Cohérence et superfluidité dans les gaz atomiques

Cours 5

Cohérence et modes collectifs dans un réseau

Jean Dalibard

Chaire Atomes et rayonnement

Année 2015-16



Conducteurs et isolants électriques

Remplissage d'un spectre de bande avec des fermions sans interaction



Conducteur: les électrons peuvent être transférés vers des états non occupés en ajoutant une énergie infiniment petite Isolant de bandes : chaque état des bandes peuplées est rempli par deux électrons $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$

Peut-on obtenir un isolant sans remplir complètement les bandes ?



Sir Nevil Mott 1905-1996

Un isolant reposant sur les interactions



Si le coût énergétique pour mettre deux électrons (dans des états de spin opposés) sur le même site est grand, le système apparaîtra comme gelé sur le plan de la conduction électrique

Note : une dynamique de spin peut toujours se produire, par exemple via des processus d'échange

Transposition à des superfluides bosoniques : Fisher et al., 1989 à des atomes dans des réseaux optiques : Jaksch et al., 1998

Le problème de Bose-Hubbard

Deux processus en compétition

- Le saut d'un site à l'autre caractérisé par le coefficient tunnel : J
- L'énergie à payer pour mettre deux atomes sur le même site : U

Pour un taux de remplissage $\bar{n} = \frac{N_{
m atomes}}{N_{
m sites}}$ entier et une description de type

« champ moyen » (ansatz de Gutzwiller), nous avons prédit une transition de phase entre un état superfluide et un état isolant



 $J \gg U$

 $\bar{n} = 1$



Un état cohérent en chaque site

Un état nombre en chaque site

L'approche de Gutzwiller

Ansatz variationnel : $|\Psi_G\rangle = |\text{site 1}: \Psi\rangle \otimes |\text{site 2}: \Psi\rangle \otimes \ldots \otimes |\text{site } N_s: \Psi\rangle$

et on choisit l'état sur site $|\Psi
angle$ pour minimiser l'énergie moyenne $\langle\Psi_G|\hat{H}|\Psi_G
angle$



z : nombre de proches voizins

Plan du cours

1. Caractérisation expérimentale de la cohérence

Les pics de Bragg : origine et visibilité

2. Le rôle du potentiel de piégeage

Incompressibilité des phases isolantes Structure en « pièce montée »

3. Le mode de Higgs et sa mise en évidence avec des atomes froids

Le potentiel en « chapeau mexicain » La symétrie particule -trou

Caractérisation expérimentale de la cohérence

Réseau optique 3D (+ potentiel harmonique) $V(\mathbf{r}) = V_0 \left(\sin^2 kx + \sin^2 ky + \sin^2 kz \right)$

- Branchement lent (80 ms) du réseau sur le gaz dans l'état condensé 65x65x65=3 10⁵ sites occupés Au centre, 2.5 atomes/site
- Coupure soudaine du réseau et du potentiel harmonique
 - Technique de temps de vol

$$E_{\rm r} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

« Pics de Bragg » qui disparaissent quand

$$V_0 \approx 12$$
 à 17 $E_{
m r}$
 $U/zJ \approx 4$ à 16

Réversible!



Greiner et al., Munich, Nature 2002

Pics de Bragg

On néglige les interactions durant le temps de vol : Mesure de la distribution en impulsion $\mathcal{N}(\mathbf{k}) = \langle \hat{\Phi}^{\dagger}(\mathbf{k}) \; \hat{\Phi}(\mathbf{k}) \rangle$

$$\hat{\Psi}(\boldsymbol{r}) = \sum_{\boldsymbol{j}} w_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{r}) \ \hat{b}_{\boldsymbol{j}} \qquad \longrightarrow \qquad \hat{\Phi}(\boldsymbol{k}) = \tilde{w}_{0}(\boldsymbol{k}) \ \sum_{\boldsymbol{j}} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}a} \ \hat{b}_{\boldsymbol{j}}$$
$$w_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{r}) = w_{0}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{j}a) \qquad \longrightarrow \qquad \hat{\Phi}(\boldsymbol{k}) = \tilde{w}_{0}(\boldsymbol{k}) \ \sum_{\boldsymbol{j}} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}a} \ \hat{b}_{\boldsymbol{j}}$$

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{k}) = |\tilde{w}_0(\boldsymbol{k})|^2 \sum_{\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}'} e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{j}-\boldsymbol{j}')a} \langle \hat{b}_{\boldsymbol{j}}^{\dagger} \, \hat{b}_{\boldsymbol{j}'} \rangle.$$

• Phase cohérente/superfluide $\langle \hat{b}^{\dagger}_{j} \, \hat{b}_{j'} \rangle \sim b_0^2 \neq 0$ for $|j - j'| \gg 1$

Interférence constructive de tous les sites dans des directions spécifiques

• Phase isolante : $\langle \hat{b}^{\dagger}_{j} \, \hat{b}_{j'}
angle \sim b_0^2 \, \mathrm{e}^{-|j-j'|a/\ell}$ (Gutzwiller: $=0 \, \mathrm{if} \, j
eq j'$)

Brouillage des pics d'interférence



Visibilité des pics de Bragg



Avantage: annule pratiquement la contribution de la fonction de Wannier et ne conserve que le signal d'interférence

Transition attendue pour $\bar{n} = 1$ (Gutzwiller) : $U/zJ \approx 6$ Calculs Monte Carlo à 3D : $U/zJ \approx 4.9$

Rôle des effets thermiques

On mesure *T* avant de brancher le réseau, et on suppose ce branchement adiabatique



Trotzky, Pollet, et al., Nat. Phys. 2010

Plan du cours

1. Caractérisation expérimentale de la cohérence

Les pics de Bragg : origine et visibilité

2. Le rôle du potentiel de piégeage

Incompressibilité des phases isolantes Structure en « pièce montée »

3. Le mode de Higgs et sa mise en évidence avec des atomes froids

Le potentiel en « chapeau mexicain » La symétrie particule -trou

Thermodynamique et incompressibilité

Notre étude a été menée jusqu'ici en prenant \bar{n} comme variable thermodynamique

Point de vue « micro-canonique ». Qu'en est-il du potentiel chimique, qui est la variable naturelle du point de vue grand-canonique ?



Thermodynamique et incompressibilité

Notre étude a été menée jusqu'ici en prenant \bar{n} comme variable thermodynamique

Point de vue « micro-canonique ». Qu'en est-il du potentiel chimique, qui est la variable naturelle du point de vue grand-canonique ?



$$\begin{split} \Delta \mu &= \mu_+ - \mu_- \neq 0 \ : \text{mesure le coût de la création d'une paire particule-trou} \\ \text{Incompressibilité:} \quad \kappa \equiv \left. \frac{\partial \bar{n}}{\partial \mu} \right|_{\mu \in [\mu_-, \mu_+]} = 0. \end{split}$$

Cette propriété reste vrai au delà de l'approximation de champ moyen

Au dela de l'approche de Gutzwiller

Simulation Monte-Carlo quantique à 1D, Batrouni et al, PRL 1990



Le rôle du potentiel harmonique additionnel



Cadre théorique adapté : le formalisme grand-canonique

Au lieu de fixer \bar{n} pour minimiser $\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle$, on se donne le potentiel chimique μ et on minimise l'énergie libre moyenne $\langle \Psi | \hat{F} | \Psi \rangle$ avec

$$\hat{F} = \hat{H} - \mu \hat{N}$$

- Pour un système uniforme, prédictions identiques pour les deux ensembles
- Permet de prendre en compte le caractère non uniforme du fluide via l'approximation de densité locale (LDA) : $\mu \to \mu V_{\rm trap}(x)$

L'approximation de densité locale





- Equation d'état du fluide homogène connue : n_{homog} , E_{homog} fonctions de μ , T
- Echelles de longueur caractéristiques du gaz homogène (longueur de cicatrisation, longueur d'onde thermique, pas du réseau) petites devant la taille du gaz piégé

L'état du fluide au point r est semblable à l'état trouvé pour le fluide homogène pour la même température et pour le potentiel chimique local :

$$\mu(\boldsymbol{r}) = \mu_0 - V_{\text{trap}}(\boldsymbol{r}) \qquad n(\boldsymbol{r}, T) = n_{\text{homog}}[\mu_0 - V_{\text{trap}}(\boldsymbol{r}), T]$$

Les fluctuations du nombre d'occupation d'un site (encore)

On revient à l'ansatz de Gutzwiller, avec cette fois-ci μ comme variable de contrôle :



Les états incompressibles correspondent à des plateaux quand le potentiel chimique varie

 $\mu \rightarrow \mu - V_{ ext{trap}}(x)$: région incompressible si x est tel que $\mu_- < \mu - V_{ ext{trap}}(x) < \mu_+$

Grand avantage des systèmes non uniformes quand la LDA est valable !

La structure en pièce montée

Densité in situ calculée en utilisant la LDA



 $\mu(x) = \mu_{\text{centre}} - V_{\text{trap}}(x)$



Niemeyer & Monien, cités par Greiner

Plateaux observés à Munich et au MIT (2006)

Les études à base de « microscope atomique »

Depuis 2009, plusieurs groupes ont développé des systèmes d'imagerie à atome unique pour des atomes piégés aux nœuds d'un réseau optique (cf. cours 2014-15)



On détecte en fait la parité du nombre d'atomes sur site ; au cours du processus de détection, les pertes assistées par la lumière créent des pertes d'atomes par paires.

Harvard, Munich, Tokyo, Glasgow, MIT

Plan du cours

1. Caractérisation expérimentale de la cohérence

Les pics de Bragg : origine et visibilité

2. Le rôle du potentiel de piégeage

Incompressibilité des phases isolantes Structure en « pièce montée »

3. Le mode de Higgs et sa mise en évidence avec des atomes froids

Le potentiel en « chapeau mexicain » La symétrie particule -trou

Retour sur la transition dans l'approche « champ moyen »



Traitement analytique approché, avec l'état sur un site donné paramétré comme

$$|\Psi\rangle \approx c_0|0\rangle + c_1|1\rangle + c_2|2\rangle \qquad \qquad \begin{pmatrix} c_2\\c_1\\c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i(\eta+\varphi)} \sin\theta \sin\chi\\ \cos\theta\\ e^{i(\eta-\varphi)} \sin\theta \cos\chi \end{pmatrix}$$

/ \

- Quel paramètre d'ordre au voisinage du point de transition ? ۲
- Quels sont les modes collectifs autour du point d'équilibre ?

Le paramètre d'ordre (cas simplifié)

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} c_2\\c_1\\c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i(\eta+\varphi)} \sin\theta \sin\chi\\\cos\theta\\ e^{i(\eta-\varphi)} \sin\theta \cos\chi \end{pmatrix} \qquad \rho = \sin\theta \cos\theta$$

• Remplissage entier en chaque site : $\bar{n} = 1$

$$\Rightarrow$$
 $|c_0| = |c_2|$ \Rightarrow $\sin \chi = \cos \chi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

• Energie minimale pour le choix de phase $\eta = 0$

Paramètre d'ordre : valeur moyenne de l'opérateur champ sur chaque site $\langle \Psi | \hat{b} | \Psi \rangle$, où \hat{b} détruit une particule sur le site $\langle \Psi | \hat{b} | \Psi \rangle$ est proportionnel à $\psi = \frac{1}{2} \sin(2\theta) e^{i\varphi} = \rho e^{i\varphi}$

Energie et paramètre d'ordre

$$\psi = \frac{1}{2}\sin(2\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

cf. calcul du cours précédent : $\epsilon(\rho) \approx \frac{U}{2}\rho^4 - A\rho^2$ (à une constante additive près)

$$\psi = \rho e^{i\varphi} \quad \Rightarrow \quad \epsilon(\psi) \approx \frac{U}{2} |\psi|^4 - A |\psi|^2$$



Modes collectifs du système (cas simplifié)



On garde un ansatz factorisé de type Gutzwiller, mais l'état varie d'un site à l'autre

$$|\Psi_G\rangle = |\text{site 1}: \Psi_1\rangle \otimes |\text{site 2}: \Psi_2\rangle \otimes \ldots \otimes |\text{site } j: \Psi_j\rangle \otimes \ldots$$

Propagation possible de fluctuations de phase, de densité, de paramètre d'ordre,... $\psi_j=
ho_j\,{
m e}^{{
m i}arphi_j}$

$$E(\psi) = \int \mathcal{H}[\psi(\mathbf{r})] \,\mathrm{d}^3 r \qquad \qquad \mathcal{H}(\psi) = \frac{U}{2} |\psi|^4 - A|\psi|^2 + B|\nabla\psi|^2$$



En fait, la question est ambiguë : tout dépend de la partie dynamique du lagrangien

$$\mathcal{L}(\psi) = \mathcal{L}_{dyn}(\psi) - \mathcal{H}(\psi)$$

Cas « non relativiste » :
$$\mathcal{L}_{
m dyn}(\psi) = rac{{
m i}\hbar}{2} \left(\psi^*\dot\psi - \psi\;\dot\psi^*
ight)$$
 ou $\mathcal{L}_{
m dyn}(\psi) = {
m i}\hbar\psi^*\dot\psi$

Cas « relativiste » : $\mathcal{L}_{dyn}(\psi) = \frac{B}{c^2} \dot{\psi}^* \dot{\psi}$

Quelle dynamique pour une énergie en « chapeau mexicain » (suite) ?

On linéarise au voisinage du minimum en terme de fluctuations d'amplitude et de phase :

$$\psi = \psi_0 + \delta_a + \mathrm{i}\delta_p$$

 ψ_0 : réel positif



Expression approchée de la densité d'énergie :

$$\mathcal{H}(\delta_a, \delta_p) = \epsilon_{\min} + 2A \,\delta_a^2 + B(\nabla \delta_a)^2 + B(\nabla \delta_p)^2$$

Partie dynamique de la densité de lagrangien :

Cas « non relativiste » :
$$\mathcal{L}_{dyn}(\delta_a, \delta_p) = \hbar \left(\dot{\delta}_a \, \delta_p - \delta_a \, \dot{\delta}_p \right)$$

Cas « relativiste » : $\mathcal{L}_{dyn}(\delta_a, \delta_p) = \frac{B}{c^2} \left(\dot{\delta}_a^2 + \dot{\delta}_p^2 \right)$

Le cas « relativiste »

Equations de Lagrange pour les fluctuations de phase et d'amplitude :

$$\psi = \psi_0 + \delta_a + i\delta_p \qquad \begin{cases} (B/c^2) \ \ddot{\delta}_p = B \ \nabla^2 \delta_p \\ (B/c^2) \ \ddot{\delta}_a = -2A \ \delta_a + B \ \nabla^2 \delta_a \end{cases}$$

onduit aux relations de dispersion
$$\begin{cases} \omega^2 = c^2 k^2 \\ \omega^2 = \omega_0^2 + c^2 k^2 \end{cases} \qquad \omega_0 = c\sqrt{2A/B}$$

ce qui co

des
$$\omega = ck$$
 sont de type photon ou phonon, et sont une conséquence

- Les mo du théorème de Goldstone : $\omega \to 0$ si $k \to 0$
- Les modes $\omega = (\omega_0^2 + c^2 k^2)^{1/2}$ sont appelés « modes de Higgs » ou • « modes d'amplitude », avec $\omega \to \omega_0$ si $k \to 0$

Remarque : le mécanisme de Higgs en physique des particules nécessite en plus un champ de jauge qui est absent ici.

Le cas non relativiste

Equations de Lagrange pour les fluctuations de phase et d'amplitude :

$$\psi = \psi_0 + \delta_a + \mathrm{i}\delta_p \qquad \begin{cases} \hbar \dot{\delta}_a = B \, \nabla^2 \delta_p \\ \hbar \dot{\delta}_p = -2A \, \delta_a + B \, \nabla^2 \delta_a \end{cases}$$

Les deux perturbations sont couplées et on obtient leurs amplitudes via un système 2 x 2, dont le déterminant donne une seule relation de dispersion :

$$(\hbar\omega)^2 = Bk^2 (2A + Bk^2)$$
 Relation de type Bogoliubov

Ce cas « non relativiste » correspond précisément à la description que nous avons faite pour un superfluide uniforme en l'absence de réseau

Uniquement un mode de type Goldstone : $\omega \to 0$ si $k \to 0$

L'ingrédient essentiel du lagrangien relativiste

$$\mathcal{L}(\psi) = \mathcal{L}_{\rm dyn}(\psi) - \mathcal{H}(\psi) \qquad \qquad \mathcal{L}_{\rm dyn}(\psi) = \frac{B}{c^2} \dot{\psi}^* \dot{\psi}$$

Rôle symétrique de ψ et ψ^* : symétrie particule-trou

Pourquoi un réseau optique est-il adapté à faire émerger cette symétrie ?



Oscillation de l'amplitude du paramètre d'ordre $\rho = \frac{1}{2} \sin 2\theta$:

 $c_1 \nearrow$ alors que $c_0, c_2 \searrow$ et vice versa (avec \bar{n} qui reste constant)

Le traitement détaillé du réseau optique

On revient à la paramétrisation générale où les quatre variables $\theta, \chi, \eta, \varphi$ dépendent du temps et de l'espace (avec un passage à la limite continue) :

$$|\Psi_{j}\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} e^{i(\eta+\varphi)} \sin \theta \sin \chi \\ \cos \theta \\ e^{i(\eta-\varphi)} \sin \theta \cos \chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho = \frac{1}{2} \sin 2\theta \\ \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{pmatrix}^{2} \\ \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi^{*}}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ \psi = \rho e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$
Polkovnikov et al., 2005

Densité de lagrangien quand on est au voisinage du remplissage entier

$$\sigma = 2\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) \ll 1$$

$$\mathcal{L}_{\rm dyn} \equiv \frac{\mathrm{i}\hbar}{2} \left(\langle \Psi_j | \dot{\Psi}_j \rangle - \langle \dot{\Psi}_j | \Psi_j \rangle \right) \longrightarrow \mathcal{L}_{\rm dyn} = -\dot{\eta}\rho^2 + \dot{\varphi}\rho^2 \sigma$$

Le principe de l'élimination des variables η ou χ

On considère un lagrangien modèle à deux variables

$$\mathcal{L}(\rho, \dot{\rho}, \eta, \dot{\eta}) = -\dot{\eta}\rho^2 - \epsilon(\rho, \eta)$$

$$\epsilon(\rho, \eta) = \underbrace{\eta^2 \rho^2}_{\text{minimum}} + V_{\text{mex}}(\rho)$$

$$\underbrace{\epsilon(\rho, \eta) = \underbrace{\eta^2 \rho^2}_{\text{minimum}} + V_{\text{mex}}(\rho)$$

$$en \eta = 0$$

Equations de Lagrange

$$\eta: \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \qquad \Rightarrow \quad \dot{\rho} = \eta \rho$$
$$\rho: \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \qquad \Rightarrow \quad 0 = -2\rho(\dot{\eta} + \eta^2) - \frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{mex}}}{\mathrm{d}\rho}$$

Une substitution simple conduit alors à l'équation du mouvement pour ρ

$$2\ddot{\rho} = -\frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{mex}}}{\mathrm{d}\rho}$$

qui correspond au lagrangien à une variable : $\mathcal{L}(\rho, \dot{\rho}) = \dot{\rho}^2 - V_{\text{mex}}(\rho)$

Les points importants pour l'observation du mode de Higgs

Avoir un remplissage entier (ou presque)



Symétrie particule-trou qui garantit que le lagrangien dynamique est essentiellement

 $\mathcal{L}_{
m dyn}(\psi) \propto ~ \dot{\psi}^* ~ \dot{\psi}$ et pas $\mathcal{L}_{
m dyn}(\psi) = {
m i} \hbar ~ \psi^* \dot{\psi}$

Etre proche du point critique pour que les linéarisations des équations du mouvement soient valables.

La fréquence du mode de Higgs donne la distance au point critique :

$$\omega_0 = c\sqrt{2A/B}$$
 avec $A = 0$ à la transition $\mathcal{H}(\psi) = \frac{U}{2}|\psi|^4 - A|\psi|^2 + B|\nabla\psi|^2$

S'assurer que le mode est stable : il pourrait en principe se désexciter en deux modes de Goldstone (pas significatif pour les réseaux optiques)

Principe de l'observation avec des atomes froids

Note : mode d'amplitude dans des supraconducteurs (1980)

Atomes dans des réseaux optiques : Hambourg (2011), Munich (2012)

Munich :

• Modulation de l'intensité des faisceaux créant le réseau

Technique (initiée par le groupe de Zurich) qui revient à moduler le terme tunnel de manière uniforme

Excitation de modes de très bas vecteur d'onde

• Mesure de l'échauffement du gaz pour une fréquence et une durée d'excitation données

L'expérience de Munich



Côté superfluide : on observe le mode de Higgs $\omega = (\omega_0^2 + c^2 k^2)^{1/2}$ pour des vecteurs d'onde $k \approx 0$

Côté isolant de Mott : on observe un mode de fréquence non nulle correspondant à l'incompressibilité du système

Pour conclure...

L'isolant de Mott pour le controle cohérent de particules



Un laser focalisé permet de modifier la fréquence de résonance des atomes de manière sélective. Une micro-onde résonante uniquement avec les atomes dont la fréquence a été modifiée, permet de contrôler individuellement les états de spins.

Le développement de protocoles d'information quantique

Systèmes à N corps préparés avec une entropie très basse

Exemple (cf. séminaire de Peter Zoller): Mesure de l'entropie d'intrication entre deux sous-systèmes A et B





La simulation quantique à base d'atomes froids

Vers une modélisation de la supraconductivité à haute T_c ?





Phase supraconductrice ?