

# Chapitre 2

## Gaz quantique en dimension deux : du cas idéal aux interactions binaires

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Le gaz de Bose uniforme à 2D</b> . . . . .	<b>2</b>
1-1	La non-saturation des états excités . . . . .	2
1-2	La distribution en impulsion . . . . .	4
1-3	Fonction de corrélation à un corps . . . . .	5
1-4	Les effets de taille finie . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Le gaz de Bose dans un piège harmonique 2D</b> . . . . .	<b>7</b>
2-1	L'influence de la dimension d'espace . . . . .	7
2-2	Le point de condensation . . . . .	7
2-3	Approximation semi-classique . . . . .	8
2-4	Approximation de densité locale . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Un gaz 2D presque idéal : les photons en cavité</b> . . . . .	<b>10</b>
3-1	Masse et potentiel harmonique pour les photons . . . . .	10
3-2	Température et potentiel chimique . . . . .	12
3-3	Résultats expérimentaux . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Collisions binaires à deux dimensions</b> . . . . .	<b>14</b>
4-1	Séparation des variables, amplitude de diffusion . . . . .	15
4-2	La longueur de diffusion à 3D . . . . .	16
4-3	La longueur de diffusion à 2D . . . . .	18
4-4	Collisions dans une géométrie quasi-2D . . . . .	19

---

Nous abordons maintenant la notion de fluide quantique à deux dimensions. L'essentiel du chapitre sera consacré au gaz parfait régi par la statistique de Bose-Einstein. Nous nous intéresserons successivement au cas uniforme, pour lequel il n'y a pas condensation à la limite thermodynamique, et au cas d'un gaz piégé, pour lequel la condensation peut se produire. Nous décrirons des expériences menées sur une assemblée de photons en cavité illustrant cette prédiction. Dans le dernier paragraphe, nous expliquerons comment prendre en compte les interactions entre particules en nous intéressant à une collision binaire entre deux atomes identiques.

Rappelons pour commencer quelques éléments permettant de traiter l'équilibre thermodynamique d'un gaz parfait de particules de Bose. Supposons connus les états propres  $\psi_\alpha(\mathbf{r})$  de l'hamiltonien à une particule et  $E_\alpha$  les énergies propres associées, l'indice  $\alpha$  étant une variable discrète ou continue permettant de repérer chaque état de manière non ambiguë. La population moyenne d'un état  $\psi_\alpha$  est alors donnée par

$$N_\alpha = \frac{1}{e^{(E_\alpha - \mu)/k_B T} - 1}, \quad (1)$$

où nous avons introduit deux variables thermodynamiques intensives, la température  $T$  et le potentiel chimique  $\mu$ . Pour les expériences d'atomes froids, on peut en général mesurer avec une bonne précision la température  $T$  et le nombre d'atomes total  $N$ , dont on déduit le potentiel chimique en inversant la relation  $N = \sum_\alpha N_\alpha$ .

## 1 Le gaz de Bose uniforme à 2D

Nous considérons dans ce paragraphe un gaz de particules confiné dans une boîte carrée (à deux dimensions) de taille  $L \times L$ . Nous utiliserons pour simplifier les calculs l'expression des états propres obtenus en prenant des conditions aux limites périodiques. Ces états sont alors des ondes planes repérées par leur impulsion  $\mathbf{p}$  :

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{L} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}, \quad \mathbf{p} = \frac{2\pi\hbar}{L} \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = (n_x, n_y) \in \mathbb{Z}^2. \quad (2)$$

Nous allons nous intéresser à la limite thermodynamique de ce gaz, en faisant tendre la taille  $L$  de la boîte et le nombre  $N$  de particules vers l'infini, tout en gardant la densité spatiale constante :

$$L \rightarrow \infty, \quad N \rightarrow \infty, \quad \rho^{(2)} = \frac{N}{L^2} : \text{constante} \quad (3)$$

Une notion importante pour le calcul des quantités physiques est la densité d'états  $D(E)$ . Considérons une quantité physique  $F(\mathbf{p})$  variant de manière relativement douce avec  $\mathbf{p}$ , la population  $N(\mathbf{p})$  du niveau  $\mathbf{p}$  par exemple, et intéressons-nous à la somme  $\sum_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p})$ . Lors du passage à la limite thermodynamique, on peut remplacer les sommes discrètes sur les impulsions quantifiées (2) par une intégrale :

$$F(\mathbf{p}) \text{ régulière : } \sum_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}) \longrightarrow \left( \frac{L}{2\pi\hbar} \right)^2 \int F(\mathbf{p}) d^2p \quad (4)$$

Si la quantité à sommer  $F(\mathbf{p})$  n'est fonction que de l'énergie  $E(\mathbf{p}) = p^2/2m$ , l'intégrale sur la distribution angulaire de l'impulsion  $\mathbf{p}$  peut être effectuée analytiquement et on trouve

$$\sum_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}) \longrightarrow \int_0^{+\infty} F(E) D^{(2)}(E) dE \quad \text{avec} \quad D^{(2)}(E) = \frac{mL^2}{2\pi\hbar^2}. \quad (5)$$

La variation de la densité d'états aux basses énergies va jouer un rôle crucial dans ce qui suit : alors que cette densité s'annule dans le cas 3D comme<sup>1</sup>  $\sqrt{E}$  quand  $E \rightarrow 0$ , elle reste constante à 2D. Les états de basse

1. La valeur exacte est  $D^{(3)}(E) = \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{2mL^2}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E}$ .

énergie y jouent donc un rôle plus important ; ce fait confirme ce que nous avons déjà vu au premier cours, quand nous avons constaté que c'était les phonons de grande longueur d'onde qui étaient responsables de la destruction de l'ordre cristallin à 2D.

### 1-1 La non-saturation des états excités

**Rappel sur le cas tri-dimensionnel.** La condensation de Bose-Einstein du gaz idéal à 3D est abordée dans de nombreux ouvrages de physique statistique, et nous l'avons décrite en détail dans le cours 2015-16. Rappelons que l'on trouve à sa base trois propriétés liées à la distribution (1) :

- À température  $T$  fixée, chaque population  $N_\alpha$  est une fonction croissante du potentiel chimique  $\mu$ .
- Pour que  $N_\alpha$  soit défini pour tout état  $\alpha$ , y compris l'état fondamental que nous notons ici  $\alpha = 0$ , il faut que  $\mu < E_0$ .
- Cette inégalité sur  $\mu$  entraîne que pour une température  $T$  donnée, il existe une borne supérieure sur le nombre d'atomes  $N_{\text{exc}}(T, \mu)$  pouvant occuper l'ensemble des états excités :

$$N_{\text{exc}}(T, \mu) < N_{\text{exc}}^{\text{max}}(T) \quad (6)$$

avec

$$N_{\text{exc}}(T, \mu) = \sum_{\alpha \neq 0} \frac{1}{e^{(E_\alpha - \mu)/k_B T} - 1}, \quad N_{\text{exc}}^{\text{max}}(T) = \sum_{\alpha \neq 0} \frac{1}{e^{(E_\alpha - E_0)/k_B T} - 1}. \quad (7)$$

Pour un gaz 3D pris à la limite thermodynamique, la quantité utile est la densité spatiale associée à ces états excités

$$\rho_{\text{exc}}^{(3)}(T, \mu) = \frac{N_{\text{exc}}(T, \mu)}{L^3}. \quad (8)$$

qui se calcule analytiquement en remplaçant la somme discrète par une intégrale :

$$\rho_{\text{exc}}^{(3)}(T, \mu) = \frac{1}{L^3} \int_0^{+\infty} \frac{D^{(3)}(E)}{\frac{1}{2} e^{E/k_B T} - 1} dE = \frac{1}{\lambda_T^3} \text{Li}_{3/2}(Z) \quad (9)$$

où l'on a introduit la longueur d'onde thermique et la fugacité du gaz

$$\lambda_T = \frac{\hbar \sqrt{2\pi}}{\sqrt{mk_B T}} \quad Z = e^{\mu/k_B T} \quad (10)$$

et la fonction polylogarithme

$$\text{Li}_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}. \quad (11)$$

Pour  $\alpha > 1$ , cette fonction est définie en tout point de l'intervalle  $x \in [0, 1]$  et on trouve en particulier<sup>2</sup>  $\text{Li}_{3/2}(1) = 2.612\dots$

La limite  $Z \rightarrow 1$  correspond à  $\mu \rightarrow E_0 = 0$  pour ce gaz de particules libres. Le fait que  $\text{Li}_{3/2}(Z)$  reste fini quand  $Z \rightarrow 1$  signifie que la densité spatiale que l'on peut placer dans les états excités est bornée par  $2.612/\lambda_T^3$ . La densité dans l'espace des phases associée aux états excités, définie comme

$$\mathcal{D}_{\text{exc}} = \rho_{\text{exc}}^{(3)} \lambda_T^3, \quad (12)$$

est donc elle aussi bornée supérieurement :

$$\mathcal{D}_{\text{exc}} < \mathcal{D}_{\text{exc}}^{\text{max}} = 2.612. \quad (13)$$

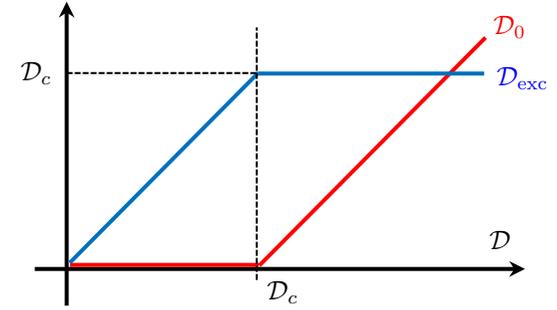
La condensation de Bose–Einstein découle de cette inégalité : elle se produit lorsque la densité dans l'espace des phases  $\mathcal{D}$  dépasse la valeur critique  $\mathcal{D}_{\text{exc}}^{\text{max}}$ . Le surplus de particules doit s'accumuler dans l'état fondamental à une particule  $\mathbf{p} = 0$ . En d'autres termes, deux cas sont possibles (figure 1) :

$$\mathcal{D} \leq 2.612 : \quad \mathcal{D} \approx \mathcal{D}_{\text{exc}} = \text{Li}_{3/2}(Z), \quad \mathcal{D}_0 \ll \mathcal{D}, \quad (14)$$

$$\mathcal{D} > 2.612 : \quad \mathcal{D} = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_{\text{exc}}^{\text{max}} \quad \text{avec} \quad \mathcal{D}_{\text{exc}}^{\text{max}} = 2.612. \quad (15)$$

Le couple d'équations (14-15) constitue l'équation d'état du gaz de Bose idéal à 3D.

<sup>2</sup> La constante  $\text{Li}_{3/2}(1)$  est également égale à la valeur de la fonction  $\zeta(x)$  de Riemann en  $x = 3/2$  :  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-x}$ .



**FIGURE 1.** Cas 3D : densités dans l'espace des phases associées respectivement à l'état fondamental ( $\mathcal{D}_0$ ) et à l'ensemble des états excités  $\mathcal{D}_{\text{exc}}$ , en fonction de la densité totale dans l'espace des phases  $\mathcal{D}$ . On a posé  $\mathcal{D}_c \equiv \mathcal{D}_{\text{exc}}^{\text{max}} = 2.612$ .

**Le cas bi-dimensionnel** Pour un gaz 2D, le calcul de la densité spatiale associée aux états excités peut être repris de manière quasi-inchangée par rapport au cas 3D, la seule différence résidant dans l'expression de la densité d'états, qui perd un facteur  $\sqrt{E}$ . Pour le dire de manière imagée, la proportion d'états au voisinage de l'énergie nulle augmente quand on passe de 3D à 2D; comme nous allons le voir, cela fait perdre son caractère singulier à l'état  $E = 0$  et vient empêcher la condensation.

En remplaçant là aussi la somme discrète (7) par une intégrale, on trouve :

$$\rho_{\text{exc}}^{(2)} = \frac{1}{L^2} \int_0^{+\infty} \frac{D^{(2)}(E)}{\frac{1}{Z} e^{E/k_B T} - 1} dE = \frac{1}{\lambda_T^2} \text{Li}_1(Z). \quad (16)$$

Notons que la fonction  $\text{Li}_1(Z)$ , qui se calcule à partir de l'expression générale (11), peut s'exprimer sous forme analytique  $\text{Li}_1(Z) = -\ln(1 - Z)$ , ce qui donne pour la densité dans l'espace des phases

$$\mathcal{D}_{\text{exc}} = -\ln(1 - Z). \quad (17)$$

On arrive alors au point crucial suivant : contrairement à  $\text{Li}_{3/2}(Z)$ , la fonction  $\text{Li}_1(Z)$  n'admet pas de limite finie quand  $Z \rightarrow 1$ . Ceci signifie que même pour une densité dans l'espace des phases  $\mathcal{D}$  arbitrairement grande, on pourra toujours trouver (à température donnée) un potentiel chimique  $\mu$  tel que  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\text{exc}}(T, \mu)$ . Ceci ne signifie pas que la population

du niveau fondamental est nulle, mais simplement qu'elle ne prend pas de valeur "macroscopique" à la limite thermodynamique. Aucune singularité n'apparaît quand on augmente la densité à température constante et la condensation de Bose–Einstein ne se produit pas.

Il est important de repérer l'ingrédient essentiel qui cause cette différence entre les cas 3D et 2D. Toute la question est de savoir si l'intégrale en dimension  $d$  :

$$\rho_{\text{exc}}^{(d)}(T) = \frac{1}{L^d} \int_0^{+\infty} \frac{D^{(d)}(E)}{\frac{1}{Z} e^{E/k_B T} - 1} dE \quad (18)$$

admet une limite finie dans le cas très dégénéré  $Z \rightarrow 1$ . Comme il n'y a aucun problème de convergence de l'intégrale quand  $E \rightarrow +\infty$ , la difficulté est concentrée en  $E \rightarrow 0$ . On peut alors faire un développement limité de l'intégrande au voisinage de  $E = 0$  dans le cas limite  $Z = 1$  :

$$Z = 1, E \rightarrow 0 : \quad \frac{D^{(d)}(E)}{\frac{1}{Z} e^{E/k_B T} - 1} \sim k_B T \frac{D^{(d)}(E)}{E}. \quad (19)$$

Pour une densité d'état variant en loi de puissance au voisinage de 0 :

$$D^{(d)}(E) \propto E^\nu \quad (20)$$

alors l'intégrale sera convergente en  $E = 0$  si

$$\nu > 0 \quad (21)$$

et cela même si  $Z = 1$ , qui est la valeur maximale autorisée. C'est la situation atteinte à 3D : la densité dans les états excités sature et le phénomène de condensation se produit. En revanche le cas 2D correspond à  $\nu = 0$  et l'intégrale est divergente pour  $Z = 1$ . Quelle que soit la densité spatiale choisie, on peut donc toujours trouver un  $Z$  assez proche de 1 qui permet de rendre compte de cette densité.

**Équation d'état du gaz 2D.** Le résultat

$$\mathcal{D}(T, \mu) = -\ln(1 - Z) \quad Z \equiv e^{\mu/k_B T} \quad (22)$$

constitue l'équation d'état du gaz de Bose idéal à 2D. Indiquons ici deux cas limites intéressants :

— Le cas non dégénéré s'obtient en prenant la limite  $Z \ll 1$  :

$$Z \ll 1 : \quad \mathcal{D}(T, \mu) \approx Z = e^{\mu/k_B T} \ll 1, \quad (23)$$

ce qui correspond au résultat bien connu pour le gaz de Boltzmann.

— Le cas  $Z \rightarrow 1$ , obtenu pour  $|\mu| \ll k_B T$ , correspond au contraire à un gaz fortement dégénéré :

$$Z \approx 1 : \quad 1 - Z \approx \frac{|\mu|}{k_B T} \rightarrow \mathcal{D}(T, \mu) \approx \ln\left(\frac{k_B T}{|\mu|}\right) \gg 1 \quad (24)$$

## 1-2 La distribution en impulsion

Pour un gaz parfait, cette distribution s'écrit :

$$N(\mathbf{p}) = \frac{1}{\frac{1}{Z} e^{p^2/(2mk_B T)} - 1}. \quad (25)$$

Pour gagner de l'intuition sur la forme de cette distribution (cf. figure 2), nous allons étudier les deux cas limites du gaz non dégénéré ( $Z \ll 1$ ) et du cas fortement dégénéré  $Z \approx 1$ .

**Cas non dégénéré.** Dans le cas  $Z \ll 1$ , on peut faire l'approximation

$$Z \ll 1 : \quad N(\mathbf{p}) \approx Z e^{-p^2/(2mk_B T)} \quad (26)$$

qui redonne la distribution gaussienne de Maxwell–Boltzmann.

**Cas fortement dégénéré.** Pour décrire le cas  $Z \approx 1$ , correspondant à  $|\mu| \ll k_B T$ , nous allons séparer les impulsions en deux classes :

— Les impulsions  $p$  telles que  $\frac{p^2}{2m} < k_B T$ , c'est-à-dire  $p\lambda_T/\hbar < \sqrt{4\pi}$ , pour lesquelles nous allons linéariser l'exponentielle figurant au dénominateur de (25) :

$$Z \approx 1, \quad \frac{p^2}{2m} < k_B T : \quad N(\mathbf{p}) \approx \frac{k_B T}{\frac{p^2}{2m} + |\mu|} = \frac{4\pi\hbar^2}{\lambda_T^2} \frac{1}{p^2 + p_c^2} \quad (27)$$

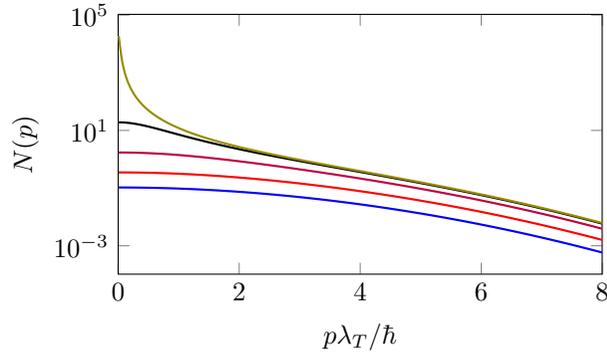


FIGURE 2. Distributions en impulsion pour  $\mathcal{D} = 0.1, 0.3, 1, 3, 10$ .

avec

$$p_c = \sqrt{2m|\mu|} \ll \sqrt{2mk_B T} \quad (28)$$

(rappelons que  $\mu$  est toujours négatif).

- Les impulsions  $p$  telles que  $\frac{p^2}{2m} > k_B T$  pour lesquelles nous allons négliger le terme "de Bose"  $-1$  au dénominateur de (25) pour retrouver une distribution gaussienne à la Boltzmann :

$$Z \approx 1, \quad \frac{p^2}{2m} > k_B T : \quad N(\mathbf{p}) \approx e^{-p^2/(2mk_B T)}. \quad (29)$$

La distribution en impulsion se compose donc de deux parties distinctes : une partie centrale lorentzienne de largeur  $p_c$  et des ailes gaussiennes de largeur  $\sqrt{mk_B T}$ . Pour aller plus loin, il est intéressant d'évaluer les poids respectifs de ces deux distributions. On trouve pour la partie centrale lorentzienne

$$\mathcal{D}_{\text{lor.}} \approx \int_0^{\sqrt{2mk_B T}} \frac{2p}{p^2 + p_c^2} dp \approx \ln \left( \frac{k_B T}{|\mu|} \right) \quad (30)$$

c'est-à-dire, en utilisant (24)

$$\mathcal{D}_{\text{lor.}} \approx \mathcal{D}. \quad (31)$$

Pour les ailes gaussiennes, on a

$$\mathcal{D}_{\text{gau.}} \approx \frac{\lambda_T^2}{2\pi\hbar^2} \int_{\sqrt{2mk_B T}}^{+\infty} e^{-p^2/(2mk_B T)} p dp \approx 1/e \ll \mathcal{D}. \quad (32)$$

Cette contribution  $\mathcal{D}_{\text{gau.}}$  est petite devant  $\mathcal{D}$  puisqu'on s'est placé dans l'hypothèse d'un gaz fortement dégénéré. On peut donc considérer que la majeure partie des atomes est localisée dans une distribution lorentzienne de largeur  $p_c \ll \sqrt{mk_B T}$ . Toutefois, comme une distribution lorentzienne est non normalisable à 2D (contrairement au cas 1D), il faut mettre une coupure sur les intégrales au niveau de l'impulsion thermique  $\sqrt{2mk_B T}$ .

### 1-3 Fonction de corrélation à un corps

Au-delà de l'apparition possible d'une fraction macroscopique des atomes dans l'état fondamental, une autre manifestation de la condensation de Bose-Einstein apparaît sur la fonction de corrélation :

$$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \mathbf{r} | \hat{\rho}_1 | \mathbf{r}' \rangle \quad (33)$$

où  $\hat{\rho}_1$  est l'opérateur densité à un corps. Rappelons que l'invariance par translation du système assure que la valeur de  $G_1$  ne dépend en fait que de  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ .

Pour évaluer  $G_1$ , partons de l'élément de matrice de  $\hat{\rho}_1$  entre deux états d'impulsion  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{p}'$  et introduisons une double relation de fermeture en position

$$\langle \mathbf{p} | \hat{\rho}_1 | \mathbf{p}' \rangle = \iint \langle \mathbf{p} | \mathbf{r} \rangle G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \langle \mathbf{r}' | \mathbf{p}' \rangle d^2 r d^2 r'. \quad (34)$$

avec  $\langle \mathbf{p} | \mathbf{r} \rangle = e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} / \hbar} / L$ . En utilisant l'invariance par translation, cette relation devient

$$\langle \mathbf{p} | \hat{\rho}_1 | \mathbf{p}' \rangle = \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \int e^{-i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} / \hbar} G_1(\mathbf{r}) d^2 r. \quad (35)$$

où l'on a noté pour simplifier  $G_1(\mathbf{r}) = G_1(\mathbf{r}, 0)$ . La distribution en impulsion  $N(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p} | \hat{\rho}_1 | \mathbf{p} \rangle$  et la fonction de corrélation  $G_1(\mathbf{r})$  sont donc transformées de Fourier l'une de l'autre. On notera que la démonstration de ce résultat ne dépend pas du fait que le gaz est idéal, ni de la dimension choisie pour l'espace.

La fonction de corrélation  $G_1$  s'obtient en prenant la transformée de

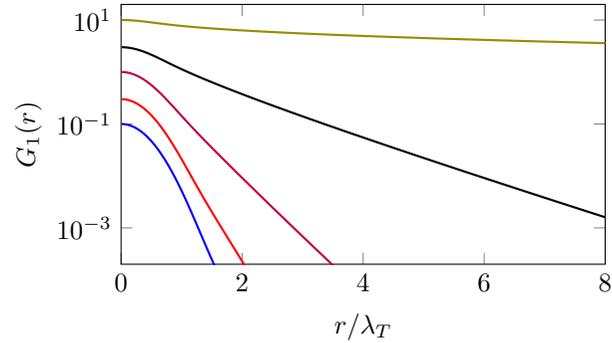


FIGURE 3. Fonction de corrélation  $G_1(r)$  pour un gaz de Bose idéal à deux dimensions. Courbes réalisées pour  $\mathcal{D} = 0.1, 0.3, 1, 3, 10$ .

Fourier inverse

$$\begin{aligned} G_1(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}/\hbar} N(\mathbf{p}) d^2p \\ &= \frac{1}{\lambda_T^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Z^n}{n} e^{-\pi r^2 / (n\lambda_T^2)}. \end{aligned} \quad (36)$$

Pour analyser ce résultat, concentrons-nous sur les deux cas limites déjà identifiés, celui du gaz non dégénéré et celui du gaz fortement dégénéré.

Dans le cas non dégénéré, le caractère gaussien de la distribution  $N(\mathbf{p})$  donné en (26) conduit à une fonction de corrélation  $G_1$  également gaussienne :

$$Z \ll 1 : \quad G_1(\mathbf{r}) \approx \rho^{(2)} e^{-\pi r^2 / \lambda_T^2}. \quad (37)$$

La longueur d'onde thermique  $\lambda_T$  donne donc l'extension de la cohérence spatiale dans ce cas.

Dans le cas fortement dégénéré, nous avons vu que l'essentiel de la distribution est concentrée dans la lorentzienne centrale de largeur  $p_c$ . La transformée de Fourier 2D de cette lorentzienne est définie en tout point  $\mathbf{r} \neq 0$  et est proportionnelle à la fonction de Bessel d'argument imaginaire  $K_0(p_c r / \hbar)$ . Le comportement asymptotique de cette fonction est

$$x \rightarrow \infty : \quad K_0(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \quad (38)$$

et il est dominé par la décroissance exponentielle. On a alors

$$G_1(r) \propto \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-r/\ell} \quad \text{avec} \quad \ell = \frac{\hbar}{p_c}. \quad (39)$$

En utilisant la définition (28) de  $p_c$  et le lien (24) entre la densité dans l'espace des phases et le rapport  $k_B T / |\mu|$ , on arrive à la longueur caractéristique de décroissance de la fonction  $G_1$  dans le cas fortement dégénéré :

$$\ell \approx \frac{\lambda_T}{\sqrt{4\pi}} e^{\mathcal{D}/2}. \quad (40)$$

On constate ici le caractère marginal du gaz de Bose uniforme à 2D. Bien qu'il n'y ait pas d'ordre à longue portée à strictement parler puisque la fonction  $G_1$  tend vers 0 de manière exponentielle, la longueur caractéristique de cette exponentielle diverge exponentiellement vite avec la densité dans l'espace des phases du système. Un tel comportement entraîne un rôle important des effets de taille finie, que nous allons examiner dans le paragraphe suivant.

#### 1-4 Les effets de taille finie

Dans les expériences d'atomes froids, on réalise couramment des densités dans l'espace des phases qui dépassent la trentaine. Pour ces valeurs de  $\mathcal{D}$ , on trouve  $\ell \sim \lambda_T \times 10^6$ . Pour une valeur typique de la longueur d'onde thermique  $\lambda_T = 1 \mu\text{m}$ , la longueur de décroissance  $\ell$  de  $G_1$  est de l'ordre du mètre, donc indétectable sur un échantillon de taille réaliste. Dans ces conditions, la phase est essentiellement constante sur l'étendue de l'échantillon et tout se passe comme si on avait un véritable condensat de Bose-Einstein.

On peut se donner deux critères équivalents pour fixer le seuil d'apparition des effets de taille finie :

- Le premier consiste à comparer la différence  $E_0 - \mu$  à l'écart  $E_1 - E_0$  entre le premier état excité et l'état fondamental. Quand  $E_0 - \mu$  devient inférieur à  $E_1 - E_0$ , alors la discrétisation des niveaux d'énergie due aux effets de taille finie commence à jouer un rôle significatif. A un facteur numérique près sans importance ici, l'écart  $E_1 - E_0$  est d'ordre

$E_1 - E_0 \sim \hbar^2/mL^2$  de sorte que ce premier critère s'écrit :

$$|\mu| \lesssim \frac{\hbar^2}{mL^2} \quad \rightarrow \quad \frac{k_B T}{|\mu|} \gtrsim \frac{L^2}{\lambda_T^2} \quad (41)$$

ce qui entraîne pour le cas dégénéré [cf. (24)] :

$$\mathcal{D} \gtrsim \ln(L^2/\lambda_T^2). \quad (42)$$

— Le second critère consiste à comparer la longueur de décroissance  $\ell$  de la fonction  $G_1$  avec la taille linéaire  $L$  de l'échantillon. Les effets de taille finie deviennent significatifs quand  $\ell$  dépasse  $L$ , c'est-à-dire :

$$\ell \gtrsim L \quad \rightarrow \quad e^{\mathcal{D}/2} \gtrsim \frac{L}{\lambda_T}, \quad (43)$$

ce qui est effectivement équivalent au critère (42).

## 2 Le gaz de Bose dans un piège harmonique 2D

De nombreuses expériences menées sur des atomes, de la lumière ou des systèmes hybrides utilisent un confinement harmonique des particules. L'effet majeur de ce confinement est de modifier la densité d'états du système et donc de changer, pour une dimensionalité donnée, l'existence ou la non-existence du phénomène de condensation. Nous considérerons dans ce qui suit un piège harmonique isotrope de pulsation  $\omega$  pour lequel les niveaux d'énergie s'écrivent à une constante additive près  $E_j = j \hbar\omega$ , avec  $j \in \mathbb{N}$ . Dans le cas d'un piège non isotrope, la plupart des résultats qui suivent restent valables pourvu que l'on remplace  $\omega$  par la moyenne géométrique des pulsations du piège.

### 2-1 L'influence de la dimension d'espace

Pour trouver s'il y a ou non possibilité de condensation, revenons à l'expression donnant le nombre d'atomes dans les états excités de l'hamiltonien à une particule

$$N_{\text{exc}} = \sum_{\alpha \neq 0} \frac{1}{\frac{1}{Z} e^{E_\alpha/k_B T} - 1} \quad (44)$$

où l'indice  $\alpha$  repère ici les niveaux d'énergie dans le piège. Comme pour le cas uniforme, il est utile de remplacer cette somme discrète par une intégrale, ce qui est une bonne approximation si l'énergie thermique  $k_B T$  est grande devant l'écart entre niveaux d'énergie consécutifs. On obtient alors

$$N_{\text{exc}} = \int_0^{+\infty} \frac{D(E)}{\frac{1}{Z} e^{E/k_B T} - 1} dE \quad (45)$$

où  $D(E)$  est la densité d'états pour le piège.

Comme pour le cas d'une boîte, la densité d'état dans un piège harmonique dépend de la dimensionalité. Pour un piège 1D, les niveaux  $(j + 1/2)\hbar\omega$  sont non dégénérés ( $\xi_j = 1$ ), équidistants et séparés de  $\hbar\omega$ , soit

$$D^{(1)}(E) = \frac{1}{\hbar\omega}. \quad (46)$$

En dimension 2, le niveau d'énergie  $E_j = (j + 1)\hbar\omega$  est dégénéré  $\xi_j = j + 1$  fois ; en dimension 3, le niveau  $E_j = (j + 3/2)\hbar\omega$  est dégénéré  $\xi_j = (j + 1)(j + 2)/2$  fois, de sorte que

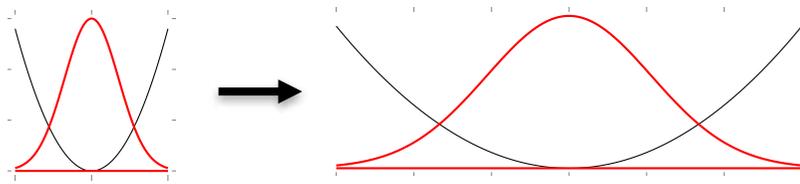
$$D^{(2)}(E) = \frac{E}{(\hbar\omega)^2}, \quad D^{(3)}(E) = \frac{E^2}{2(\hbar\omega)^3}. \quad (47)$$

Revenons maintenant au critère trouvé en (19-21). La densité d'états varie effectivement comme  $E^\nu$  et l'exposant  $\nu$  est strictement positif en dimension 3 et en dimension 2 (respectivement  $\nu = 2$  et  $\nu = 1$ ). Il y a donc possibilité de condensation dans ces deux cas. En revanche la dimension 1 reste (marginale) exclue puisqu'elle correspond à  $\nu = 0$ .

### 2-2 Le point de condensation

Le nombre maximal d'atomes que l'on peut mettre dans un piège harmonique est obtenu en injectant la densité d'états (47) dans l'expression (45) pour la fugacité maximale  $Z = 1$ . On obtient

$$2D : \quad N_{\text{exc}}^{(\text{max})}(T) = \text{Li}_2(1) \left( \frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^2 \quad \text{avec} \quad \text{Li}_2(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad (48)$$



**FIGURE 4.** Limite thermodynamique dans un piège : on diminue la pulsation  $\omega$  tout en augmentant le nombre d'atomes de manière à garder la densité centrale constante.

et

$$3D : N_{\text{exc}}^{(\text{max})}(T) = \text{Li}_3(1) \left( \frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^3 \quad \text{avec} \quad \text{Li}_3(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = 1.202 \dots \quad (49)$$

Rappelons que ces résultats sont valables dans l'hypothèse  $k_B T \gg \hbar \omega$ , nécessaire pour remplacer la somme discrète (44) par une intégrale. Le cas opposé  $k_B T \ll \hbar \omega$  est conceptuellement trivial : les particules s'accumulent alors dans l'état fondamental par le simple fait que les niveaux excités ne sont pas activés thermiquement.

**Limite thermodynamique dans un piège.** Pour un gaz dans une boîte carrée, la notion de limite thermodynamique est simple : pour une température  $T$  donnée, on fait tendre le nombre de particules  $N$  et la taille de la boîte  $L$  vers l'infini, en gardant la densité spatiale constante. Dans un piège harmonique, la limite thermodynamique est obtenue de façon similaire, mais on cherche maintenant à maintenir la densité centrale  $n(0)$  constante, tout en faisant tendre le nombre de particules  $N$  vers l'infini (GROOT 1950; BAGNATO, PRITCHARD et al. 1987). Pour comprendre comment cela est obtenu, utilisons par exemple la prédiction pour la statistique de Maxwell-Boltzmann :

$$\rho^{(d)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{N}{\sigma^d} e^{-r^2/2\sigma^2} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2} m \omega^2 \sigma^2 \equiv \frac{1}{2} k_B T, \quad (50)$$

soit :

$$\rho^{(d)}(0) = \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{d/2} N \omega^d. \quad (51)$$

La limite thermodynamique est donc obtenue en prenant (figure 4) :

$$N \rightarrow +\infty, \quad \omega \rightarrow 0, \quad \rho^{(d)}(0) \propto N \omega^d = \text{constante}. \quad (52)$$

Les deux résultats (48) et (49) sur la saturation des états excités dans des pièges 2D et 3D sont pertinents dans cette limite, puisqu'ils s'expriment en fonction de la seule variable  $N_{\text{exc}}^{(\text{max})}(T) \omega^d$  :

$$N_{\text{exc}}^{(\text{max})}(T) \omega^d = \text{Li}_d(1) \left( \frac{k_B T}{\hbar} \right)^d \quad (53)$$

**Le cas uni-dimensionnel.** A une dimension, la situation est plus délicate qu'à 2D et 3D puisque l'intégrale (45) diverge quand  $Z \rightarrow 1$  (BAGNATO & KLEPPNER 1991). Il faut donc revenir à la somme discrète (44) pour évaluer le nombre maximal d'atomes que l'on peut placer dans un piège de pulsation  $\omega$  et à température  $T$ . Le calcul est décrit par KETTERLE & VAN-DRUTEN (1996) et conduit au résultat :

$$1D, k_B T \gg \hbar \omega : \quad N_{\text{exc}}^{(\text{max})}(T) \approx \frac{k_B T}{\hbar \omega} \ln \left( \frac{2k_B T}{\hbar \omega} \right). \quad (54)$$

Comme prévu, ce résultat ne survit pas à la limite thermodynamique puisque le produit  $N\omega$  nécessaire pour atteindre le seuil de condensation diverge. En revanche, dans un piège 1D à  $\omega$  fixé, un condensat se forme quand le nombre d'atomes dépasse (54).

### 2-3 Approximation semi-classique

L'état d'équilibre d'un gaz parfait dans un piège harmonique peut s'écrire en terme de l'opérateur densité à une particule

$$\hat{\rho}_1 = \frac{1}{\frac{1}{Z} e^{\hat{H}/k_B T} - 1}, \quad (55)$$

où  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\hat{r})$  est l'hamiltonien à une particule. L'opérateur densité  $\hat{\rho}_1$  est diagonal dans la base des états propres de  $\hat{H}$  et la population de chaque état est donnée par la statistique de Bose–Einstein (1).

L'approximation semi-classique (BAGNATO, PRITCHARD et al. 1987) consiste à "oublier" le fait que  $\hat{p}$  et  $\hat{r}$  sont des opérateurs qui ne commutent pas et à les remplacer par des variables classiques. L'opérateur  $\hat{\rho}_1$  devient alors une distribution dans l'espace des phases :

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \frac{1}{\frac{1}{Z} e^{[\frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r})]/k_B T} - 1} \quad (56)$$

qui permet, par intégration sur l'une ou l'autre des variables, de déterminer la distribution en position ou en vitesse. La constante de normalisation de  $W$  sera justifiée un peu plus loin.

En réalité, le concept de distribution dans l'espace des phases n'existe pas en physique quantique. Il est en effet impossible de préparer une particule dans un état tel que sa position et son impulsion soient toutes deux parfaitement définies. L'objet qui s'en rapproche le plus est la distribution de Wigner (WIGNER 1932), quantité réelle mais pas toujours positive. Le lien entre la fonction  $W(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  définie ci-dessus et la distribution de Wigner est discuté en détail par CASTIN (2001). Le bilan de cette discussion est que (56) peut valablement être utilisée si on s'intéresse à des structures de l'espace des phases d'étendue grande devant  $\hbar$ . En d'autres termes, il ne faut pas chercher à résoudre individuellement la contribution de chaque état quantique, mais se limiter à l'évaluation de quantités physiques qui varient doucement d'un état donné à un état voisin. Cela doit être en particulier le cas pour la population de ces états, ce qui impose que  $k_B T \gg \hbar\omega$ .

Dans le cadre de cette approximation, il est simple de déterminer le profil de densité spatiale en dimension  $d$ ,  $\rho_{\text{exc.}}^{(d)}(\mathbf{r})$ , dans un piège à température donnée (rappelons que l'état fondamental, s'il est macroscopiquement peuplé, échappe à cette distribution semi-classique). L'intégration sur l'im-

pulsion donne :

$$\begin{aligned} \rho_{\text{exc}}^{(d)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int \frac{Z e^{-[\frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r})]/k_B T}}{1 - Z e^{-[\frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r})]/k_B T}} d^d p \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \sum_{j=1}^{+\infty} Z^j \int e^{-j[\frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r})]/k_B T} d^d p \\ &= \frac{1}{\lambda_T^d} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^{d/2}} \left[ Z e^{-V(\mathbf{r})/k_B T} \right]^j = \frac{1}{\lambda_T^d} \text{Li}_{d/2} \left[ Z e^{-V(\mathbf{r})/k_B T} \right] \end{aligned} \quad (57)$$

On remarque que pour  $Z \ll 1$ , le premier terme ( $j = 1$ ) de la somme est grand devant tous les autres et on retrouve la formule de Boltzmann

$$\rho_{\text{exc}}^{(d)}(\mathbf{r}) \approx \rho_{\text{tot}}^{(d)}(\mathbf{r}) = \frac{Z}{\lambda_T^d} e^{-V(\mathbf{r})/k_B T}. \quad (58)$$

**Nombre d'atomes à l'approximation semi-classique.** Le résultat (57) fournit la densité en tout point du piège. Pour le potentiel harmonique  $V(\mathbf{r}) = m\omega^2 r^2/2$ , on peut maintenant intégrer cette densité sur l'espace et vérifier que l'on retrouve bien les résultats obtenus précédemment :

$$\begin{aligned} N_{\text{exc}}^{(d)} &= \frac{1}{\lambda_T^d} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^{d/2}} Z^j \int e^{-jm\omega^2 r^2/(2k_B T)} d^d r \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{Z^j}{j^{d/2}} \left( \frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^d = \text{Li}_d(Z) \left( \frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^d. \end{aligned} \quad (59)$$

## 2-4 Approximation de densité locale

Pour un potentiel uniformément nul ( $\omega = 0$ ), on retrouve le résultat donné plus haut pour un gaz uniforme à 2D [cf. (16)] :

$$\rho_{\text{exc}}^{(d)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda_T^d} \text{Li}_{d/2} \left( e^{\mu/k_B T} \right), \quad (60)$$

ce qui justifie *a posteriori* la constante de normalisation introduite en (56). Dans le cas général, le résultat (57), écrit sous la forme

$$\rho_{\text{exc}}^{(d)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda_T^d} \text{Li}_{d/2} \left( e^{[\mu - V(\mathbf{r})]/k_B T} \right) \quad (61)$$

fournit une illustration de *l'approximation de densité locale* : la densité en un point quelconque du piège est la densité d'un gaz uniforme de même température et de potentiel chimique  $\mu - V(\mathbf{r})$ . Nous aurons l'occasion d'utiliser cette approximation pour un gaz de particules en interaction.

**Seuil de condensation à l'approximation semi-classique.** Plaçons-nous tout d'abord à trois dimensions. La condensation dans le piège harmonique  $V(\mathbf{r}) = m\omega^2 r^2/2$  est obtenue quand la fugacité  $Z$  tend vers 1, auquel cas le résultat (57) indique que la densité centrale du piège vaut :

$$\rho_{\text{exc}}^{(3)}(0) = \frac{1}{\lambda_T^3} \text{Li}_{3/2}(1). \quad (62)$$

On arrive donc à une conclusion remarquable (et satisfaisante!) qui relie le cas uniforme et le cas du piège : la condensation dans le piège se produit quand la densité centrale est égale à la densité critique d'un gaz uniforme de même température.

Comment ce résultat se transpose-t-il à deux dimensions ? La réponse ne semble pas évidente, puisqu'il y a condensation dans le piège harmonique, mais pas dans le cas uniforme. Cette réponse se trouve dans le fait que la densité centrale  $n(0)$  dans le piège diverge quand  $Z \rightarrow 1$ , bien que l'intégrale de  $n(\mathbf{r})$  sur tout l'espace reste convergente. La divergence de  $n(\mathbf{r})$  autour du point  $\mathbf{r} = 0$  est en effet assez douce :

$$\begin{aligned} Z = 1 : \quad \rho_{\text{exc}}^{(2)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\lambda_T^2} \text{Li}_1 \left( e^{-V(\mathbf{r})/k_B T} \right) = -\frac{1}{\lambda_T^2} \ln \left( 1 - e^{-m\omega^2 r^2/(2k_B T)} \right) \\ &\underset{r \rightarrow 0}{\approx} -\frac{1}{\lambda_T^2} \ln(r^2) + \text{constante}. \end{aligned} \quad (63)$$

On retrouve ainsi le côté marginal de la condensation à deux dimensions, au moins dans la limite thermodynamique : elle peut se faire dans un piège harmonique, mais il faut pour cela ajouter des atomes jusqu'au moment où la densité centrale devient infinie. Même si cela est en principe possible

pour un gaz parfait, on pressent que ce sera problématique en présence d'interactions répulsives entre particules.

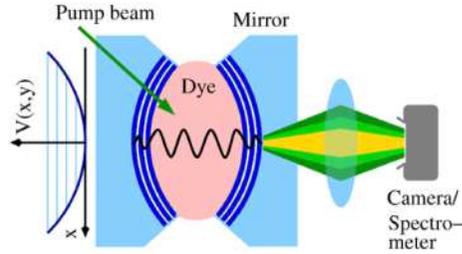
### 3 Un gaz 2D presque idéal : les photons en cavité

Un exemple de condensation de Bose–Einstein d'un gaz parfait dans un piège harmonique 2D est fourni par les expériences menées dans le groupe de Martin Weitz à Bonn depuis 2010 (KLAERS, SCHMITT et al. 2010), et reprises plus récemment dans le groupe de Robert Nyman à Imperial College (MARELIC & NYMAN 2015; MARELIC, ZAJICZEK et al. 2016). Il s'agit de la condensation à deux dimensions de photons dans une cavité Fabry–Perot. *A priori*, l'extension à des photons de la notion de condensation de Bose–Einstein, un phénomène propre aux particules massives, soulève un certain nombre de questions :

- Les photons ne sont pas des particules massives dans l'espace 3D. Comment peuvent-ils acquérir une masse à 2D ?
- Pour avoir un condensat à deux dimensions, il faut confiner les particules, par exemple dans un piège harmonique. Comment obtient-on ce piégeage harmonique pour les photons ?
- On attribue généralement un potentiel chimique nul aux photons, en invoquant le fait que leur nombre n'est pas conservé. C'est en particulier cet argument qui permet d'établir la formule du rayonnement du corps noir. Comment se fait-il que les photons puissent acquérir un potentiel chimique non nul dans cette expérience ?
- La condensation de Bose–Einstein correspond à l'accumulation d'un nombre macroscopique de particules dans un seul état quantique du système, le laser également. En quoi les expériences de Bonn diffèrent-elles d'un laser « ordinaire » ?

#### 3-1 Masse et potentiel harmonique pour les photons

Le schéma expérimental de KLAERS, SCHMITT et al. (2010) est représenté sur la figure 5. L'expérience est menée avec des photons de longueur



**FIGURE 5.** Cavité Fabry-Perot remplie de colorant et pompée latéralement par un laser. Pour un taux de pompage suffisamment élevé, la condensation de Bose-Einstein de photons se produit dans le mode longitudinal  $N = 7$  et dans le mode transverse fondamental. Figure extraite de KLAERS, SCHMITT et al. (2011).

d'onde  $\lambda$  autour de 570 nm. On utilise une cavité Fabry-Perot de grande finesse ( $10^5$ ) et de faible épaisseur  $L \approx 1.5 \mu\text{m}$ . La cavité est remplie d'un milieu (méthanol+colorant) d'indice  $n_0 = 1.33$ , de sorte que  $L \approx N \frac{\lambda}{2n_0}$  avec  $N = 7$ . Les photons sont stockés dans la cavité dans le mode longitudinal  $N = 7$ .

Le choix de la valeur de  $L$  est motivé par le fait que l'intervalle spectral libre, c'est-à-dire l'écart énergétique entre le mode  $N = 7$  et ses voisins  $N = 6$  ou  $8$ , doit être plus grand que  $k_B T$ , où  $T$  est la température ambiante, et que la largeur spectrale de la lumière de fluorescence du colorant. Quand cette condition est vérifiée, ces autres modes ne jouent pas de rôle : le degré de liberté selon  $z$  peut être considéré comme gelé. Le choix  $L = 1.5 \mu\text{m}$  conduit à un écart énergétique de  $10 k_B T$  environ, ce qui est largement suffisant.

**Comment donner une masse aux photons ?** Nous nous intéressons dans ce qui suit à la dynamique et à la thermodynamique des photons dans le plan  $xy$ , où  $z$  désigne l'axe de la cavité. Un photon résonnant avec la cavité a pour vecteur d'onde  $(\mathbf{k}_\perp, k_z)$  avec  $k_z = N\pi/L$ . Si on se limite à l'approximation paraxiale, c'est-à-dire à des photons faisant un angle faible avec l'axe  $z$ , on a  $|\mathbf{k}_\perp| \ll k_z$ . L'énergie des photons dans le milieu d'indice

$n_0$  qui remplit la cavité s'écrit donc

$$\hbar\omega(\mathbf{k}_\perp) = \frac{\hbar c}{n_0} (k_z^2 + \mathbf{k}_\perp^2)^{1/2} \approx \hbar\omega_0 + \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_\perp^2}{2m_{\text{ph}}}, \quad (64)$$

où l'on a posé

$$\hbar\omega_0 = \frac{N\pi\hbar c}{n_0 L}. \quad (65)$$

On obtient bien une relation de dispersion de particules massives et la masse effective du photon pour le mouvement dans le plan  $xy$  vaut :

$$m_{\text{ph}} = \frac{\hbar n_0 k_z}{c} = n_0^2 \frac{\hbar\omega_0}{c^2}. \quad (66)$$

Cette masse effective vaut  $0.7 \times 10^{-35}$  kg dans l'expérience de Bonn, 100 000 fois moins qu'un électron !

**Comment induire un potentiel harmonique dans le plan  $xy$  ?** Nous allons faire ici un raisonnement corpusculaire classique, qui pourrait se transposer en formalisme ondulatoire. La cavité est formée de deux miroirs sphériques de rayon  $R$ , de sorte que la distance  $L$  entre les deux miroirs varie avec l'écart à l'axe  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$  :

$$L(r) = L_0 - 2 \left( R - \sqrt{R^2 - r^2} \right). \quad (67)$$

Le rayon de courbure des miroirs  $R \approx 1$  m est grand devant l'écart à l'axe typique,  $r \approx 100 \mu\text{m}$ , de sorte que l'on peut faire un développement limité de cette expression :

$$L(r) \approx L_0 - \frac{r^2}{R}. \quad (68)$$

Cette variation de la longueur de la cavité avec l'écart à l'axe induit une variation spatiale de l'énergie d'un photon stocké dans le mode  $N$ . Plus précisément, si on injecte ce résultat pour  $L(r)$  dans la définition (65) de  $\hbar\omega_0$ , on arrive à

$$\hbar\omega_0(r) = \hbar\omega_0(0) + \frac{1}{2} m_{\text{ph}} \Omega^2 r^2 \quad (69)$$

où la pulsation  $\Omega$  est définie par :

$$\Omega = \frac{c}{n_0 \sqrt{L_0 R/2}}. \quad (70)$$

On obtient bien le confinement harmonique recherché, avec une fréquence d'oscillation  $\Omega/(2\pi) \approx 40$  GHz pour l'expérience de Bonn.

À ce stade, l'énergie d'un photon de position transverse  $r$  et d'impulsion transverse  $\hbar \mathbf{k}_\perp$  s'écrit donc

$$E(r, \mathbf{k}_\perp) = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_\perp^2}{2m_{\text{ph}}} + \frac{1}{2} m_{\text{ph}} \Omega^2 r^2, \quad (71)$$

ce qui suffit d'un point de vue cinématique à appliquer le formalisme précédent.

### 3-2 Température et potentiel chimique

La cavité est remplie d'un colorant (rhodamine 6G) que l'on éclaire sur le côté avec un laser pompe à 532 nm. Une molécule de colorant peut être considérée comme un système à deux niveaux électroniques  $g$  (fondamental) et  $e$  (excité), avec pour chacun de ces niveaux un quasi-continuum de sous-niveaux de vibration et de rotation (figure 6). Lors d'une transition  $e \rightarrow g$ , une molécule émet un photon dans le mode  $N = 7$  de la cavité. Ce photon peut être réabsorbé par une molécule (transition  $g \rightarrow e$ ), puis réémis de multiples fois avant de finalement s'échapper de la cavité.

Cette succession de processus d'absorption et d'émission conduit à une distribution thermique pour l'énergie des photons. Plus précisément, en utilisant la loi de Kennard-Stepanov qui relie les spectres d'absorption et d'émission de molécules, on peut montrer que la distribution énergétique des photons est caractérisée (à peu près) par la même température que celle du colorant,  $T = 300$  K (KLAERS, SCHMITT et al. 2011). En association avec la masse effective déterminée plus haut, ceci correspond à une longueur d'onde thermique  $\lambda_T \sim 1.6 \mu\text{m}$ .

À ce stade, la situation semble similaire à celle du rayonnement du corps noir, où l'on s'intéresse aux photons en équilibre avec les parois d'un four. Or, pour le rayonnement du corps noir, on est conduit à imposer un

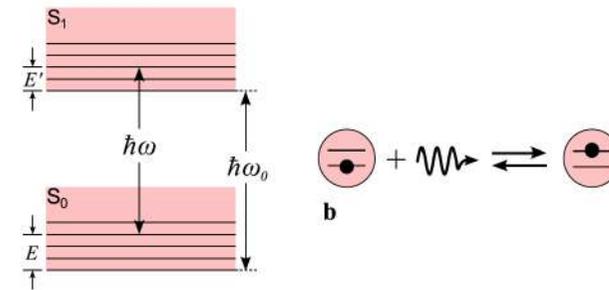


FIGURE 6. Absorption et émission d'un photon par une molécule de colorant. Figure extraite de KLAERS, SCHMITT et al. (2011).

potentiel chimique nul aux photons. La raison en est que le nombre de photons, ou plus précisément le nombre d'excitations du système, n'est pas conservé. Quand on considère la dynamique des photons en interaction avec les parois du four, on peut avoir un processus du type :

$$1 \text{ photon} \rightarrow 1 \text{ excitation des parois} \rightarrow 2 \text{ photons} \quad (72)$$

résultant dans la conversion d'un photon d'énergie  $\hbar\omega$  en deux photons d'énergie  $\hbar\omega'$  et  $\hbar\omega''$ , avec  $\omega = \omega' + \omega''$ . L'existence de tels processus impose  $\mu = 2\mu$  pour les photons, soit  $\mu = 0$ .

La situation est très différente dans l'expérience de Bonn. Les photons ont certes la même température  $T$  que le colorant, mais leur nombre dans la gamme de longueur d'onde autour de 570 nm est différent de celui d'un corps noir à cette température, car il dépend également de l'intensité de pompage. Pour comprendre ce point, partons du processus représenté en figure 6 :

$$1 \text{ photon} + \text{une molécule } g \leftrightarrow \text{une molécule } e. \quad (73)$$

Dans un tel processus élémentaire, le nombre d'excitations du système est constant<sup>3</sup>, contrairement au cas du rayonnement du corps noir. Une

3. Si l'on revient à la description des processus élémentaires d'interaction molécule-rayonnement, on peut remarquer que ce point est à la base de l'approximation du champ tournant (RWA), consistant à ne garder dans l'hamiltonien que les termes en  $\hat{a}^\dagger |g\rangle\langle e| + \text{H.c.}$

version simplifiée de l'équilibre dans la relation ci-dessus peut s'écrire en terme de l'équation bilan :

$$\mathcal{N}(\omega) N_g(E) = [1 + \mathcal{N}(\omega)] N_e(E + \hbar\omega) \quad (74)$$

où  $\mathcal{N}(\omega)$  représente le nombre de photons de pulsation  $\omega$ ,  $N_{g/e}(E)$  le nombre de molécules d'énergie interne  $E$ . Nous avons tenu compte dans cette équation du phénomène d'émission stimulée, qui est responsable *in fine* de la condensation. Dans cette modélisation simple, posons

$$\frac{N_e(E + \hbar\omega)}{N_g(E)} = Z e^{-\hbar\omega/k_B T}, \quad (75)$$

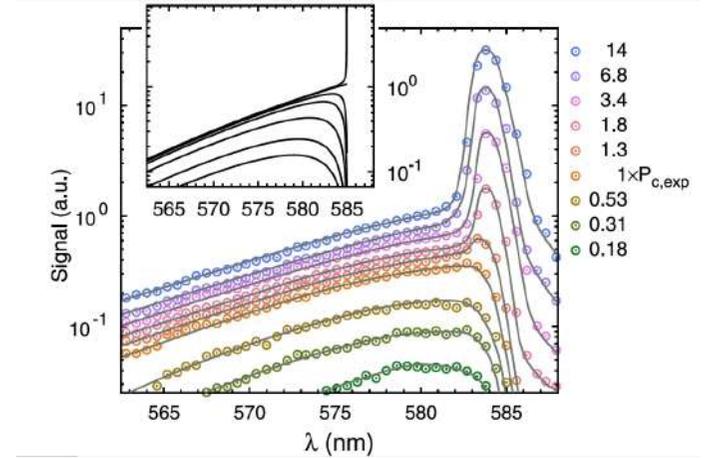
qui fait l'hypothèse implicite que la relaxation à l'intérieur des sous-niveaux rovibrationnels garantit une distribution thermique pour chacun de ces deux continums. En revanche, le rapport entre les populations globales de  $g$  et  $e$  n'est pas thermique, mais imposé par le laser de pompe et décrit par le coefficient  $Z$ . La solution de l'équation-bilan est

$$\frac{\mathcal{N}(\omega)}{1 + \mathcal{N}(\omega)} = \frac{N_e(E + \hbar\omega)}{N_g(E)} \quad \rightarrow \quad \mathcal{N}(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{Z} e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \quad (76)$$

c'est-à-dire une loi de Bose-Einstein de fugacité  $Z \neq 1$ .

### 3-3 Résultats expérimentaux

Un exemple typique de spectres expérimentaux est montré sur la figure 7. On voit que sur une gamme d'une vingtaine de nanomètres, la distribution en fréquence des photons issus de la cavité reproduit très bien une loi de Bose-Einstein à température  $T = 300$  K et avec un potentiel chimique qui dépend de la puissance de pompe. Pour une puissance assez grande, on observe clairement une accumulation de photons dans un pic étroit en longueur d'onde, autour de 584 nm. Une image directe de la lumière issue de la cavité, en dessous et au-dessus du seuil, confirme l'interprétation de ce pic comme une accumulation de photons dans un mode central de la cavité (figure 9). Pour  $\lambda > 585$  nm, le nombre de photons chute car ce domaine est au-delà de la longueur d'onde de coupure pour le mode considéré ( $N = 7$ ). Le spectre est alors très différent d'un corps noir à 3D, pour

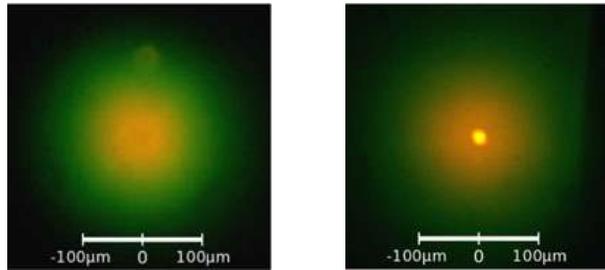


**FIGURE 7.** Spectre de la lumière émise pour différentes puissances de pompe. Les lignes continues sont des ajustements par des distributions de Bose-Einstein associées à l'énergie (71) et de fugacité non nulle. Pour une puissance de pompe supérieure à un certain seuil, une accumulation macroscopique de photons se produit dans le mode fondamental de la cavité. Figure extraite de KLAERS, SCHMITT et al. (2011).

lequel  $\mathcal{N}(\omega)$  diverge à basse fréquence. Le nombre de photons dans la cavité au seuil de la transition est de l'ordre de 60 000, en bon accord avec la prédiction<sup>4</sup> pour un gaz parfait  $\frac{\pi^2}{3} (k_B T / \hbar \Omega)^2$ .

Des expériences plus récentes, toujours menées par le groupe de Bonn, ont porté sur l'étude de la distribution statistique du nombre de photons présents dans le condensat à un instant donné. SCHMITT, DAMM et al. (2014) ont notamment montré que ces fluctuations correspondaient à celles attendues pour l'ensemble grand canonique. Cela est en accord avec l'idée que le gaz de photons échange de l'énergie et des particules avec le réservoir formé par les molécules du colorant. Ce résultat a récemment été confirmé par la mesure de la cohérence de phase de la lumière sortant de la cavité (SCHMITT, DAMM et al. 2016). La mesure de la chaleur spécifique du gaz de photons (fig. 9), avec une variation caractéristique en " $\lambda$ ", a par

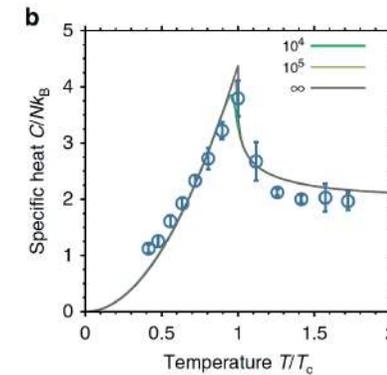
4. Ce nombre diffère par un facteur 2 de (48) car il faut prendre en compte les deux états de polarisation possibles pour les photons.



**FIGURE 8.** Répartition spatiale de la lumière émise par la cavité, en dessous (gauche) et au-dessus (droite) de la puissance seuil. On notera que les longueurs d'onde les plus courtes (vertes) sont émises sur les bords, confirmant la présence du potentiel harmonique effectif  $m_{\text{ph}}\Omega^2 r^2/2$ . Figure extraite de KLAERS, SCHMITT et al. (2011).

ailleurs confirmé la validité de l'interprétation de ces phénomènes en tant que condensation de Bose–Einstein (DAMM, SCHMITT et al. 2016).

**Condensat ou laser?** La réponse à cette question dépend des critères que l'on fixe pour obtenir l'un ou l'autre des deux effets. Tout d'abord, on peut imposer qu'un condensat apparaisse au-dessus d'un piédestal assimilable à une distribution thermique, ce qui n'est pas le cas pour un laser. L'expérience de Bonn satisfait bien ce critère. Par ailleurs, la plupart des lasers tendent à produire de la lumière avec une distribution poissonnienne du nombre de photons émis pendant une durée donnée. Ici, la lumière sortant de la cavité présente des fluctuations beaucoup plus importantes, bien décrites dans l'ensemble grand-canonique d'un gaz de Bose. On peut par ailleurs remarquer qu'un condensat correspond à une situation d'équilibre thermodynamique. De ce point de vue, l'expérience de Bonn n'est pas vraiment dans un état d'équilibre, puisque la cavité est un système ouvert : on y injecte en permanence de l'énergie via la pompe, et de l'énergie s'en échappe quand les photons sortent de la cavité. En revanche, puisque chaque photon subit de multiples processus "absorption–émission" avant de s'échapper, un quasi-équilibre thermique a bien le temps d'être atteint. Au vu de ces différents critères, tous liés à des propriétés statiques du système, il semble légitime de considérer que cette expérience a effectivement



**FIGURE 9.** Chaleur spécifique (par photon) mesurée en fonction de la température réduite  $T/T_c$ , montrant la singularité caractéristique de la transition de Bose–Einstein. Dans le régime de haute température, la chaleur spécifique atteint la limite classique de  $2k_B$  par photon. Les lignes continues donnent la prédiction pour un gaz de Bose idéal pour trois nombres de particules différents. Figure extraite de DAMM, SCHMITT et al. (2016).

réalisé un condensat 2D de photons piégés. Signalons enfin que CHIOCCHETTA, GAMBASSI et al. (2015) ont récemment proposé des critères d'une autre nature, plus contraignants et fondés sur la vérification de relations de type fluctuation–dissipation. À notre connaissance, ces critères n'ont pas encore été testés sur les « condensats 2D de photons ».

## 4 Collisions binaires à deux dimensions

Pour aller au-delà du modèle du gaz parfait et arriver à la transition BKT, il faut prendre en compte les interactions entre particules. Dans les gaz dilués qui nous intéressent ici, ces interactions sont très bien décrites par un modèle de collisions binaires, où l'hamiltonien d'interaction se décrit comme une somme de termes à deux corps

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (77)$$

Nous devons donc commencer par décrire le problème à deux corps interagissant par l'intermédiaire du potentiel  $U(\mathbf{r})$ . L'étude est simplifiée par les remarques suivantes :

- Les interactions dominantes<sup>5</sup> sont à symétrie sphérique, de sorte que  $U(\mathbf{r})$  ne dépend en fait que de  $r = |\mathbf{r}|$ . Le moment cinétique est conservé dans une collision, ce qui permet de traiter le problème à deux corps avec des états propres de l'opérateur  $\hat{L}$ . C'est le principe du développement en ondes partielles, repérées par la valeur  $\ell \in \mathbb{N}$  du moment cinétique. Notons par ailleurs que pour des bosons polarisés, la symétrisation de la fonction d'onde à deux corps entraîne que seules les valeurs paires de  $\ell$  sont autorisées.
- Les atomes sont froids de sorte que leur longueur d'onde thermique  $\lambda_T$  est grande devant la portée du potentiel qui sera notée  $b$ . En d'autres termes, les vecteurs d'onde  $\mathbf{k}$  pertinents, qui sont de l'ordre de  $1/\lambda_T$ , vérifient  $kb \ll 1$ . Par ailleurs, le potentiel  $U(\mathbf{r})$  décroît assez vite à l'infini. La conjonction de ces deux propriétés assure que l'essentiel des propriétés collisionnelles sont décrites par l'onde  $s$ , c'est-à-dire l'état correspondant à un moment cinétique relatif  $\ell = 0$  entre les deux partenaires de collision (figure 10).

Le traitement des collisions binaires dans un espace à trois dimensions est fait dans tous les manuels de physique quantique. Dans le cas des atomes froids, on pourra consulter par exemple PETHICK & SMITH (2008). Le but de cette section est de montrer les modifications importantes apportées par le passage à deux dimensions, pour préparer ainsi le terrain à notre étude de la transition BKT.

#### 4-1 Séparation des variables, amplitude de diffusion

Considérons deux atomes identiques de masse  $m$  et introduisons les variables du centre de masse,  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{P}$  :

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2), \quad \mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \quad (78)$$

5. Nous négligerons donc ici les interactions magnétiques de type dipole-dipole qui briseraient cette invariance par rotation.

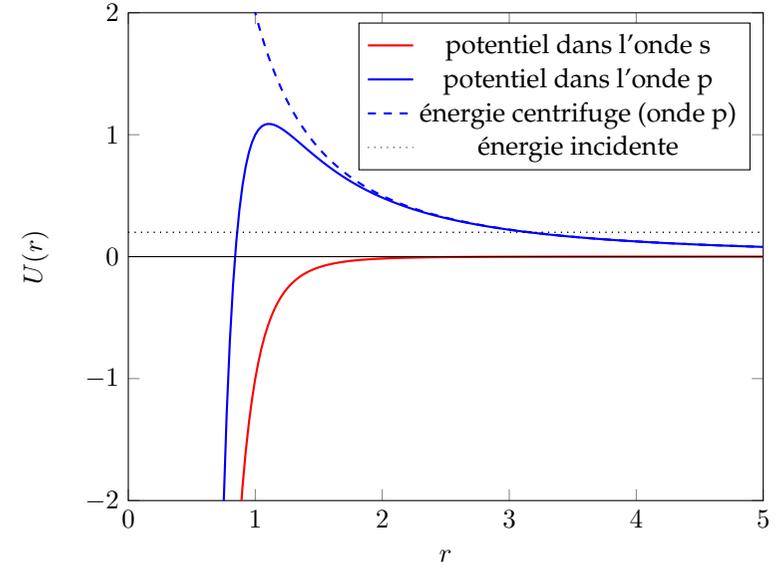


FIGURE 10. Potentiel radial en  $-1/r^6$  ressenti par une particule dans l'onde  $s$  (en rouge, pas de terme centrifuge), et dans une onde partielle de moment cinétique non nul (en bleu, avec un terme centrifuge en  $+1/r^2$ ). Les échelles de longueur et d'énergie sont choisies ici adimensionnées.

et les variables relatives,  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{p}$  :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2). \quad (79)$$

L'hamiltonien du système se sépare en deux termes

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{CM}} + \hat{H}_{\text{rel}}, \quad \hat{H}_{\text{CM}} = \frac{\hat{P}^2}{2M}, \quad \hat{H}_{\text{rel}} = \frac{\hat{p}^2}{2m_r} + U(\mathbf{r}), \quad (80)$$

où l'on a introduit la masse totale  $M = 2m$  et la masse relative  $m_r = m/2$ . Le problème de la collision binaire se ramène donc au problème à un corps de masse réduite  $m_r$  dans le potentiel extérieur  $U(\mathbf{r})$ , décrit par l'hamiltonien  $\hat{H}_{\text{rel}}$ . C'est ce problème que nous allons étudier.

Nous allons nous intéresser aux états asymptotiquement libres qui décrivent un processus de diffusion. Le formalisme de la théorie des colli-

sions nous indique qu'à toute onde plane  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  état propre de l'hamiltonien

$$\hat{H}_{\text{rel},0} = \frac{\hat{p}^2}{2m_r}, \quad (81)$$

avec la valeur propre  $E_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / 2m_r$ , nous pouvons associer un état propre  $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  de  $\hat{H}_{\text{rel}}$  de même énergie,

$$\hat{H}_{\text{rel}}\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = E_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad (82)$$

cet état s'écrivant asymptotiquement comme la somme de l'onde plane incidente et d'une onde sortante sphérique (à trois dimensions) ou cylindrique (à deux dimensions) :

$$3\text{D}, 1 \ll kr : \quad \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \sim C_0 \left\{ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(k) \frac{e^{ikr}}{r} \right\}, \quad (83)$$

$$2\text{D}, 1 \ll kr : \quad \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \sim C_0 \left\{ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(k) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \left[ -\sqrt{\frac{i}{8\pi}} \right] \right\}, \quad (84)$$

où  $C_0$  est une constante de normalisation. Nous avons tenu compte du fait que la diffusion se fait essentiellement dans le canal de moment cinétique nul (onde s) et nous nous limitons donc au cas d'une onde diffusée isotrope. Par ailleurs, on remarque que la définition de l'amplitude de diffusion  $f(k)$  n'est pas exactement la même à trois et deux dimensions, avec le facteur  $\sqrt{k}$  qui apparaît explicitement dans (84). La définition adoptée ici permet d'assurer des propriétés analytiques simples à  $f(k)$  (ADHIKARI 1986). Signalons enfin que la raison d'être du facteur entre crochets dans la définition 2D tient à la forme trouvée pour  $f(k)$  dans le cas d'une géométrie quasi-2D (§ 4-4) qui prendra la forme  $f(k) \approx \tilde{g}$ , où la constante  $\tilde{g}$  est le paramètre habituellement utilisé pour caractériser la force des interactions dans ce type de problème.

L'amplitude de diffusion  $f(k)$  détermine donc les propriétés de la collision binaire. Pour la calculer, prenons la moyenne angulaire de l'équation de Schrödinger (82) en notant  $R_k(r) = \frac{1}{4\pi} \int \psi_{\mathbf{k}}(r, \theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$  à 3D et  $R_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int \psi_{\mathbf{k}}(r, \varphi) \, d\varphi$  à 2D. On arrive alors à l'équation de Schrödinger radiale :

$$3\text{D} : \quad \frac{d^2 R_k}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_k}{dr} + \left[ k^2 - \frac{2m_r}{\hbar^2} U(r) \right] R_k(r) = 0 \quad (85)$$

et

$$2\text{D} : \quad \frac{d^2 R_k}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_k}{dr} + \left[ k^2 - \frac{2m_r}{\hbar^2} U(r) \right] R_k(r) = 0, \quad (86)$$

La différence entre les cas 3D et 2D apparaît ici bien mineure, avec uniquement un facteur 2 de différence pour le terme de dérivée première. Nous allons voir que cet écart change pourtant fortement le comportement de la fonction radiale  $R_k(r)$  et de l'amplitude de diffusion  $f(k)$ . Notons que le comportement asymptotique de la fonction radiale  $R_k(r)$  est obtenu par moyenne angulaire de (83-84) :

$$3\text{D}, 1 \ll kr : \quad R_k(r) \sim C_0 \left\{ \frac{\sin(kr)}{kr} + f(k) \frac{e^{ikr}}{r} \right\}, \quad (87)$$

$$2\text{D}, 1 \ll kr : \quad R_k(r) \sim C_0 \left\{ J_0(kr) + f(k) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \left[ -\sqrt{\frac{i}{8\pi}} \right] \right\} \quad (88)$$

Pour simplifier notre analyse, nous supposons que le potentiel  $U(r)$  s'annule (ou prend des valeurs négligeables par rapport aux autres énergies du problème) au-delà du rayon  $b$ . Nous nous intéresserons au régime de faible énergie  $kb \ll 1$ , de sorte qu'il existe une région intermédiaire de l'espace

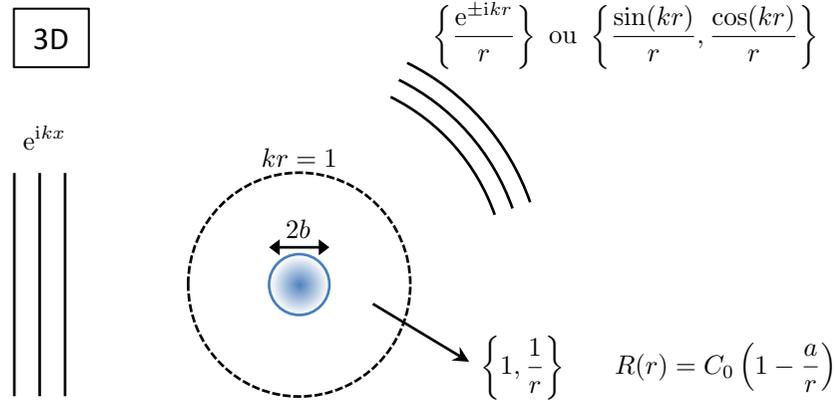
$$b < r \ll k^{-1} \quad (89)$$

dans laquelle le potentiel  $U(r)$  n'a pas d'influence et où nous pourrions faire un développement à petites valeurs de  $kr$  pour les états de diffusion  $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ . En particulier l'onde plane incidente vaut  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \approx 1$  dans cette région intermédiaire.

## 4-2 La longueur de diffusion à 3D

Nous cherchons à obtenir ici une solution de l'équation de Schrödinger avec le comportement asymptotique (87). Nous allons pour cela procéder en trois étapes, que nous reprendrons ensuite dans le cas bidimensionnel.

**Étape 1 : solutions générales dans la zone  $U = 0$ .** Plaçons-nous dans la zone  $r > b$  de sorte que  $U$  est négligeable. Les deux fonctions  $e^{\pm ikr}/r$  sont alors solutions exactes de l'équation radiale (85) (aussi bien pour  $kr \gg 1$



**FIGURE 11.** Principe du calcul de l'amplitude de diffusion à 3D par un potentiel ne prenant des valeurs significatives que pour  $r < b$  et pour des faibles vecteurs d'onde  $kb \ll 1$ . Pour  $kr \gg 1$ , la superposition de l'onde plane incidente et de l'onde sphérique divergente peut s'écrire après moyenne angulaire comme combinaison linéaire de  $e^{\pm ikr}/r$ . Ces deux fonctions de base se raccordent dans la zone intermédiaire  $b < r < k^{-1}$  aux deux fonctions  $R^{(I)}(r) = 1$  et  $R^{(II)}(r) = 1/r$ . La combinaison linéaire physiquement pertinente, avec notamment la régularité requise en  $r = 0$ , permet de définir la longueur de diffusion  $a$ .

que pour  $b < r < k^{-1}$ , et la solution générale est donc une combinaison linéaire de ces deux fonctions. En particulier, si on se place dans la région intermédiaire  $b < r < k^{-1}$ , on trouve (cf. figure 11)

$$\frac{e^{\pm ikr}}{r} \approx \frac{1 \pm ikr}{r} = \frac{1}{r} \pm ik \quad (90)$$

qui, par combinaisons linéaires, donnent une base commode des fonctions solutions dans cette région<sup>6</sup> :

$$R^{(I)}(r) = 1 \quad R^{(II)}(r) = 1/r, \quad (91)$$

6. On peut immédiatement retrouver cette base en considérant directement la limite  $k \rightarrow 0$ ,  $U \rightarrow 0$  de (85),  $rR'' + 2R' = 0$ , qui s'intègre en  $R'(r) = C_2/r^2$  où  $C_2$  est une constante, et donc  $R(r) = C_1 - C_2/r$  où  $C_1$  est une autre constante.

soit

$$R(r) = C_1 - \frac{C_2}{r}, \quad (92)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes. La forme asymptotique (87) écrite en termes des deux fonctions  $e^{\pm ikr}/r$  peut se transposer à cette région intermédiaire puisque ces fonctions sont solutions exactes tant que le potentiel  $U$  est négligeable et on aboutit bien à la forme (92) avec

$$R_k(r) = C_1 \left[ 1 + \frac{f(k)}{r} \right]. \quad (93)$$

**Étape 2 : solution d'énergie nulle.** Prenons  $k = 0$  dans l'équation de Schrödinger radiale (85) et considérons la zone  $0 < r < b$  où  $U(r)$  n'est plus négligeable. Comme il s'agit d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre, l'espace des solutions est toujours de dimension 2. Toutefois, on trouve de façon générale qu'une seule combinaison linéaire des solutions est acceptable si l'on veut respecter la régularité de  $R_0(r)$  en  $r = 0$ . Quand on suit cette solution jusqu'au point  $r = b$  où  $U$  devient négligeable et où la forme (92) devient pertinente, cette combinaison linéaire vient imposer le rapport  $C_2/C_1$ . Définissons la longueur de diffusion à trois dimensions par le rapport  $a = C_2/C_1$ . La fonction solution pour  $E = 0$  a donc la forme suivante pour  $r > b$  :

$$E = 0 : \quad R_0(r) = C_1 \left( 1 - \frac{a}{r} \right), \quad (94)$$

la longueur de diffusion correspondant donc par définition au point où cette forme asymptotique s'annule.

**Étape 3 : Raccord des solutions pour une énergie faible.** Considérons maintenant une solution  $R_k(r)$  d'énergie faible ( $kb \ll 1$ ) et plaçons-nous dans la zone intermédiaire  $b < r \ll k^{-1}$ . La comparaison entre la forme (93) et la solution  $R_0(r)$  pour  $E = 0$  conduit immédiatement au lien entre longueur de diffusion et amplitude  $f(k)$  :

$$a = - \lim_{k \rightarrow 0} f(k). \quad (95)$$

La section efficace totale de diffusion par le potentiel  $U(r)$  se calcule alors en faisant un bilan des courants de probabilité en entrée et en sortie et on

trouve  $\sigma = 4\pi a^2$ . Pour des particules bosoniques, les effets de statistique quantique viennent multiplier ce résultat par 2.

### 4-3 La longueur de diffusion à 2D

Reprenons étape par étape le raisonnement fait à 3D (cf. figure 12).

**Étape 1 : solutions générales dans la zone  $U = 0$ .** Le cas 2D apparaît immédiatement plus compliqué que le cas 3D car les ondes cylindriques  $e^{\pm ikr}/\sqrt{r}$  ne sont pas solutions exactes de l'équation radiale (86) pour  $U = 0$ . Si elles l'étaient, la limite basse énergie donnerait comme base de fonctions  $\frac{1}{\sqrt{r}} \pm ik\sqrt{r}$ , soit par combinaison linéaire  $\frac{1}{\sqrt{r}}$  et  $\sqrt{r}$ . Or la limite  $k \rightarrow 0$  et  $U \rightarrow 0$  de (86) donne  $rR'' + R' = 0$  qui s'intègre en  $R'(r) = C_1/r$  et donc

$$R^{(I)}(r) = \ln(r) \quad R^{(II)}(r) = 1, \quad (96)$$

soit

$$R(r) = C_1 \ln(r) + C_2. \quad (97)$$

Pour retrouver ce résultat dans un cadre plus général, on remarque que l'équation (86) pour la fonction radiale pour  $U = 0$  est en fait l'équation de définition des fonctions de Bessel d'ordre 0. Deux solutions indépendantes de cette équation sont la fonction de Bessel de première espèce,  $J_0(kr)$ , et la fonction de Bessel de deuxième espèce<sup>7</sup>  $Y_0(kr)$ . Les comportements de  $J_0$  et  $Y_0$  sont connus à la fois pour les grandes et les petites valeurs de  $kr$  :

$$kr \gg 1 : \quad J_0(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{\pi}{4}\right) \quad (98)$$

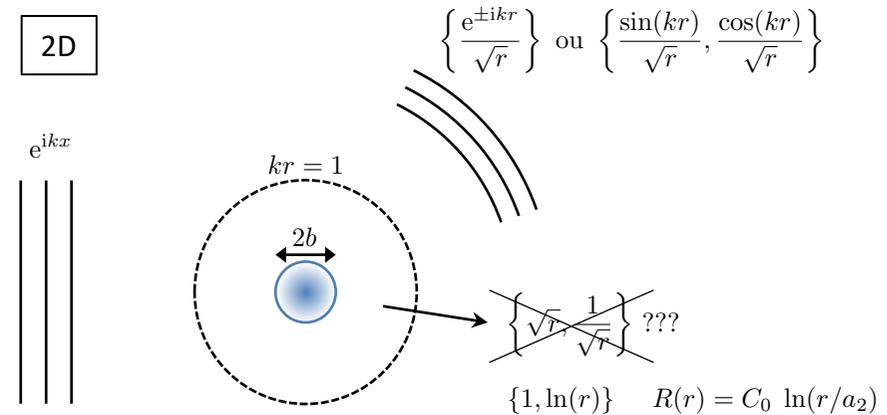
$$Y_0(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sin\left(kr - \frac{\pi}{4}\right) \quad (99)$$

et

$$kr \ll 1 : \quad J_0(kr) \sim 1 \quad (100)$$

$$Y_0(kr) \sim \frac{2}{\pi} \ln(\eta kr) \quad (101)$$

7. Cette fonction est également notée  $N_0(kr)$  et appelée *fonction de Neumann*.



**FIGURE 12.** Principe du calcul de l'amplitude de diffusion à 2D par un potentiel ne prenant des valeurs significatives que pour  $r < b$  et pour des faibles vecteurs d'onde  $kb \ll 1$ . Pour  $kr \gg 1$ , la superposition de l'onde plane incidente et de l'onde sphérique divergente peut s'écrire après moyenne angulaire comme combinaison linéaire de  $e^{\pm ikr}/\sqrt{r}$ . Ces deux fonctions sont les formes asymptotiques des fonctions de Bessel de première et deuxième espèce. Elles se raccordent dans la zone intermédiaire  $b < r < k^{-1}$  aux deux fonctions  $R^{(I)}(r) = \ln(r)$  et  $R^{(II)}(r) = 1$ . La combinaison linéaire physiquement pertinente, avec notamment la régularité requise en  $r = 0$ , permet de définir la longueur de diffusion  $a_2$ .

où<sup>8</sup>  $\eta = 0.89 \dots$ . En particulier, toute combinaison linéaire de  $J_0$  et  $Y_0$  pour  $kr \ll 1$  est bien de la forme (97).

**Étape 2 : solution d'énergie nulle.** Pour  $k = 0$  et en présence du potentiel  $U(r)$ , l'espace des solutions générales  $R_0(r)$  de l'équation radiale est de dimension 2. La condition de régularité de  $R_0(r)$  en  $r = 0$  vient sélectionner une combinaison linéaire particulière de ces fonctions. Quand on la prolonge au-delà du rayon  $r = b$ , cette combinaison linéaire se raccorde à une combinaison linéaire particulière du type  $C_1 \ln(r) + C_2$  [cf. (97)], qui

8.  $\eta = e^\gamma/2$  où  $\gamma = 0.5772 \dots$  est la constante d'Euler.

peut encore s'écrire

$$r > b : \quad R_0(r) = C_1 \ln(r/a_2) \quad (102)$$

où  $a_2 \equiv e^{-C_2/C_1}$  est la longueur de diffusion à deux dimensions.

**Étape 3 : Raccord des solutions pour une énergie faible.** Passons maintenant au cas où  $k$  n'est pas nul, mais reste très petit devant  $1/b$ . Pour former une onde cylindrique sortante, nous voyons sur (98-99) que nous devons prendre une fonction proportionnelle à la combinaison linéaire<sup>9</sup>  $J_0 + iY_0$ . Plus précisément, nous allons choisir

$$2D, 1 \ll kr : \quad \frac{1}{4i} [J_0(kr) + iY_0(kr)] \sim \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \left[ -\sqrt{\frac{i}{8\pi}} \right], \quad (103)$$

où l'on reconnaît entre crochets le préfacteur de  $f(k)$  introduit en (88). Pour  $r > b$  la fonction radiale recherchée est donc du type

$$R_k(r) = C_0 \left\{ J_0(kr) + \frac{f(k)}{4i} [J_0(kr) + iY_0(kr)] \right\}. \quad (104)$$

Dans la région intermédiaire  $b < r < k^{-1}$ , cette combinaison linéaire devient :

$$R_k(r) = C_0 \left\{ 1 + \frac{f(k)}{4i} \left[ 1 + i \frac{2}{\pi} \ln(\eta kr) \right] \right\}. \quad (105)$$

ce qui conduit à poser dans la limite  $k \rightarrow 0$

$$f(k) = -4i \frac{1}{1 + i \frac{2}{\pi} \ln(\eta ka_2)} = \frac{1}{-\frac{1}{2\pi} \ln(\eta ka_2) + \frac{i}{4}} \quad (106)$$

pour retrouver la forme (102) en  $C_1 \ln(r/a_2)$ , avec en particulier  $R_k(r) = 0$  pour  $r = a_2$  (PETROV & SHLYAPNIKOV 2001; PRICOUPENKO & OLSHANII 2007).

On notera en particulier que l'amplitude de diffusion  $f(k)$  tend vers 0 aux petits  $k$ , contrairement au cas 3D où elle tendait vers une limite finie

9. Cette combinaison porte le nom de fonction de Hankel de première espèce, notée  $H_0^{(1)}(kr)$ . La fonction de deuxième espèce,  $H_0^{(2)}(kr)$ , correspond quant à elle à  $J_0 - iY_0$ .

égale à  $-a$ . Par ailleurs, la section efficace totale de diffusion par le potentiel  $U(r)$  se calcule là aussi par un bilan des courants de probabilité en entrée et en sortie. On trouve  $\sigma(k) = |f(k)|^2/(4k)$ , quantité qui a la dimension d'une longueur et qui diverge à petit  $k$ .

#### 4-4 Collisions dans une géométrie quasi-2D

Dans une expérience, la réduction de dimension se fait en confinant fortement les atomes le long d'un axe,  $z$  par exemple. Le confinement est caractérisé par l'extension résiduelle du gaz le long de cette direction. Par exemple, si le confinement est obtenu en imposant le potentiel harmonique  $V_{\text{trap}}^{(1D)}(z) = \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2$  et si la température est assez basse, les atomes n'occuperont que l'état fondamental  $n_z = 0$  du mouvement selon  $z$ ,

$$\chi_0(z) = \frac{1}{(\pi a_{\text{oh}}^2)^{1/4}} e^{-z^2/(2a_{\text{oh}}^2)} \quad \text{avec} \quad a_{\text{oh}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_z}}, \quad (107)$$

au moins tant qu'on néglige les interactions entre ces atomes.

Le traitement détaillé de la collision entre deux atomes en présence du potentiel  $V_{\text{trap}}^{(1D)}(z)$  a été fait par PETROV & SHLYAPNIKOV (2001) et nous nous contenterons de donner ici certains résultats de cet article. L'interaction entre deux atomes en absence de potentiel le long de l'axe  $z$  est caractérisée par la longueur de diffusion tri-dimensionnelle  $a$ . Nous allons nous concentrer sur le cas le plus souvent rencontré en pratique :

$$a \ll a_{\text{oh}}, \quad (108)$$

de sorte que l'énergie associée aux interactions,  $\hbar^2/(ma^2)$ , est grande devant  $\hbar\omega_z$ . Dans une vision dynamique de la collision, ceci signifie que même si les atomes entrent et sortent dans le canal  $n_z = 0$ , plusieurs états d'excitation  $n_z \neq 0$  du mouvement selon  $z$  interviennent au cours du choc.

Par ailleurs, puisque les états asymptotiques sont ceux d'un gaz confiné selon  $z$  dans l'état  $n_z = 0$ , la fonction d'onde de la variable relative de la paire d'atomes doit s'écrire dans la version 2D vue plus haut :

$$1 \ll kr : \quad \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, z) \sim \left\{ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(k) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \left[ -\sqrt{\frac{i}{8\pi}} \right] \right\} \chi_0(z) \quad (109)$$

où  $\mathbf{r} \equiv (x, y)$ . L'amplitude de diffusion  $f(k)$  doit rester de la forme (106) et le travail de PETROV & SHLYAPNIKOV (2001) a été de relier la longueur de diffusion bi-dimensionnelle  $a_2$  à la longueur de diffusion tri-dimensionnelle  $a$ . Leur résultat peut s'écrire de la manière suivante<sup>10</sup> :

$$a_2 = 2.092 a_{\text{oh}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{a_{\text{oh}}}{a}\right). \quad (110)$$

En pratique, comme  $a \ll a_{\text{oh}}$ , cette équation conduit à des valeurs extrêmement faibles de  $a_2$ . Prenons le cas d'atomes de rubidium ( $a \approx 5$  nm) confinés par un potentiel de fréquence  $\omega_z/2\pi = 10$  kHz, ce qui conduit à  $a_{\text{oh}} \approx 100$  nm. On trouve alors  $a_2 \approx 3 \cdot 10^{-18}$  m. Cette valeur, 1000 fois inférieure à la taille du noyau atomique, n'a aucune signification physique particulière et doit simplement être vue comme un intermédiaire de calcul. Il est en fait plus intéressant de revenir à l'expression de l'amplitude de diffusion (106) que l'on peut mettre sous la forme :

$$f(k) = \frac{1}{\frac{1}{\tilde{g}} - \frac{1}{2\pi} \ln(\eta' k a_{\text{oh}}) + \frac{i}{4}} \quad \text{avec} \quad \eta' = 1.86. \quad (111)$$

et

$$\tilde{g} = \sqrt{8\pi} \frac{a}{a_{\text{oh}}}. \quad (112)$$

Le paramètre  $\tilde{g}$  va jouer un rôle central dans les cours qui vont suivre, car il va nous permettre de caractériser l'intensité des interactions entre atomes. Pour comprendre ce rôle, notons que la condition de validité de notre traitement,  $a \ll a_{\text{oh}}$ , entraîne que  $\tilde{g} \ll 1$ . Le terme  $1/\tilde{g}$  figurant au dénominateur de  $f(k)$  est donc grand devant 1. Comme les vecteurs d'onde décrivant les collisions entre atomes sont d'ordre  $1/a_{\text{oh}}$  (en tout cas, ils n'en diffèrent pas par des ordres de grandeurs), le terme  $\ln(\eta' k a_{\text{oh}})$  figurant également au dénominateur de  $f(k)$  est d'ordre 1. Il s'ensuit que le terme  $1/\tilde{g}$  est largement dominant devant le terme  $\frac{1}{2\pi} \ln(\eta' k a_{\text{oh}})$  ainsi que devant  $i/4$ , au moins tant que  $\tilde{g}$  reste inférieur à 1. On peut alors faire l'approximation

$$\tilde{g} \lesssim 1 : \quad f(k) \approx \tilde{g} \quad (113)$$

10. L'évaluation du coefficient numérique 2.092 intervenant dans cette équation a été améliorée par PRICOUPEKOV & OLSHANII (2007) et c'est donc la valeur de ces derniers que nous indiquons ici.

Région	permise		interdite	
Équation	$rR'' + R' + rk^2R = 0$		$rR'' + R' - rk^2R = 0$	
Fonction	$J_0(kr)$	$Y_0(kr)$	$I_0(kr)$	$K_0(kr)$
$kr \rightarrow 0$	$1 - \frac{1}{4}(kr)^2$	$\frac{2}{\pi} \ln(\eta kr)$	$1 + \frac{1}{4}(kr)^2$	$-\ln(\eta kr)$
$kr \rightarrow \infty$	$\sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos(kr - \frac{\pi}{4})$	$\sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sin(kr - \frac{\pi}{4})$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi kr}} e^{kr}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2kr}} e^{-kr}$
Dérivée	$J'_0 = -J_1$	$Y'_0 = -Y_1$	$I'_0 = I_1$	$K'_0 = -K_1$

**TABLE 2.1.** Résumé des propriétés des fonctions de Bessel intervenant dans ce chapitre pour déterminer la fonction radiale  $R(r)$ . La constante  $\eta \approx 0.8905 \dots$  est définie par  $\eta = e^\gamma/2$  où  $\gamma = 0.5772 \dots$  est la constante d'Euler.

d'une amplitude de diffusion constante.

Nous retrouverons cette approximation (113) au prochain cours dans le cadre d'une approche variationnelle, et nous reviendrons sur les termes correctifs à cette approximation au chapitre 6. Nous montrerons alors que ces corrections sont responsables d'une "anomalie quantique", qui vient briser l'invariance d'échelle du problème 2D traité par un champ classique.

## Appendice : diffusion par un potentiel carré

À titre d'exemple, nous présentons dans ce paragraphe le problème de la diffusion d'une particule de masse  $m_r$  par un puits ( $U_0 < 0$ ) ou une bosse ( $U_0 > 0$ ) de potentiel de rayon  $b$  :

$$U(\mathbf{r}) = U_0 \quad \text{si } r < b, \quad U(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{si } r > b. \quad (114)$$

Nous poserons  $k_0 = \sqrt{2m_r|U_0|}/\hbar$ . Dans la zone  $r > b$ , nous savons que la fonction radiale est une combinaison linéaire des fonctions de Bessel

$$r > b : \quad R(r) = C_1 J_0(kr) + C_2 Y_0(kr) \quad (115)$$

et que l'amplitude de diffusion est reliée aux coefficients  $C_1$  et  $C_2$  par [cf. (104)]

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{1 + f(k)/4i}{f(k)/4} \implies \frac{1}{f(k)} = \frac{1}{4} \frac{C_1}{C_2} + \frac{i}{4}. \quad (116)$$

On identifie alors la longueur de diffusion à partir de la relation (106) :

$$k \rightarrow 0 : \quad \frac{1}{f(k)} \approx -\frac{1}{2\pi} \ln(\eta k a_2) + \frac{i}{4}, \quad (117)$$

soit

$$k \rightarrow 0 : \quad \ln(\eta k a_2) \approx -\frac{\pi}{2} \frac{C_1}{C_2}. \quad (118)$$

### Cas d'une bosse de potentiel

Nous considérons le cas d'une diffusion à basse énergie, avec  $k < k_0$ . La région centrale est donc classiquement interdite et l'équation radiale pour la fonction  $R(r)$  s'écrit dans cette zone

$$rR'' + R' - rk_1^2 R = 0 \quad \text{avec} \quad k_1^2 = k_0^2 - k^2 > 0. \quad (119)$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions de Bessel modifiées (encore appelées fonctions de Bessel hyperboliques) notées  $I_0(k_1 r)$  et  $K_0(k_1 r)$ . Leur comportement au voisinage de 0 est donné par

$$x \rightarrow 0 : \quad I_0(x) \approx 1 + \frac{x^2}{4} \quad (120)$$

$$K_0(x) \approx -\ln(\eta x). \quad (121)$$

La divergence en  $\ln(r)$  élimine la contribution de  $K_0$  :

$$r < b : \quad R(r) = C_0 I_0(k_1 r) \quad (122)$$

et nous devons raccorder cette fonction en  $r = b$  avec (135) en assurant la continuité de la fonction elle-même et de sa dérivée première. Ceci impose

$$k_1 \frac{I_0'(k_1 b)}{I_0(k_1 b)} = k \frac{C_1 J_0'(kb) + C_2 Y_0'(kb)}{C_1 J_0(kb) + C_2 Y_0(kb)} \quad (123)$$

En utilisant  $J_0'(x) \approx -x/2$  et  $Y_0'(x) \approx 2/(\pi x)$  au voisinage de 0, on voit que l'on peut négliger la contribution de  $J_0'$  devant celle de  $Y_0'$  au numérateur

de l'expression ci-dessus<sup>11</sup>. Puisque nous nous intéressons à la limite  $k \rightarrow 0$ , nous prenons  $k_1 \approx k_0$ ,  $J_0(kb) \approx 1$  et  $Y_0(kb) \approx \frac{2}{\pi} \ln(\eta kb)$ , et nous arrivons à

$$\frac{C_1}{C_2} = -\frac{2}{\pi} \ln(\eta kb) + \frac{2}{\pi k_0 b} \frac{I_0(k_0 b)}{I_0'(k_0 b)} \quad (124)$$

dont on déduit la longueur de diffusion (figure 13) :

$$a_2 = b \exp \left[ -\frac{1}{k_0 b} \frac{I_0(k_0 b)}{I_0'(k_0 b)} \right]. \quad (125)$$

Dans la limite  $U_0 \rightarrow \infty$  (sphère dure), la longueur de diffusion tend vers  $b$ . Le comportement asymptotique de  $I_0(x)$  en l'infini est en effet

$$x \rightarrow \infty : \quad I_0(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \quad (126)$$

de sorte que  $I_0(x)/I_0'(x) \sim 1$ . Dans la limite inverse  $U_0 \rightarrow 0$ , on trouve  $a_2 \approx b \exp[-2/(k_0 b)^2]$  qui tend exponentiellement vite vers 0.

### Cas d'un creux de potentiel

#### Recherche des états liés

Un état lié à symétrie cylindrique d'énergie  $E = -\hbar^2 \kappa^2 / 2m_r$ , avec  $|E| < |U_0|$ , sera caractérisé par une fonction radiale solution de

$$rR'' + R' + rk_1^2 R = 0 \quad \text{avec} \quad k_1^2 = k_0^2 - \kappa^2 > 0 \quad (127)$$

à l'intérieur du puits (région permise) et de

$$rR'' + R' - r\kappa^2 R = 0 \quad (128)$$

à l'extérieur (région interdite).

Dans la région permise, les solutions sont des combinaisons linéaires de  $J_0(k_1 r)$  et  $Y_0(k_1 r)$ . La fonction  $Y_0(k_1 r)$  diverge en  $r = 0$  et doit donc être éliminée. Il reste

$$r < b : \quad R(r) = C_0 J_0(k_1 r). \quad (129)$$

<sup>11</sup> On vérifie *a posteriori* que l'amplitude relative de  $C_1$  et  $C_2$  à laquelle on aboutit est compatible avec cette approximation.

Dans la région interdite, la solution est une combinaison linéaire de  $I_0(\kappa r)$  et  $K_0(\kappa r)$ . Nous avons déjà indiqué que  $I_0(x)$  diverge comme  $e^x/\sqrt{2\pi x}$  à l'infini et doit donc être écartée. La fonction  $K_0(x)$  en revanche se comporte comme

$$x \rightarrow \infty : \quad K_0(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \quad (130)$$

et est acceptable. Nous prenons donc dans cette région :

$$r > b : \quad R(r) = C_1 K_0(\kappa r). \quad (131)$$

Le raccord à la frontière  $r = b$  impose

$$k_1 \frac{J_0'(k_1 b)}{J_0(k_1 b)} = \kappa \frac{K_0'(\kappa b)}{K_0(\kappa b)}, \quad \kappa^2 + k_1^2 = k_0^2, \quad (132)$$

qui permet de déterminer un ensemble discret de solutions pour une valeur de  $k_0$  fixée.

Intéressons-nous au cas d'un puits de faible profondeur  $k_0 b \ll 1$ . En utilisant les développements des fonctions  $J_0$  et  $K_0$  au voisinage de 0, on trouve dans ce cas une solution unique au problème

$$\eta \kappa b \approx e^{-2/k_0^2 b^2}. \quad (133)$$

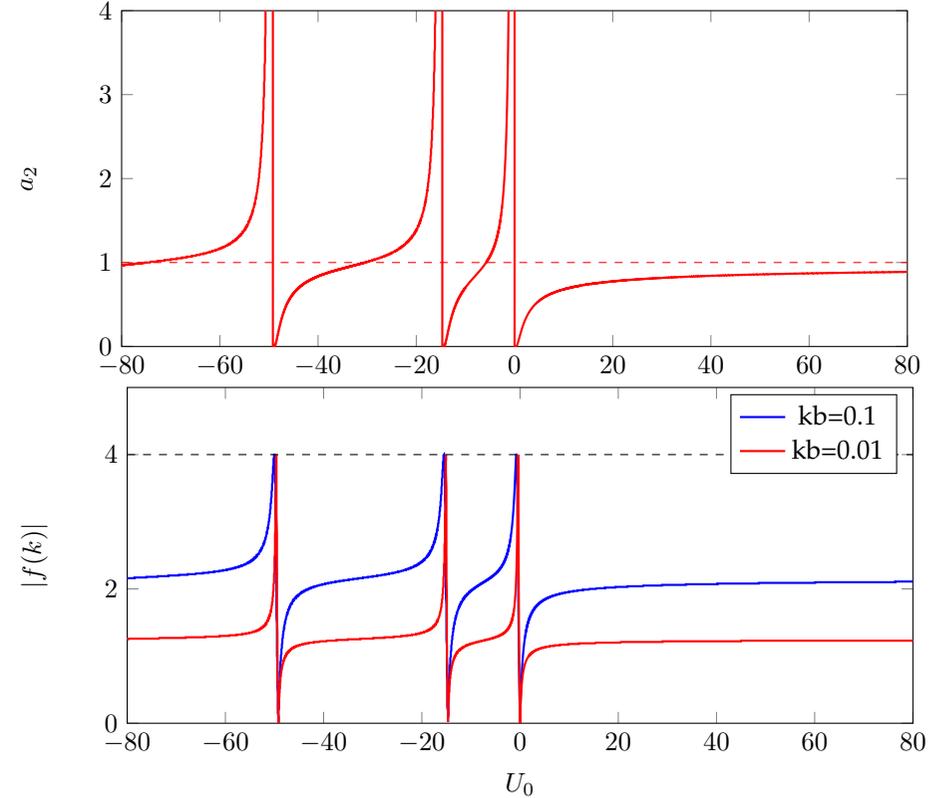
Il y a donc toujours un état lié dans un creux de potentiel à 2D, mais la liaison n'est que très faible puisque l'énergie décroît exponentiellement vite avec la profondeur du puits  $|U_0|$ . Rappelons qu'à 3D, un état lié n'existe dans un creux de potentiel qu'au dessus d'un certain seuil.

Quand on augmente la profondeur du puits, d'autres états liés apparaissent. Au seuil d'apparition d'un état lié, on a  $\kappa \approx 0$ , de sorte que le membre de droite  $\kappa K_0'/K_0$  de (132) tend vers 0 en ce point. L'apparition d'un nouvel état lié correspond donc à un zéro de  $J_0'(k_0 b)$ , ou encore de  $J_1(k_0 b)$  puisque  $J_1(x) = -J_0'(x)$ .

### Recherche des états de diffusion

Dans la zone centrale du puits, on garde la forme

$$r < b : \quad R(r) = C_0 J_0(k_1 r) \quad \text{avec} \quad k_1^2 = k_0^2 + \kappa^2 \quad (134)$$



**FIGURE 13.** Haut : variation de la longueur de diffusion  $a_2$  (en unité de  $b$ ) en fonction de la profondeur du puits  $U_0$  (en unité de  $\hbar^2/(2m_r b^2)$ ). Bas : module de l'amplitude de diffusion  $f(k)$  pour deux valeurs du vecteur d'onde,  $kb = 0.1$  et  $kb = 0.01$ . Cette amplitude est calculée directement à partir de (116) et (123) (ou de son équivalent quand la région centrale est classiquement permise). On vérifie numériquement que ce résultat est très proche de l'expression asymptotique (106).

et on prend dans la zone extérieure :

$$r > b : \quad R(r) = C_1 J_0(kr) + C_2 Y_0(kr). \quad (135)$$

Le raccord en  $r = b$  impose cette fois pour  $k \rightarrow 0$  :

$$\frac{C_1}{C_2} = -\frac{2}{\pi} \ln(\eta kb) + \frac{2}{\pi} \frac{1}{k_0 b} \frac{J_0(k_0 b)}{J'_0(k_0 b)} \quad (136)$$

soit (figure 13) :

$$a_2 = b \exp \left[ -\frac{1}{k_0 b} \frac{J_0(k_0 b)}{J'_0(k_0 b)} \right]. \quad (137)$$

La longueur de diffusion diverge donc à l'apparition de chaque nouvel état lié puisque  $J'_0(k_0 b)$  s'annule en ce point en changeant de signe (théorème de Levinson).

Pour un puits de faible profondeur ( $k_0 b \ll 1$ ), on trouve

$$a_2 = b e^{2/(k_0 b)^2} \quad (138)$$

ce qui correspond à une grande longueur de diffusion. En utilisant (133), on trouve que  $\eta a_2 \kappa = 1$ , de sorte que  $\hbar^2/(2m_r a_2^2)$  est égale (au facteur  $\eta^2$  près) à la valeur absolue de l'énergie (très faible) de cet état lié.

## Références

- ADHIKARI, Sadhan K. (1986), « Quantum scattering in two dimensions », in *American Journal of Physics* 54.4, p. 362–367.
- BAGNATO, V., D. E. PRITCHARD & D. KLEPPNER (1987), « Bose–Einstein condensation in an external potential », in *Phys. Rev. A* 35, p. 4354.
- BAGNATO, V. S. & D. KLEPPNER (1991), « Bose–Einstein condensation in low-dimensional traps », in *Phys. Rev. A* 44.11, p. 7439–7441.
- CASTIN, Y (2001), « Bose-Einstein condensates in atomic gases : simple theoretical results », in *Coherent atomic matter waves (Les Houches Summer School 1999)*, sous la dir. de Kaiser R., Westbrook C. & David F., EDP Sciences et Springer-Verlag.
- CHIOCCHETTA, Alessio, Andrea GAMBASSI & Iacopo CARUSOTTO (2015), « Laser operation and Bose-Einstein condensation : analogies and differences », in *arXiv :1503.02816*.

- DAMM, Tobias, Julian SCHMITT, Qi LIANG, David DUNG, Frank VEWINGER, Martin WEITZ & Jan KLAERS (2016), « Calorimetry of a Bose-Einstein-condensed photon gas », in *Nature communications* 7.
- GROOT G. J. Hooyman, C. A. ten Seldam S. R. de (1950), « On the Bose-Einstein Condensation », in *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 203.1073, p. 266–286.
- KETTERLE, W. & N. J. VANDRUTEN (1996), « Bose–Einstein condensation of a finite number of particles trapped in one or three dimensions », in *Phys. Rev. A* 54, p. 656–660.
- KLAERS, Jan, Julian SCHMITT, Frank VEWINGER & Martin WEITZ (2010), « Bose-Einstein condensation of photons in an optical microcavity », in *Nature* 468.7323, p. 545–548.
- KLAERS, Jan, Julian SCHMITT, T DAMM, F VEWINGER & M WEITZ (2011), « Bose–Einstein condensation of paraxial light », in *Applied Physics B : Lasers and Optics* 105.1, p. 17–33.
- MARELIC, Jakov & RA NYMAN (2015), « Experimental evidence for inhomogeneous pumping and energy-dependent effects in photon Bose-Einstein condensation », in *Physical Review A* 91.3, p. 033813.
- MARELIC, Jakov, Lydia F ZAJICZEK, Henry J HESTEN, Kon H LEUNG, Edward Y X ONG, Florian MINTERT & Robert A NYMAN (2016), « Spatiotemporal coherence of non-equilibrium multimode photon condensates », in *New Journal of Physics* 18.10, p. 103012.
- PETHICK, C.J. & H. SMITH (2008), *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases, Second Edition*, Cambridge University Press.
- PETROV, D. S. & G. V. SHLYAPNIKOV (2001), « Interatomic collisions in a tightly confined Bose gas », in *Phys. Rev. A* 64, p. 012706.
- PRICOUPENKO, Ludovic & Maxim OLSHANII (2007), « Stability of two-dimensional Bose gases in the resonant regime », in *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* 40.11, p. 2065.
- SCHMITT, Julian, Tobias DAMM, David DUNG, Frank VEWINGER, Jan KLAERS & Martin WEITZ (2014), « Observation of grand-canonical number statistics in a photon Bose-Einstein condensate », in *Physical review letters* 112.3, p. 030401.
- SCHMITT, Julian, Tobias DAMM, David DUNG, Christian WAHL, Frank VEWINGER, Jan KLAERS & Martin WEITZ (2016), « Spontaneous symmetry breaking and phase coherence of a photon Bose-Einstein condensate coupled to a reservoir », in *Physical review letters* 116.3, p. 033604.

WIGNER, E. (1932), « On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium », in *Phys. Rev.* 40 (5), p. 749–759.