

Chapitre 5

La transition BKT explorée avec des gaz d'atomes ou de polaritons

Sommaire

1	Lois d'échelle au point critique	2
1-1	Thermodynamique du champ classique	2
1-2	Densité totale et densité superfluide	3
1-3	Caractérisation du point critique	4
2	Le point critique d'un gaz atomique piégé	5
2-1	L'approximation de densité locale	5
2-2	Faibles densités et approche de Hartree–Fock	6
2-3	Le point critique dans un piège harmonique	7
2-4	Le cas d'un potentiel désordonné	9
3	Le quasi-ordre en phase dans un gaz atomique	9
3-1	La fonction G_1 dans un piège	9
3-2	Fluctuations de phase et interférométrie atomique	10
3-3	La distribution en impulsion d'un gaz piégé	11
3-4	Mouvement d'une impureté et modes collectifs	13
4	Les polaritons de cavité	15
4-1	L'hybridation lumière–matière	15
4-2	La relation de dispersion des polaritons de cavité	16
4-3	Quasi-condensat de polaritons	17
4-4	Expériences montrant un quasi-ordre en phase	18
4-5	Polaritons autour d'un obstacle	20

Aux chapitres précédents, nous avons montré l'existence d'une transition superfluide dans un gaz de Bose 2D. Le régime superfluide obtenu à basse température est caractérisé par un quasi-ordre à longue portée : la fonction $G_1(r)$ décroît algébriquement avec r ; à haute température, le régime normal correspond à une décroissance exponentielle de G_1 . Nous avons également établi qu'au point de transition, la densité dans l'espace des phases \mathcal{D}_s associée à la fraction superfluide saute de la valeur 4 à la valeur 0.

Le but de ce chapitre est de montrer comment les gaz dilués formés d'atomes ou de particules composites matière–lumière permettent de tester ces différentes propriétés. Nous commençons par revenir sur le formalisme de champ classique pour déterminer la position du point de transition en termes des variables thermodynamiques "usuelles", densité totale, température, potentiel chimique. Nous décrivons ensuite une série d'expériences récentes menées sur des gaz d'atomes bosoniques ou fermioniques (mais pouvant former des molécules diatomiques qui seront donc des bosons) et qui ont permis de tester à la fois la position du point critique et les propriétés du gaz de part et d'autre de ce point. Nous terminons par la description de quelques expériences de même nature menées sur les polaritons de cavité.

Notons que nous nous limiterons dans ce chapitre au cas d'un plan unique ou de plans indépendants. Nous n'aborderons donc pas la question

(pourtant intéressante!) de la transition entre la situation 2D et la situation 3D, obtenue par exemple quand on introduit un couplage entre des plans parallèles entre eux (CAZALILLA, IUCCI et al. 2007).

1 Lois d'échelle au point critique

La relation $\rho_s \lambda_T^2 = 4$ reliant la densité superfluide et la température de transition est universelle, dans la mesure où elle ne dépend pas de la force des interactions, caractérisée par le paramètre \tilde{g} introduit au chapitre précédent. Néanmoins cette relation est incomplète car elle ne donne pas la relation entre la densité totale ρ et la température critique. Il s'agit d'une relation implicite où ρ_s dépend elle-même de la température et elle doit donc être écrite

$$\rho_s(T_c) \lambda_{T_c}^2 = 4 \quad \text{avec} \quad \lambda_T^2 = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}. \quad (1)$$

Pour déterminer la densité totale au point critique, il faut revenir au modèle microscopique qui régit la dynamique de notre gaz en interaction, comme cela a été fait initialement par FISHER & HOHENBERG (1988). Nous décrivons ici l'approche développée par PROKOF'EV, RUEBENACKER et al. (2001) et PROKOF'EV & SVISTUNOV 2002, qui est basée sur la modélisation du gaz par un champ classique $\psi(\mathbf{r})$.

1-1 Thermodynamique du champ classique

Nous avons déterminé au chapitre 3 la fonctionnelle d'énergie associée au champ ψ décrivant le fluide à N particules :

$$E[\psi] = \frac{\hbar^2}{2m} \int [|\nabla\psi|^2 + \tilde{g}|\psi(\mathbf{r})|^4] d^2r, \quad N = \int |\psi(\mathbf{r})|^2 d^2r, \quad (2)$$

l'intégrale spatiale étant prise sur une surface $L \times L$. Nous avons montré que les excitations pouvaient se décrire à l'approximation de Bogoliubov par des ondes planes de vecteur d'onde \mathbf{q} et de pulsation ω_q :

$$\omega_q = \frac{\hbar}{2m} [q^2 (q^2 + 4\tilde{g}\rho)]^{1/2} \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{N}{L^2}. \quad (3)$$

L'énergie totale du gaz s'écrit alors comme la somme de l'énergie d'interaction du gaz au repos E_0 et des énergies ϵ_q associées aux différents modes de Bogoliubov :

$$E \approx E_0 + E_{\text{Bog}} \quad \text{avec} \quad E_0 = \frac{\hbar^2}{2mL^2} \tilde{g}N^2, \quad E_{\text{Bog}} = \sum_q \epsilon_q. \quad (4)$$

Coupure ultraviolette. Rappelons que cette approche champ classique nécessite la mise en place d'une coupure ultra-violette pour éviter les divergences de type corps noir. Cette divergence peut être mise à $\hbar\omega_{q,\text{max}} \sim k_B T$, puisque c'est au niveau de $\hbar\omega \sim k_B T$ que l'approche correcte (champ quantique) vient limiter la contribution des modes par le facteur $e^{-\hbar\omega/k_B T}$ (cf. chapitre 3, §1-2). Dans ce qui suit, nous nous intéresserons à un domaine de température tel que $k_B T \gg \frac{\hbar^2}{m} \tilde{g}\rho$. Cela entraîne que la coupure se situe dans la zone où la relation de Bogoliubov correspond au régime de particule libre¹, $\omega_q \approx \hbar q^2/(2m)$:

$$\frac{\hbar^2 q_{\text{max}}^2}{2m} \equiv \zeta k_B T. \quad (5)$$

où le nombre sans dimension ζ est d'ordre 1, sans qu'on puisse lui assigner une valeur plus précise. À chaque fois que ζ interviendra ci-dessous (ce sera à l'intérieur d'un logarithme), il faudra tenir compte de cette imprecision inévitable de notre approche "champ classique".

Énergie libre et potentiel chimique. Nous cherchons à relier entre elles différentes variables thermodynamiques, densité, température, potentiel chimique, pour déterminer la position du point critique en fonction de ces variables. Nous adoptons pour l'instant le point de vue de l'ensemble canonique, en travaillant à température et nombre de particule fixés. Le potentiel chimique μ se déduit alors de l'énergie libre $F(T, N, L^2)$:

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T, L^2}, \quad (6)$$

1. Cette hypothèse correspond à la plupart des régimes expérimentaux étudiés jusqu'à maintenant, mais il ne serait pas difficile de se placer dans le régime opposé d'une coupure située dans la plage du régime de phonons $\omega_q \approx c_0 q$.

l'énergie libre étant elle-même déduite de la fonction de partition \mathcal{Z} :

$$F = -k_B T \ln \mathcal{Z}. \quad (7)$$

Puisque nous avons décrit (de manière approchée) la dynamique du gaz comme celle d'une somme d'oscillateurs indépendants formés par les modes de Bogoliubov, commençons par rappeler la fonction de partition et l'énergie libre d'un oscillateur de pulsation ω et d'énergie $\epsilon(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Du fait de l'approximation de champ classique, valable si $\hbar\omega \ll k_B T$, on peut se limiter ici à l'expression classique² de cette fonction de partition :

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{-\epsilon(x,p)/k_B T} dx dp = \frac{k_B T}{\hbar\omega}. \quad (8)$$

dont on déduit l'énergie libre :

$$F = -k_B T \ln \mathcal{Z} = -k_B T \ln \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right). \quad (9)$$

Comme les modes de Bogoliubov sont indépendants, la fonction de partition s'écrit comme le produit des fonctions de partition associées à chaque mode, et l'énergie libre est obtenue en prenant la somme de ces différentes contributions :

$$F(T, N, L) = E_0 - k_B T \sum_q \ln \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega_q} \right). \quad (10)$$

Pour obtenir le potentiel chimique, prenons la dérivée de cette fonction par rapport à N à température T et surface L^2 constantes. Pour cela, on utilise en particulier

$$\left. \frac{\partial E_0}{\partial N} \right|_{T, L^2} = \frac{\hbar^2}{mL^2} \tilde{g} N \quad \left. \frac{\partial \ln(\omega_q)}{\partial N} \right|_{T, L^2} = \frac{2\tilde{g}}{L^2} \frac{1}{q^2 + 4\tilde{g}\rho} \quad (11)$$

puis en remplaçant la somme sur q par une intégrale, on arrive à

$$\begin{aligned} \mu &\approx \frac{\hbar^2}{m} \tilde{g}\rho + \frac{k_B T}{2\pi} \tilde{g} \int_0^{q_{\max}} \frac{2q}{q^2 + 4\tilde{g}\rho} dq \\ &\approx \frac{\hbar^2}{m} \tilde{g}\rho + \frac{k_B T}{2\pi} \tilde{g} \ln \left(\zeta \frac{k_B T}{2\hbar^2 \tilde{g}\rho/m} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

2. On peut bien sûr prendre la version quantique de ce calcul, $\mathcal{Z} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\epsilon_n/k_B T}$ avec $\epsilon_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$, qui redonne le résultat (8) dans la limite $\hbar\omega \ll k_B T$.

où nous avons donc exprimé le potentiel chimique μ en fonction de la densité ρ .

Cette relation peut également s'écrire en terme de la densité dans l'espace des phases $\mathcal{D} = \rho\lambda_T^2$:

$$\frac{\mu}{k_B T} \approx \frac{\tilde{g}}{2\pi} \left[\mathcal{D} + \ln \left(\zeta \frac{\pi}{\tilde{g}\mathcal{D}} \right) \right] \quad \text{avec } \zeta \sim 1. \quad (13)$$

Les relations (12) ou (13) constituent une *équation d'état* du gaz en interaction, équation qui relie ici la variable thermodynamique μ aux deux autres variables intensives T et ρ .

Remarquons que la validité de l'approximation de Bogoliubov n'est assurée que si le deuxième terme de cette expression est plus petit que le premier. Nous avons en effet trouvé au chapitre 3 que les fluctuations relatives de densité avaient pour expression

$$\frac{\Delta\rho^2}{\rho^2} \approx \frac{2}{\mathcal{D}} \ln \left(\zeta \frac{2\pi}{\tilde{g}\mathcal{D}} \right), \quad (14)$$

ce qui correspond, à un facteur numérique près, au rapport entre les deux termes de (12). Or, il faut que $\Delta\rho \ll \rho$ pour que le développement à la base de la méthode de Bogoliubov soit justifié.

1-2 Densité totale et densité superfluide

On peut inverser la relation (13) pour exprimer la densité en fonction du potentiel chimique, ce qui correspond au choix de variables du point de vue grand-canonique. Cette inversion se fait simplement dans la mesure où le deuxième terme de (13) est petit devant le premier :

$$\mathcal{D} \approx \frac{2\pi}{\tilde{g}} \frac{\mu}{k_B T} - \ln \left(\zeta \frac{k_B T}{2\mu} \right). \quad (15)$$

Nous avons vu au chapitre précédent que le point de transition BKT est repéré par la valeur qu'y prend la densité superfluide. Pour progresser, nous devons donc évaluer cette densité superfluide en fonction des paramètres du modèle de champ classique. Cela peut se faire en première approximation en utilisant la formule de Landau (PITAEVSKII & STRINGARI

2016), adaptée au cas bi-dimensionnel :

$$\rho_s = \rho + \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\hbar^2}{2m} \int \frac{d\mathcal{N}}{d\epsilon} q^2 d^2q, \quad (16)$$

où $\mathcal{N}(\epsilon)$ est le nombre d'occupation d'un mode d'excitation ϵ . Nous considérons ici les modes de Bogoliubov comme un champ classique à l'équilibre thermodynamique et de potentiel chimique nul :

$$\mathcal{N}(\epsilon) = \frac{k_B T}{\epsilon} \quad \rightarrow \quad \frac{d\mathcal{N}}{d\epsilon} = -\frac{k_B T}{\epsilon^2} = -\frac{k_B T}{(\hbar\omega_q)^2} \quad (17)$$

L'intégrale sur les modes q donne alors

$$\mathcal{D}_s \approx \mathcal{D} - \ln \left(\zeta \frac{k_B T}{2\mu} \right). \quad (18)$$

1-3 Caractérisation du point critique

Supposons qu'il soit légitime d'étendre les résultats (15-18) jusqu'au point critique où $\mathcal{D}_s = 4$. On arrive alors à l'équation reliant le paramètre d'interaction \tilde{g} au potentiel chimique et à la température :

$$\text{point critique :} \quad \mathcal{D} - \ln \left(\zeta \frac{k_B T}{2\mu} \right) \approx 4, \quad (19)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \text{point critique :} \quad \frac{\mu}{k_B T} &\approx \frac{\tilde{g}}{\pi} \left[\ln \left(\zeta \frac{k_B T}{2\mu} \right) + 2 \right] \\ &\approx \frac{\tilde{g}}{\pi} \ln \left(\zeta' \frac{k_B T}{\mu} \right), \end{aligned} \quad (20)$$

où nous avons introduit une constante sans dimension d'ordre unité, $\zeta' = \zeta e^2/2$. Comme nous l'avons fait ci-dessus, nous pouvons inverser³ cette

3. Cette inversion se fait de manière rigoureuse en passant par la fonction de Lambert, $w = W(z)$, où w est solution de l'équation $z = we^w$, avec ici $z = \zeta' \pi / \tilde{g}$ et $w = \ln(\zeta' k_B T / \mu)$. Le développement asymptotique aux grands z :

$$W(z) \sim \ln(z) - \ln[\ln(z)] + \frac{\ln[\ln(z)]}{\ln(z)} + \dots \quad (21)$$

conduit alors (22).

relation en remplaçant l'argument du logarithme $k_B T / 2\mu$ par $\pi / 4\tilde{g}$, ce qui conduit à la loi d'échelle au point critique

$$\frac{\mu}{k_B T} \Big|_{\text{crit.}} \approx \frac{\tilde{g}}{\pi} \ln \left(\frac{C_\mu}{\tilde{g}} \right). \quad (22)$$

avec $C_\mu = \pi \zeta'$.

Nous avons donc obtenu la loi d'échelle pour la valeur du paramètre $\mu/k_B T$ au point critique en fonction de la force des interactions. Notons que la valeur précise de la constante C_μ n'est pas accessible dans le cadre de notre modèle, car la précision de la coupure ultra-violette que nous avons mise à la main via le paramètre ζ n'est pas suffisante pour déterminer la valeur correcte de C_μ (*i.e.* à mieux qu'un facteur 2 ou 3 près).

On peut ensuite injecter ce résultat dans l'expression (15) de la densité dans l'espace des phases. En utilisant (15), on trouve

$$\begin{aligned} \text{point critique :} \quad \mathcal{D} &\approx 2 \ln \left(\frac{C_\mu}{\tilde{g}} \right) - \ln \left(\zeta \frac{k_B T}{2\mu} \right) \\ &\approx 2 \ln \left(\frac{C_\mu}{\tilde{g}} \right) - \ln \left(\frac{\pi}{2\tilde{g}} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

où l'on a négligé un terme en $\ln[\ln(\tilde{g})]$. On obtient finalement :

$$\mathcal{D}|_{\text{crit.}} \approx \ln \left(\frac{C_{\mathcal{D}}}{\tilde{g}} \right), \quad (24)$$

où $C_{\mathcal{D}} = 2C_\mu^2/\pi$ est une autre constante numérique. Cette loi d'échelle était absente du résultat du cours précédent, qui ne portait que sur la valeur de \mathcal{D}_s . Comme pour C_μ , l'imprécision amenée par notre coupure ultra-violette est telle que nous ne pouvons pas faire mieux qu'évaluer l'ordre de grandeur de cette constante (de l'ordre d'une ou quelques centaines).

Pour déterminer la valeur de ces constantes C_μ et $C_{\mathcal{D}}$, PROKOF'EV, RUEBENACKER et al. (2001) ont mené des simulations de champ classique qu'ils ont raccordées de manière précise au résultat quantique asymptotique pour une particule libre aux grands ω . Cela leur a permis de caractériser précisément la position du point critique pour une force d'interaction

\tilde{g} donnée :

$$\mathcal{D}|_{\text{crit.}} \approx \ln\left(\frac{380}{\tilde{g}}\right) \quad (25)$$

$$\frac{\mu}{k_{\text{B}}T}\Big|_{\text{crit.}} \approx \frac{\tilde{g}}{\pi} \ln\left(\frac{13.2}{\tilde{g}}\right) \quad (26)$$

Le domaine de validité de cette approche de champ classique est limité au cas de faible interaction $\tilde{g} \ll 1$. Une borne supérieure sur les valeurs de \tilde{g} est obtenue en comparant la densité dans l'espace des phases totale donnée en (25) à la densité superfluide au point critique, $\mathcal{D}_s = 4$. Comme il faut bien évidemment que $\mathcal{D} > \mathcal{D}_s$, ceci impose $\tilde{g} < 7$. On retrouve ici la critère d'interactions fortes $\tilde{g} \gtrsim 2\pi$ donné précédemment. Pour les expériences d'atomes froids ou de polaritons usuelles, \tilde{g} varie entre 0.01 et 1, de sorte que la densité dans l'espace des phases au point critique varie entre 10.5 et 6. La densité superfluide $\mathcal{D}_s = 4$ représente donc entre 40 % et 70 % de la densité totale en ce point.

Le résultat de PROKOF'EV, RUEBENACKER et al. (2001) obtenu à partir de simulations de champs classiques a ensuite été confirmé (pour \tilde{g} suffisamment petit) par des approches Monte Carlo quantique et par la méthode du groupe de renormalisation non perturbatif (PILATI, GIORGINI et al. 2008; HOLZMANN & KRAUTH 2008; RANÇON & DUPUIS 2012).

2 Le point critique d'un gaz atomique piégé

Jusqu'ici, notre analyse de la transition BKT a été menée pour un gaz homogène et infini. Or la plupart des expériences sur les gaz atomiques sont menées dans des pièges harmoniques. Le but de ce paragraphe est d'étudier la connexion entre les deux problèmes, en utilisant l'*approximation de densité locale*. Nous pourrions ainsi faire le lien entre la condensation de Bose–Einstein trouvée au chapitre 2 pour un gaz parfait confiné dans un potentiel harmonique et la transition BKT obtenue pour un gaz réel.

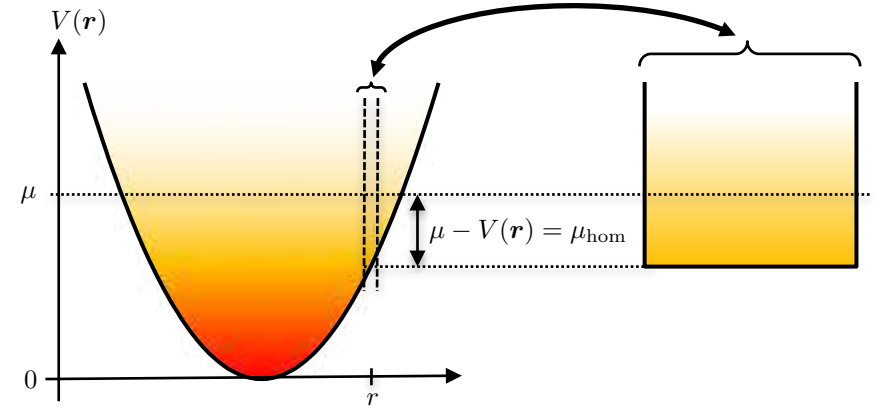


FIGURE 1. Principe de l'approximation de densité locale : l'état d'équilibre du gaz au point \mathbf{r} dans un piège $V(\mathbf{r})$ est similaire à celui d'un gaz homogène de même température et de potentiel chimique $\mu_{\text{hom.}} = \mu - V(\mathbf{r})$.

2-1 L'approximation de densité locale

Nous avons déjà rencontré l'approximation de densité locale au chapitre 2, lors de notre étude du gaz parfait. Son principe se généralise directement au cas d'un fluide en interaction. Partons d'une assemblée de particules confinées dans un potentiel $V(\mathbf{r})$ et à l'équilibre thermodynamique. Cet équilibre est caractérisé (par exemple) par les deux variables T (température) et μ (potentiel chimique). L'approximation de densité locale consiste à poser que les quantités physiques définies localement, la densité spatiale $\rho(\mathbf{r})$ par exemple, s'expriment en fonction du résultat connu pour le gaz homogène (cf. figure 1)

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_{\text{hom.}}(T_{\text{hom.}}, \mu_{\text{hom.}}) \quad (27)$$

avec

$$T_{\text{hom.}} = T \quad \mu_{\text{hom.}} = \mu - V(\mathbf{r}). \quad (28)$$

Pour simplifier l'écriture, nous poserons $V(0) = 0$ dans ce qui suit.

Pour un fluide classique, cette approximation est fondée sur la forme

de la fonction de partition

$$Z = \int \exp \left\{ -E[\{\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j\}] / k_B T \right\} \prod_j d^2 r_j d^2 p_j \quad (29)$$

avec pour le système homogène

$$E_{\text{hom}}[\{\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j\}] = \sum_j \left(\frac{p_j^2}{2m} - \mu \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \mathcal{V}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (30)$$

et pour le système confiné dans le potentiel $V(\mathbf{r})$:

$$E[\{\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j\}] = \sum_j \left(\frac{p_j^2}{2m} + V(\mathbf{r}_j) - \mu \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \mathcal{V}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (31)$$

Cette approximation est valable si la portée du potentiel d'interaction \mathcal{V} et le libre parcours moyen sont petits devant l'échelle spatiale de variation de la densité dans le potentiel de confinement $V(\mathbf{r})$. Pour un fluide de particules quantiques, il faut en plus passer par une approximation semi-classique, pour transformer la somme sur les énergies de la fonction de partition, en une intégrale sur les positions et les vitesses (GIORGINI, PITAEVSKII et al. 1997; HOLZMANN, CHEVALLIER et al. 2008).

2-2 Faibles densités et approche de Hartree–Fock

Dans un piège à "bord mou", un piège harmonique par exemple, la densité décroît graduellement quand on s'éloigne du centre. Les régions les plus lointaines ont un potentiel chimique local $\mu - V(\mathbf{r})$ négatif, et grand en valeur absolue devant $k_B T$, ce qui correspond à un gaz très dilué. En première approximation, on peut traiter ce gaz comme un gaz parfait et utiliser la relation que nous avons obtenue dans le cours 2 :

$$\rho(\mathbf{r}) \lambda_T^2 = -\ln \left(1 - Z e^{-V(\mathbf{r})/k_B T} \right) \quad \text{avec} \quad Z = e^{\mu/k_B T}. \quad (32)$$

On peut améliorer cette approximation en ajoutant à l'énergie de piégeage $V(\mathbf{r})$ une estimation de l'énergie ϵ_{int} nécessaire pour insérer une

nouvelle particule du fait des interactions. On sait que l'énergie totale d'interaction pour N particules vaut

$$E_{\text{int}} = \frac{\hbar^2 \tilde{g}}{2m} \int \rho^2(\mathbf{r}) d^2 r = \frac{\hbar^2 \tilde{g}}{2m} L^2 \langle \rho^2 \rangle. \quad (33)$$

Dans le régime très dilué qui nous intéresse ici, les fluctuations de densité sont telles que [cf. chapitre 2 et cours 2015-16, chapitre 3] :

$$\text{régime très dilué :} \quad \langle \rho^2 \rangle = 2 \langle \rho \rangle^2 \quad (34)$$

de sorte que

$$E_{\text{int}} \approx \frac{\hbar^2 \tilde{g}}{m L^2} N^2 \quad \epsilon_{\text{int}} = \frac{\partial E_{\text{int}}}{\partial N} = 2 \frac{\hbar^2 \tilde{g}}{m} \rho. \quad (35)$$

L'ajout de l'énergie d'interaction ϵ_{int} conduit à une équation implicite, où la densité locale $\rho(\mathbf{r})$ intervient à la fois dans le membre de gauche et le membre de droite

$$\rho(\mathbf{r}) \lambda_T^2 = -\ln \left(1 - Z e^{-[V(\mathbf{r}) + 2 \frac{\hbar^2 \tilde{g}}{m} \rho(\mathbf{r})] / k_B T} \right). \quad (36)$$

Cette équation est un exemple d'approche de type Hartree–Fock pour le problème à N corps. On pourra consulter l'article de revue HADZIBABIC & DALIBARD (2011) et les références qu'il contient pour avoir plus de détails sur cette approche, en particulier concernant la prise en compte⁴ des niveaux excités selon la direction fortement confinée z .

Cette équation n'admet pas de solution analytique, mais il est aisé de la résoudre numériquement en tout point \mathbf{r} , pour une température T et un potentiel chimique μ donnés. On peut ensuite trouver le nombre d'atomes total $N(T, \mu)$ dans le piège en intégrant $\rho(\mathbf{r})$.

Le résultat de ce calcul est à première vue très surprenant, car radicalement différent du résultat pour un gaz parfait. Dès que $\tilde{g} \neq 0$, on trouve dans le cadre de cette approche Hartree–Fock que

4. Cette prise en compte fait apparaître un phénomène intéressant, la *condensation transverse*. La statistique de Bose conduit à une accumulation de particules dans l'état fondamental du mouvement selon z , avec un taux d'occupation bien supérieur à ce que l'on attendrait pour des particules obéissant à la statistique de Boltzmann. Ce phénomène, prédit par DRUTEN & KETTERLE (1997) a été observé pour un gaz quasi 1D par ARMIJO, JACQMIN et al. (2011), puis par RUGWAY, MANNING et al. (2013), et pour le cas 2D qui nous intéresse ici par CHOMAZ, CORMAN et al. (2015).

- L'équation (36) admet une solution quelle que soit la valeur de μ , alors que pour le gaz parfait, seules les valeurs négatives de μ sont acceptables.
- À température fixée, le nombre d'atomes $N(T, \mu)$ peut devenir arbitrairement grand si on augmente le potentiel chimique.

En d'autres termes, le phénomène de saturation que l'on avait trouvé pour un gaz parfait dans un piège harmonique 2D disparaît dès que l'on prend en compte des interactions répulsives.

Toutefois, le paradoxe n'est qu'apparent (HOLZMANN, BAYM et al. 2007). Lors de notre étude du gaz idéal, nous avons souligné le caractère singulier de la condensation dans un piège harmonique 2D : le point de condensation est atteint quand la densité centrale devient infinie, ce qui est très différent du cas 3D où il suffit que la densité atteigne une valeur de l'ordre de λ_T^{-3} . Dès que l'on prend en compte les interactions répulsives, on ne peut plus atteindre une densité infinie au centre du piège et la possibilité de condensation disparaît, au moins dans le cadre de cette approche Hartree-Fock qui ne prend pas en compte la transition BKT. Au contraire dans le cas 3D, la présence d'interactions répulsives n'empêche pas d'atteindre une densité $\sim \lambda_T^3$ au centre du piège; l'approche Hartree-Fock prédit simplement qu'il faut mettre un peu plus d'atomes dans le piège que pour le cas sans interaction pour atteindre ce seuil.

Régime présuperfluide. Quand on augmente la densité du fluide, les interactions répulsives prennent une importance croissante et viennent réduire fortement les fluctuations de densité, de sorte qu'on a pour ce régime

$$\text{régime présuperfluide : } \langle \rho^2 \rangle \approx (\langle \rho \rangle)^2. \quad (37)$$

Ce phénomène de gel des fluctuations de densité se produit avant même de croiser la transition superfluide. On parle alors de régime "quasi-condensé" (KAGAN, KASHURNIKOV et al. 2000) ou "présuperfluide" (TUNG, LAMPORRESI et al. 2010), c'est-à-dire un milieu où les fluctuations de densité sont réduites par rapport au cas du gaz parfait et pour lequel on peut donc définir, au moins localement, une phase pour la fonction d'onde macroscopique.

2-3 Le point critique dans un piège harmonique

Nous considérons à partir de maintenant un piégeage harmonique de pulsation ω dans le plan xy . Commençons par rappeler le résultat trouvé dans cette situation pour le gaz parfait. Nous avons montré au chapitre 2 que lorsque le nombre d'atomes dans le piège excède la valeur critique :

$$N_{c,\text{ideal}} = \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^2, \quad (38)$$

alors la population des états excités est saturée : les atomes en excès s'accroissent nécessairement dans l'état fondamental. Ce scénario est similaire à celui de la condensation de Bose-Einstein 3D, à une différence importante près : la densité centrale au point critique est infinie lorsqu'on passe à la limite thermodynamique $N \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow 0$, $N\omega^2$ constant. Nous avons signalé au chapitre 2 que cette valeur infinie était forcément problématique en présence d'interactions répulsives et que la condensation de Bose-Einstein serait donc bloquée dans un piège harmonique à 2D.

L'existence de la transition BKT vient enrichir considérablement la situation, puisqu'elle se produit pour la densité spatiale donnée en (25), $\rho = \frac{1}{\lambda_T^2} \ln(380/\tilde{g})$. Si l'approximation de densité locale est correcte, elle entraîne que le centre du gaz piégé va devenir superfluide quand la densité en $r = 0$ atteindra cette valeur critique. En utilisant l'approche "champ classique" décrite en § 1, HOLZMANN, CHEVALLIER et al. (2010) ont montré que ce seuil était atteint pour

$$\frac{N_{c,\text{BKT}}}{N_{c,\text{ideal}}} \approx 1 + \frac{3\tilde{g}}{\pi^3} \ln^2 \left(\frac{\tilde{g}}{16} \right) + \frac{3\tilde{g}}{8\pi^2} \left[15 + \ln \left(\frac{\tilde{g}}{16} \right) \right]. \quad (39)$$

Au delà de sa structure mathématique quelque peu compliquée, cette équation a le grand mérite de connecter directement la transition superfluide BKT à la condensation du gaz parfait : cette condensation apparaît comme résultant de la limite $\tilde{g} \rightarrow 0$, à température fixée. Dans cette limite, la densité centrale critique pour atteindre la superfluidité, $\rho(0) = \frac{1}{\lambda_T^2} \ln(380/\tilde{g})$ devient de plus en plus grande, pour finalement diverger en $\tilde{g} = 0$, redonnant ainsi le cas du gaz parfait.

L'étude expérimentale de ce point critique pour un gaz de Bose a été faite par plusieurs groupes au cours des dix dernières années, avec une

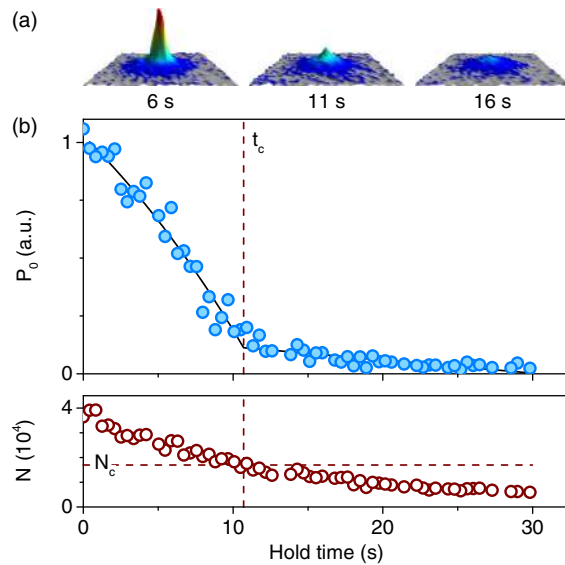


FIGURE 2. Méthode utilisée par FLETCHER, ROBERT DE SAINT VINCENT et al. (2015) pour mesurer le point critique de la transition BKT dans un piège harmonique 2D ($\nu_{xy} = 38$ Hz). Le gaz est \approx dans le régime 2D car la température $T \sim 150$ nK est telle que $k_B T < h\nu_z$, avec $\nu_z = 4.1$ kHz.

précision croissante dans la détermination du point de transition (KRÜGER, HADZIBABIC et al. 2007; CLADÉ, RYU et al. 2009; TUNG, LAMPORESI et al. 2010; FLETCHER, ROBERT DE SAINT VINCENT et al. 2015). Nous décrivons ici les résultats de l'expérience de FLETCHER, ROBERT DE SAINT VINCENT et al. (2015), menée à Cambridge sur un gaz d'atomes de ^{39}K (bosons). Le principe est d'effectuer une expansion ballistique⁵ du gaz, en coupant soudainement le potentiel harmonique de confinement. Si un superfluide est présent dans la région centrale du piège, la fonction de corrélation $G_1(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$

5. L'expansion se fait ici à trois dimensions, c'est-à-dire que l'on relâche à la fois le confinement (faible) dans le plan xy et le confinement (fort) le long de l'axe z . Du fait de la relation de Heisenberg, l'expansion selon z est beaucoup plus rapide que dans le plan xy . La densité atomique chute donc très vite et les interactions ne jouent pas de rôle significatif dans la dynamique en xy à plus long temps.

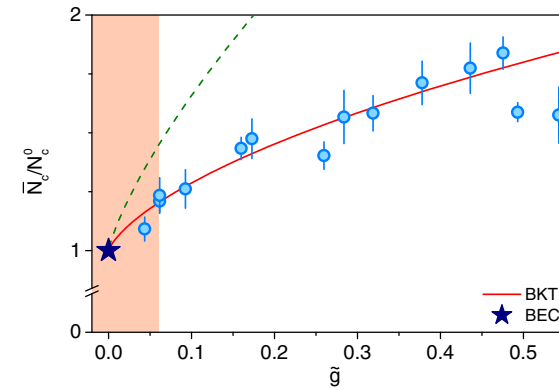


FIGURE 3. Nombre critique d'atomes pour la transition BKT, ramené au nombre critique d'atomes pour la condensation du gaz parfait, en fonction du paramètre d'interaction \tilde{g} . Dans la zone colorée, la densité dans l'espace des phases au point critique $\mathcal{D} = \ln(380/\tilde{g})$ devient grande. De ce fait, la longueur de cohérence du gaz $\ell \sim \lambda_T e^{\mathcal{D}/2}$ (chapitre 2) est elle aussi très grande avant même d'atteindre le point critique, ce qui rend la détermination du point critique imprécise [figure extraite de FLETCHER, ROBERT DE SAINT VINCENT et al. (2015)].

dans cette zone décroît lentement⁶. La distribution en impulsion associée à cette composante superfluide est donc étroite, ce qui se manifeste par un pic central dans la distribution spatiale mesurée après temps de vol. L'intérêt de mener cette expérience sur l'espèce atomique ^{39}K est que l'on dispose d'une résonance de Feshbach qui permet de varier les interactions élastique entre atomes. Les chercheurs de Cambridge ont ainsi pu explorer le régime \tilde{g} allant de 0.05 à 0.5.

La méthode utilisée par FLETCHER, ROBERT DE SAINT VINCENT et al. (2015) est la suivante. On part d'un assez grand nombre d'atomes ($N \approx 40\,000$) dans un piège à température T donnée, de l'ordre de 150 nK, et un paramètre d'interaction donné \tilde{g} . Une expansion ballistique initiée à cette instant montre un pic étroit, signature d'une fraction centrale superfluide; le nombre d'atomes est donc plus grand que $N_{c,\text{BKT}}(T, \tilde{g})$ (figure

6. Rappelons que la décroissance serait algébrique avec un exposant $< 1/4$ si le gaz était uniforme.

2). Si on laisse les atomes dans le piège pendant un certain temps avant d'effectuer l'expansion ballistique, leur nombre va décroître sous l'effet de divers processus inélastiques (constante de temps de l'ordre de la dizaine de secondes). En repérant l'instant où le pic étroit de l'expansion ballistique disparaît, on détermine la valeur critique $N_{c,BKT}(T, \tilde{g})$ du nombre d'atomes pour la transition superfluide. Cette série d'expériences est ensuite refaite pour différentes valeurs de \tilde{g} et la variation de $N_{c,BKT}/N_{c,ideal}$ est reproduite sur la figure 3. Elle montre un excellent accord avec la prédiction (39) et confirme le fait que le cas singulier de la condensation 2D du gaz parfait peut être vu comme la limite de la transition BKT pour $\tilde{g} \rightarrow 0$.

2-4 Le cas d'un potentiel désordonné

Dans ce qui précède, nous nous sommes intéressés au cas d'un gaz dans un potentiel uniforme ou harmonique. Une troisième catégorie concerne le cas de potentiels désordonnés. La situation est alors enrichie par le fait qu'une transition de type localisation d'Anderson peut également se produire.

L'étude de la dynamique d'un fluide quantique en présence de désordre déborde largement du thème de ce cours et nous nous contenterons donc de signaler quelques travaux récents menés sur ce sujet dans le cadre des gaz atomiques 2D. L'influence du désordre sur le point de transition BKT a été abordée expérimentalement par le groupe de Thomas Bourdel à Palaiseau (ALLARD, PLISSON et al. 2012) [voir aussi BEELER, REED et al. (2012) au NIST-Gaithersburg et KRINNER, STADLER et al. (2013) à Zurich]. Le désordre est créé par la figure de tavelure (*speckle*) d'un faisceau lumineux additionnel, superposé au piège harmonique. Pour le régime de paramètres étudiés expérimentalement, les résultats obtenus indiquent que l'addition du désordre résulte toujours en une réduction de la cohérence du gaz. Une étude théorique menée par BOURDEL (2012) à partir d'un traitement du potentiel désordonné par l'approximation de densité locale (valable pour un désordre variant lentement à l'échelle des paramètres microscopiques du gaz) est venue tempérer quelque peu cette conclusion négative; en effet, son bilan est qu'un désordre faible peut être favorable à l'apparition d'un superfluide, alors qu'un désordre plus fort le fait disparaître.

CARLEO, BOÉRIS et al. (2013) ont utilisé une méthode de Monte Carlo quantique pour prouver la robustesse de la transition BKT vis à vis d'un désordre de type *speckle* : cette transition survit même en présence de fortes fluctuations de densités induites par le désordre, et ne disparaît que lorsque l'amplitude du désordre devient de l'ordre de la valeur du potentiel chimique. CARLEO, BOÉRIS et al. (2013) ont par ailleurs montré que la disparition de la composante superfluide survient alors même que le gaz reste connecté avec une densité supérieure à la densité critique (25) : le désordre en ce point n'est pas encore suffisant pour correspondre à la transition de percolation classique. Mentionnons également qu'au point critique, la fonction G_1 présente toujours une décroissance algébrique avec un exposant compatible avec $1/4$, ce qui indique que la classe d'universalité de la transition en présence de désordre est la même que celle du système « propre ».

Signalons pour finir l'analyse de CHERRORET, KARPIUK et al. (2015), basée sur une analyse en champ classique, qui pointe un autre effet possible du désordre : en réduisant la densité d'états à une particule au voisinage de l'énergie nulle, ce désordre peut faire apparaître un phénomène de condensation dans un gaz 2D uniforme, alors qu'on sait que cette condensation est exclue pour un système non désordonné. Il reste toutefois à étudier le type d'ordre qui peut alors émerger pour la fonction $G_1(\mathbf{r})$.

3 Le quasi-ordre en phase dans un gaz atomique

3-1 La fonction G_1 dans un piège

Une fois le point critique dépassé, soit en baissant la température, soit en augmentant le nombre d'atomes, un superfluide se forme au centre du piège. Ce superfluide n'est pas *stricto sensu* un condensat, puisque sa phase n'est pas la même en tout point. Si le gaz était uniforme, on sait que la fonction

$$\begin{aligned} G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}') \rangle \\ &\propto \langle e^{i[\theta(\mathbf{r}) - \theta(\mathbf{r}')]} \rangle = e^{-\frac{1}{2} \langle [\theta(\mathbf{r}) - \theta(\mathbf{r}')]^2 \rangle} \end{aligned} \quad (40)$$

décroitrait algébriquement avec la distance $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, avec l'exposant

$$\eta = \frac{1}{\rho_s \lambda_T^2}, \quad (41)$$

la densité superfluide étant telle que η est toujours inférieur à 1/4. Nous avons supposé dans la deuxième ligne de (40) que les fluctuations de densité étaient gelées, ce qui est une approximation raisonnable comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents.

L'analyse du comportement de la fonction G_1 peut se faire en généralisant l'approche de Bogoliubov au cas non homogène (PETROV, HOLZMANN et al. 2000). Puisque les fluctuations de densité sont gelées, le profil de densité du superfluide $\rho_s(\mathbf{r})$ reste voisin du profil de Thomas–Fermi attendu dans le cas d'un "vrai" condensat :

$$r < R_{\text{TF}} : \quad V(r) + \frac{\hbar^2 \tilde{g}}{m} \rho_s(r) = \mu, \quad (42)$$

et s'annule au rayon de Thomas-Fermi⁷ défini par $V(r_{\text{TF}}) = \mu$. Les fluctuations en phase $\langle [\theta(\mathbf{r}) - \theta(\mathbf{r}')]^2 \rangle$ peuvent se caractériser en comparant la phase centrale et la phase au voisinage du bord du superfluide, et on trouve (PETROV, HOLZMANN et al. 2000)

$$\Delta\theta^2 \equiv \langle [\theta(R_{\text{TF}}) - \theta(0)]^2 \rangle \approx \left(\frac{\tilde{g}}{4\pi} \right)^{1/2} \frac{T}{T_c} \ln(N). \quad (44)$$

En prenant $N = 10^5$ atomes, $T \sim T_c$ et un paramètre d'interaction typique pour des gaz atomiques $\tilde{g} = 0.1$, on arrive à $\Delta\theta \sim 1$, donc des fluctuations de phase significatives mais pas considérables. Le régime $\Delta\theta \gg 1$ n'apparaît que pour des nombres d'atomes exponentiellement grands ou alors pour le régime d'interactions fortes $\tilde{g} \gtrsim 1$, ce qui est possible en profitant d'une résonance de diffusion (MURTHY, BOETTCHER et al. 2015).

7. Un calcul simple permet de relier R_{TF} et μ au nombre d'atomes N_s dans la composante superfluide :

$$R_{\text{TF}} = a_{\text{oh}} \left(\frac{4}{\pi} \tilde{g} N_s \right)^{1/4}, \quad \mu = \hbar\omega \left(\frac{1}{\pi} \tilde{g} N_s \right)^{1/2} \quad \text{avec} \quad a_{\text{oh}} = \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^{1/2}, \quad (43)$$

où ω est la pulsation du piégeage harmonique dans le plan xy , et où on a négligé toute interaction entre la composante superfluide et la composante normale.

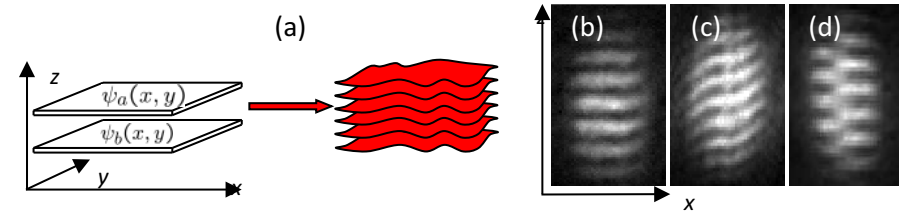


FIGURE 4. (a) Interférences entre deux plans atomiques indépendants, de même température et de même potentiel chimique. La mesure du contraste de l'interférence observée après expansion selon l'axe z permet d'accéder au module carré de la fonction de corrélation G_1 . (b-c) Figures d'interférence obtenues pour deux températures différentes, en imageant le nuage d'atomes le long de la direction y . (d) Exemple de dislocation de la figure d'interférence révélant la présence d'un vortex dans l'un des deux plans. Figures extraites de HADZIBABIC, KRÜGER et al. (2006).

3-2 Fluctuations de phase et interférométrie atomique

Une caractéristique importante de l'état superfluide à deux dimensions réside dans la distribution spatiale de la phase du champ $\psi(\mathbf{r})$ décrivant le fluide, décrite par la fonction de corrélation $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Lors du cours 2015-16 (chapitre 2), nous avons passé en revue un certain nombre de méthodes développées au cours des années pour mesurer G_1 . Nous allons décrire ici la mise en œuvre de certaines d'entre elles dans le contexte des gaz 2D.

La première caractérisation de la transition BKT a été faite par HADZIBABIC, KRÜGER et al. (2006) en utilisant deux plans d'atomes indépendants, décrits par des champs $\psi_a(x, y)$ et $\psi_b(x, y)$, séparés par une distance d_z (figure 4). En relâchant le confinement selon les trois directions d'espace, les nuages d'atomes issus des deux plans s'étalent et se recouvrent, de sorte qu'on observe des interférences d'ondes de matière. La densité totale est modulée le long d'une ligne parallèle à l'axe z avec la période $D_z = \hbar t / m d_z$:

$$\rho(\mathbf{r}) \propto |\psi_a|^2 + |\psi_b|^2 + \left(\psi_a \psi_b^* e^{i2\pi z / D_z} + \text{c.c.} \right). \quad (45)$$

Pour simplifier, nous avons négligé ici un facteur d'enveloppe global dé-

crivant la variation de la densité selon z . Par ailleurs, nous avons négligé l'expansion dans le plan xy , beaucoup plus lente que celle selon z . Une mesure de la densité permet alors d'accéder au contraste complexe de l'interférence

$$C(\mathbf{r}) = \psi_a(\mathbf{r}) \psi_b^*(\mathbf{r}). \quad (46)$$

La valeur moyenne de cette quantité est nulle puisque les deux gaz sont indépendants l'un de l'autre. En revanche, la fonction de corrélation obtenue après moyenne sur de nombreuses réalisations de l'expérience

$$\begin{aligned} \langle C(\mathbf{r}) C^*(\mathbf{r}') \rangle &= \langle \psi_a(\mathbf{r}) \psi_b^*(\mathbf{r}) \psi_a^*(\mathbf{r}') \psi_b(\mathbf{r}') \rangle \\ &= \langle \psi_a(\mathbf{r}) \psi_a^*(\mathbf{r}') \rangle \langle \psi_b^*(\mathbf{r}) \psi_b(\mathbf{r}') \rangle \end{aligned} \quad (47)$$

permet d'accéder à la fonction G_1 recherchée, ou plus exactement son module carré :

$$\langle C(\mathbf{r}) C^*(\mathbf{r}') \rangle = |G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2. \quad (48)$$

L'expérience de HADZIBABIC, KRÜGER et al. (2006) a permis d'observer une variation rapide du comportement de G_1 au voisinage du point de transition. Elle a également mis en évidence de manière directe les vortex libres qui apparaissent autour de la transition BKT. Ces vortex se manifestent en effet comme des dislocations dans le profil d'interférence. Une simulation Monte Carlo en terme de champs classiques fluctuants, menée par FOSTER, BLAKIE et al. (2010), a permis de valider de manière quantitative cette procédure d'interférences entre plans indépendants [voir aussi BISSET, DAVIS et al. (2009)]. L'observation de vortex thermiquement activés a également été faite dans le groupe de Séoul, avec une imagerie perpendiculaire au plan du gaz (CHOI, SEO et al. 2013); les vortex apparaissent alors comme des trous de densité.

Une méthode voisine consiste à faire interférer le gaz avec lui-même (CLADÉ, RYU et al. 2009). Partant d'un nuage atomique 2D où tous les atomes sont dans un état interne $|1\rangle$, un processus Raman "absorption - émission stimulée" fait basculer la moitié des atomes vers un autre état interne $|2\rangle$, tout en leur conférant une vitesse v_0 de l'ordre de la vitesse de recul (impulsion $\pi/2$). Après ce processus, la partie du nuage encore en $|1\rangle$ est globalement au repos, alors que la partie en $|2\rangle$ se déplace. Après un temps t ajustable, un deuxième pulse $\pi/2$ mélange de nouveau les amplitudes des deux états internes tout en communiquant la vitesse $v_0 - v_1$ lors de la transition $1 \rightarrow 2$. Si on mesure alors la distribution de densité dans

l'état $|2\rangle$, on obtient des franges d'interférences entre l'état initial du nuage et l'état déplacé de $\mathbf{R} = v_0 t$

$$\rho(\mathbf{r}) \propto |\psi(\mathbf{r})|^2 + |\psi(\mathbf{r} - \mathbf{R})|^2 + \left(\psi(\mathbf{r}) \psi^*(\mathbf{r} - \mathbf{R}) e^{imv_1 \cdot \mathbf{R}/\hbar} + \text{c.c.} \right), \quad (49)$$

ce qui permet de remonter à la fonction G_1 à partir du contraste complexe de ces interférences $C(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) \psi^*(\mathbf{r} - \mathbf{R})$. Cette méthode présente un avantage notable par rapport à la précédente : un seul plan est suffisant et les interférences sont visibles en imagerie perpendiculaire à ce plan. En revanche, elle repose sur l'hypothèse que les collisions entre atomes jouent un rôle négligeable pendant le temps t , qui risque d'être invalidée pour des gaz avec des paramètres d'interaction \tilde{g} élevés.

La dernière méthode que nous signalerons brièvement consiste à effectuer une courte expansion balistique au cours de laquelle les fluctuations de phase initiales sont transformées en fluctuations de densité. Cette méthode a initialement été proposée par IMAMBEKOV, MAZETS et al. (2009), puis mise en œuvre par le groupe de Seoul, CHOI, SEO et al. (2012) et SEO, CHOI et al. (2014) [voir également DESBUQUOIS (2013) ainsi qu'une analyse critique des premières expériences de Séoul par MAZETS (2012)]. L'analyse théorique récente de SINGH & MATHEY (2014) a montré qu'il était en principe possible, à partir de la fonction de corrélation densité-densité après temps de vol, $\langle \rho(\mathbf{r}_1) \rho(\mathbf{r}_2) \rangle$, d'accéder à l'exposant η caractérisant la décroissance algébrique de G_1 dans le régime superfluide. Toutefois, il semble que le rôle joué par les interactions durant l'expansion balistique a empêché le groupe de Seoul d'atteindre ce but (SEO, CHOI et al. 2014).

3-3 La distribution en impulsion d'un gaz piégé

Nous avons déjà eu plusieurs fois l'occasion de rappeler le lien étroit entre la fonction $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \hat{\rho}_1 | \mathbf{r}' \rangle$ qui nous intéresse ici et la distribution en impulsion $N(\mathbf{p})$ du fluide. Pour un système homogène, donc invariant par translation, la fonction G_1 ne dépend que de la distance $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ et, en posant $G_1(\mathbf{r}) \equiv G_1(\mathbf{r}, 0)$, on a la relation⁸ en terme de transformée de Fourier déjà énoncée au chapitre 2

$$G_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{L^2} \int e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}/\hbar} N(\mathbf{p}) d^2 p. \quad (50)$$

8. $N(\mathbf{p})$ est supposée normalisée ici selon la relation $\int N(\mathbf{p}) d^2 p = N$.

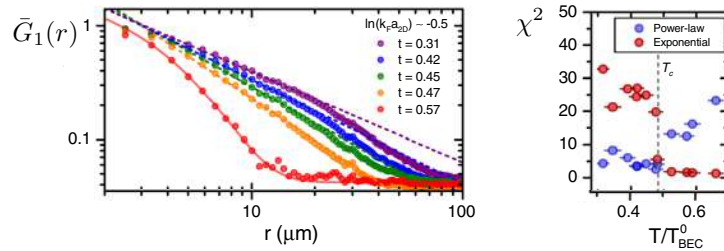


FIGURE 5. Fonction $\bar{G}_1(r)$ obtenue par transformée de Fourier de la distribution en impulsion, pour un gaz de molécules bosoniques ${}^6\text{Li}_2$, avec un paramètre d'interaction $\tilde{g} \approx 2.76$. Les températures sont repérées par rapport à la température de condensation d'un gaz parfait dans ce piège : $t = T/T_{c,\text{ideal}}$ avec $T_{c,\text{ideal}} = 140 \text{ nK}$. A droite : coefficient χ^2 de l'ajustement par une loi algébrique ($\alpha r^{-\eta}$) ou exponentielle ($\alpha e^{-\eta r}$). Figures extraites de MURTHY, BOETTCHER et al. (2015).

La mesure de la distribution en impulsion dans un gaz 2D uniforme, comme cela été fait par CHOMAZ, CORMAN et al. (2015), devrait donc permettre en principe de remonter à la décroissance algébrique de $G_1(r)$, pourvu que la résolution en impulsion soit suffisante.

Pour un gaz confiné dans un piège harmonique, la situation est plus compliquée. La fonction G_1 dépend séparément des deux positions \mathbf{r} et \mathbf{r}' et on a la relation

$$\bar{G}_1(\mathbf{r}) = \int e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}/\hbar} N(\mathbf{p}) d^2p, \quad (51)$$

où on a posé

$$\bar{G}_1(\mathbf{r}) = \int G_1\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}, \mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}\right) d^2R. \quad (52)$$

Comme nous l'avons vu en § 3-1, il est utile d'aller vers le régime d'interaction forte ($\tilde{g} > 1$) si l'on souhaite que les fluctuations de phase jouent un rôle important. MURTHY, BOETTCHER et al. (2015) ont ainsi considéré un gaz de fermions (${}^6\text{Li}$) et se sont placés au voisinage d'une résonance de Feshbach. Le gaz est donc la zone du *cross-over* entre la physique de type BCS (fermions appariés dans l'espace des impulsions, à la Bardeen-Cooper-Schrieffer) et le régime de condensation de Bose-Einstein, où les

fermions se sont appariés dans l'espace des positions et forment des molécules Li_2 , qui sont des bosons. Nous n'allons pas étudier la physique très riche de ce *cross-over* et nous renvoyons les lecteurs intéressés à l'article de revue de LEVINSSEN & PARISH (2015) qui traite spécifiquement de ses aspect bi-dimensionnels. Le point qui compte ici est que l'on dispose côté BEC d'un gaz de bosons dont le paramètre d'interaction \tilde{g} peut être arbitrairement élevé si on se rapproche de la résonance. MURTHY, BOETTCHER et al. (2015) ont ainsi étudié des valeurs de \tilde{g} allant de ≈ 0.6 à 2.8 du côté BEC de la résonance.

Après mesure de la distribution en impulsion et transformation de Fourier inverse, MURTHY, BOETTCHER et al. (2015) ont analysé la variation de la fonction $\bar{G}_1(r)$ dans leur système. Les données obtenues pour $\tilde{g} \approx 2.8$ sont reportées sur la figure 5 pour différentes températures. L'ajustement des données par une loi algébrique ($\alpha r^{-\eta}$) ou exponentielle ($\alpha e^{-\eta r}$) indique clairement deux régimes. Aux basses températures, la variation algébrique de $G_1(r)$ est privilégiée, alors que l'ajustement exponentiel devient bien meilleur à plus haute température. La bascule d'un ajustement à l'autre se fait pour $T_c \approx 0.5 T_{c,\text{ideal}}$ pour les données de la figure 5. La densité dans l'espace des phases centrale en ce point est ≈ 5 , en bon accord avec la prédiction $\ln(380/\tilde{g})$.

Les données de MURTHY, BOETTCHER et al. (2015) révèlent néanmoins une surprise importante. Alors que selon la théorie BKT, l'exposant η de la décroissance algébrique ne peut dépasser 0.25 dans un gaz de Bose homogène, les exposants mesurés par l'ajustement de $G_1(r)$ en $r^{-\eta}$ sont considérablement plus grands. Les valeurs reportées sur la figure 6 montrent une plage de valeurs qui s'étend jusqu'à $\eta = 1.5$, ce qui est 6 fois le maximum attendu! Ce facteur 6 est obtenu aussi bien pour les interactions fortes ($\tilde{g} = 2.76$) que pour des interactions plus faibles ($\tilde{g} = 0.60$), ce qui montre que cet effet n'est pas lié à des effets en dehors de la validité de l'approche "champ classique" de la transition BKT. Par ailleurs, une simulation Monte Carlo quantique similaire à celle menée par HOLZMANN & KRAUTH (2008), reproduit assez bien ces résultats quand la résolution imparfaite du système d'imagerie est prise en compte.

L'explication de ce désaccord apparent concernant l'ordre algébrique susceptible d'apparaître dans un gaz de Bose 2D a été donnée par BOETTCHER & HOLZMANN (2016). L'effet le plus important est la contribution

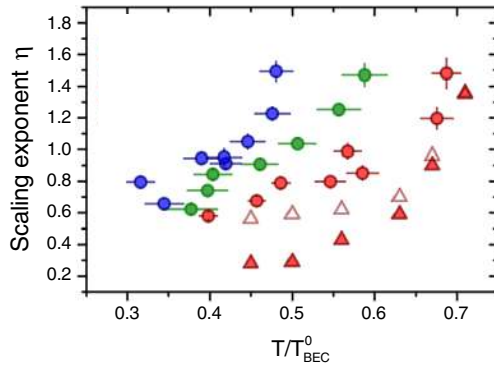


FIGURE 6. Cercles : exposant η obtenu par ajustement des données expérimentales avec une loi algébrique $\propto r^{-\eta}$, pour les paramètres d'interaction $\tilde{g} = 0.60$ (rouge), 1.07 (vert) et 2.76 (bleu). Triangles pleins : résultats d'une simulation Monte Carlo quantique pour $\tilde{g} = 0.60$. Triangles évidés : idem avec en plus la prise en compte de la résolution finie du système d'imagerie. Figure extraite de MURTHY, BOETTCHER et al. (2015).

de la composante normale (non superfluide) qui réside dans la partie périphérique du piège, et qui se mélange à la composante superfluide lors de l'expansion ballistique. Cette contribution vient augmenter considérablement l'exposant η . Cette modification est artificielle, dans le sens où la décroissance de fonction de corrélation G_1 dans la zone normale n'est pas algébrique, mais exponentielle. Par une analyse précise des deux contributions, superfluide et normale, BOETTCHER & HOLZMANN (2016) ont retrouvé le facteur 5 à 6 mesuré expérimentalement. Ils ont également montré que, pour des paramètres typiques des expériences actuelles, la mesure de la quantité non moyennée $G_1(r, 0)$ permettrait de retrouver l'exposant attendu dans le cas homogène, pourvu qu'on limite la mesure à la zone centrale $r < 0.2 R_{TF}$. Ils ont par ailleurs proposé une *approximation de corrélation locale*, qui consiste à remarquer que lorsque les deux points r et r' sont dans la zone superfluide, la décroissance de $G_1(r, r')$ entre ces deux points est à peu près algébrique, avec un exposant qui est la moyenne géométrique de deux exposants $\eta(r)$ et $\eta(r')$ que l'on déduirait des densités aux points r et r' en utilisant la loi (41).

3-4 Mouvement d'une impureté et modes collectifs

Un moyen naturel pour tester la superfluidité est de s'appuyer sur le critère de Landau : est-ce qu'une impureté ponctuelle bougeant dans le fluide à une vitesse inférieure à la vitesse du son c_0 subit une force de friction et dissipe de l'énergie (ASTRAKHARCHIK & PITAEVSKII 2004)? Ce critère a été testé avec succès sur des gaz 3D dès le début du développement des gaz quantiques d'atomes (RAMAN, KÖHL et al. 1999; ONOFRIO, RAMAN et al. 2000) et il a été transposé récemment aux gaz de Bose à deux dimensions. En déplaçant un trou microscopique (rayon $\sim 1 \mu\text{m}$) créé par un faisceau laser focalisé, DESBUQUOIS, CHOMAZ et al. (2012) ont observé un comportement superfluide pour une valeur du paramètre $\mu/k_B T$ en relativement bon accord avec la prédiction (26). Le léger écart a été expliqué dans une publication très récente de SINGH, WEITENBERG et al. (2017), étudiant la dynamique de la thermalisation du gaz d'atomes après le passage du trou créé par le laser. Toujours avec des bosons, KWON, KIM et al. (2016) ont observé l'allée de von Karman composée de vortex, dans le sillage du trou créé par un laser bougeant à une vitesse supersonique.

Ces expériences ont récemment été reprises à Hambourg pour un gaz quasi-2D de fermions ${}^6\text{Li}$ au voisinage d'une résonance de Feshbach, pour explorer toute la région de transition entre un condensat de molécules bosoniques ${}^6\text{Li}_2$ (longueur de diffusion 3D positive) et une assemblée de paires de Cooper (longueur de diffusion 3D négative) (WEIMER, MORGNER et al. 2015). Là encore, une « impureté laser » était en mouvement dans le superfluide, mais au contraire des deux expériences que nous venons de citer, le potentiel créé par le laser était attractif et l'impureté consistait donc en une bosse de densité plutôt qu'un trou. Un exemple de comportement superfluide est visible sur la figure 7 (haut) : l'impureté bougeant dans la zone centrale (superfluide) à une vitesse suffisamment basse ne crée aucun chauffage, et la densité centrale du gaz reste inchangée. Au contraire, si l'impureté bouge dans la région périphérique, un chauffage se produit quelle que soit la vitesse de l'impureté. Cette expérience a été reproduite pour différentes valeurs de la longueur de diffusion. La valeur de la vitesse critique est reportée sur la figure 7 (bas), de même que la vitesse du son mesurée en excitant un paquet d'ondes central et en mesurant sa vitesse d'expansion.

Pour terminer cette section, mentionnons une dernière méthode pour

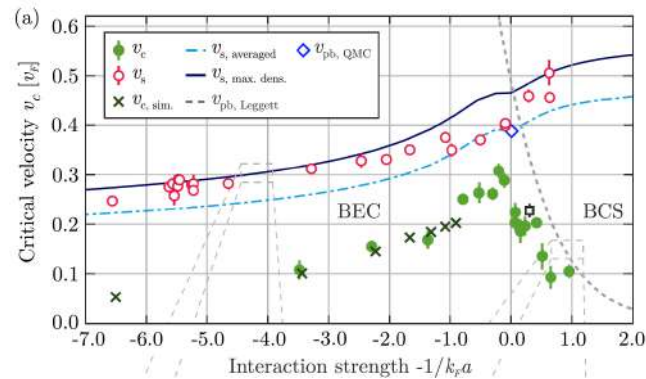
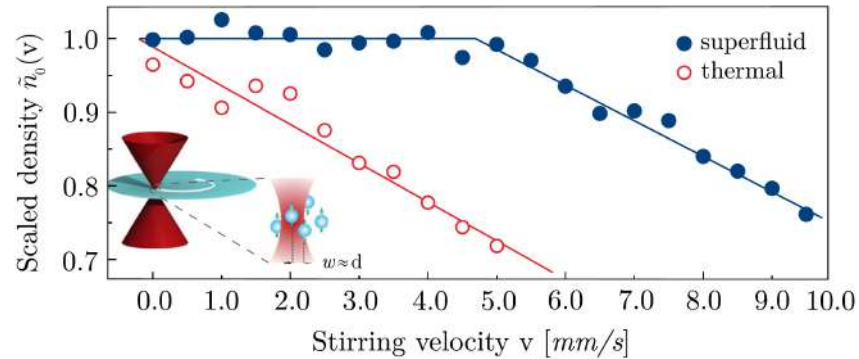


FIGURE 7. Comportement superfluide d'un gaz de fermions (${}^6\text{Li}$). Haut : variation de la densité centrale (i.e. chauffage) induit par une impureté bougeant à vitesse v dans la partie superfluide ou la partie normale du gaz. Bas : vitesse critique (points verts) et vitesse du son (points rouges) en unité de la vitesse de Fermi v_F dans la zone de transition entre le condensat de molécules ${}^6\text{Li}_2$ et le régime de paires de Cooper. Figure extraite de WEIMER, MORGENER *et al.* (2015).

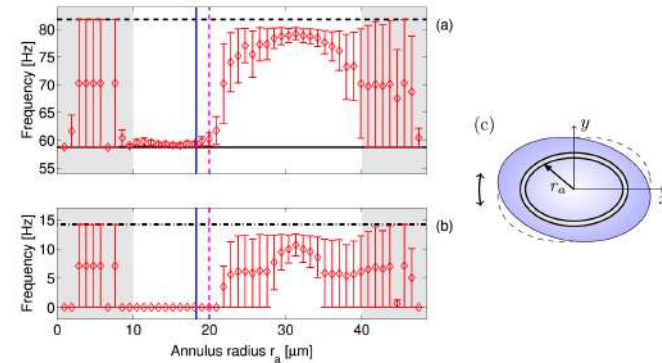


FIGURE 8. Mode « ciseaux » observé sur un gaz 2D de rubidium en utilisant une analyse de la moyenne locale de la quantité xy , moyenne prise sur un anneau fin. Selon la position de l'anneau, on sonde (i) la région centrale superfluide, avec une seule fréquence d'oscillation; (ii) la région périphérique normale, avec deux fréquences d'oscillation non nulles. Figure extraite de DE ROSSI, DUBESSY *et al.* (2016).

détecter la superfluidité; elle passe par l'étude de modes collectifs, en particulier le mode « ciseaux » initialement considéré en physique nucléaire pour mettre en évidence la superfluidité de noyaux déformés (GUÉRY-ODELIN & STRINGARI 1999; MARAGO, HOPKINS *et al.* 2000). Les propriétés de ce mode et sa pertinence pour l'étude de la superfluidité de gaz atomiques ont fait l'objet de cours au Collège de France par C. Cohen-Tannoudji (2001-02) et nous n'en rappelons ici que les principales caractéristiques. On considère un piège harmonique légèrement anisotrope dans le plan xy , $\omega_x > \omega_y$, le gaz à l'équilibre étant donc lui aussi anisotrope. On tourne légèrement les axes propres du nuage par rapport à leur position d'équilibre et on regarde l'évolution du système, par exemple en regardant l'évolution de la quantité moyenne $\langle xy \rangle$. Si le gaz est superfluide, on observe un mouvement non amorti à une seule fréquence, $(\omega_x^2 + \omega_y^2)^{1/2}$. Pour un gaz normal, deux fréquences contribuent à l'évolution ($|\omega_x \pm \omega_y|$ si le gaz est dans le régime ballistique), avec en plus un amortissement notable.

Il y a toutefois une difficulté qui apparaît immédiatement quand on cherche à exploiter ce mode : dans le cadre de l'approximation de densité

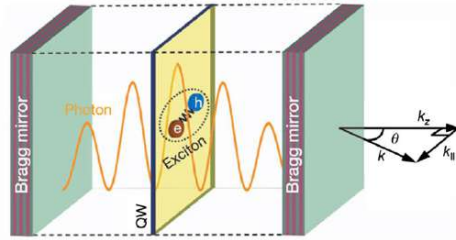


FIGURE 9. Géométrie utilisée pour les expériences sur les fluides de polaritons de cavité. La lumière est stockée entre deux miroirs plans de grande réflectivité formant une cavité Fabry–Perot résonante. Les excitons sont produits dans un puits quantique. Un polariton est un boson composite, superposition d'un exciton et d'un photon. On sonde les propriétés du fluide de polaritons en analysant les propriétés de la lumière sortant de la cavité. Figure extraite de KASPRZAK, RICHARD *et al.* (2006).

locale, le centre du gaz est superfluide mais l'extérieur ne l'est pas. Les deux types d'évolution sont alors mélangés, ce qui rend difficile l'exploitation quantitative de l'évolution du gaz. DE ROSSI, DUBESSY *et al.* (2016) ont récemment contourné cette difficulté de manière élégante. En s'intéressant à la valeur moyenne de xy calculée sur un anneau fin, ils ont montré la transition attendue entre le régime mono-fréquence au centre (superfluide) et le régime bi-fréquence à l'extérieur (normal). La position de la zone de transition est en bon accord avec les prédictions de champ classique présentées en § 1.

4 Les polaritons de cavité

4-1 L'hybridation lumière–matière

Les polaritons de cavité sont des particules hybrides mi-lumière, mi-matière que nous avons déjà rencontrées plusieurs fois dans les cours et les séminaires des années précédentes. Commençons par présenter séparément les deux blocs permettant de construire ces polaritons. Nous nous

limitons ici aux quelques concepts indispensables et nous renvoyons le lecteur aux articles de revue de CARUSOTTO & CIUTI (2013) et de AMO & BLOCH (2016) pour approfondir les différentes notions.

- La partie "lumière" d'un polariton correspond à un photon stocké entre deux miroirs plans, dans une cavité de type Fabry-Perot d'axe optique z et de longueur L (figure 9). Comme nous l'avons vu au chapitre 2, un photon résonnant avec la cavité a un vecteur d'onde (\mathbf{k}_\perp, k_z) avec k_z multiple entier de π/L . Si on se limite à des photons faisant un angle faible avec l'axe z , $|\mathbf{k}_\perp| \ll k_z$, l'énergie de ces photons dans un milieu d'indice n_0 s'écrit

$$\hbar\omega_{\text{ph}}(\mathbf{k}_\perp) = \frac{\hbar c}{n_0} (k_z^2 + \mathbf{k}_\perp^2)^{1/2} \approx \hbar\omega_{0, \text{ph}} + \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_\perp^2}{2m_{\text{ph}}} \quad (53)$$

où $\omega_{0, \text{ph}} = ck_z/n_0$ et où la masse effective du photon pour le mouvement dans le plan xy vaut :

$$m_{\text{ph}} = \frac{\hbar n_0 k_z}{c} = n_0^2 \frac{\hbar\omega_0}{c^2}. \quad (54)$$

En pratique, on utilise des miroirs de Bragg⁹ formés de quelques dizaines de paires de couches $\text{Ga}_x\text{Al}_{1-x}\text{As}/\text{Ga}_y\text{Al}_{1-y}\text{AlAs}$, avec des facteurs de qualité Q de plusieurs 10^4 . Pour des photons de longueur d'onde¹⁰ ~ 800 nm, ceci conduit à une masse de quelques $10^{-5} m_e$, où m_e est la masse de l'électron libre. La durée de vie τ_{ph} d'un photon dans ces cavités varie d'une dizaine à quelques dizaines de picosecondes.

- La partie "matière" d'un polariton est un exciton, c'est-à-dire une paire électron–trou liée par l'interaction coulombienne dans un semi-conducteur Ga As. Ces excitons sont créés dans une zone active (BASTARD & SCHULMAN 1992) placée au centre de la cavité optique et de faible épaisseur¹¹, inférieure à 10 nm (figure 9). Dans cette zone active, le bas de la bande de conduction se situe à une énergie inférieure à celle de l'environnement : le mouvement des excitons selon

9. Contrairement à l'hypothèse qui a conduit à (53), les miroirs de Bragg ont une épaisseur bien supérieure à la longueur d'onde. Toutefois on peut montrer que le résultat (53) se généralise au cas de miroirs épais (Savona, 1999).

10. Indice de réfraction ≈ 3.7 pour Ga As.

11. En pratique on peut placer plusieurs zones actives parallèles les unes aux autres au voisinage du centre de la cavité optique, pour augmenter le signal.

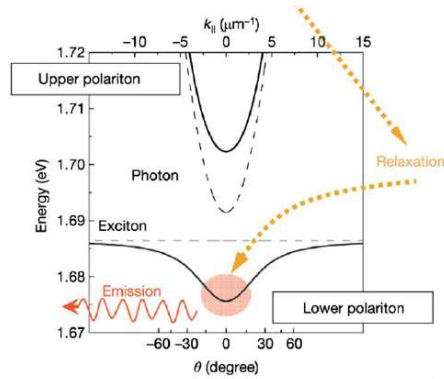


FIGURE 10. Relation de dispersion ($\mathbf{k}, \hbar\omega_{\text{ex}}$) pour le mouvement d'un polariton dans le plan xy , résultant de l'hybridation entre la relation de dispersion d'un exciton, quasiment plate à cette échelle, et celle d'un photon, qui acquiert une masse effective (très faible) du fait de son confinement dans la cavité Fabry-Perot. Figure extraite de KASPRZAK, RICHARD et al. (2006).

z est donc gelé et ces excitons se déplacent seulement dans le plan xy . Nous n'aborderons pas ici le détail de la structure d'un exciton¹² et nous le considérerons comme une particule bosonique, de masse $m_{\text{ex}} = m_e + m_h$ où m_e et m_h sont les masses effectives d'un électron et d'un trou, avec une énergie :

$$\hbar\omega_{\text{ex}}(\mathbf{k}_{\perp}) = \hbar\omega_{0,\text{ex}} + \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{\perp}^2}{2m_{\text{ex}}} \quad (55)$$

Grosso modo, cette approximation reste valable tant que la distance entre excitons voisins reste grande devant leur rayon de Bohr; nous renvoyons le lecteur souhaitant approfondir ce point vers l'article de COMBESCOT, BETBEDER-MATIBET et al. (2008).

L'interaction matière-lumière conduit à un mélange de ces deux types d'états. Partant de la zone active vide d'excitons avec un photon présent dans la cavité, ce photon peut être absorbé par le semi-conducteur : un

12. Dans les puits quantiques de GaAs utilisés en pratique, le rayon de Bohr de l'exciton est ~ 5 nm.

exciton est alors créé. Le processus inverse est également possible : si un exciton est présent dans le semi-conducteur et qu'il n'y a pas encore de photon dans la cavité, l'exciton peut disparaître (recombinaison particule-trou) en émettant un photon dans le mode de la cavité. On obtient ainsi une oscillation de Rabi possible entre ces deux états. Le point important est que l'impulsion dans le plan xy est conservée lors de cette oscillation de Rabi : le couplage matière lumière se fait à \mathbf{k}_{\perp} constant.

4-2 La relation de dispersion des polaritons de cavité

Les gaz quantiques de polaritons sont obtenus en se plaçant dans le régime de couplage fort, pour lesquels le couplage cohérent décrit ci-dessus, caractérisé par une fréquence de Rabi Ω , est beaucoup plus grand que l'inverse des temps de relaxation du système, en particulier τ_{ph} . Dans ce régime, l'excitation hybride appelée polariton correspond aux modes propres de l'hamiltonien (figure 10)

$$\hat{H}(\mathbf{k}_{\perp}) = \hbar \begin{pmatrix} \omega_{\text{ph}}(\mathbf{k}_{\perp}) & \Omega \\ \Omega & \omega_{\text{ex}}(\mathbf{k}_{\perp}) \end{pmatrix} \quad (56)$$

couplant les deux branches photoniques et excitoniques, pour une impulsion \mathbf{k}_{\perp} donnée. Le régime le plus intéressant en terme de fluide quantique est obtenu pour $\omega_{0,\text{ph}} \approx \omega_{0,\text{ex}}$, et il correspond aux deux branches de valeur propres $E_{\pm}(\mathbf{k}_{\perp})$ (cf. figure 10) :

$$E_{\pm} = \frac{\hbar}{2} (\omega_{\text{ph}} + \omega_{\text{ex}}) \pm \frac{\hbar}{2} [(\omega_{\text{ph}} - \omega_{\text{ex}})^2 + 4\Omega^2]^{1/2} \quad (57)$$

Plaçons-nous dans le cas où $\omega_{\text{ph}} \approx \omega_{\text{ex}}$, pour lequel on a en $\mathbf{k}_{\perp} = 0$ la relation $E_{\pm} = \hbar(\omega_{\text{ph}} \pm \Omega)$. Les modes de polaritons correspondants ont alors une amplitude égale pour la partie photonique et la partie excitonique, du moins tant que $\hbar^2 \mathbf{k}_{\perp}^2 / 2m_{\text{ph}} \ll \Omega$. La courbure des deux branches au voisinage de $\mathbf{k}_{\perp} = 0$ est dominée par l'aspect photonique, avec une masse effective $m_{\text{eff}} \approx 2m_{\text{ph}}$, ce qui est donc très faible devant la masse d'un exciton. Cette masse effective très faible a une conséquence directe pour l'obtention du régime de dégénérescence quantique : la densité dans l'espace des phases $\mathcal{D} = \rho \lambda_T^2$ fait intervenir le carré de la longueur d'onde

thermique

$$\lambda_T^2 = \frac{2\pi\hbar^2}{m_{\text{eff}}k_B T}, \quad (58)$$

ce qui entraîne que pour une densité et une température données, D est augmentée par 5 ordres de grandeur par rapport à un gaz d'excitons purs ! Un point tout aussi remarquable de cette hybridation est que l'interaction polariton-polariton est très significative du fait de l'amplitude significative de la branche excitonique. On arrive ainsi avec ces polaritons à fabriquer des quasi-particules de très faible masse, de l'ordre de celle des photons dans la cavité, mais notablement couplées entre elles, ce qui est indispensable pour atteindre un état superfluide. Dans ce qui suit, nous allons nous concentrer sur la branche inférieure E_- , appelée *lower polariton* sur la figure 10.

Les polaritons sont créés grâce à une irradiation laser qui crée des paires électron-trou. Ces paires ont une énergie nettement plus grande que $k_B T$, mais elles refroidissent par l'émission de phonons. Du fait de la durée de vie finie d'un polariton, on atteint un régime stationnaire avec une densité spatiale qui est une fonction croissante de l'intensité du laser de pompe. On est donc en présence d'un système dissipatif ouvert, ce qui est *a priori* très différent des gaz d'atomes que nous avons rencontrés jusqu'à maintenant. Toutefois ce gaz de polaritons peut atteindre un régime stationnaire, et ce régime sera proche d'un état d'équilibre thermique si le temps caractéristique de thermalisation est court devant la durée de vie d'un polariton.

4-3 Quasi-condensat de polaritons

Le premier fluide de polaritons de cavité présentant les signes d'une condensation de Bose-Einstein a été décrit par KASPRZAK, RICHARD et al. (2006) [voir aussi BALILI, HARTWELL et al. (2007)]. Le schéma de l'expérience est représenté sur la figure 11. Le spot illuminé par le laser de pompe a un diamètre de $35\ \mu\text{m}$ et un profil plat pour que la production de polaritons soit uniforme dans ce disque. L'excitation est faite avec une énergie $\hbar\omega$ nettement supérieure (de 100 meV) à l'énergie du fondamental. Le seuil de condensation est atteint en augmentant la puissance de pompe : au dessus d'un certain seuil, la lumière émise par la cavité provient presque exclusivement du voisinage de $\mathbf{k}_\perp = 0$ (figure 11). Une analyse plus précise

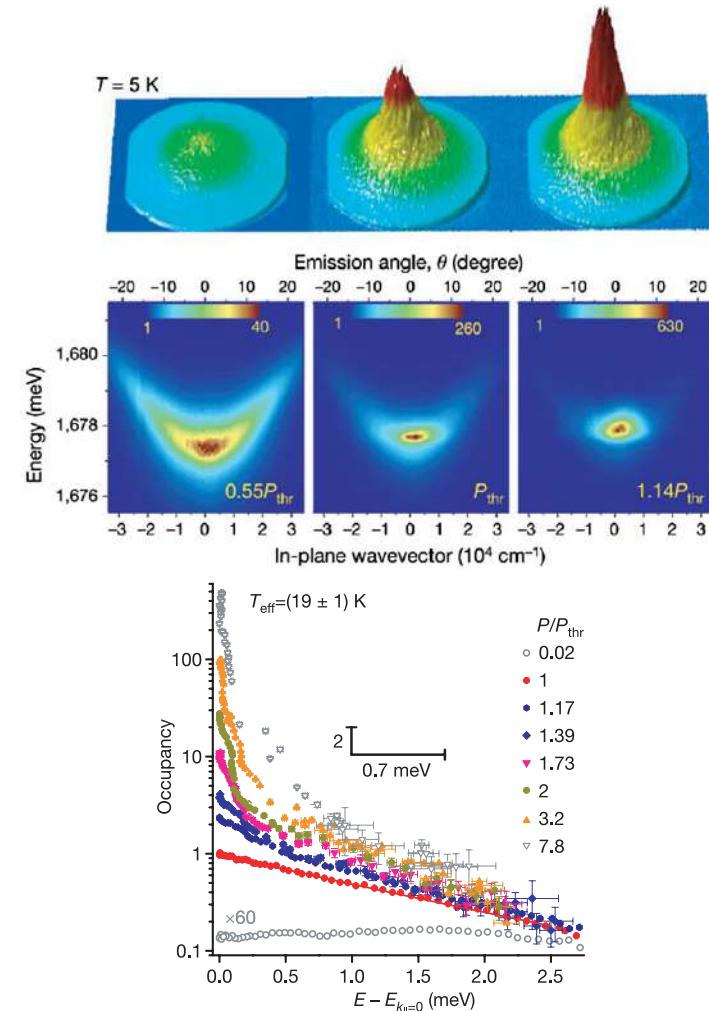


FIGURE 11. Spectre de la lumière émise par la micro-cavité quand on varie la puissance de pompe. Au dessus d'un certain seuil, la lumière émise est concentrée autour de $\mathbf{k}_\perp = 0$, signalant l'accumulation macroscopique de polaritons au voisinage de ce point. La population des états de grande énergie est saturée. L'expérience est faite à 5 K. Figure extraite de KASPRZAK, RICHARD et al. (2006).

montre qu'à partir du seuil, les états excités sont pratiquement saturés et les polaritons en excès s'accumulent dans l'état $k_{\perp} = 0$ ou en son voisinage immédiat. La résolution en énergie de ces mesures n'est toutefois pas suffisante pour déterminer s'il s'agit d'un vrai condensat (pic de Dirac en $k_{\perp} = 0$) ou du quasi-condensat (quasi-ordre algébrique) attendu à 2D.

La description générale de l'interaction polariton-polariton est complexe. Les excitons peuvent exister dans 4 états de spin, caractérisés par leur projection le long de l'axe z : $\sigma = \pm 1, \pm 2$. Pour les expériences que nous décrivons ici, seuls les états $\sigma = \pm 1$ sont pertinents. Dans le cas particulier où la lumière incidente utilisée pour créer les excitons est polarisée circulairement, seule une des deux valeurs possibles de σ est réalisée et l'interaction entre polaritons peut se décrire comme une interaction de contact répulsive, avec un coefficient de couplage \tilde{g} constant. Nous nous limiterons à ce cas pour simplifier la discussion.

Une modélisation en terme de champ classique $\psi(\mathbf{r}, t)$ à deux dimensions d'espace conduit alors à une équation du mouvement proche de l'équation de Gross–Pitaevskii utilisée pour des gaz atomiques :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_{\text{eff}}} \nabla^2 \psi + \frac{\hbar^2 \tilde{g}}{m_{\text{eff}}} |\psi|^2 \psi - i\frac{\gamma}{2} \psi + \Gamma_{\text{pump}}. \quad (59)$$

Le facteur sans dimension \tilde{g} caractérisant la force des interactions se situe dans la plage 0.01 – 0.05, ce qui est comparable aux gaz atomiques en interaction faible. Les deux derniers termes de cette équation décrivent respectivement (i) la décroissance du champ de polariton du fait de la durée de vie finie des quasi-particules et (ii) l'alimentation de ce champ par le laser de pompe. Cette alimentation peut prendre des formes différentes selon que le pompage est cohérent, auquel cas le laser de pompe impose sa phase au champ de polariton, ou incohérent quand la cohérence de la pompe est effacée lors de la relaxation des polaritons. Cette deuxième situation est voisine du cas des gaz d'atomes, la cohérence éventuelle n'étant pas imposée de l'extérieur, mais résultant d'une accumulation macroscopique de polaritons dans des états de basse énergie cinétique, accumulation favorisée par la stimulation bosonique.

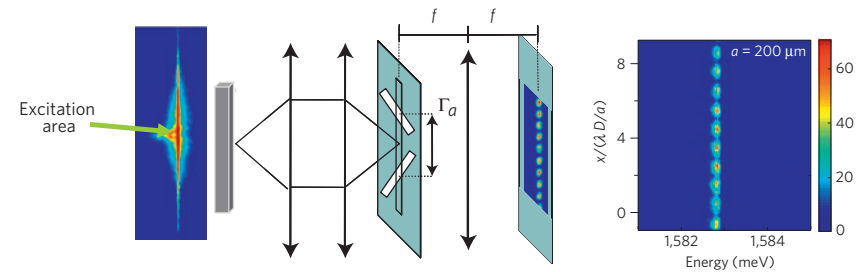


FIGURE 12. Un fluide de polaritons est créé dans un milieu très allongé. En faisant interférer la lumière issue de deux points séparés d'une distance a , on sonde la cohérence en phase du fluide. La figure de droite obtenue pour $a = 200 \mu\text{m}$, c'est-à-dire entre les deux extrémités de l'échantillon, montre que la cohérence en phase reste très bonne malgré l'éloignement de ces deux points. Figure extraite de WERTZ, FERRIER *et al.* (2010).

4-4 Expériences montrant un quasi-ordre en phase

Un avantage majeur des condensats de polaritons par rapport aux condensats atomiques réside dans le fait que le champ électromagnétique qui s'échappe de la cavité du fait de la réflectivité imparfaite des miroirs porte l'information de la phase du champ de polariton ψ . Avec des atomes, nous avons vu que l'on est obligé de recourir à des techniques relativement élaborées pour accéder à la fonction de corrélation G_1 . Avec des polaritons, il "suffit" de faire l'analyse des corrélations en phase du champ électromagnétique sortant de la cavité.

Un premier exemple de cette analyse des corrélations en phase est présenté sur la figure 12, tirée de l'article de WERTZ, FERRIER *et al.* (2010). Les polaritons peuvent évoluer dans ce cas dans un milieu quasi-unidimensionnel, de largeur L_x entre 2 et $4 \mu\text{m}$ et de longueur L_y de $200 \mu\text{m}$. Ils sont produits par un faisceau pompe de très faible diamètre, de $2 \mu\text{m}$ environ, et se propagent ensuite dans l'échantillon. Un dispositif de fentes d'Young permet de faire interférer la lumière émise par des points distants (jusqu'à L_y) et de vérifier qu'un degré de cohérence élevé existe entre ces points si la puissance de pompe est au dessus d'un certain seuil. Comme attendu dans un gaz de Bose 1D dégénéré, la longueur de

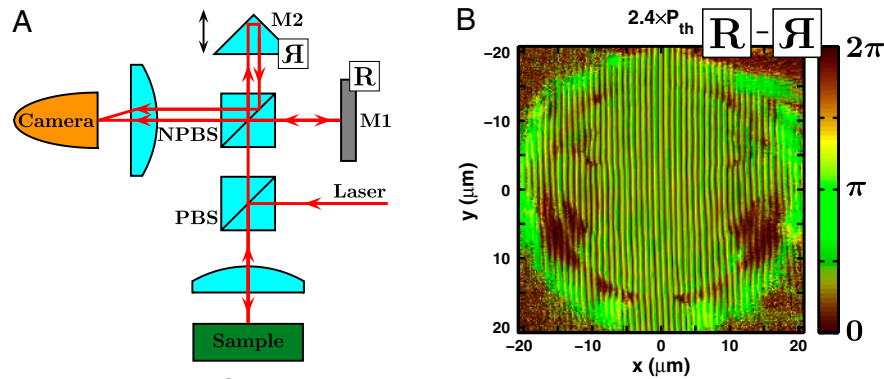


FIGURE 13. Pour sonder la cohérence en phase d'un fluide de polaritons bi-dimensionnel, on fait interférer la lumière émise avec son image miroir, ce qui permet de reconstruire la fonction de corrélation $G_1(\mathbf{r}, -\mathbf{r})$. Figure extraite de ROUMPOS, LOHSE et al. (2012).

cohérence est donc beaucoup plus grande que $\lambda_T \sim 4 \mu\text{m}$.

Des expériences portant sur la géométrie 2D ont été faites par ROUMPOS, LOHSE et al. (2012), puis par NITSCHKE, KIM et al. (2014) (il s'agit dans les deux cas du groupe dirigé par Y. Yamamoto). Nous avons représenté sur la figure 13 l'interféromètre de Michelson utilisé par cette équipe. Il permet de faire interférer le champ issu de la cavité avec son image miroir, ce qui donne accès à la fonction de corrélation $G_1(\mathbf{r}, -\mathbf{r})$. L'expérience de ROUMPOS, LOHSE et al. (2012) a été menée avec un pompage incohérent et uniforme¹³ d'un disque relativement étendu, de diamètre $\sim 40 \mu\text{m}$, alors que celle de NITSCHKE, KIM et al. (2014) a été faite avec un faisceau de pompe gaussien de largeur totale à mi-hauteur de $15 \mu\text{m}$.

Dans les deux expériences, on trouve que G_1 décroît algébriquement avec la distance quand la puissance de pompage est au dessus d'un certain seuil. Cette décroissance algébrique est bien sûr en accord avec ce qui est attendu pour le régime superfluide 2D. Toutefois, pour l'expérience de ROUMPOS, LOHSE et al. (2012), l'exposant mesuré était nettement trop élevé par rapport aux prédictions théoriques puisqu'il atteignait 1.2, c'est-

13. Profil d'intensité en forme de "chapeau haut de forme" (*top hat*).

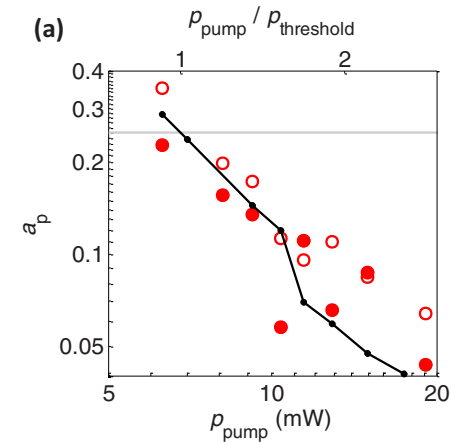


FIGURE 14. Variation avec la puissance de pompe de l'exposant α_p de la loi algébrique $G_1(r) \propto r^{-\alpha_p}$. L'exposant mesuré au seuil de la transition est compatible avec la borne supérieure 0.25. Figure extraite de NITSCHKE, KIM et al. (2014).

à-dire une valeur qui dépassait par un facteur 5 la borne supérieure prédite ($\eta = 1/\mathcal{D}_s \leq 1/4$). La raison mise en avant par ROUMPOS, LOHSE et al. (2012) était le caractère hors d'équilibre du gaz de polaritons [voir aussi l'article de revue de ROUMPOS & YAMAMOTO (2012)].

Cette explication a été modifiée dans l'article de NITSCHKE, KIM et al. (2014), qui montre quant à lui des valeurs compatibles avec la borne supérieure $\eta = 0.25$ (figure 14). Selon NITSCHKE, KIM et al. (2014), la valeur élevée de l'exposant mesuré dans les expériences de 2012 serait due à la forme particulière du faisceau pompe, qui aurait favorisé une fragmentation du quasi-condensat. La leçon à retenir de ces deux mesures ainsi que de la recherche équivalente sur les gaz d'atomes (MURTHY, BOETTCHER et al. 2015) est la difficulté à mesurer des lois algébriques avec des exposants aussi petits que 0.25. Toute imperfection expérimentale conduisant à une mauvaise homogénéité du gaz risque d'augmenter la vitesse de décroissance de G_1 et de montrer une violation apparente de la borne supérieure de $1/4$ prédite dans le cadre de la théorie BKT.

Quelle limite thermodynamique? L'article théorique récent de ALTMAN, SIEBERER et al. (2015) est venu montrer que la situation des systèmes ouverts comme les gaz de polaritons de cavité était en fait fondamentalement différente de celle des systèmes fermés, comme les gaz d'atomes. La conclusion de ce travail est qu'à grande échelle, le quasi-ordre à longue portée ne peut pas exister dans un gaz de polaritons : la fonction $G_1(r)$ doit toujours décroître exponentiellement avec la distance r .

Le point de départ de ALTMAN, SIEBERER et al. (2015) est l'équation d'évolution de la phase $\theta(\mathbf{r}, t)$ du champ $\psi(\mathbf{r}, t)$. Moyennant des approximations raisonnables, cette équation s'écrit pour un système ouvert

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \nabla^2 \theta + \frac{\lambda}{2} (\nabla \theta)^2 + \zeta(\mathbf{r}, t), \quad (60)$$

qui a la structure de l'équation KPZ (Kardar–Parisi–Zhang). Le terme D représente un coefficient de diffusion, λ caractérise la force du couplage non-linéaire et ζ représente un bruit blanc. À partir d'une analyse par le groupe de renormalisation, ALTMAN, SIEBERER et al. (2015) ont montré que le terme non-linéaire finit toujours par devenir dominant, ce qui signifie que la fonction $\theta(\mathbf{r}, t)$ devient de plus en plus "rugueuse". Le quasi-condensat est donc toujours détruit à l'issue de cette étape de renormalisation, d'où la décroissance exponentielle de G_1 .

Toutefois ALTMAN, SIEBERER et al. (2015) expliquent également que la distance caractéristique ℓ de cette décroissance exponentielle de G_1 peut être très grande. La situation réalisée expérimentalement sonde donc une échelle de longueur intermédiaire $\ll \ell$ sur laquelle on peut linéariser l'équation KPZ. On retrouve alors la décroissance en loi de puissance pour G_1 , ainsi que la transition BKT pilotée par la dissociation des paires de vortex [voir par exemple CHIOCCHETTA & CARUSOTTO (2013)].

4-5 Polaritons autour d'un obstacle

La mise en évidence directe de la superfluidité d'un fluide de polaritons de cavité a été faite par AMO, LEFRÈRE et al. (2009). Dans cette expérience, on produit les polaritons avec une énergie donnée au moyen d'un pompage cohérent et résonant. En choisissant un angle d'incidence non nul (entre 2 et 4 degrés) pour le laser de pompe, on crée les polaritons

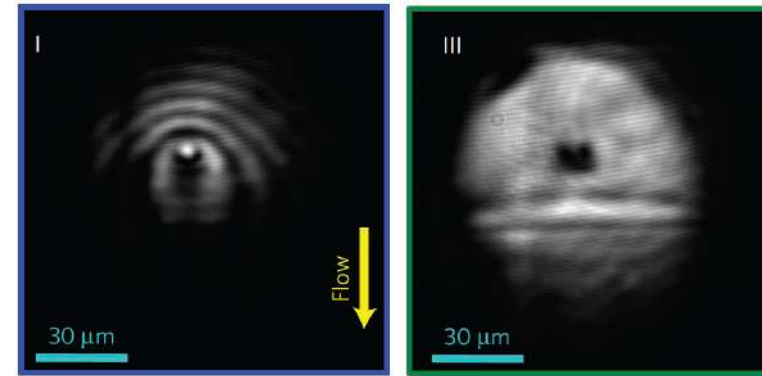


FIGURE 15. Écoulement d'un fluide de polaritons de vitesse $\sim 6 \cdot 10^5$ m/s autour d'un obstacle statique. À basse densité (image de gauche), une trainée claire apparaît dans le sillage de l'objet. À haute densité, ce sillage disparaît, indication d'un écoulement superfluide. La vitesse du son pour l'image de droite est de l'ordre de $2 \cdot 10^6$ m/s. Figure extraite de AMO, LEFRÈRE et al. (2009).

avec une vitesse v_p non nulle, en l'occurrence de l'ordre de $6 \cdot 10^5$ m/s. On peut en particulier les produire au voisinage d'un défaut du matériau¹⁴. L'écoulement du fluide polaritonique autour du défaut renseigne sur son caractère superfluide. À basse densité du fluide, $\sim 1 \mu\text{m}^{-2}$, la vitesse du son $c_0 = \frac{\hbar}{m} \sqrt{\tilde{g}\rho}$ est inférieure à v_p et on voit clairement une trainée lors du passage du fluide sur l'objet. À plus haute densité, $40 \mu\text{m}^{-2}$ pour l'image de droite de la figure 15, cette trainée disparaît, signe d'un écoulement superfluide. Pour ces expériences, le paramètre \tilde{g} est de l'ordre de 10^{-3} , correspondant à une vitesse du son $c_s = 2 \cdot 10^6$ m/s pour l'expérience à haute densité. Le caractère superfluide de l'écoulement est confirmé la mesure de la distribution en impulsion, qui n'est pas affectée par la présence de l'obstacle dans le régime de haute densité.

¹⁴ Ces défauts apparaissent naturellement dans le processus de croissance des échantillons et on s'intéresse ici à un défaut de petite taille, que l'on peut considérer comme un objet ponctuel.

Références

- ALLARD, B., T. PLISSON, M. HOLZMANN, G. SALOMON, A. ASPECT, P. BOUYER & T. BOURDEL (2012), « Effect of disorder close to the superfluid transition in a two-dimensional Bose gas », in *Phys. Rev. A* **85** (3), p. 033602.
- ALTMAN, Ehud, Lukas M SIEBERER, Leiming CHEN, Sebastian DIEHL & John TONER (2015), « Two-dimensional superfluidity of exciton polaritons requires strong anisotropy », in *Physical Review X* **5**, p. 011017.
- AMO, Alberto & Jacqueline BLOCH (2016), « Exciton-polaritons in lattices : A non-linear photonic simulator », in *Comptes Rendus Physique* **17**, p. 934–945.
- AMO, Alberto, Jérôme LEFRÈRE, Simon PIGEON, Claire ADRADOS, Cristiano CIUTI, Iacopo CARUSOTTO, Romuald HOUDRÉ, Elisabeth GIACOBINO & Alberto BRAMATI (2009), « Superfluidity of polaritons in semiconductor microcavities », in *Nature Physics* **5**, p. 805–810.
- ARMIJO, Julien, Thibaut JACQMIN, Karen KHERUNTSYAN & Isabelle BOUCHOULE (2011), « Mapping out the quasicondensate transition through the dimensional crossover from one to three dimensions », in *Physical Review A* **83**, p. 021605.
- ASTRAKHARCHIK, G. E. & L. P. PITAEVSKII (2004), « Motion of a heavy impurity through a Bose-Einstein condensate », in *Phys. Rev. A* **70**, p. 013608.
- BALILI, R, V HARTWELL, D SNOKE, L PFEIFFER & K WEST (2007), « Bose-Einstein condensation of microcavity polaritons in a trap », in *Science* **316**, p. 1007–1010.
- BASTARD, Gerald & Joel SCHULMAN (1992), *Wave mechanics applied to semiconductor heterostructures*.
- BEELER, MC, MEW REED, T HONG & SL ROLSTON (2012), « Disorder-driven loss of phase coherence in a quasi-2D cold atom system », in *New Journal of Physics* **14**, p. 073024.
- BISSET, R. N., M. J. DAVIS, T. P. SIMULA & P. B. BLAKIE (2009), « Quasi-condensation and coherence in the quasi-two-dimensional trapped Bose gas », in *Phys. Rev. A* **79**, p. 033626.
- BOETTCHER, Igor & Markus HOLZMANN (2016), « Quasi-long-range order in trapped two-dimensional Bose gases », in *Phys. Rev. A* **94** (1), p. 011602.
- BOURDEL, Thomas (2012), « Phase diagrams of two-dimensional and three-dimensional disordered Bose gases in the local density approximation », in *Phys. Rev. A* **86** (6), p. 063626.
- CARLEO, Giuseppe, Guilhem BOÉRIS, Markus HOLZMANN & Laurent SANCHEZ-PALENCIA (2013), « Universal Superfluid Transition and Transport Properties of Two-Dimensional Dirty Bosons », in *Phys. Rev. Lett.* **111** (5), p. 050406.
- CARUSOTTO, Iacopo & Cristiano CIUTI (2013), « Quantum fluids of light », in *Rev. Mod. Phys.* **85** (1), p. 299–366.
- CAZALILLA, M. A., A. IUCCI & T. GIAMARCHI (2007), « Competition between vortex unbinding and tunneling in an optical lattice », in *Phys. Rev. A* **75**, p. 051603.
- CHERRORET, Nicolas, Tomasz KARPIUK, Benoît GRÉMAUD & Christian MINIATURA (2015), « Thermalization of matter waves in speckle potentials », in *Physical Review A* **92**, p. 063614.
- CHIOCCHETTA, Alessio & Iacopo CARUSOTTO (2013), « Non-equilibrium quasi-condensates in reduced dimensions », in *EPL (Europhysics Letters)* **102**, p. 67007.
- CHOI, Jae-yoon, Sang Won SEO, Woo Jin KWON & Yong-il SHIN (2012), « Probing Phase Fluctuations in a 2D Degenerate Bose Gas by Free Expansion », in *Phys. Rev. Lett.* **109** (12), p. 125301.
- CHOI, Jae-yoon, Sang Won SEO & Yong-il SHIN (2013), « Observation of thermally activated vortex pairs in a quasi-2D Bose gas », in *Physical review letters* **110**, p. 175302.
- CHOMAZ, Lauriane, Laura CORMAN, Tom BIENAIMÉ, Rémi DESBUQUOIS, Christof WEITENBERG, Sylvain NASCIBÈNE, Jérôme BEUGNON & Jean DALIBARD (2015), « Emergence of coherence via transverse condensation in a uniform quasi-two-dimensional Bose gas », in *Nature communications* **6**.
- CLADÉ, P., C. RYU, A. RAMANATHAN, K. HELMERSON & W. D. PHILLIPS (2009), « Observation of a 2D Bose gas : from thermal to quasicondensate to superfluid », in *Phys. Rev. Lett.* **102**, p. 170401.
- COHEN-TANNOUJJI, Claude & David GUÉRY-ODELIN (2011), *Advances in atomic physics : an overview*, World Scientific.
- COMBESCOT, Monique, Odile BETBEDER-MATIBET & François DUBIN (2008), « The many-body physics of composite bosons », in *Physics Reports* **463**, p. 215–320.

- DE ROSSI, Camilla, Romain DUBESSY, Karina MERLOTI, Mathieu de Goër de HERVE, Thomas BADR, Aurélien PERRIN, Laurent LONGCHAM-BON & Hélène PERRIN (2016), « Probing superfluidity in a quasi two-dimensional Bose gas through its local dynamics », in *New Journal of Physics* **18**, p. 062001.
- DESBUQUOIS, Rémi (2013), « Thermal and superfluid properties of the two-dimensional Bose gas », thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie-Paris VI.
- DESBUQUOIS, Rémi, Lauriane CHOMAZ, Tarik YEFSAH, Julian LÉONARD, Jérôme BEUGNON, Christof WEITENBERG & Jean DALIBARD (2012), « Superfluid behaviour of a two-dimensional Bose gas », in *Nature Physics* **8**, p. 645–648.
- DRUTEN, N. J. van & W. KETTERLE (1997), « Two-step condensation of the ideal Bose gas in highly anisotropic traps », in *Phys. Rev. Lett.* **79**, p. 549–552.
- FISHER, D. S. & P. C. HOHENBERG (1988), « Dilute Bose gas in two dimensions », in *Phys. Rev. B* **37**, p. 4936.
- FLETCHER, Richard J., Martin ROBERT DE SAINT VINCENT, Jay MAN, Nir NAVON, Robert P. SMITH, Konrad G. H. VIEBAHN & Zoran HADZIBABIC (2015), « Connecting Berezinskii-Kosterlitz-Thouless and BEC Phase Transitions by Tuning Interactions in a Trapped Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **114** (25), p. 255302.
- FOSTER, Christopher J., P. Blair BLAKIE & Matthew J. DAVIS (2010), « Vortex pairing in two-dimensional Bose gases », in *Phys. Rev. A* **81** (2), p. 023623.
- GIORGINI, S, LP PITAEVSKII & S STRINGARI (1997), « Thermodynamics of a trapped Bose-condensed gas », in *Journal of Low Temperature Physics* **109**, p. 309–355.
- GUÉRY-ODELIN, D. & S. STRINGARI (1999), « Scissors mode and superfluidity of a trapped Bose-Einstein condensed gas », in *Phys. Rev. Lett.* **83**, p. 4452.
- HADZIBABIC, Z. & J. DALIBARD (2011), « Two-dimensional Bose fluids : An atomic physics perspective », in *Rivista del Nuovo Cimento* **34**, p. 389.
- HADZIBABIC, Z., P. KRÜGER, M. CHENEAU, B. BATTELIER & J. DALIBARD (2006), « Berezinskii-Kosterlitz-Thouless crossover in a trapped atomic gas », in *Nature* **441**, p. 1118–1121.
- HOLZMANN, M., G. BAYM, J. P. BLAIZOT & F. LALOË (2007), « Superfluid transition of homogeneous and trapped two-dimensional Bose gases », in *P.N.A.S.* **104**, p. 1476.
- HOLZMANN, M., M. CHEVALLIER & W. KRAUTH (2008), « Semiclassical theory of the quasi two-dimensional trapped gas », in *Europhys. Lett.* **82**, p. 30001.
- HOLZMANN, M. & W. KRAUTH (2008), « Kosterlitz-Thouless transition of the quasi two-dimensional trapped Bose gas », in *Phys. Rev. Lett.* **100**, p. 190402.
- HOLZMANN, Markus, Maguelonne CHEVALLIER & Werner KRAUTH (2010), « Universal correlations and coherence in quasi-two-dimensional trapped Bose gases », in *Phys. Rev. A* **81**, p. 043622.
- IMAMBEKOV, A., I. E. MAZETS, D. S. PETROV, V. GRITSEV, S. MANZ, S. HOFFERBERTH, T. SCHUMM, E. DEMLER & J. SCHMIEDMAYER (2009), « Density ripples in expanding low-dimensional gases as a probe of correlations », in *Phys. Rev. A* **80**, p. 033604.
- KAGAN, Yu., V. A. KASHURNIKOV, A. V. KRASAVIN, N. V. PROKOF'EV & B. V. SVISTUNOV (2000), « Quasicondensation in a two-dimensional interacting Bose gas », in *Phys. Lett. A* **61**, p. 043608.
- KASPRZAK, J., M. RICHARD, S. KUNDERMANN, A. BAAS, P. JEAMBRUN et al. (2006), « Bose-Einstein condensation of exciton polaritons », in *Nature* **443**, p. 409–414.
- KRINNER, Sebastian, David STADLER, Jakob MEINEKE, Jean-Philippe BRANTUT & Tilman ESSLINGER (2013), « Superfluidity with disorder in a thin film of quantum gas », in *Phys. Rev. Lett.* **110** (10), p. 100601.
- KRÜGER, P., Z. HADZIBABIC & J. DALIBARD (2007), « Critical Point of an Interacting Two-Dimensional Atomic Bose Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **99**, p. 040402.
- KWON, Woo Jin, Joon Hyun KIM, Sang Won SEO & Y. SHIN (2016), « Observation of von Kármán Vortex Street in an Atomic Superfluid Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **117** (24), p. 245301.
- LEVINSEN, Jesper, M. PARISH et al. (2015), « Strongly interacting two-dimensional Fermi gases », in *Annual Review of Cold Atoms and Molecules : Volume 3* **3**, p. 1.
- MARAGO, OM, SA HOPKINS, J. ARLT, E. HODBY, G. HECHENBLAIKNER & CJ FOOT (2000), « Observation of the scissors mode and evidence for superfluidity of a trapped Bose-Einstein condensed gas », in *Physical review letters* **84**, p. 2056–2059.

- MAZETS, Igor E. (2012), « Two-dimensional dynamics of expansion of a degenerate Bose gas », in *Phys. Rev. A* **86** (5), p. 055603.
- MURTHY, P. A., I. BOETTCHER, L. BAYHA, M. HOLZMANN, D. KEDAR, M. NEIDIG, M. G. RIES, A. N. WENZ, G. ZÜRN & S. JOCHIM (2015), « Observation of the Berezinskii-Kosterlitz-Thouless Phase Transition in an Ultracold Fermi Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **115** (1), p. 010401.
- NITSCHKE, Wolfgang H, Na Young KIM, Georgios ROUMPOS, Christian SCHNEIDER, Martin KAMP, Sven HÖFLING, Alfred FORCHEL & Yoshihisa YAMAMOTO (2014), « Algebraic order and the Berezinskii-Kosterlitz-Thouless transition in an exciton-polariton gas », in *Physical Review B* **90**, p. 205430.
- ONOFRIO, R., C. RAMAN, J. M. VOGELS, J. R. ABO-SHAEER, A. P. CHIKKATUR & W. KETTERLE (2000), « Observation of Superfluid Flow in a Bose-Einstein Condensed Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **85**, p. 2228–2231.
- PETROV, D. S., M. HOLZMANN & G. V. SHLYAPNIKOV (2000), « Bose-Einstein Condensation in Quasi-2D Trapped Gases », in *Phys. Rev. Lett.* **84**, p. 2551.
- PILATI, S., S. GIORGINI & N. PROKOF'EV (2008), « Critical Temperature of Interacting Bose Gases in Two and Three Dimensions », in *Phys. Rev. Lett.* **100** (14), p. 140405.
- PITAEVSKII, L. & S. STRINGARI (2016), *Bose-Einstein Condensation and Superfluidity*, 2nd edition, Oxford : Oxford University Press.
- PROKOF'EV, N. V., O. RUEBENACKER & B. V. SVISTUNOV (2001), « Critical Point of a Weakly Interacting Two-Dimensional Bose Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **87**, p. 270402.
- PROKOF'EV, N. V. & B. V. SVISTUNOV (2002), « Two-dimensional weakly interacting Bose gas in the fluctuation region », in *Phys. Rev. A* **66**, p. 043608.
- RAMAN, C., M. KÖHL, R. ONOFRIO, D. S. DURFEE, C. E. KUKLEWICZ, Z. HADZIBABIC & W. KETTERLE (1999), « Evidence for a critical velocity in a Bose-Einstein condensed gas », in *Phys. Rev. Lett.* **83**, p. 2502–2505.
- RANÇON, A & N DUPUIS (2012), « Universal thermodynamics of a two-dimensional Bose gas », in *Physical Review A* **85**, p. 063607.
- ROUMPOS, Georgios, Michael LOHSE, Wolfgang H NITSCHKE, Jonathan KEELING, Marzena Hanna SZYMAŃSKA, Peter B LITTLEWOOD, Andreas LÖFFLER, Sven HÖFLING, Lukas WORSCHKECH, Alfred FORCHEL et al. (2012), « Power-law decay of the spatial correlation function in exciton-polariton condensates », in *Proceedings of the National Academy of Sciences* **109**, p. 6467–6472.
- ROUMPOS, Georgios & Yoshihisa YAMAMOTO (2012), « The Berezinskii-Kosterlitz-Thouless Phase Transition in Exciton-Polariton Condensates », in *Exciton Polaritons in Microcavities*, Springer, , p. 85–146.
- RUGWAY, Wu, AG MANNING, SS HODGMAN, RG DALL, AG TRUSCOTT, T LAMBERTON & Karen V KHERUNTSYAN (2013), « Observation of Transverse Bose-Einstein Condensation via Hanbury Brown-Twiss Correlations », in *Physical review letters* **111**, p. 093601.
- SEO, Sang Won, Jae-yoon CHOI & Yong-il SHIN (2014), « Scaling behavior of density fluctuations in an expanding quasi-two-dimensional degenerate Bose gas », in *Phys. Rev. A* **89** (4), p. 043606.
- SINGH, V. P. & L. MATHEY (2014), « Noise correlations of two-dimensional Bose gases », in *Phys. Rev. A* **89** (5), p. 053612.
- SINGH, Vijay Pal, Christof WEITENBERG, Jean DALIBARD & Ludwig MATHEY (2017), « Superfluidity and relaxation dynamics of a laser-stirred two-dimensional Bose gas », in *Phys. Rev. A* **95** (4), p. 043631.
- TUNG, S., G. LAMPORISI, D. LOBBER, L. XIA & E. A. CORNELL (2010), « Observation of the Presuperfluid Regime in a Two-Dimensional Bose Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **105**, p. 230408.
- WEIMER, Wolf, Kai MORGNER, Vijay Pal SINGH, Jonas SIEGL, Klaus HUECK, Niclas LUICK, Ludwig MATHEY & Henning MORITZ (2015), « Critical Velocity in the BEC-BCS Crossover », in *Phys. Rev. Lett.* **114** (9), p. 095301.
- WERTZ, E., L. FERRIER, D. D. SOLNYSHKOV, R. JOHNE, D. SANVITTO et al. (2010), « Spontaneous formation and optical manipulation of extended polariton condensates », in *Nat Phys* **6**, p. 860–864.