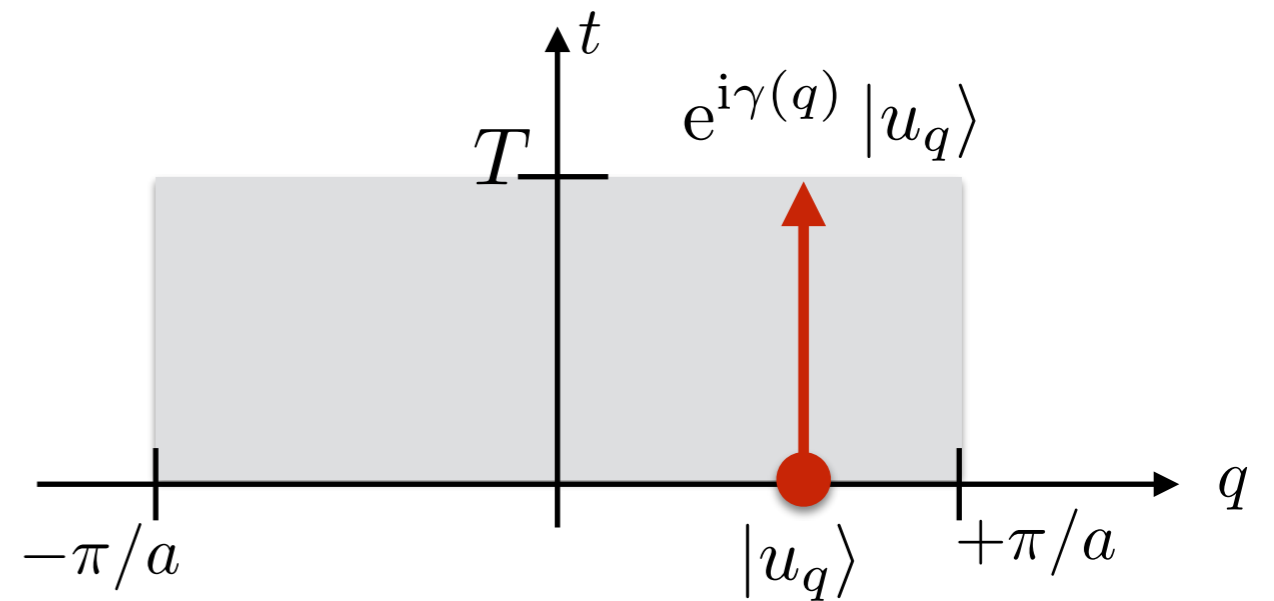
Quel est l'état de la particule après un cycle de la pompe de durée T ?

- A tout instant t , l'hamiltonien reste périodique d'espace. L'état de la particule peut donc s'écrire $e^{iqx} u(x)$
- Si les paramètres (J, J', Δ) varient lentement dans le temps et s'il n'y a jamais de dégénérescence (pas de fermeture de gap), suivi adiabatique de l'état de la bande fondamentale :

$$|\psi_q^{(-)}\rangle \longrightarrow e^{i\gamma(q)} |\psi_q^{(-)}\rangle$$

Hamiltonien cyclant et phase géométrique

$$\gamma(q) = \Phi_{\text{dyn}}(q) + \Phi_{\text{geom}}(q)$$



$$\Phi_{\text{dyn}}(q) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T E_q^{(-)}(t) dt$$

$$\Phi_{\text{geom}}(q) = \int_0^T \mathcal{A}_2(q, t) dt$$

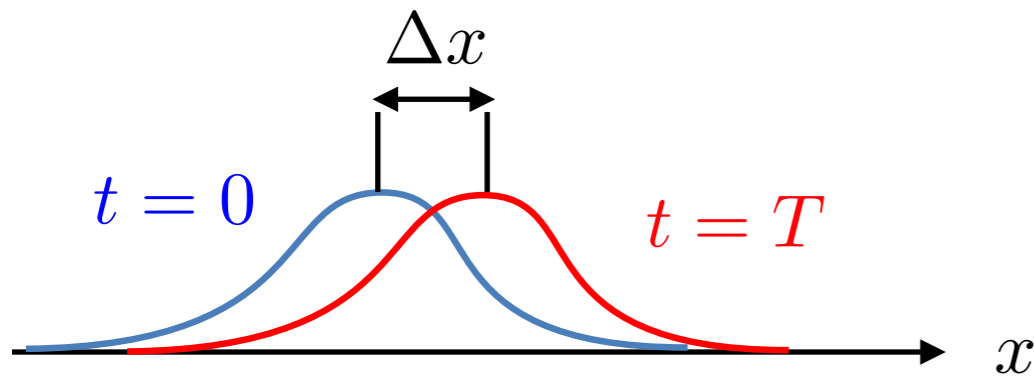
$$\mathcal{A}_2(q, t) = i \langle u_{q,t} | \partial_t u_{q,t} \rangle$$

connexion de Berry « temporelle »

Opérateur d'évolution sur un cycle de pompe : $\hat{U}(T) = \exp[i\gamma(\hat{q})]$

où l'on a introduit l'opérateur « moment de Bloch » $\hat{q} : \hat{q} |\psi_q^{(-)}\rangle = q |\psi_q^{(-)}\rangle$

Le déplacement du centre du paquet d'ondes



Opérateur position dans le réseau \hat{x} ,
conjugué de l'opérateur moment \hat{q}

$$[\hat{x}, \hat{q}] = i$$

Point de vue de Heisenberg :

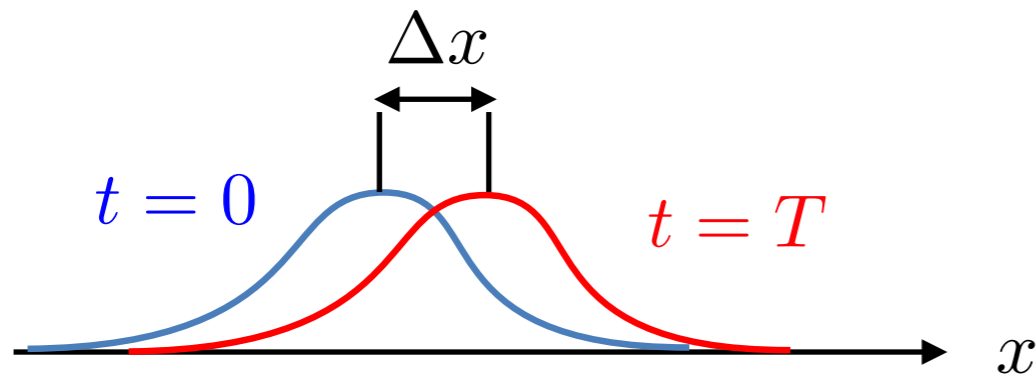
$$\hat{x}(T) = \hat{U}^\dagger(T) \hat{x} \hat{U}(T) = \hat{x} - \partial_q \gamma(\hat{q}) \qquad \hat{U}(T) = \exp[i\gamma(\hat{q})]$$

Déplacement durant un cycle de pompe, après moyenne sur la distribution initiale $\Pi(q)$ du moment de Bloch q :

$$\Delta x = - \int_{-\pi/a}^{+\pi/a} \partial_q \gamma(q) \Pi(q) dq$$

soit pour une population uniforme de la bande :
$$\Delta x = -\frac{a}{2\pi} \int_{-\pi/a}^{+\pi/a} \partial_q \gamma(q) dq$$

Déplacement du centre de masse et phase géométrique



$$\Delta x = -\frac{a}{2\pi} \int_{-\pi/a}^{+\pi/a} \partial_q \gamma(q) dq$$

$$\gamma(q) = \Phi_{\text{dyn}}(q) + \Phi_{\text{geom}}(q)$$

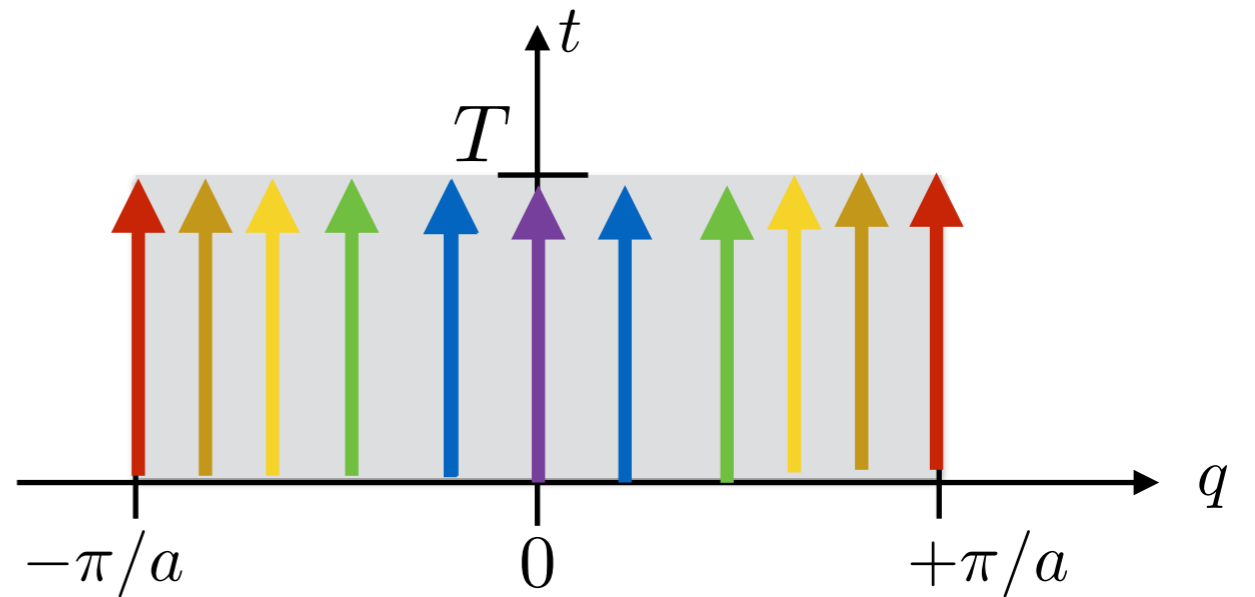
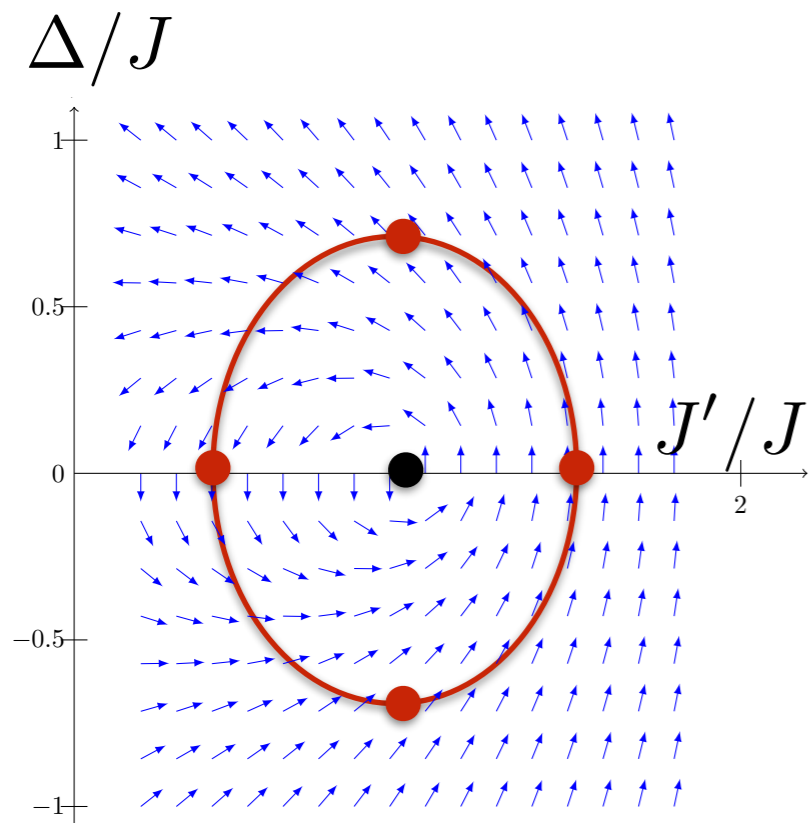
- La contribution de la phase dynamique s'annule du fait de la périodicité de l'énergie E_q avec q sur la zone de Brillouin
- Contribution de la phase géométrique :

$$\Delta x = -\frac{a}{2\pi} \int_{-\pi/a}^{+\pi/a} \frac{d\Phi_{\text{geom}}}{dq} dq = -\frac{a}{2\pi} [\Phi_{\text{geom}}(+\pi/a) - \Phi_{\text{geom}}(-\pi/a)]$$

vigilance nécessaire du fait de singularités mathématiques possibles

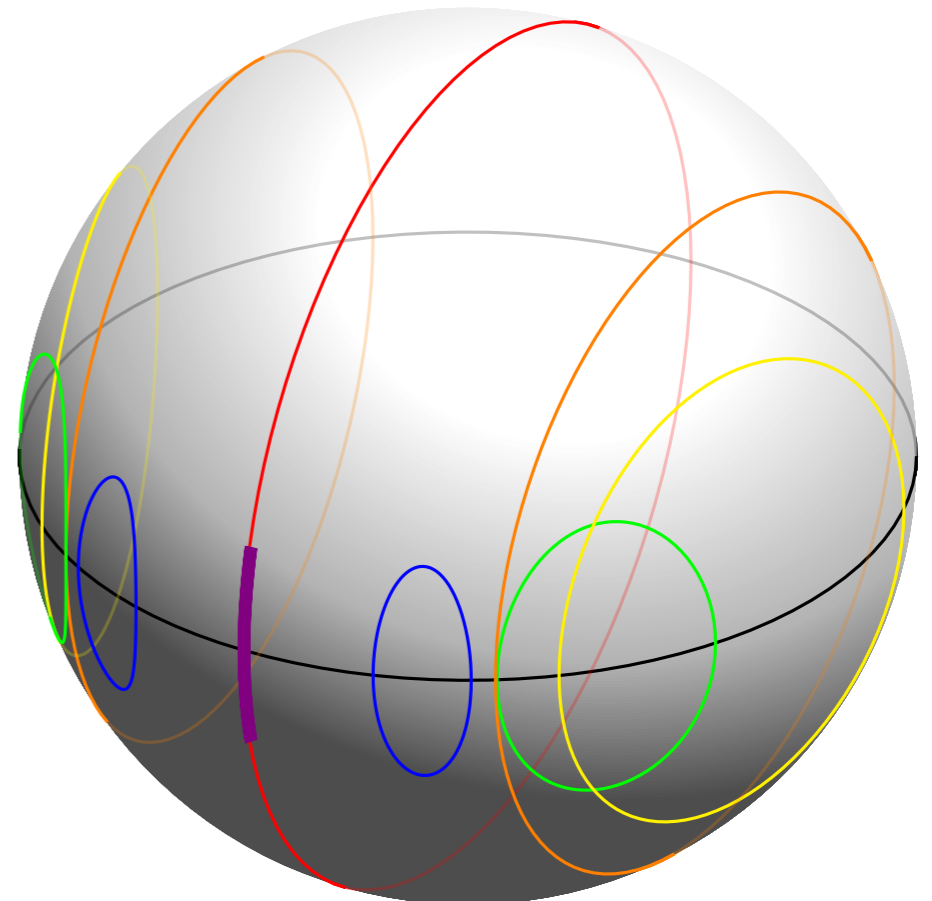
On va faire ici une évaluation géométrique de $\Phi_{\text{geom}}(+\pi/a) - \Phi_{\text{geom}}(-\pi/a)$

Phase géométrique et sphère de Bloch



$$\cos \theta_q = \frac{\Delta}{|\mathbf{h}(q)|}$$

$$e^{i\phi_q} \sin \theta_q = \frac{J' + J e^{iqa}}{|\mathbf{h}(q)|}$$



$qa = 0$: $e^{i\phi_q} \sin \theta_q$ réel > 0 , pôles non atteints

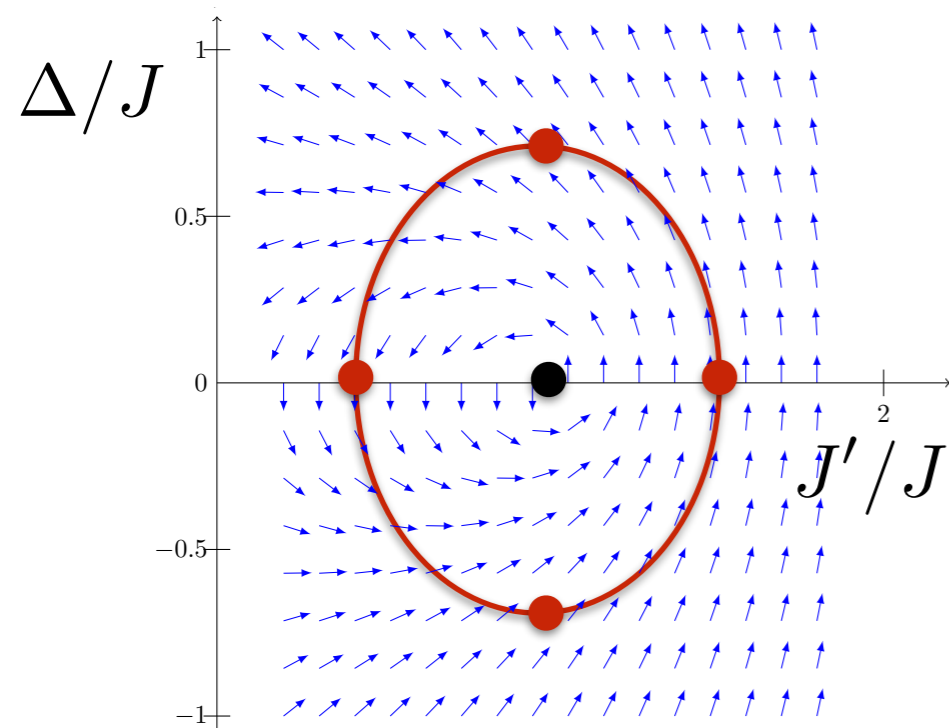
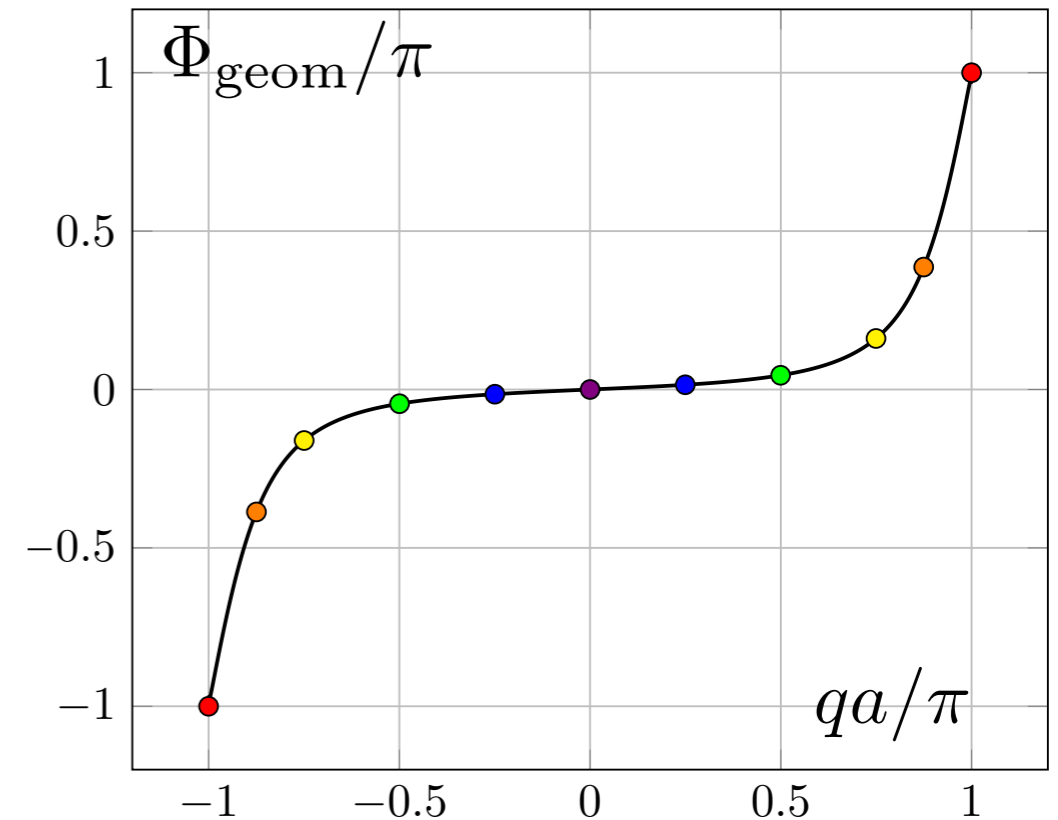
$qa = \pm\pi$: $e^{i\phi_q} \sin \theta_q$ réel changeant de signe, pôles atteints

Bilan de ces « enroulements » sur la sphère

- Par continuité, on a donné un sens à l'équation

$$\begin{aligned} \Delta x &= -\frac{a}{2\pi} [\Phi_{\text{geom}}(+\pi/a) - \Phi_{\text{geom}}(-\pi/a)] \\ &= -\frac{a}{2\pi} [(+\pi) - (-\pi)] = -a \end{aligned}$$

Déplacement quantifié !



- Tous les points de la sphère de Bloch sont atteints pour au moins un couple (q, t)

La sphère de Bloch est « enveloppée » d'une manière « indéfroissable »

Lien avec la courbure de Berry

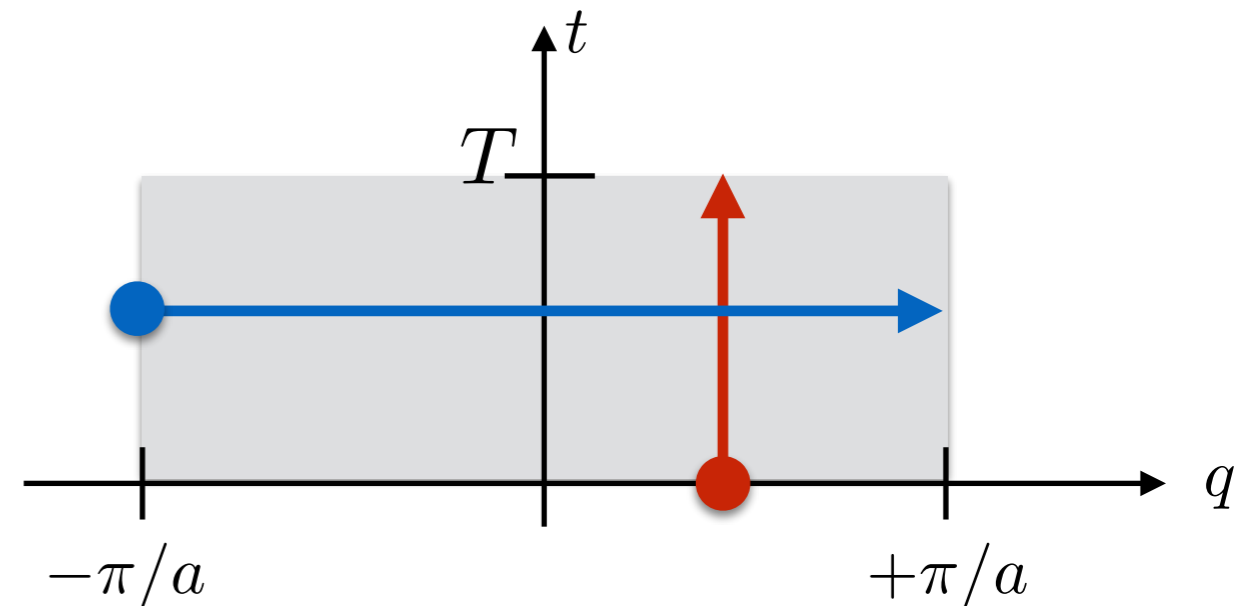
Nous avons introduit ici deux connexions de Berry :

$$\mathcal{A}_1(q, t) = i \langle u_{q,t} | \partial_q u_{q,t} \rangle$$

calcul de la phase de Zak

$$\mathcal{A}_2(q, t) = i \langle u_{q,t} | \partial_t u_{q,t} \rangle$$

calcul de la phase géométrique
sur un cycle de pompe à q fixé



Courbure de Berry pour ce problème effectivement bi-dimensionnel :

$$\Omega(q, t) = \begin{pmatrix} \partial_q \\ \partial_t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 \end{pmatrix} = i (\langle \partial_q u_{q,t} | \partial_t u_{q,t} \rangle - \langle \partial_t u_{q,t} | \partial_q u_{q,t} \rangle) \quad \text{réelle}$$

Intégration par parties :

$$\Delta x = -\frac{a}{2\pi} \int_{-\pi/a}^{+\pi/a} \frac{d\Phi_{\text{geom}}}{dq} dq \quad \longrightarrow \quad \Delta x = -\frac{a}{2\pi} \int_{-\pi/a}^{+\pi/a} \int_0^T \Omega(q, t) dq dt$$

ROBUSTE !

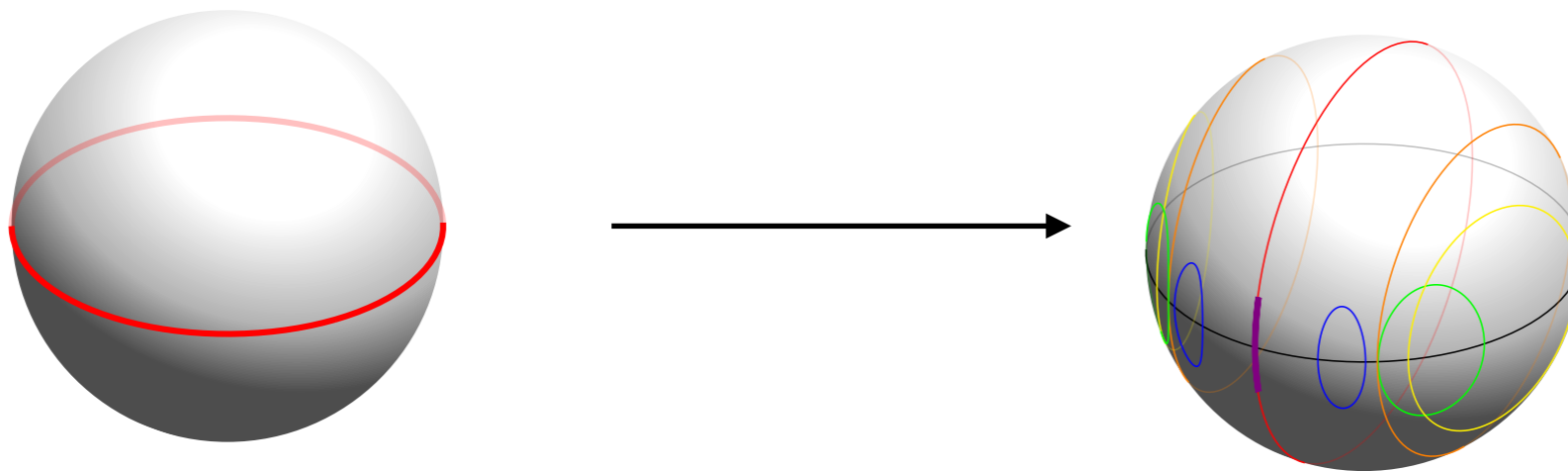
Conclusions

Pompe adiabatique : premiers pas vers des problèmes bi-dimensionnels :

$$q \longrightarrow q, t \longrightarrow q_x, q_y$$

Quantification du transport dans un cycle de pompe [0, T]

Nouvel invariant topologique : comment « envelopper » la sphère de Bloch



Apparition de la courbure de Berry pour calculer la quantité quantifiée:

$$\frac{\Delta x}{a} = \frac{1}{2\pi} \iint \Omega(q, t) dq dt$$

Intégrale prise sur Zone Brillouin x [0, T]