

# Chapitre 6

## Le modèle de Harper-Hofstadter : l'effet Hall retrouvé

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Le modèle de Harper–Hofstadter</b>	<b>2</b>
1-1	Les niveaux de Landau	2
1-2	Réseau carré et champ magnétique	3
1-3	Nouvelle périodicité dans le cas rationnel	5
1-4	Spectre de l'hamiltonien	6
1-5	Topologie des bandes d'énergie	8
<b>2</b>	<b>Le modèle de HH avec des atomes</b>	<b>9</b>
2-1	Premières propositions, premières expériences	9
2-2	Super-réseau et projection de bandes	10
2-3	La mesure du nombre de Chern	11
2-4	Le problème du chauffage	12
<b>3</b>	<b>L'effet Hall en photonique</b>	<b>13</b>
3-1	Micro-résonateurs en anneau	13
3-2	Implémentation photonique passive	14
3-3	Implémentation photonique active	16
<b>4</b>	<b>Utilisation de la structure interne atomique</b>	<b>17</b>
4-1	Transitions Raman et dimensions synthétiques	18
4-2	États habillés et suivi adiabatique	19
4-3	Les réseaux de flux	20
4-4	Interactions entre états habillés	23

---

Nous abordons dans ce dernier chapitre le problème qui est en fait à l'origine de la notion de bandes topologiques : l'effet Hall quantique. C'est en effet l'analyse du mouvement quantique à deux dimensions d'un ensemble de charges placées dans un champ magnétique qui a montré la quantification de grandeurs liées au transport, comme la conductivité de Hall, et qui a mis en avant l'importance des états de bords. C'est également cette analyse qui a permis de dégager la notion de robustesse topologique en physique de la matière condensée.

*A priori* l'étude de l'effet Hall quantique ne nécessite pas de réseau sous-jacent. On trouve cet effet si les particules se déplacent librement dans le plan  $xy$ , sous le seul effet du champ magnétique  $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_z$ ; le spectre en énergie correspond alors aux *niveaux de Landau*. Toutefois, dans le but de faire le lien avec les cours qui précèdent et pour décrire précisément les expériences récentes en photonique et en physique des atomes froids, nous allons nous concentrer essentiellement sur le cas où un potentiel périodique  $V(\mathbf{r})$  est également présent dans le plan  $xy$ . La possibilité de traiter ce potentiel dans la limite des liaisons fortes permet alors de simplifier considérablement l'analyse : c'est le modèle de Harper–Hofstadter.

Une fois ce modèle posé, nous étudierons ses implémentations récentes en physique atomique et en photonique. Nous verrons comment elles ont permis la mesure explicite du nombre de Chern des bandes d'énergie. Nous montrerons également comment les états de bord associés à cette topologie non triviale permettent de réaliser de nouveaux dispositifs, des *lasers topologiques*, qui exploitent la robustesse des bandes ainsi formées.

Nous terminerons ce chapitre par un bref aperçu des nouvelles possibilités ouvertes par l'exploitation des degrés de liberté internes des atomes. Ces degrés de liberté peuvent à eux seuls former une dimension de l'espace, on parle alors de *dimension synthétique*. On peut également les utiliser pour enrichir le "paysage énergétique" dans lequel les particules évoluent : les bandes d'énergie qui apparaissent pour ces "états habillés" peuvent elles aussi posséder une topologie non triviale, très similaire à celle d'un niveau de Landau. Pour finir, nous montrerons comment cet "habillage" des atomes par la lumière peut donner naissance à des interactions non locales entre particules.

## 1 Le modèle de Harper-Hofstadter

L'effet Hall quantique concerne le mouvement de particules chargées en mouvement libre dans le plan  $xy$ , en présence d'un champ magnétique  $\mathbf{B} = B \mathbf{u}_z$  perpendiculaire à ce plan. Le modèle de Harper-Hofstadter<sup>1</sup> est une version discrétisée de ce problème : les particules sont placées sur un réseau régulier, carré ou triangulaire, décrit dans la limite des liaisons fortes avec uniquement des couplages entre premiers voisins. La présence du champ magnétique est prise en compte par des amplitudes de saut complexes entre sites adjacents.

Dans cette partie, nous allons commencer par rappeler quelques résultats du problème continu, en particulier le spectre en niveaux de Landau équidistants, avant de passer au problème discrétisé.

### 1-1 Les niveaux de Landau

Nous commençons notre discussion par un bref rappel concernant le traitement quantique du mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme  $\mathbf{B} = B \mathbf{u}_z$ . Ce problème est abordé dans de

1. Plus précisément, HARPER (1955) a montré que l'étude de ce mouvement se ramenait à un problème uni-dimensionnel, dont il a étudié la limite en champ faible, retrouvant ainsi les niveaux de Landau. HOFSTADTER (1976) a approfondi cette étude en montrant la nature fractale du spectre, qui devient significative pour de grands champs magnétiques.

nombreux ouvrages de mécanique quantique [voir par exemple COHEN-TANNOUJI, DIU et al. (1973)] et nous l'avons étudié en détail dans le cours 2013-14. Nous allons donc nous borner ici à donner les quelques éléments pertinents en relation avec notre thème principal, les bandes d'énergie topologiques.

L'hamiltonien décrivant le mouvement de la particule de masse  $m$  et de charge  $e$  s'écrit

$$\hat{H} = (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}))^2 / 2m \quad (1)$$

où  $\hat{\mathbf{r}}$  et  $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla_{\mathbf{r}}$  désignent les opérateurs position et impulsion de la particule. Le potentiel vecteur est défini à une transformation de jauge près et vérifie

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}. \quad (2)$$

Nous nous limiterons ici au mouvement de la particule dans le plan  $xy$  perpendiculaire au champ magnétique. Le spectre en énergie s'obtient simplement en remarquant que l'hamiltonien peut encore s'écrire

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{\Pi}_x^2 + \hat{\Pi}_y^2), \quad (3)$$

où l'on a introduit l'opérateur quantité de mouvement

$$\hat{\Pi} = \hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}). \quad (4)$$

Les deux composantes de cet opérateur vérifient la relation de commutation

$$[\hat{\Pi}_x, \hat{\Pi}_y] = i\hbar eB \quad (5)$$

de sorte que l'algèbre de ces composantes est formellement identique à celle d'un oscillateur harmonique

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{X}^2 + \hat{P}^2) \quad \text{avec} \quad [\hat{X}, \hat{P}] = i. \quad (6)$$

On déduit de cette équivalence que le spectre est composé de niveaux équidistants appelés *niveaux de Landau* :

$$E_n = \hbar\omega_c (n + 1/2) \quad \text{avec} \quad \omega_c = eB/m, \quad (7)$$

$\omega_c$  représentant la fréquence cyclotron de la particule dans le champ  $B$ .

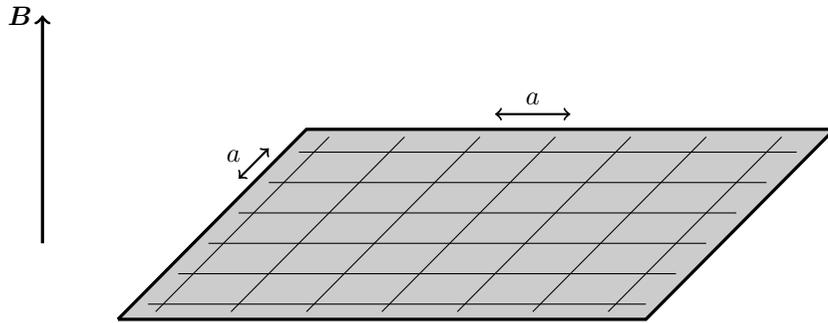


FIGURE 1. Réseau carré à deux dimensions de pas  $a$  en présence d'un champ magnétique  $B$  orthogonal au plan.

Une étude détaillée des états propres associés à ce spectre en énergie montre que chaque niveau de Landau possède une dégénérescence macroscopique

$$\text{dégénérescence} = \frac{S}{2\pi\ell^2} \quad (8)$$

où  $S$  est la surface de l'échantillon et

$$\ell = (\hbar/eB)^{1/2} \quad (9)$$

est la *longueur magnétique*.

Nous obtenons donc un spectre de bande similaire à celui d'une particule dans un potentiel périodique, à ceci près que chaque bande est infiniment étroite. Un calcul détaillé permet de montrer que le nombre de Chern  $\mathcal{C}$  de chaque niveau de Landau vaut 1. Cela conduit à une conductivité de Hall  $\sigma_{xy}$  non nulle, ce qui généralise en fait un résultat bien connu de mécanique classique : quand on applique une force  $\mathbf{F} = F\mathbf{u}_x$  (par exemple grâce à un champ électrique) sur une particule chargée placée dans un champ magnétique orienté selon  $z$ , la particule se déplace en moyenne le long de l'axe  $y$ . Ce déplacement peut être vu comme un cas particulier de la *vitesse anormale* que nous avons rencontrée au chapitre 4.

## 1-2 Réseau carré et champ magnétique

Nous passons maintenant au problème de Harper–Hofstadter, qui consiste à transposer la question précédente à un espace discrétisé. Plus précisément, nous souhaitons modéliser le mouvement d'une particule sur un réseau carré de côté  $a$ , dans le cas où la particule est chargée et soumise à un champ magnétique uniforme perpendiculaire au plan du réseau (figure 1). Nous supposons qu'il est légitime de limiter les couplages aux sites les plus proches et nous nous limiterons à l'approximation à une bande : une base de l'espace des états de la particule est donnée par  $\{|A_j\rangle\}$ , où la paire d'entiers relatifs  $\mathbf{j} = (j_x, j_y)$  repère la position de chaque site :

$$A_j : \quad \mathbf{r}_j = a(j_x\mathbf{u}_x + j_y\mathbf{u}_y). \quad (10)$$

En champ magnétique nul, l'hamiltonien s'écrit

$$\hat{H}_0 = -J \sum_{\langle \mathbf{j}, \mathbf{j}' \rangle} |A_j\rangle \langle A_{j'}|, \quad (11)$$

où la notation  $\langle \mathbf{j}, \mathbf{j}' \rangle$  restreint la somme sur les couples de proches voisins. Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, les états propres de cet hamiltonien périodique pour une cellule unité à un site sont les fonctions de Bloch

$$|\psi_{\mathbf{q}}\rangle = \sum_{\mathbf{j}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_j} |A_j\rangle \quad (12)$$

et leur énergie est

$$E_{\mathbf{q}} = -2J [\cos(q_x a) + \cos(q_y a)], \quad (13)$$

ce qui correspond à une bande d'énergie de largeur  $8J$ .

La présence du champ magnétique est prise en compte dans cette approximation à une bande en attribuant une valeur complexe aux éléments de matrice tunnel entre sites adjacents (phase de Peierls) :

$$J \quad \text{remplacé par} \quad J \exp[i\gamma(\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j}')], \quad (14)$$

avec pour préserver le caractère hermitien de l'hamiltonien

$$J e^{i\gamma(\mathbf{j}' \rightarrow \mathbf{j})} = \left( J e^{i\gamma(\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j}')} \right)^* \Rightarrow \gamma(\mathbf{j}' \rightarrow \mathbf{j}) = -\gamma(\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j}'). \quad (15)$$

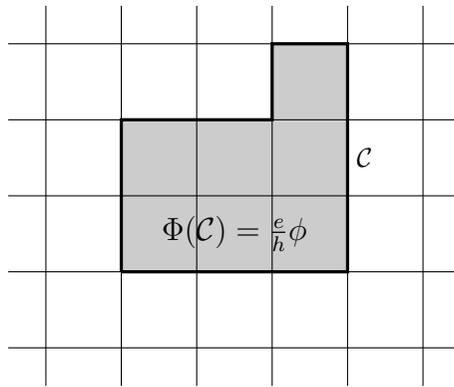


FIGURE 2. Pour tout contour  $\mathcal{C}$  sur le réseau carré, le choix des phases  $\gamma(\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j}')$  doit conduire à la valeur correcte de la phase de Aharonov-Bohm  $\Phi(\mathcal{C}) = (e/h)\phi$ , où  $\phi$  est le flux du champ magnétique à travers le contour.

Les phases individuelles  $\gamma(\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j}')$  sont choisies de manière à ce que la phase de Aharonov-Bohm  $\Phi(\mathcal{C})$  accumulée le long d'un contour fermé :

$$\Phi(\mathcal{C}) \equiv \sum_{\text{contour}} \gamma(\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j}') \quad (16)$$

vérifie

$$\Phi(\mathcal{C}) = \frac{e}{\hbar}\phi \quad \text{mod } (2\pi), \quad (17)$$

où  $\phi$  est le flux de  $\mathbf{B}$  à travers le contour considéré (figure 2). Il y a bien sûr un nombre infini de choix possibles pour les  $\gamma(\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j}')$  : c'est le principe de l'invariance de jauge.

En utilisant l'additivité déduite de (15), on se convaincra aisément qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la relation (17) soit vérifiée pour tout contour  $\mathcal{C}$  est de la satisfaire pour chaque cellule carrée élémentaire. En suivant les bords d'une cellule unité carrée de surface  $a^2$  dans le sens direct (figure 3), on doit donc avoir :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{cellule}} &= \gamma(\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j} + \mathbf{u}_x) + \gamma(\mathbf{j} + \mathbf{u}_x \rightarrow \mathbf{j} + \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) \\ &\quad - \gamma(\mathbf{j} + \mathbf{u}_y \rightarrow \mathbf{j} + \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) - \gamma(\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j} + \mathbf{u}_y) = \frac{qa^2B}{\hbar} \quad \text{mod } (2\pi) \end{aligned} \quad (18)$$

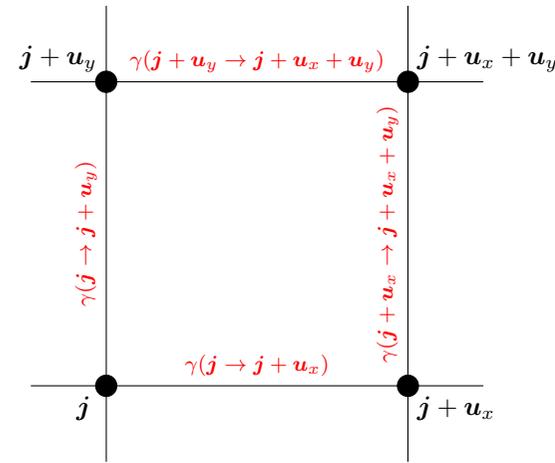


FIGURE 3. Facteurs de phase sur les bords d'une cellule unité donnée. La somme algébrique des coefficients  $\gamma$  doit vérifier la contrainte (18).

**Substitution de Peierls.** Un moyen simple pour trouver un ensemble de coefficients  $\gamma(\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j}')$  satisfaisant (18) consiste à se donner un potentiel vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  pour le problème continu (c'est-à-dire faire un choix de jauge) et à poser que

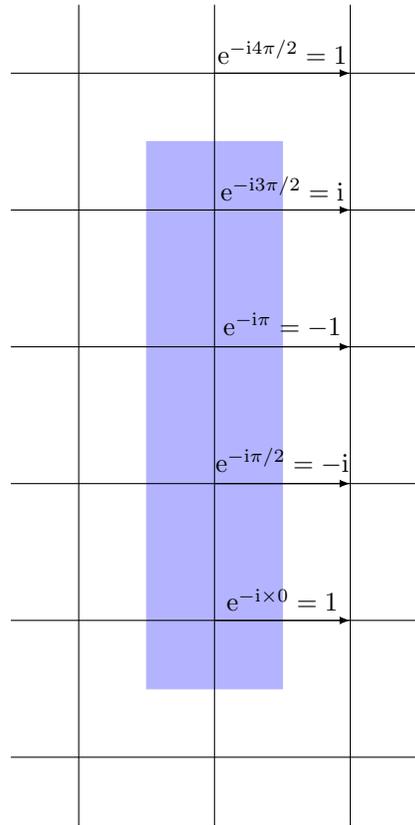
$$\gamma(\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j}') = \frac{e}{\hbar} \int_{a\mathbf{j}}^{a\mathbf{j}'} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (19)$$

Cette prescription fournit un ensemble convenable pour les coefficients  $\gamma$  puisque l'intégrale de contour  $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  est par définition égale au flux du champ magnétique à travers ce contour  $\mathcal{C}$ .

**Valeurs du champ magnétique.** Dans ce problème discrétisé, le champ magnétique se caractérise donc entièrement par la phase  $\Phi_{\text{cellule}}$  qu'il crée à travers une cellule unité, c'est-à-dire par le nombre  $\alpha$  défini par

$$\alpha = \frac{\Phi_{\text{cellule}}}{2\pi}. \quad (20)$$

Ceci vient imposer une valeur maximale pertinente : si le champ est tel que  $\Phi_{\text{cellule}} = 2\pi$ , il n'aura aucun effet puisqu'on peut le décrire par des coefficients  $\gamma(\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j}')$  tous réels positifs, comme pour le champ  $\mathbf{B} = 0$ .



**FIGURE 4.** Jauge de Landau pour le problème de Harper-Hofstadter avec un flux  $1/4$ , c'est-à-dire une phase de Aharonov-Bohm  $\Phi_{\text{cellule}} = \pi/2$  par cellule du réseau carré initial (phase mesurée dans le sens trigonométrique). La zone grisée d'aire  $4a^2$  représente une cellule magnétique unité possible pour ce choix de jauge.

### 1-3 Nouvelle périodicité dans le cas rationnel

Le fait d'attribuer une phase  $\gamma(\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j}')$  aux coefficients tunnel fait perdre la périodicité initiale du problème et vient compliquer considérablement la recherche du spectre de l'hamiltonien. Toutefois, on peut retrouver un problème périodique – mais de plus grande période spatiale – quand  $\alpha$  est un nombre rationnel :

$$\alpha = \frac{p'}{p}. \tag{21}$$

Considérons en effet le choix suivant, déduit de la jauge de Landau  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -By \mathbf{u}_x$  :

— Les coefficients tunnel le long de la direction  $y$  restent tous réels et égaux à  $J$ , soit :

$$\gamma(\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j} \pm \mathbf{u}_y) = 1. \tag{22}$$

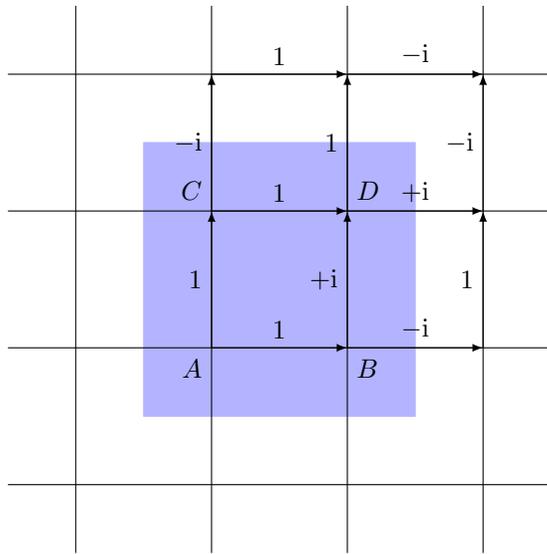
— Les coefficients tunnel le long de la direction  $x$  ont pour valeur  $J \exp[i \gamma(\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j}')] ]$  avec

$$\gamma(\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j} + \mathbf{u}_x) = -2\pi \frac{p' j_y}{p}. \tag{23}$$

Avec ce choix, on constate que l'hamiltonien est périodique de période  $a$  selon  $x$  et de période  $pa$  selon  $y$ . Ces coefficients tunnel sont indiqués sur la figure 4 pour le cas particulier  $\alpha = 1/4$ , soit  $p' = 1, p = 4$ , correspondant à une phase Aharonov-Bohm de  $\pi/2$  par plaquette.

Le fait de retrouver un problème périodique va nous permettre d'utiliser à nouveau le théorème de Bloch pour rechercher les états propres et les énergies associées. Toutefois, nous notons que la nouvelle cellule unité, appelée *cellule magnétique unité*, a maintenant une taille  $a \times pa$ . Il y a donc  $p$  sites par cellule magnétique unité, ce qui va donner naissance à  $p$  bandes d'énergie à partir de la bande initiale de largeur  $8J$  trouvée en l'absence de champ magnétique. Ce point est à contraster avec le modèle de Haldane, pour lequel l'introduction de phases complexes sur les coefficients tunnel ne changeait pas la taille de la cellule unité initiale.

Ce choix de cellule magnétique unité n'est bien sûr pas le seul possible. Dans le cas  $\Phi_{\text{cellule}} = \pi/2$ , une autre possibilité est indiquée sur la figure



**FIGURE 5.** Autre choix de jauge possible pour le problème de Harper–Hofstadter avec un flux  $1/4$ , c'est-à-dire une phase de Aharonov–Bohm  $\Phi_{\text{cellule}} = \pi/2$  par cellule du réseau carré initial (phase mesurée dans le sens trigonométrique). La zone grisée d'aire  $4a^2$  représente une cellule magnétique unité possible pour ce choix de jauge.

5 et conduit à une cellule unité magnétique carrée  $2a \times 2a$  (son aire totale de  $4a^2$  n'est pas modifiée par rapport à la figure 4); cette seconde possibilité est en fait plus pertinente pour l'expérience de AIDELSBURGER, LOHSE et al. (2015) que nous décrirons un peu plus loin, car les coefficients complexes choisis ici se connectent plus naturellement à ceux obtenus quand on branche ou éteint les faisceaux lumineux formant le réseau optique.

### 1-4 Spectre de l'hamiltonien

Nous supposons dans ce qui suit que le paramètre  $\alpha$  est un nombre rationnel qui s'écrit  $\alpha = p'/p$ . La forme du spectre de l'hamiltonien ne dépend bien sûr pas du choix de jauge. Plaçons-nous dans la jauge de Lan-

dau, avec la position d'une cellule unité repérée par :

$$\mathbf{r}_j = a(j_x \mathbf{u}_x + pj_y \mathbf{u}_y). \quad (24)$$

Pour un moment de Bloch  $\mathbf{q}$  donné, une fonction périodique sur le réseau est caractérisée par ses  $p$  amplitudes  $\alpha_{\mathbf{q},\nu}$ ,  $\nu = 1, \dots, p$  sur les  $p$  sites  $A_{j,\nu}$  composant la cellule magnétique  $\mathbf{j}$  :

$$|u_{\mathbf{q}}\rangle = \sum_{\nu=1}^p \alpha_{\mathbf{q},\nu} \left( \sum_{\mathbf{j}} |A_{j,\nu}\rangle \right). \quad (25)$$

Les états de Bloch s'écrivent quant à eux

$$|\psi_{\mathbf{q}}\rangle = \sum_{\mathbf{j}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_j} \left( \sum_{\nu=1}^p \alpha_{\mathbf{q},\nu} |A_{\mathbf{r}_j,\nu}\rangle \right). \quad (26)$$

En reportant cette expression dans l'équation aux valeurs propres pour l'hamiltonien pour l'énergie  $E_{\mathbf{q}}$ , on obtient une équation matricielle pour le vecteur colonne à  $p$  composantes

$$V_{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{q},1} \\ \alpha_{\mathbf{q},2} \\ \vdots \\ \alpha_{\mathbf{q},p} \end{pmatrix} \quad (27)$$

qui s'écrit sous la forme

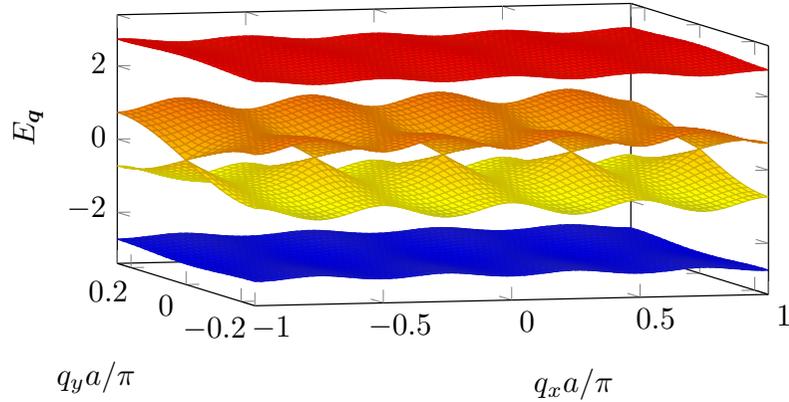
$$\hat{H}_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} = E_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}}. \quad (28)$$

La matrice carrée  $\hat{H}_{\mathbf{q}}$  a pour taille  $p \times p$  et elle s'écrit par exemple pour  $\alpha = 1/4$  :

$$\hat{H}_{\mathbf{q}} = -J \begin{pmatrix} 2 \cos(aq_x) & 1 & 0 & e^{4iaq_y} \\ 1 & 2 \cos(aq_x + \pi/2) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos(aq_x + \pi) & 1 \\ e^{-4iaq_y} & 0 & 1 & 2 \cos(aq_x + 3\pi/2) \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Les 4 bandes d'énergie correspondantes,

$$E_{\mathbf{q}} = \pm J \left\{ 4 \pm 2 \left[ 2 + \cos^2(2aq_x) + \cos^2(2aq_y) \right]^{1/2} \right\}, \quad (30)$$



**FIGURE 6.** Bandes d'énergie pour le modèle de Harper–Hofstadter pour le flux  $\alpha = 1/4$ , avec la cellule magnétique unité de la figure 4, correspondant à la jauge de Landau.

tracées sur la figure 6, sont disposées symétriquement par rapport à  $E = 0$ . Les deux bandes extrêmes sont séparées des autres par un gap alors que les deux bandes intermédiaires se touchent en 4 points de Dirac à l'intérieur de la zone de Brillouin  $]-\pi/a, +\pi/a[ \times ]-\pi/(4a), +\pi/(4a)[$ .

On peut également mener cette recherche des énergies avec le choix de cellule magnétique unité carrée, indiquée sur la figure 5. En repérant les 4 sites qui la composent par les lettres  $A, B, C, D$  comme indiqué sur la figure 5, on peut écrire une fonction de Bloch sous la forme

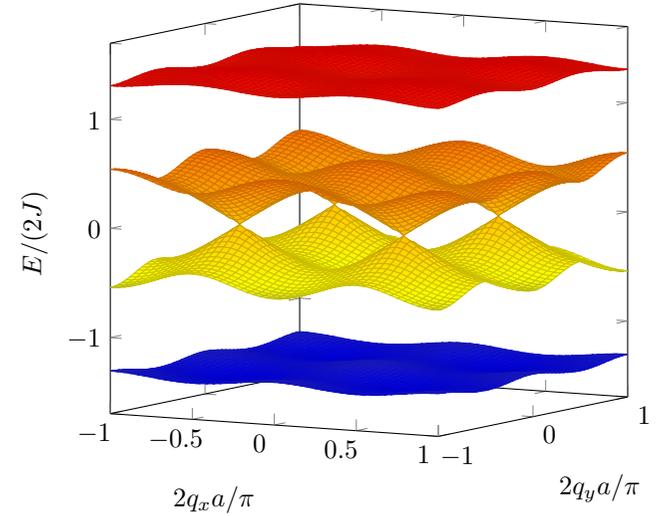
$$|\psi_{\mathbf{q}}\rangle = \sum_j e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_j} (a_{\mathbf{q}}|A_j\rangle + b_{\mathbf{q}}|B_j\rangle + c_{\mathbf{q}}|C_j\rangle + d_{\mathbf{q}}|D_j\rangle) \quad (31)$$

où  $j$  désigne désormais la position de la cellule magnétique unité de taille  $2a \times 2a$

$$\mathbf{r}_j = 2a(j_x \mathbf{u}_x + j_y \mathbf{u}_y). \quad (32)$$

L'équation aux valeurs propres pour l'hamiltonien s'écrit

$$\hat{H}_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} = E_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} \quad (33)$$



**FIGURE 7.** Bandes d'énergie pour le modèle de Harper–Hofstadter pour le flux  $\alpha = 1/4$ , avec la cellule magnétique unité carrée de la figure 5.

avec

$$\hat{H}_{\mathbf{q}} = -J \begin{pmatrix} 0 & 1 - ie^{-iQ_x} & 1 - ie^{-iQ_y} & 0 \\ 1 + ie^{iQ_x} & 0 & 0 & -i + e^{-iQ_y} \\ 1 + ie^{iQ_y} & 0 & 0 & 1 + ie^{-iQ_x} \\ 0 & i + e^{iQ_y} & 1 - ie^{iQ_x} & 0 \end{pmatrix}, \quad V_{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} a_{\mathbf{q}} \\ b_{\mathbf{q}} \\ c_{\mathbf{q}} \\ d_{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \quad (34)$$

où l'on a posé  $Q_x = 2aq_x$  et  $Q_y = 2aq_y$  pour alléger l'écriture. Les 4 valeurs propres de  $\hat{H}_{\mathbf{q}}$  pour ce choix de cellule magnétique unité s'écrivent

$$E_{\mathbf{q}} = \pm J \left\{ 4 \pm 2 \left[ 4 - \cos^2(2q_x a) - \cos^2(2q_y a) \right]^{1/2} \right\}^{1/2}, \quad (35)$$

et sont tracées sur la figure quand  $\mathbf{q}$  varie dans la zone de Brillouin carrée  $-\frac{\pi}{2a} < q_x, q_y \leq \frac{\pi}{2a}$ . On retrouve bien sûr, avec une disposition différente, les mêmes éléments qu'en figure 6.

Rappelons finalement la forme du spectre de l'hamiltonien obtenu quand on fait varier le paramètre  $\alpha$  entre 0 et 1, en nous limitant aux valeurs rationnelles pour conserver un problème périodique. Ce spectre, de

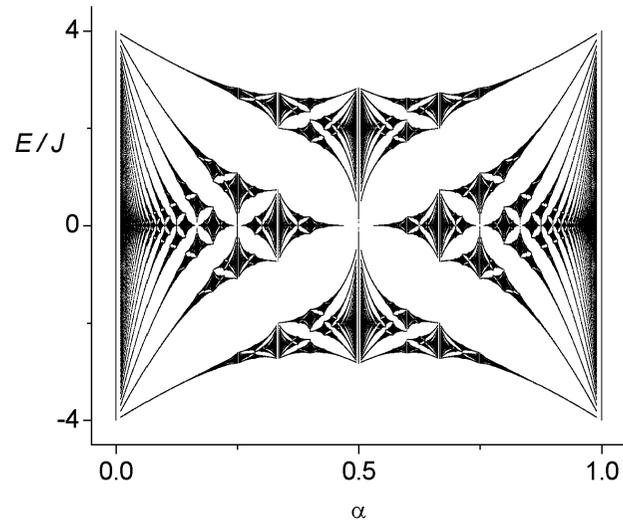


FIGURE 8. Le "papillon" de Hofstadter : spectre de l'hamiltonien de Harper-Hofstadter calculé pour des flux par cellule unité initiale  $\Phi_{\text{cellule}} = 2\pi\alpha$  avec  $\alpha = p'/p$  rationnel entre 0 et 1, et  $p, p'$  entiers inférieurs à 100.

nature fractale et appelé papillon de Hofstadter (HOFSTADTER 1976), est représenté sur la figure 8. Le calcul numérique a été fait pour tous les rationnels  $p'/p$  avec les entiers  $p, p'$  allant de 1 à 100. La discussion détaillée de ce spectre a été faite dans le cours 2013-14.

### 1-5 Topologie des bandes d'énergie

Une fois déterminés les énergies et les états propres de l'hamiltonien périodique  $\hat{H}_q$ , on peut calculer la courbure de Berry  $\Omega_q^{(j)}$  et le nombre de Chern  $\mathcal{C}^{(j)}$  pour chaque bande d'énergie. Le calcul de  $\mathcal{C}^{(j)}$  a été fait par THOULESS, KOHMOTO et al. (1982); il passe par la résolution d'une équation diophantienne, c'est-à-dire une équation algébrique à coefficients entiers. Nous ne discuterons pas le cas général, assez technique, et nous al-

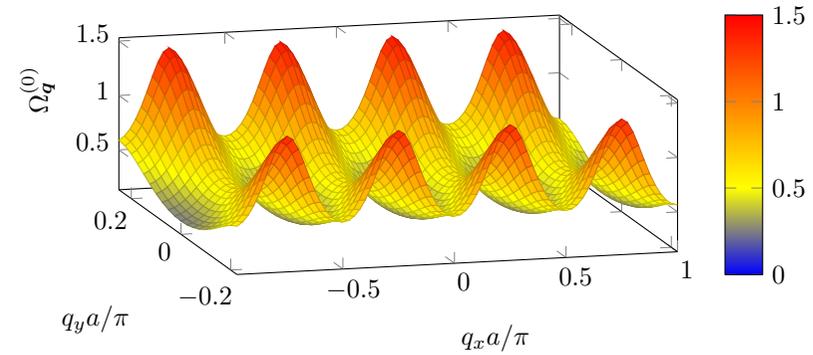


FIGURE 9. Courbure de Berry pour la bande fondamentale du modèle de Harper-Hofstadter pour le flux  $1/4$ . Ce résultat a été obtenu avec un encodage de la position de chaque site à l'intérieur de la cellule unité magnétique.

lons nous concentrer sur le cas  $\alpha = 1/p$ . On trouve alors le résultat simple suivant :

- Si  $p$  est impair, toutes les bandes ont pour nombre de Chern  $\mathcal{C} = 1$ , sauf la bande centrale pour laquelle on trouve  $\mathcal{C} = -p + 1$ . La somme de tous les nombres de Chern est nulle comme attendu (cf. chap. 5).
- Si  $p$  est pair, les deux bandes centrales se touchent en des points de Dirac, comme on l'a vu dans le cas  $\alpha = 1/4$ . Le nombre de Chern pour cette paire de bandes est  $\mathcal{C} = -p + 2$  et toutes les autres bandes ont pour nombre de Chern  $\mathcal{C} = 1$ . Là aussi, la somme de tous les nombres de Chern est nulle.

Nous avons déjà indiqué au chapitre 5 que la courbure de Berry  $\Omega_q$  dépend de la manière dont on encode la position de chaque site à l'intérieur d'une cellule unité. Pour les expériences dans lesquelles on agit sur les atomes avec une force extérieure, il est judicieux d'encoder explicitement cette position  $\mathbf{R}_\nu, \nu = 1, \dots, p$  dans la définition de  $|u_q\rangle$  et  $|\psi_q\rangle$ . Cela revient à écrire la fonction périodique (25) plutôt sous la forme :

$$|u_q\rangle = \sum_{\nu=1}^p \tilde{\alpha}_{q,\nu} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_\nu} \left( \sum_j |A_{j,\nu}\rangle \right). \quad (36)$$

et utiliser l'hamiltonien périodique  $\hat{H}_q$  défini à partir des coefficients  $\tilde{\alpha}_{q,\nu}$ .

La courbure de Berry pour la bande fondamentale et pour cet encodage de la position est tracée en figure 9 pour  $\alpha = 1/4$  (calcul fait en jauge de Landau). On vérifie numériquement que son intégrale sur la zone de Brillouin est bien égale à  $2\pi$ , ce qui correspond à  $\mathcal{C} = 1$ . Un tracé similaire serait obtenu à partir de la zone magnétique unité carrée de la figure 5.

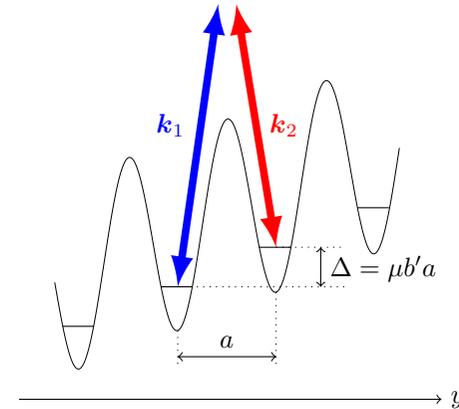
Quand on diminue la valeur de  $\alpha = 1/p$ , on constate que la courbure de Berry de la bande fondamentale devient de plus en plus homogène sur l'ensemble de la zone de Brillouin. Ainsi, pour  $\alpha = 1/8$ , la variation relative de  $\Omega_q$  est inférieure à 5%. Notons que ce résultat n'est valable que si l'on a encodé la position comme en (36). Pour le choix (25), la courbure de Berry reste fortement modulée même pour de très faibles valeurs de  $\alpha$ .

## 2 Le modèle de HH avec des atomes

### 2-1 Premières propositions, premières expériences

Une idée simple pour imprimer la phase  $\gamma(j \rightarrow j')$  quand un atome saute du site  $j$  au site  $j'$  est d'induire ce saut avec de la lumière : le saut se fait si et seulement si l'atome effectue un processus Raman stimulé entre deux états correspondant à des sites voisins. Dans un tel processus, appelé *effet tunnel assisté par laser*, l'atome absorbe un photon de vecteur d'onde  $k_1$ , puis effectue une émission stimulée d'un photon de vecteur d'onde  $k_2$ . La phase relative des deux faisceaux lumineux s'imprime alors sur la fonction d'onde atomique via le coefficient tunnel  $J$  qui devient complexe.

Cette proposition a été faite initialement par JAKSCH & ZOLLER (2003). On part d'un réseau carré standard dans lequel on inhibe l'effet tunnel ordinaire le long d'une direction,  $y$  par exemple, en appliquant un gradient de champ magnétique  $b'$  de sorte que deux sites adjacents  $j$  et  $j + \mathbf{u}_y$  ont une différence d'énergie  $\Delta = \mu b' a$  bien supérieure au couplage tunnel  $J$  (on suppose ici que les atomes sont préparés dans un sous-niveau Zeeman de moment magnétique  $\mu$  non nul). On envoie ensuite une paire de faisceaux laser de vecteurs d'onde  $k_i$  et de fréquence  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2$ , avec le choix de fréquence  $\omega_1 - \omega_2 = \Delta$  qui permet d'induire une transition résonante



**FIGURE 10.** Principe de l'effet tunnel assisté par laser pour des atomes de moment magnétique  $\mu$ . Un gradient de champ magnétique  $b'$  lève la dégénérescence entre sites adjacents distants de  $a$  et bloque l'effet tunnel direct. Une paire de faisceaux lumineux avec la différence de fréquence  $\omega_1 - \omega_2 = \mu b' a / \hbar$  rétablit un couplage résonnant entre sites, avec la phase relative  $e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}_j}$  "imprimée" lors de la transition.

entre les sites adjacents (figure 10). La phase du coefficient tunnel associé à cette transition est directement reliée à la phase relative des faisceaux laser en ce point, c'est-à-dire  $e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}_j}$ .

Cette méthode a été mise en œuvre par AIDELSBURGER, ATALA et al. (2013) à Munich et MIYAKE, SIVILOGLOU et al. (2013) au MIT, respectivement pour  $\alpha = 1/4$  et  $\alpha = 1/2$ . Ces premières expériences ont essentiellement consisté à mesurer la structure de bande et à observer le mouvement cyclotron; elles ont été décrites dans le cours 2013-14 et nous ne les reprendrons donc pas ici de manière détaillée. Puisque l'on applique sur les atomes un potentiel dépendant périodiquement du temps, son traitement théorique quantitatif utilise le formalisme de Floquet. Il est voisin de ce que nous avons fait au chapitre précédent pour le modèle de Haldane, à ceci près que l'on s'intéresse ici à une perturbation résonnante alors qu'on utilisait auparavant une perturbation de haute fréquence.

Le résultat s'énonce simplement dans le cadre d'un modèle à deux sites  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$ , en prenant une perturbation périodique consistant à moduler

l'énergie d'un des deux sites. Partant de l'hamiltonien

$$\hat{H}(t) = -J(|a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a|) + \Delta \hat{P}_b + \kappa \cos(\omega t + \phi) \hat{P}_a, \quad (37)$$

où  $\hat{P}_a$  et  $\hat{P}_b$  sont les projecteurs sur les états  $a$  et  $b$ , on peut montrer que dans le cas résonant  $\Delta = \hbar\omega \gg J$ , la dynamique à long terme est régie par l'hamiltonien effectif (ECKARDT & HOLTHAUS 2007)

$$\hat{H}_{\text{eff}} = -J\mathcal{J}_1(\kappa/\hbar\omega) (e^{i\phi} |a\rangle\langle b| + e^{-i\phi} |b\rangle\langle a|) \quad (38)$$

où  $\mathcal{J}_1$  est la fonction de Bessel de première espèce. L'effet tunnel entre les deux sites  $a$  et  $b$  est donc bien restauré, avec une facteur de phase de Peierls qui dépend de la phase de la modulation. Notons que dans ce modèle à deux sites, la phase  $\phi$  peut être éliminée<sup>2</sup> de (38) par un changement de jauge qui consiste à rédéfinir l'état  $a$  :  $|\tilde{a}\rangle = e^{i\phi}|a\rangle$ . Ce n'est heureusement pas le cas pour un réseau à deux dimensions, lorsque la phase  $\phi$  dépend de la position; ce cas est analysé de manière détaillée dans GOLDMAN, DALIBARD et al. (2015).

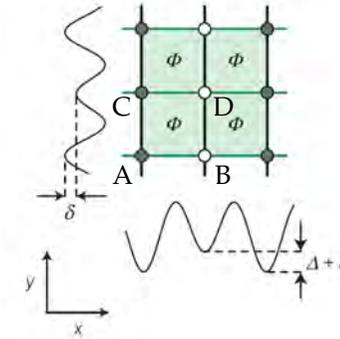
## 2-2 Super-réseau et projection de bandes

L'utilisation d'un gradient de champ magnétique pour lever la dégénérescence entre sites voisins pose des problèmes pratiques liés aux fluctuations du champ magnétique ambiant. Ces fluctuations viennent brouiller la phase de Peierls que l'on cherche à imposer par l'effet tunnel assisté par laser, et elles ont empêché les groupes de Munich et du MIT de mettre en évidence les propriétés topologiques de leur réseau.

Pour contourner cette difficulté, le groupe de Munich a adopté une stratégie légèrement différente qui consiste à éliminer tout champ magnétique (AIDELSBURGER, LOHSE et al. 2015). La levée de dégénérescence entre sites adjacents se fait maintenant par un super-réseau, une méthode que nous avons déjà rencontrée dans les problèmes 1D et qui avait été proposée dans ce contexte par GERBIER & DALIBARD (2010). Plus précisément, on dispose des ingrédients suivants (figure 11) :

- Un réseau carré dans lequel tous les sites sont équivalents avec un coefficient tunnel  $J$  entre proches voisins.

2. En d'autres termes, la physique ne peut pas dépendre du choix de l'origine du temps dans (37).



**FIGURE 11.** Un potentiel de super-réseau à deux dimensions permet de lever la dégénérescence entre 4 sites d'un réseau carré, avec les énergies  $E_A = 0$ ,  $E_B = \Delta + \delta$ ,  $E_C = \delta$ ,  $E_D = \Delta + 2\delta$ , où le repérage des états  $A, B, C, D$  est le même qu'en figure 5. Une modulation dans le temps à la pulsation  $\Delta/\hbar$  permet ensuite (à l'approximation du champ tournant) d'arriver aux énergies (40).

- Un super-réseau le long de l'axe  $x$  de sorte que les sites  $B, D$  représentés sur la figure 5 ont un surplus d'énergie  $\Delta$  par rapport aux sites  $A, C$  :

$$E_A = E_C = 0, \quad E_B = E_D = \Delta. \quad (39)$$

En première approximation, l'effet tunnel "nu" est inchangé le long de  $y$  mais il est bloqué le long de  $x$  du fait de l'écart en énergie  $\Delta$  entre sites voisins. La modulation va donc se faire à la pulsation  $\Delta/\hbar$  pour restaurer l'effet tunnel le long de  $x$  tout en induisant une phase de Peierls différente sur les liens  $A - B$  et  $C - D$ .

- Un deuxième super-réseau le long des deux axes  $x$  et  $y$  vient donner un surplus d'énergie  $\delta$  aux sites  $B$  et  $C$ , et  $2\delta$  au site  $D$ .

Une fois pris en compte le potentiel additionnel modulé dans le temps à la fréquence  $\Delta/\hbar$ , on obtient un hamiltonien effectif avec les énergies sur site :

$$E_A = -\delta, \quad E_B = E_C = 0, \quad E_D = +\delta \quad (40)$$

qui viennent s'ajouter à l'hamiltonien de Harper étudié en première partie.

L'intérêt du super-réseau d'énergie  $\delta$  est de produire une cellule unité à quatre sites comme celle de l'hamiltonien de Harper, mais avec un paramètre de contrôle supplémentaire. Pour  $\delta$  grand, la bande la plus basse correspond simplement à placer les atomes sur les sites  $A$ . Une étude plus poussée montre que l'hamiltonien périodique correspondant

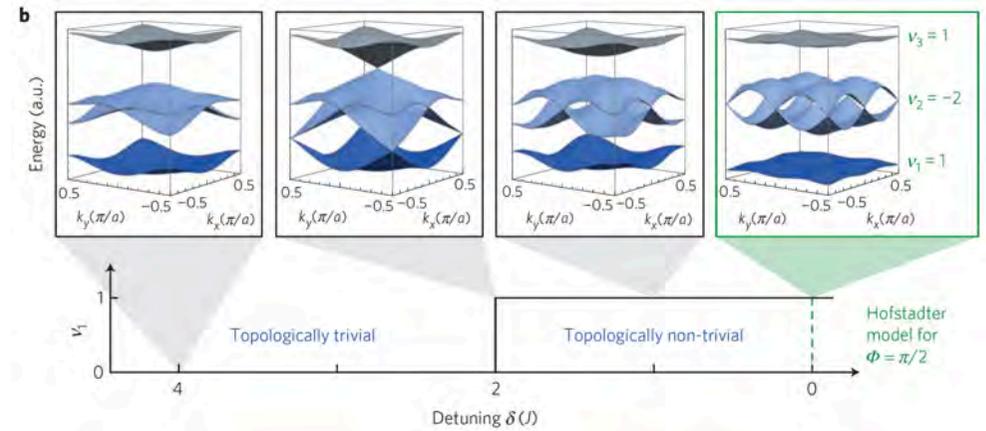
$$\hat{H}_{\mathbf{q}}(\delta) = -J \begin{pmatrix} \delta/J & 1 - ie^{-iQ_x} & 1 - ie^{-iQ_y} & 0 \\ 1 + ie^{iQ_x} & 0 & 0 & -i + e^{-iQ_y} \\ 1 + ie^{iQ_y} & 0 & 0 & 1 + ie^{-iQ_x} \\ 0 & i + e^{iQ_y} & 1 - ie^{iQ_x} & -\delta/J \end{pmatrix} \quad (41)$$

conduit à des bandes topologiquement non triviales si et seulement si

$$|\delta| < 2J. \quad (42)$$

On peut alors adopter la procédure expérimentale suivante :

1. On branche les réseaux et super-réseaux à  $\delta$  et  $\Delta$ , de façon à placer tous les atomes dans les sites de basse énergie ( $A$ ).
2. On branche lentement (30 ms) la modulation à la pulsation  $\omega = \Delta/\hbar$ , tout en gardant  $\delta$  grand ; à ce stade, la dynamique des atomes est encore figée.
3. On diminue adiabatiquement  $\delta$  jusqu'à la valeur 0 pour atteindre l'hamiltonien de Harper pour un flux  $\alpha = 1/4$ . Cette diminution implique un passage par le point singulier  $\delta = 2J$  où la topologie de la bande fondamentale devient non triviale. Toutefois, les populations des 4 bandes restent à peu près constantes dans cette opération qui dure également 30 ms.
4. On procède à l'expérience désirée.
5. Pour analyser le résultat produit, on suit le chemin inverse. On analyse la population finale des différentes bandes par la méthode de *projection de bande* usuelle, c'est-à-dire une extinction adiabatique du réseau optique suivie d'un temps de vol. Chaque bande est alors associée à un site  $A, B, C, D$  et à une zone d'impulsion bien déterminée, ce qui permet de déterminer la population de chacune de ces bandes.



**FIGURE 12.** Procédure de chargement de la bande fondamentale du réseau de Harper-Hofstadter pour le flux  $\alpha = 1/4$  utilisée par AIDELSBURGER, LOHSE et al. (2015). On part de la situation où la différence d'énergie  $\delta$  est grande devant le couplage tunnel, ce qui permet de positionner les atomes sur la bande fondamentale composée essentiellement des sites  $A$ , cette bande étant non topologique. On diminue ensuite lentement la valeur de  $\delta$  pour rentrer dans un régime de bande topologique pour  $\delta = 2J$ , puis arriver au cas de l'hamiltonien de Harper-Hofstadter avec  $\delta = 0$  et un flux  $\Phi_{\text{cellule}} = \pi/2$  (soit  $\alpha = 1/4$ ).

### 2-3 La mesure du nombre de Chern

Le point central de l'expérience de AIDELSBURGER, LOHSE et al. (2015) a été la mesure du nombre de Chern associé à la bande fondamentale. Bien que cette expérience ait été menée avec des bosons, le principe de la mesure est directement inspiré du résultat que nous avons rencontré au chapitre précédent pour des fermions sans interaction. Dans ce cas, si la bande en question est uniformément remplie, on sait que l'on a un courant  $I_y$  quantifié selon  $y$  quand une force uniforme  $F_x$  est appliquée selon  $x$  :

$$I_y \equiv \left. \frac{dN}{dt} \right|_{\text{selon } y} = \frac{C}{2\pi} \frac{L_x F_x}{\hbar}. \quad (43)$$

On sait qu'il y a dans ce cas une densité surfacique  $\rho^{(2D)} = 1/\ell^2$  où  $\ell$  est la taille de la cellule unité ( $\ell = 2a$  pour le réseau HH pour un flux  $\alpha = 1/4$ ).

Cela signifie que la vitesse moyenne des particules  $v_y$  le long de l'axe  $y$  définie par

$$\rho^{(2D)} v_y = \frac{1}{L_x} \left. \frac{dN}{dt} \right|_{\text{selon } y} \quad (44)$$

est égale à

$$v_y = C \frac{F_x \ell^2}{2\pi\hbar}. \quad (45)$$

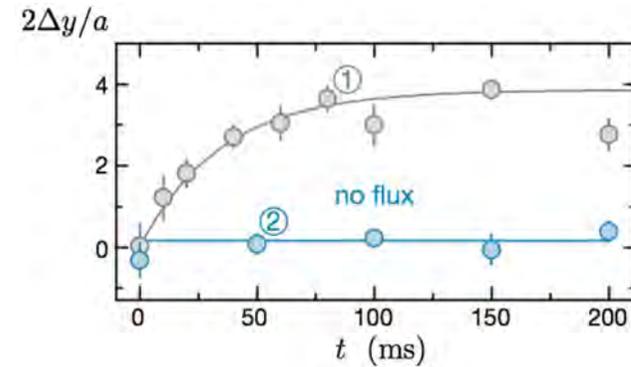
Ce dernier résultat portant sur la vitesse des particules ne dépend en fait pas de l'hypothèse d'une bande complètement remplie. Si l'on examine la démonstration de la quantification de la conductance (43), on constate que le point important est le remplissage uniforme de la zone de Brillouin, c'est-à-dire une population identique pour tous les états de Bloch. C'est à cette condition que l'intégrale de la courbure de Berry sur le quasi-moment fait apparaître le nombre de Chern. En revanche, la valeur exacte de cette population n'a pas d'importance pour établir (45).

On peut donc transposer tel quel le résultat (45) à des bosons, pourvu que la bande considérée, en l'occurrence la bande fondamentale, soit uniformément remplie et que les autres bandes soient vides. Une telle situation pourra être obtenue si la largeur de la bande fondamentale  $\Delta E_0$  est petite devant le gap entre la bande fondamentale et la première bande excitée  $\bar{E}_1 - \bar{E}_0$ . Il suffit alors de choisir la température  $T$  telle que

$$\Delta E_0 \ll k_B T \ll \bar{E}_1 - \bar{E}_0 \quad (46)$$

pour que cette hypothèse soit vérifiée. En pratique, pour le réseau HH avec  $\alpha = 1/4$ , on trouve  $(\bar{E}_1 - \bar{E}_0)/\Delta E_0 \sim 7$ , ce qui permet de valider en première approximation la condition (46).

Dans l'expérience de AIDELSBURGER, LOHSE et al. (2015) la force  $F_x$  est une force dipolaire, créée par le gradient d'intensité d'un faisceau auxiliaire. Cette force est appliquée pendant une durée variable  $t$  et on mesure le déplacement du centre de masse du nuage d'atomes en fonction du temps. Aux temps courts, typiquement inférieurs à 50 ms, le déplacement selon  $y$ , similaire à un courant de Hall, est bien proportionnel à  $t$  (figure 13). La valeur trouvée pour la vitesse  $v_y$  est en accord avec la valeur attendue à partir de (45) pour le nombre de Chern  $C = 1$  de la bande inférieure. Plus précisément, en prenant en compte les populations mesurées des quatre bandes, on trouve  $C = 0.9$  (2). Aux temps plus longs,



**FIGURE 13.** Transport dans un réseau carré avec un flux  $\Phi_{\text{cellule}} = \pi/2$  (données 1) mesuré par AIDELSBURGER, LOHSE et al. (2015). Un courant de Hall est observé par l'intermédiaire du déplacement du centre de masse du nuage le long de la direction  $y$  quand une force uniforme induisant des oscillations de Bloch est appliquée le long de l'axe  $x$  pendant une durée ajustable. Aux temps courts, seule la bande fondamentale est appréciablement peuplée, ce qui conduit à un déplacement  $\Delta y(t)$  linéaire en temps. La pente correspondante est en bon accord avec le nombre de Chern  $C = 1$  attendu pour cette bande. Aux temps plus longs, des processus de chauffage égalisent les populations des différentes bandes et le courant s'interrompt. Les données 2 ont été obtenues pour une flux nul. Cette figure a été préparée avec l'aide de Monika Aidelsburger.

le chauffage provenant de la modulation résonante induit des transitions entre les différentes bandes, qui finissent par être également peuplées. Le mouvement de dérive le long de l'axe  $y$  s'arrête alors, puisque la somme des quatre nombres de Chern est nulle. Une analyse précise de cette dynamique aux temps longs, couplée à une mesure indépendante des populations de chaque bande, conduit à  $C_{\text{exp}} = 0.99$  (5).

## 2-4 Le problème du chauffage

Le fait que l'hamiltonien ait une dépendance explicite en temps introduit une difficulté supplémentaire dès qu'on s'intéresse à une assemblée de particules en interaction. En effet, il n'y a *a priori* pas conservation de

l'énergie associée à l'hamiltonien effectif; l'énergie du micro-mouvement peut être convertie en chauffage lors de processus inélastiques intervenant lors de la collision entre deux particules. Pour un hamiltonien contenant des termes oscillant à la pulsation  $\omega$ , ces processus inélastiques correspondent à l'absorption ou à l'émission de phonons d'énergie  $\hbar\omega$ . À long terme (sauf exceptions liées par exemple au phénomène de localisation à  $N$  corps), on s'attend à ce qu'un système en interaction avec un hamiltonien ainsi modulé atteigne une température infinie, c'est-à-dire une population égale pour tous les niveaux d'énergie (LAZARIDES, DAS et al. 2014).

Une description de ces processus inélastiques à deux corps dans le cadre du formalisme des ondes de Bloch a été proposée par BILITEWSKI & COOPER (2015b) et BILITEWSKI & COOPER (2015a). Cette analyse, basée sur la règle d'or de Fermi écrite dans le formalisme de Floquet, conduit à un accord très satisfaisant avec le chauffage mesuré expérimentalement par AIDELSBURGER, LOHSE et al. (2015). Elle montre en particulier le rôle important du degré de liberté selon la direction  $z$  perpendiculaire au plan du réseau. L'expérience de AIDELSBURGER, LOHSE et al. (2015) était faite dans une géométrie de tubes parallèles à l'axe  $z$  et cette direction n'était donc que faiblement confinée. Un chauffage important pouvait alors se produire lors de collisions, en transférant l'énergie du micro-mouvement à ce mouvement selon la direction  $z$ . BILITEWSKI & COOPER (2015a) ont montré qu'un confinement beaucoup plus fort selon l'axe  $z$  pouvait réduire fortement cette source de chauffage : si l'énergie nécessaire pour exciter un quantum de ce mouvement est beaucoup plus grande que l'énergie liée à la modulation  $\hbar\omega$ , la densité d'états qui intervient dans la règle d'or de Fermi est fortement réduite en passant de sa valeur 3D (grande) à sa valeur 2D pour le plan  $xy$  uniquement (nettement plus faible). Ce type d'analyse a été généralisé au cas d'un superfluide décrit par l'équation de Gross-Pitaevskii par CHOUDHURY & MUELLER (2015) et LELLOUCH, BUKOV et al. (2017).

### 3 L'effet Hall en photonique

La première voie suivie en photonique pour simuler l'effet Hall quantique a consisté à utiliser des effets opto-magnétiques induit par un grand champ magnétique (0.2 T) sur un cristal photonique opérant dans le do-

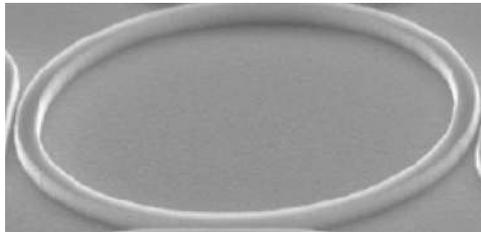
main des micro-ondes et composé de barres de ferrite (WANG, CHONG et al. 2009). Nous allons présenter ici des expériences plus récentes, menées sans champ magnétique et dans le domaine visible (ou infra-rouge proche). Notons que dans le domaine des longueurs d'onde visibles, la réponse magnéto-optique des matériaux est en général très faible et il a donc fallu avoir recours à d'autres méthodes pour induire un comportement de type "effet Hall" dans ces systèmes.

Nous allons nous intéresser successivement à des expériences "passives", dans lesquelles on sonde essentiellement la réponse optique linéaire du système, puis des expériences "actives", dans lesquelles la topologie est utilisée pour fabriquer de nouvelles sources laser robustes. Plusieurs de ces expériences utilisent un réseau de micro-résonateurs en anneau, et nous allons commencer par décrire ce système initialement proposé par HAFEZI, DEMLER et al. (2011), avant de présenter quelques résultats représentatifs.

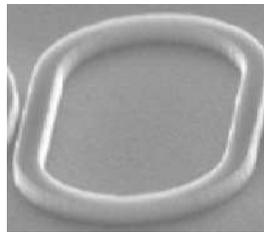
Dans les implémentations photoniques que nous allons considérer ici, le site élémentaire du réseau est un micro-résonateur en anneau comme celui représenté sur la figure 14. Il s'agit de guides d'onde monomodes en silice, dans lesquels la lumière peut circuler dans le sens direct ou dans le sens indirect. La lumière est choisie résonante avec ces anneaux, avec un facteur de qualité supérieur à  $10^4$ . Elle est injectée dans un des anneaux composant le réseau grâce à un guide d'onde tangentiel, qui vient imposer le sens de circulation dans cet anneau, et par suite – comme nous allons le voir – dans tous les anneaux du réseau. Dans ce qui suit, nous allons d'abord nous intéresser au cas où la lumière tourne exclusivement dans le sens direct sur ces anneaux, et nous reviendrons sur cette hypothèse à la fin du paragraphe.

#### 3-1 Micro-résonateurs en anneau

L'équivalent du couplage tunnel entre sites dans le modèle de liaisons fortes est obtenu en insérant entre deux anneaux un lien en forme de rectangle aux bords arrondis (figure 15). Ce lien est conçu pour être non résonant avec la lumière (HAFEZI, DEMLER et al. 2011). Dans un point de vue dynamique, on peut considérer qu'un photon réside pendant une durée assez longue sur l'anneau  $A_1$  en tournant dans le sens direct, puis saute vers l'anneau  $A_2$  en passant par le lien  $L$  situé entre  $A_1$  et  $A_2$  (figure 16). Il



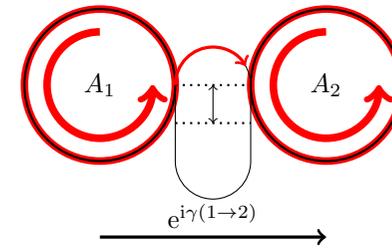
**FIGURE 14.** Micro-résonateur en anneau, utilisé comme "site" d'un réseau de Hubbard pour la lumière, formé d'un guide d'onde circulaire. Cette figure est extraite de BANDRES, WITTEK et al. (2018). Le rayon de l'anneau est de  $5 \mu\text{m}$ , la largeur et la hauteur du guide sont respectivement de  $0.5 \mu\text{m}$  et  $0.2 \mu\text{m}$ .



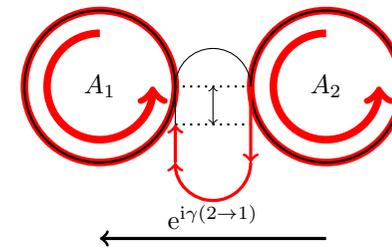
**FIGURE 15.** Lien connectant deux anneaux dans l'expérience de BANDRES, WITTEK et al. (2018). Ce lien est supposé non résonnant avec la lumière.

va ensuite séjourner pendant une durée assez longue sur  $A_2$ , toujours en tournant dans le sens direct. Le caractère non résonnant du lien  $L$  entraîne que le passage sur  $L$  est quant à lui très bref. Pour la géométrie représentée sur la figure 16, ce passage de  $A_1$  vers  $A_2$  se fait via la partie supérieure du lien  $L$ . La phase accumulée  $\gamma(1 \rightarrow 2)$  dépend donc de la longueur optique de cette partie supérieure.

Considérons maintenant le passage de l'anneau  $A_2$  vers l'anneau  $A_1$ , toujours pour de la lumière tournant dans le sens direct dans les anneaux (figure 17). On voit qu'un photon doit dans ce cas emprunter le chemin passant par le bas du lien rectangulaire. La longueur optique de ce chemin est différente du précédent si le lien rectangulaire n'est pas parfaitement centré sur le segment  $A_1A_2$ . On dispose ainsi d'un moyen pour induire un couplage  $1 \rightarrow 2$  qui n'a pas la même phase que le couplage  $2 \rightarrow 1$ .



**FIGURE 16.** Passage de l'anneau  $A_1$  vers l'anneau  $A_2$  via le lien inséré entre les deux. Pour la lumière tournant sur les anneaux dans le sens direct, ce passage  $A_1 \rightarrow A_2$  se fait sur le bord supérieur du lien.



**FIGURE 17.** Passage de l'anneau  $A_2$  vers l'anneau  $A_1$  via le lien inséré entre les deux. Pour la lumière tournant sur les anneaux dans le sens direct, ce passage  $A_2 \rightarrow A_1$  se fait sur le bord inférieur du lien. Le chemin optique est donc différent de celui de la figure 16, pour le passage  $A_1 \rightarrow A_2$ .

Si on choisit la référence de phase nulle pour un rectangle centré, on obtient  $\gamma(2 \rightarrow 1) = -\gamma(1 \rightarrow 2)$  : c'est l'ingrédient nécessaire pour construire l'hamiltonien de Harper.

### 3-2 Implémentation photonique passive

L'idée proposée par HAFEZI, DEMLER et al. (2011) a été mise en pratique par HAFEZI, MITTAL et al. (2013). L'expérience a été faite avec un réseau carré de  $8 \times 8$  anneaux reliés entre eux par des liens (figure 18). La lumière est injectée sur un des anneaux situés en périphérie. On mesure avec un objectif de microscope la lumière diffusée par les 64 anneaux.

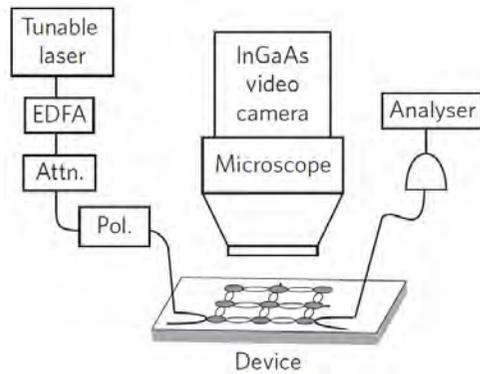


FIGURE 18. Schéma de l'expérience de HAFEZI, MITTAL *et al.* (2013).

Une cellule unité de ce réseau est représentée sur la figure 19. Elle représente une implémentation directe de l'hamiltonien de Harper–Hofstadter en jauge de Landau. Les liens le long de la direction  $y$  sont centrés sur les anneaux, de sorte que la phase associée est nulle. En revanche, les liens le long de la direction  $x$  sont décalés d'une distance ajustable, de sorte que la phase accumulée quand on parcourt la cellule dans le sens  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$  est non nulle et constante sur tout le réseau, et bien sûr opposée à celle obtenue dans le sens  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ . L'expérience de HAFEZI, MITTAL *et al.* (2013) a été réalisée pour un flux par cellule unité de  $2\pi\alpha$  avec  $\alpha = 0.15$ .

L'expérience a confirmé l'existence de canaux de bords qui se propagent sans interruption même en présence de défauts. En changeant la longueur d'onde de la lumière, on peut exciter un canal de vitesse de groupe positive ou négative, c'est-à-dire se propageant dans le sens direct ou dans le sens indirect, en bon accord avec les prévisions (figure 20).

**Invariance par renversement du temps et effet Hall de spin.** Dans l'expérience que nous venons de décrire, il n'y a aucun élément physique qui brise l'invariance par renversement du temps. Comment se fait-il que l'on puisse dans ces conditions obtenir un comportement de type effet Hall avec des états de bord chiraux ?

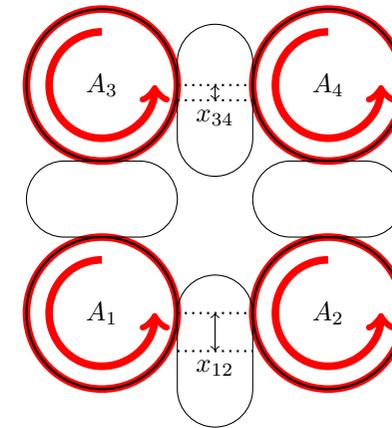
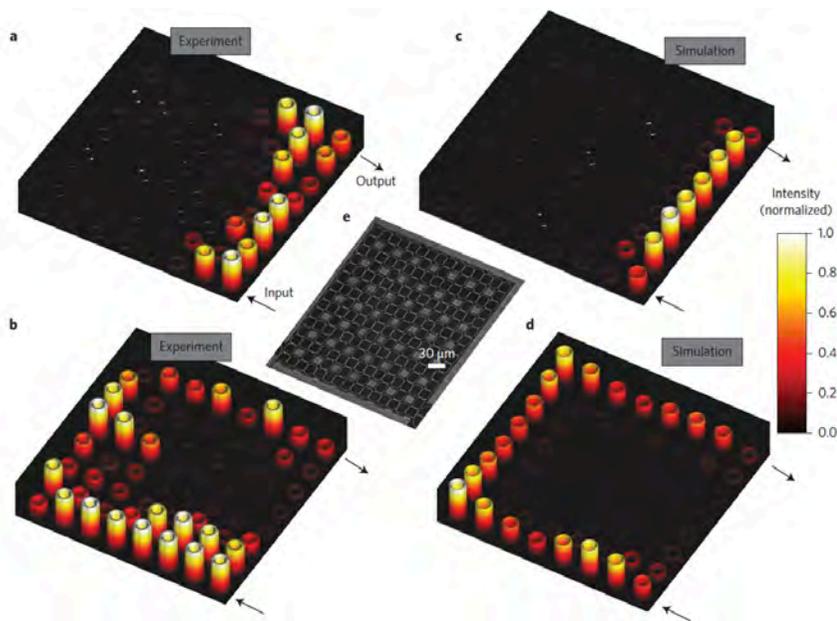


FIGURE 19. Cellule unité de l'expérience de HAFEZI, MITTAL *et al.* (2013). La lumière est résonnante avec les anneaux situés aux sites  $A_j$ , qui forment les nœuds d'un réseau carré. La lumière est injectée dans le réseau de telle sorte qu'elle tourne dans le sens direct sur chaque anneau. Elle passe d'un site à l'autre par les liens, dont la position déterminée par les distances  $x_{12}$  et  $x_{34}$  permet d'ajuster la phase  $2\pi\alpha$  acquise par le champ électromagnétique sur une cellule ( $\alpha = 0.15$  dans l'expérience). On génère ainsi un réseau de Harper–Hofstadter.

Le point crucial est que nous nous sommes restreints dans ce qui précède à un mouvement précis de la lumière sur un anneau donné, en supposant que ce mouvement se faisait dans le sens direct. On peut reprendre le même problème en considérant le cas où la lumière tourne dans le sens rétrograde, et on trouve alors que chaque phase est changée en son opposée. Ainsi la figure 16 donnant le passage  $A_1 \rightarrow A_2$  est modifiée pour devenir la figure 21.

On retrouve ici une situation d'effet Hall de spin, pour laquelle on peut obtenir une topologie non triviale pour des problèmes invariants par renversement du temps, pourvu que l'on tire parti d'un degré de liberté de spin  $\uparrow$  et  $\downarrow$  (ou de pseudo-spin) (KANE & MELE 2005a; KANE & MELE 2005b; BERNEVIG, HUGHES *et al.* 2006). Cette situation a déjà été brièvement présentée au chapitre précédent. Dans le cas présent, le pseudo-spin est associé au sens de rotation de la lumière dans un anneau ; la robustesse des états de bords est assurée par le fait que la rétro-diffusion de la lumière,



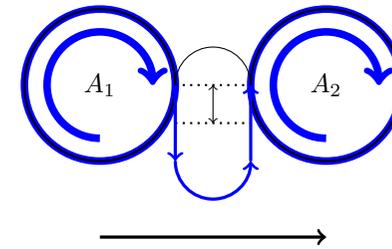
**FIGURE 20.** Mise en évidence des canaux de bord dans l'expérience de HAFEZI, MITTAL et al. (2013). Selon la longueur d'onde de la lumière, on excite un canal de bord avec une chiralité positive ou négative. Les images de gauche correspondent aux résultats expérimentaux et les images de droite à des simulations numériques.

qui inverserait son sens de rotation dans les résonateurs en anneau, joue un rôle négligeable.

### 3-3 Implémentation photonique active

Un schéma similaire basé sur un réseau carré de résonateurs a récemment été utilisé pour créer<sup>3</sup> un "laser topologique" à deux dimensions par BANDRES, WITTEK et al. (2018) et HARARI, BANDRES et al. (2018). La figure 22 montre un réseau carré de  $10 \times 10$  résonateurs de site, disposés sur une

3. On pourra également consulter l'article de BAHARI, NDAO et al. (2017), qui décrit la réalisation d'un laser topologique en utilisant un milieu magnétique (yttrium iron garnet, YIG) pour briser explicitement l'invariance par renversement du temps.

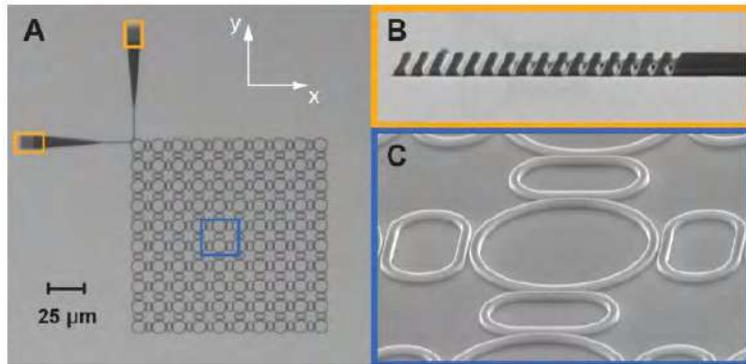


**FIGURE 21.** Passage de l'anneau  $A_1$  vers l'anneau  $A_2$  via le lien inséré entre les deux. Pour de la lumière tournant dans le sens indirect dans les anneaux, ce passage  $A_1 \rightarrow A_2$  se fait sur le bord inférieur du lien. La phase accumulée est donc opposée à celle trouvée pour de la lumière tournant dans le sens direct dans les anneaux (figure 16). Ce résultat est conforme à l'invariance par renversement du temps du système.

plateforme comportant des puits quantiques de InGaAsP pouvant amplifier le champ électromagnétique en présence d'un pompage adéquat. L'expérience est réalisée pour le cas  $\alpha = 1/4$  que nous avons étudié ci-dessus. Les résonateurs et les liens sont représentés sur les figures 14 et 15. Pour comparaison, les mêmes expériences sont menées avec un réseau de même nature mais sans le décalage des liens, ce qui conduit à  $\alpha = 0$  (topologie triviale).

L'effet laser sur les canaux de bord est obtenu en dirigeant la lumière de pompage sur le bord de l'échantillon (figure 23). On mesure la lumière émise par l'échantillon, à la fois au niveau de chacun des résonateurs et aussi au niveau de coupleurs de sortie disposés sur un coin de l'échantillon. La figure 24 montre quelques caractéristiques importantes de ce laser :

- La puissance de sortie tracée en fonction de la puissance de pompe montre que le laser topologique opère avec une efficacité meilleure que son équivalent non topologique. Cela s'explique par le fait que dans le réseau non-topologique, les modes intervenant dans l'effet laser s'étendent dans le cœur du matériau, ce qui entraîne des pertes significatives. Ces modes ont également tendance à minimiser l'amplitude au niveau du coupleur de sortie pour maximiser le gain. Au contraire, le mode de bord topologique est par définition localisé sur la

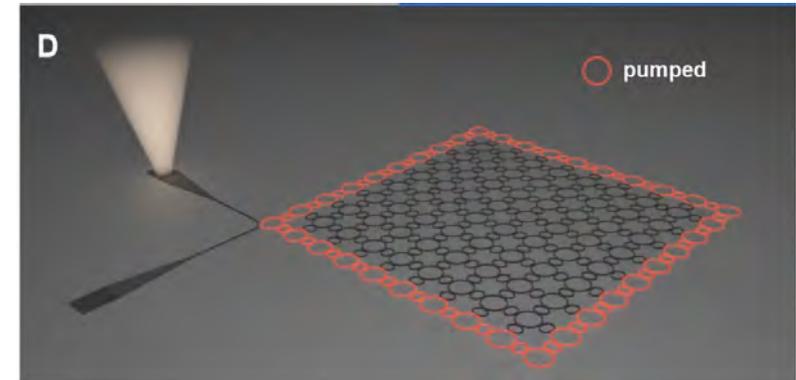


**FIGURE 22.** Réseau de  $10 \times 10$  résonateurs utilisé par BANDRES, WITTEK et al. (2018) pour fabriquer un laser dans une topologie décrite par l'hamiltonien de Harper–Hofstadter. On a disposé au coin supérieur gauche des structures permettant d'extraire de manière efficace la lumière du réseau de résonateurs.

frontière de l'échantillon, il occupe cette frontière de manière uniforme et possède donc une amplitude significative au niveau du coupleur de sortie.

- Le spectre de la lumière émise est plus étroit pour le laser topologique, indiquant que ce dernier fonctionne dans un régime monomode, alors que le laser non topologique est multimode : la puissance émise dans le mode longitudinal dominant est supérieure par un ordre de grandeur dans le cas topologique. Cela s'explique par le fait dans le cas non topologique, différentes régions de l'échantillon ont tendance à déclencher l'effet laser à des fréquences variées, du fait du désordre inévitable se produisant lors de la fabrication de l'échantillon. Cela favorise un fonctionnement multimode longitudinal, ce qui n'est pas le cas pour le laser topologique.

Ces différentes caractéristiques montrent l'intérêt de la topologie en photonique. La robustesse qu'elle apporte permet d'envisager des dispositifs dont le fonctionnement sera moins sensible aux défauts aléatoires pouvant survenir lors de la fabrication. Nous avons donné ici l'exemple de l'effet laser où le gain apporté par la topologie est clair, mais on peut également citer la fabrication de lignes à retard contrôlé, qui sont un com-



**FIGURE 23.** Schéma de principe d'un laser topologique : on envoie la lumière de pompe sur la frontière de l'échantillon de façon à fabriquer une inversion de population pour un canal de bord. Ce canal se propage de manière chirale le long de l'échantillon, et on détecte la lumière laser dans une des deux voies de sortie. Image extraite de BANDRES, WITTEK et al. (2018).

posant essentiel du traitement optique de l'information et pour lesquelles le désordre est également un facteur limitant.

## 4 Utilisation de la structure interne atomique

Dans ce cours, nous nous sommes essentiellement concentrés sur le mouvement de particules dans des potentiels périodiques en négligeant toute structure interne de cette particule. Les effets topologiques sont apparus en tirant parti de coefficients tunnels variant dans l'espace, comme pour le modèle SSH, ou de coefficients tunnel avec un facteur de phase complexe, comme pour le modèle de Haldane. La possibilité d'utiliser la structure interne des atomes ouvre un nouveau champ de possibilités. Les sites des réseaux topologiques peuvent correspondre alors à des états internes différents ; le passage d'un site à l'autre ne se fait plus par un effet tunnel standard, mais par changement du niveau interne résultant de l'absorption ou l'émission de photons.

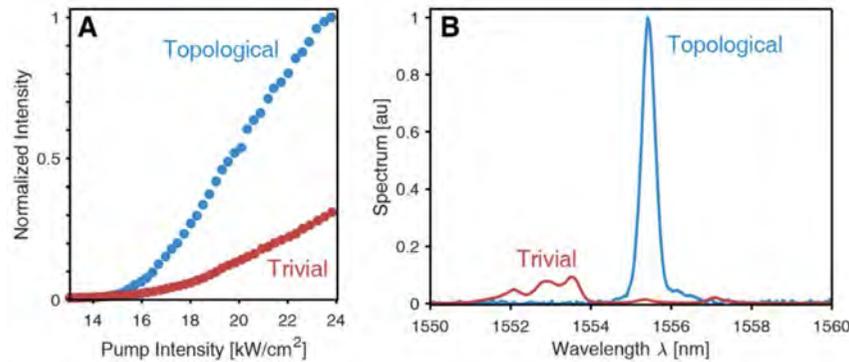


FIGURE 24. Gauche : puissance de sortie du laser en fonction de la puissance de pompe. Droite : spectre mesuré pour une puissance de pompe de 23.5 kW/cm<sup>2</sup>. Image extraite de BANDRES, WITTEK et al. (2018).

Nous avons abordé dans le cours 2013-14 la description d’une partie des mécanismes qui permettent de créer un champ magnétique artificiel sur un gaz d’atomes. Une fois ce champ créé, des bandes topologiques peuvent apparaître naturellement, comme dans le cas de l’effet Hall quantique. Nous commencerons cette partie par un bref rappel de deux mécanismes déjà étudiés dans le cours de 2013-14, l’effet tunnel assisté par des transitions Raman et la notion de dimension synthétique, avant de nous concentrer sur un autre type de systèmes, appelés *réseaux de flux*.

### 4-1 Transitions Raman et dimensions synthétiques

Nous avons décrit en § 2-1 *l’effet tunnel assisté par laser* comme processus capable d’imprimer un facteur de phase complexe sur le coefficient tunnel entre deux sites. Nous nous étions limités dans la discussion de § 2-1 au cas où seul l’état externe de l’atome était modifié. Toutefois, on peut généraliser ce principe au cas où la transition représentée en figure 10 affecte également l’état interne de l’atome.

Plus précisément, considérons un système à deux sites  $A$  et  $B$  séparés

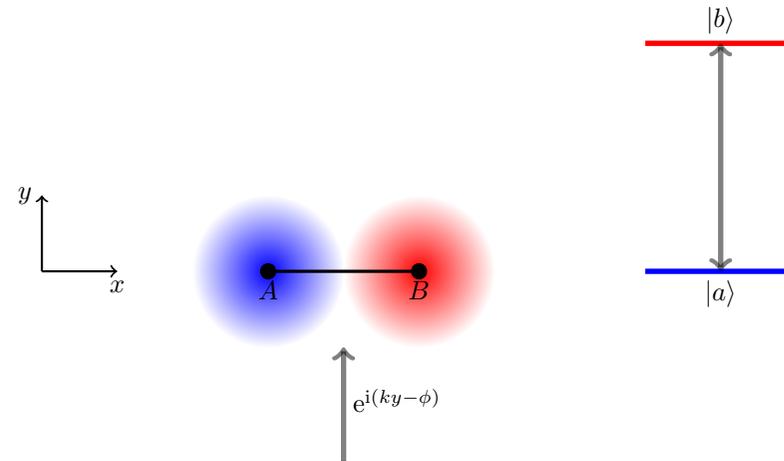


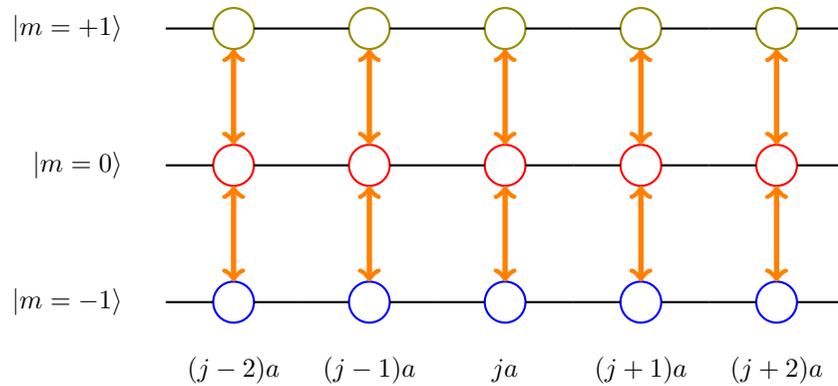
FIGURE 25. Effet tunnel assisté par laser accompagné par un changement d’état interne.

spatialement et piégeant respectivement les atomes dans les états internes  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  (figure 25). On peut induire un saut d’une particule du site  $A$  vers le site  $B$  en éclairant cette particule avec une onde électromagnétique progressive  $E_0 e^{i(ky-\phi)}$  qui induit (par exemple) la transition

$$|a\rangle + \text{photon} \rightarrow |b\rangle. \tag{47}$$

Lors de cette transition, la phase  $\phi$  de l’onde électromagnétique sur la ligne  $y = 0$  du segment  $AB$  est imprimée sur l’élément de matrice  $V_{AB}$ . En généralisant cette idée à l’échelle d’un réseau entier, on peut reproduire les éléments essentiels du modèle de Harper–Hofstadter (JAKSCH & ZOLLER 2003; GERBIER & DALIBARD 2010). Un schéma possible est d’alterner des colonnes de sites piégeant les états  $|a\rangle$  et les états  $|b\rangle$ , puis de faire une ingénierie de l’effet tunnel assisté par laser pour reproduire (par exemple) les éléments de matrice du modèle de Harper–Hofstadter de la figure 4.

Si l’on souhaite simplement réaliser un ruban dont la largeur ne dépasse pas quelques sites, on peut utiliser le concept de *dimension synthétique*, représenté sur la figure 26. On utilise un atome dont l’état fondamental possède un moment cinétique  $J$  ( $J = 1$  sur la figure), donc  $2J + 1$  états Zeeman  $|J, m\rangle$  avec  $m = -J, -J + 1, \dots, J$ ; chaque état Zeeman joue le rôle d’une



**FIGURE 26.** Utilisation d'une dimension synthétique pour un atome de spin  $J = 1$ , avec trois états internes  $|J, m\rangle$  et  $m = 0, \pm 1$ . Le confinement le long de l'axe  $x$  est celui d'un réseau 1D usuel. L'axe  $y$  correspond aux 3 valeurs possibles de  $m$ . Le "mouvement" le long de cette direction se fait par des processus Raman stimulés qui induisent des transitions  $\Delta m = \pm 1$  entre états internes (flèches orange).

ligne du ruban. L'axe orthogonal ( $x$  sur la figure 26) est quant à lui une dimension de l'espace usuel le long de laquelle on a disposé un réseau 1D. Le mouvement le long de cet axe correspond à l'effet tunnel habituel alors que le mouvement le long de la direction synthétique est initié par des transitions Raman stimulées

$$|J, m\rangle \rightarrow |J, m \pm 1\rangle. \quad (48)$$

Ces transitions sont elles-mêmes induites par une paire de faisceaux lumineux auxiliaires, l'un polarisé  $\sigma_+$  et l'autre polarisé  $\pi$ , qui impriment la phase souhaitée lors de la transition. Le principe de cette dimension synthétique a été proposée par CELI, MASSIGNAN et al. (2014) et a été mis en œuvre dans plusieurs groupes au cours des dernières années, d'abord avec des transitions Raman entre sous-niveaux fondamentaux (STUHL, LU et al. 2015; MANCINI, PAGANO et al. 2015), puis sur la raie étroite (transition d'horloge) d'atomes à deux électrons externes (KOLKOWITZ, BROMLEY et al. 2017; LIVI, CAPPELLINI et al. 2016).

## 4-2 États habillés et suivi adiabatique

Dans les situations que nous venons d'envisager, nous sommes partis d'un réseau périodique (1D ou 2D), auquel nous avons superposé un faisceau lumineux auxiliaire qui induit un couplage tunnel complexe entre sites. Le réseau optique n'était donc pas lui-même topologique, mais simplement une base pour "discrétiser" l'espace. Nous allons maintenant rechercher si un réseau optique périodique peut posséder à lui tout seul toutes les caractéristiques nécessaires pour créer des bandes topologiques, sans avoir recours à des modulations temporelles des coefficients ou à des faisceaux lumineux annexes. Nous allons voir que la réponse est positive, et correspond à la notion de *réseau de flux*.

Nous allons nous limiter ici à un réseau créé par des faisceaux lumineux très désaccordés par rapport aux raies de résonance de l'atome, de manière à éviter tout processus d'émission spontanée. Dans ces conditions, l'interaction entre l'atome et la lumière a pour seul effet significatif un déplacement lumineux du niveau fondamental, créé par les processus à deux photons absorption-émission stimulée. Intéressons-nous aux atomes alcalins, avec un seul électron externe, qui sont majoritairement utilisés dans les expériences de gaz quantiques; le déplacement lumineux est alors décrit en tout point  $\mathbf{r}$  de l'espace par un opérateur qui comporte<sup>4</sup> :

- une partie scalaire  $U(\mathbf{r})$ , qui déplace tous les sous-niveaux Zeeman de la même quantité. Pour un atome alcalin, cette partie scalaire s'annule si l'on choisit une lumière de longueur d'onde située au barycentre des deux raies de résonance  $D_1$  et  $D_2$  avec des poids  $2/3-1/3$ . Nous allons supposer cette condition réalisée dans la suite.
- une partie vectorielle en

$$\hat{V}(\mathbf{r}) = \kappa(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{J}} \quad (49)$$

où  $\kappa(\mathbf{r})$  dépend de l'amplitude et de la polarisation du champ électrique de la lumière au point  $\mathbf{r}$ . Pour simplifier notre analyse, nous allons négliger la structure hyperfine du niveau fondamental de l'atome et nous limiter au degré de liberté de spin de l'électron externe. L'opérateur moment cinétique  $\hat{\mathbf{J}}$  sera donc dans la suite l'opérateur de spin  $1/2$ , caractérisé par les matrices de Pauli  $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ .

4. On pourra consulter le chapitre 1 du cours 2012-13 qui comporte une discussion détaillée de l'opérateur déplacement lumineux

Avant de traiter le mouvement de l'atome dans ce potentiel avec le formalisme quantique, commençons par un raisonnement classique et intéressons-nous au cas d'un atome au repos au point  $\mathbf{r}$ . L'hamiltonien se ramène donc au seul potentiel  $V(\mathbf{r})$ ; pour un atome de spin  $1/2$ , il s'agit d'une matrice  $2 \times 2$  que nous pouvons diagonaliser en tout point  $\mathbf{r}$  pour obtenir les deux niveaux habillés  $|\chi_{\mathbf{r}}^{(\pm)}\rangle$ , combinaisons linéaires de  $|\pm\rangle_z$  avec pour énergies  $\pm|\kappa(\mathbf{r})|$  :

$$\hat{V}(\mathbf{r}) |\chi_{\mathbf{r}}^{(\pm)}\rangle = \pm|\kappa(\mathbf{r})| |\chi_{\mathbf{r}}^{(\pm)}\rangle. \quad (50)$$

Prenons maintenant en compte le mouvement de l'atome, décrit de manière quantique. L'état le plus général (spatial+spin) peut s'écrire sous la forme

$$\psi_+(\mathbf{r}, t) |\chi_{\mathbf{r}}^{(+)}\rangle + \psi_-(\mathbf{r}, t) |\chi_{\mathbf{r}}^{(-)}\rangle. \quad (51)$$

L'évolution des deux amplitudes de probabilité  $\psi_{\pm}(\mathbf{r}, t)$  est obtenue en injectant cette forme dans l'équation de Schrödinger régie par l'hamiltonien

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (52)$$

et elle se ramène en général à deux équations aux dérivées partielles couplées pour les amplitudes  $\psi_{\pm}(\mathbf{r}, t)$ .

Nous allons nous placer ici dans la situation où l'atome bouge suffisamment lentement pour suivre adiabatiquement un des niveaux habillés, par exemple l'état habillé inférieur  $|\chi^{(-)}\rangle$ , sans passer de manière significative sur l'autre niveau. On prend donc  $\psi_+(\mathbf{r}, t) \approx 0$  pour tout point  $\mathbf{r}$  et tout temps  $t$ .

L'évolution se ramène alors à une seule équation différentielle pour l'amplitude  $\psi_-(\mathbf{r}, t)$ , dans laquelle les termes dominants sont :

$$i\hbar \frac{\partial \psi_-}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_- - |\kappa(\mathbf{r})| \psi_- + \dots \quad (53)$$

Toutefois, nous savons que l'approximation adiabatique amène avec elle des termes supplémentaires, comme la phase géométrique décrite par une connexion de Berry. Ce sont précisément ces termes supplémentaires qui peuvent donner naissance à des propriétés topologiques pour un réseau de flux.

Pour ce problème où l'approximation adiabatique porte sur un mouvement dans l'espace réel, la connexion de Berry se définit pour l'état habillé  $|\chi^{(-)}\rangle$  par

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}) = i \langle \chi_{\mathbf{r}}^{(-)} | \nabla_{\mathbf{r}} \chi_{\mathbf{r}}^{(-)} \rangle \quad (54)$$

et elle vient contribuer à l'équation (53) sous la forme (cf. cours 2013-14)

$$i\hbar \frac{\partial \psi_-}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} [-i\nabla - \mathcal{A}(\mathbf{r})]^2 \psi_- - |\kappa(\mathbf{r})| \psi_- + \dots \quad (55)$$

La connexion de Berry joue donc le rôle d'un potentiel vecteur pour une particule de charge fictive  $e = 1$  dans ce problème. L'approximation adiabatique est également à l'origine d'un potentiel de jauge scalaire  $W(\mathbf{r})$  dans (55), mais nous ne l'écrirons pas explicitement car il ne joue qu'un rôle mineur dans la suite.

Avec (55), nous retrouvons un problème d'effet Hall quantique puisque nous sommes face au mouvement 2D d'une particule dans un champ magnétique (fictif). Ce champ magnétique est égal au rotationnel du potentiel vecteur (connexion de Berry)  $\mathcal{A}$  et est donc une courbure de Berry dans l'espace des positions. Nous la noterons ici  $\mathcal{B}$  :

$$\mathcal{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathcal{A}(\mathbf{r}) \quad (56)$$

pour éviter toute confusion avec la courbure de Berry  $\Omega(\mathbf{q})$  que nous avons introduite auparavant dans l'espace des moments. La question ouverte est maintenant de savoir si ce champ magnétique effectif dans l'espace réel peut conduire à une bande topologique pour l'hamiltonien (55).

### 4-3 Les réseaux de flux

Un réseau de flux est défini comme une configuration lumineuse pour laquelle le flux du champ magnétique effectif  $\mathcal{B}(\mathbf{r})$  à travers la cellule unité du réseau est non nul (COOPER 2011). C'est donc une configuration pour laquelle il est naturelle de chercher si elle peut donner naissance à des bandes topologiques. Pour discuter cette notion de manière concrète, considérons l'exemple suivant. Supposons que la configuration laser ré-

sulte en l'opérateur déplacement lumineux

$$\hat{V}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}) = \kappa_0 \begin{pmatrix} \cos(kx) \\ \cos(ky) \\ \sin(kx) \sin(ky) \end{pmatrix} \quad (57)$$

soit dans la base  $|\pm\rangle_z$  des états de spin de l'atome :

$$\hat{V}(\mathbf{r}) = \kappa_0 \begin{pmatrix} \sin(kx) \sin(ky) & \cos(kx) - i \cos(ky) \\ \cos(kx) + i \cos(ky) & -\sin(kx) \sin(ky) \end{pmatrix} \quad (58)$$

Une cellule unité correspondant à la périodicité de  $\hat{V}$  est un carré de côté  $2\pi/k$ . Cette configuration peut être obtenue en superposant des ondes stationnaires le long des axes  $x$  et  $y$  avec des polarisations adéquates (COOPER, DALIBARD et al. 2018).

Les énergies des niveaux habillés s'écrivent

$$\pm|\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r})| = \pm\kappa_0 [1 + \cos^2(kx) \cos^2(ky)]^{1/2}. \quad (59)$$

Pour l'état habillé de basse énergie,  $-|\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r})|$ , les minima de potentiel sont situés sur le réseau carré  $kx = n_x\pi$ ,  $ky = n_y\pi$  (figure 27, haut). Il y a 4 minima de  $-|\boldsymbol{\kappa}|$  par cellule unité.

Le calcul du champ magnétique effectif  $\mathcal{B}$  se fait à partir de la formule trouvée au chapitre 4

$$\mathcal{B} = -\frac{1}{2|\boldsymbol{\kappa}|^3} \boldsymbol{\kappa} \cdot [(\partial_x \boldsymbol{\kappa}) \times (\partial_y \boldsymbol{\kappa})] \quad (60)$$

qui conduit à

$$\mathcal{B}_z = -k^2 \frac{1 - \cos^2(kx) \cos^2(ky)}{2[1 + \cos^2(kx) \cos^2(ky)]^{3/2}}. \quad (61)$$

Ce champ est tracé sur la figure 27, bas. Le calcul montre que le flux de ce champ à travers la cellule unité carrée de côté  $2\pi/k$  est égal à  $4\pi$ .

Le fait que le flux soit un multiple de  $2\pi$  n'est pas surprenant : on calcule ici l'intégrale d'une courbure de Berry sur une zone  $(x, y)$  avec des conditions aux limites périodiques. Un raisonnement identique à celui que l'on avait fait dans l'espace des moments pour l'intégrale de  $\Omega(\mathbf{q})$  sur une

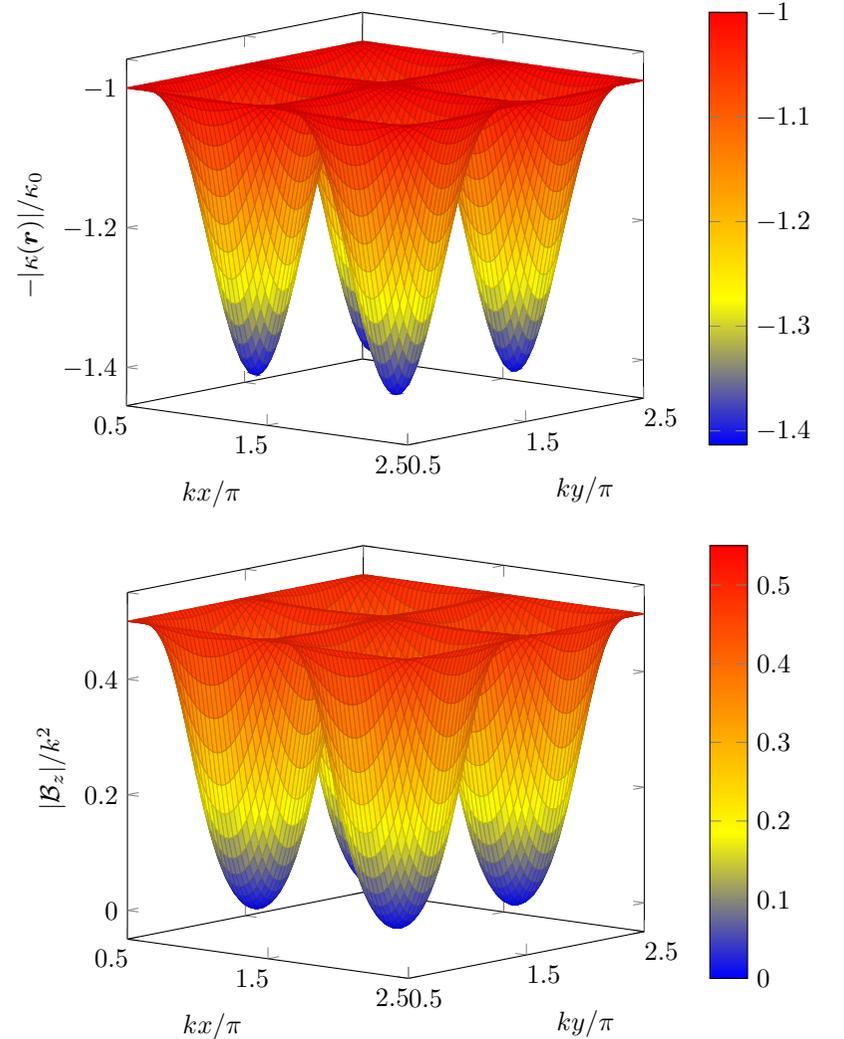
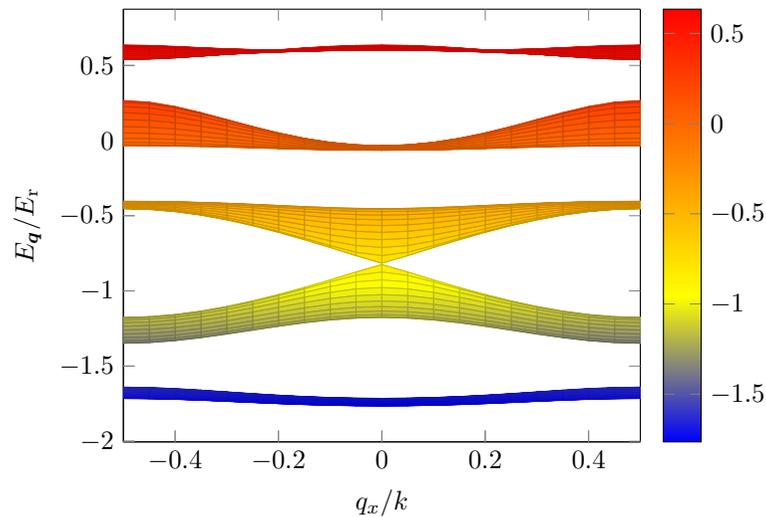


FIGURE 27. Haut : Variation de l'énergie de l'état habillé  $|\chi^{(-)}\rangle$  sur une cellule unité carrée de côté  $2\pi/k$ . Bas : variation du champ magnétique effectif  $|\mathcal{B}_z|$  pour cet état habillé.



**FIGURE 28.** Bandes d'énergie les plus basses obtenues pour l'hamiltonien  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{r})$  où l'opérateur  $\hat{V}(\hat{r})$  donné en (58) agit à la fois dans l'espace des variables externes et internes. Le calcul est fait pour  $\kappa_0 = 2E_r$ . La bande fondamentale, relativement plate en comparaison avec le gap qui la sépare de la première bande excitée, a pour nombre de Chern  $C = 1$ .

zone de Brillouin permet de conclure que ce flux peut être vu comme  $2\pi$  fois le nombre de Chern associé, dont on sait qu'il doit être entier.

Dans la limite des grands puits de potentiel où  $\kappa_0$  devient grand devant l'énergie de recul  $E_r = \hbar^2 k^2 / 2m$ , on retrouve la limite de liaisons fortes, dans laquelle on peut se limiter aux sauts entre proches voisins sur le réseau carré composé par les minima de l'énergie  $-\kappa$ . Nous avons vu (i) qu'il y a 4 minima par cellule unité et (ii) que le flux de  $\mathbf{B}$  à travers la cellule unité est égal  $4\pi$ . Cela entraîne que le flux de  $\mathbf{B}$  à travers une maille du réseau des minima est égal à  $\pi$ , et correspond à deux bandes se touchant en des points de Dirac.

Ce régime avec des bandes à points de Dirac n'est pas propice à l'obtention de bandes topologiques. Il vaut mieux opérer le réseau de flux dans un

régime intermédiaire d'intensité, où le couplage  $\kappa_0$  est de l'ordre de l'énergie de recul. On obtient alors une bande fondamentale séparée des bandes supérieures par un gap, avec un nombre de Chern égal à 1. Notons que l'approximation adiabatique devient sujette à caution puisque l'énergie cinétique des particules est alors comparable à l'écart entre les potentiels habillés  $\pm|\kappa|$ . Il est donc plus prudent de déterminer les bandes d'énergies à partir du problème initial à deux composantes, plutôt que d'utiliser l'expression approchée (55). C'est la procédure suivie pour arriver aux bandes d'énergie montrées en figure 28, pour le choix  $\kappa_0 = 2E_r$ .

Un des points importants dans la physique des réseaux de flux est la recherche de bandes d'énergie quasi-plates, c'est-à-dire avec un rapport gap/largeur le plus grand possible. Le fait que la bande soit plate permet en effet d'obtenir facilement un effet dominant des interactions et de se rapprocher ainsi de conditions propices à l'observation d'effets similaires à l'effet Hall quantique fractionnaire (COOPER & DALIBARD 2013). En pratique, pour un atome dont l'état fondamental a un moment cinétique  $J = 1$ , le rapport gap/largeur peut atteindre des valeurs de l'ordre de 50 (COOPER & DALIBARD 2011b).

À notre connaissance, le concept de réseau de flux n'a pas encore été implémenté tel quel dans un laboratoire. Signalons toutefois l'expérience récente de WU, ZHANG et al. (2016) (et sa version améliorée dans SUN, WANG et al. (2017)) qui a montré l'existence d'une bande topologique dans un réseau 2D. Dans ces deux expériences, la partie scalaire du déplacement lumineux jouait un rôle prépondérant; elle créait un réseau carré dans lequel les deux états de spin  $|\pm\rangle_z$  étaient simultanément piégés, l'expérience se déroulant dans le régime des liaisons fortes. Le rôle de la partie vectorielle de l'opérateur déplacement lumineux était d'induire des couplages entre proches voisins *dépendant du spin*. On réalise alors une situation formellement similaire au modèle de Haldane, dans laquelle il n'y a pas de flux du champ magnétique artificiel  $\mathbf{B}$ , mais donnant néanmoins naissance à une bande topologique. WU, ZHANG et al. (2016) ont vérifié la nature topologique de cette bande en mesurant la polarisation du spin moyen des atomes en différents points de la zone de Brillouin, suivant une proposition de LIU, LAW et al. (2013).

#### 4-4 Interactions entre états habillés

L'ensemble de ce cours a porté presque exclusivement sur des assemblées de particules sans interaction. La seule exception a concerné notre discussion des modes de Majorana au chapitre 2, pour lesquels les interactions étaient un ingrédient indispensable pour faire apparaître un gap supraconducteur. La combinaison des considérations topologiques et des interactions dans un système à grand nombre de particules est bien sûr un problème essentiel, qui reste encore très ouvert. On pourra consulter l'article de REPELLIN & REGNAULT (2018) ainsi que la partie V de la revue de COOPER, DALIBARD et al. (2018) pour trouver une liste de références récentes sur ce problème.

Pour conclure cette partie sur l'utilisation de la structure interne atomique, nous allons simplement nous concentrer sur une collision binaire et indiquer comment l'habillage des niveaux d'un atome permet de modifier l'interaction dans ce cas. Rappelons pour commencer que pour des atomes libres et à basse température, l'interaction à deux corps est dominée par des collisions en onde  $s$ , qui peuvent être décrites par une interaction de contact, donc locale,  $g \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ , où la distribution de Dirac  $\delta(\mathbf{r})$  est supposée régularisée (HUANG 1987). Nous allons montrer que dans un réseau de flux, les interactions acquièrent un caractère non-local du fait de la dépendance en impulsion des états habillés.

Un état habillé de la bande fondamentale d'un réseau de flux s'écrit de manière générale

$$|\Psi_{\mathbf{q}}\rangle = |\psi_{\mathbf{q}}\rangle \otimes |\Sigma_{\mathbf{q}}\rangle, \quad (62)$$

c'est-à-dire comme le produit d'un état de Bloch  $|\psi_{\mathbf{q}}\rangle$  décrivant le mouvement du centre de masse de l'atome, et un état de spin  $|\Sigma_{\mathbf{q}}\rangle$ . C'est la dépendance en  $\mathbf{q}$  de cet état de spin qui est à l'origine de l'interaction non-locale que nous allons trouver.

Commençons par le cas simple de particules sans spin ou complètement polarisées. Pour l'interaction de contact  $\hat{V} = g \delta(\hat{\mathbf{r}})$ , l'élément de matrice de  $\hat{V}$  décrivant le passage d'une paire de particules *discernables* depuis l'état initial  $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$  vers l'état  $(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_t, \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_t)$  est égal à  $g$  (à un facteur de normalisation près) et il est indépendant du moment transféré  $\mathbf{q}_t$ .

Pour des particules *indiscernables*, les observables physiques font inter-

venir la somme sur les deux permutations

$$(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \rightarrow (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_t, \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_t) \quad \text{et} \quad (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_t, \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_t), \quad (63)$$

avec un signe relatif  $\varepsilon = \pm 1$  selon qu'on a affaire à des bosons ou des fermions. L'élément de matrice de  $\hat{V}$  est doublé pour des bosons polarisés et il s'annule pour des fermions polarisés : ce dernier résultat traduit simplement le fait qu'un gaz de fermions polarisés est insensible à une interaction de contact, puisque le principe de Pauli interdit à deux fermions de se trouver à la même position.

Considérons maintenant la collision entre deux atomes préparés dans la bande fondamentale d'un réseau de flux (62) et supposons pour simplifier que l'interaction de contact est indépendante de l'état de spin  $|\pm\rangle$ . Pour des particules indiscernables (bosons ou fermions), l'élément de matrice de  $\hat{V}$  pour le processus à deux canaux (63) s'écrit maintenant

$$\begin{aligned} & \langle \psi_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_t}, \psi_{\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_t} | \hat{V} | \psi_{\mathbf{q}_1}, \psi_{\mathbf{q}_2} \rangle \langle \Sigma_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_t} | \Sigma_{\mathbf{q}_1} \rangle \langle \Sigma_{\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_t} | \Sigma_{\mathbf{q}_2} \rangle \\ & + \varepsilon \langle \psi_{\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_t}, \psi_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_t} | \hat{V} | \psi_{\mathbf{q}_1}, \psi_{\mathbf{q}_2} \rangle \langle \Sigma_{\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_t} | \Sigma_{\mathbf{q}_1} \rangle \langle \Sigma_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_t} | \Sigma_{\mathbf{q}_2} \rangle \end{aligned}$$

Pour des fermions, cet élément de matrice n'est en général plus nul. Ainsi, dans le cas particulier  $\mathbf{q}_t = 0$ , il est proportionnel à  $(1 - |\langle \Sigma_{\mathbf{q}_2} | \Sigma_{\mathbf{q}_1} \rangle|^2)$ .

Ce résultat indique qu'à partir de fermions en interaction de contact et occupant une seule bande d'énergie, l'habillage par laser conduit à un gaz *en interaction*. Plus précisément, on peut montrer que ces interactions dans un gaz de fermions à une composante sont essentiellement en onde  $p$  (ZHANG, TEWARI et al. 2008). Cette émergence d'une interaction entre deux fermions identiques peut être vue comme une correction non-adiabatique à l'habillage par laser, ce qui permet à deux fermions de se trouver au même point de l'espace, leurs états internes étant légèrement différents du fait de leur vitesse relative (COOPER & DALIBARD 2011a).

Cette conversion d'une interaction de contact en une interaction dépendant de l'impulsion via un habillage par laser des états atomiques se produit également pour des bosons; WILLIAMS, LEBLANC et al. (2012) ont ainsi montré qu'une composante de collision en onde  $d$  apparaissait entre bosons ultra-froids du fait de cet habillage.

## Références

- AIDELSBURGER, M., M. ATALA, M. LOHSE, J. T. BARREIRO, B. PAREDES & I. BLOCH (2013), « Realization of the Hofstadter Hamiltonian with Ultracold Atoms in Optical Lattices », in *Phys. Rev. Lett.* **111** (18), p. 185301.
- AIDELSBURGER, M., M. LOHSE, C. SCHWEIZER, M. ATALA, J. T. BARREIRO, S. NASCIBÈNE, N. R. COOPER, I. BLOCH & N. GOLDMAN (2015), « Measuring the Chern number of Hofstadter bands with ultracold bosonic atoms », in *Nature Physics* **11**, p. 162.
- BAHARI, Babak, Abdoulaye NDAO, Felipe VALLINI, Abdelkrim EL AMILI, Yeshiahu FAINMAN & Boubacar KANTÉ (2017), « Nonreciprocal lasing in topological cavities of arbitrary geometries », in *Science* **358**, p. 636–640.
- BANDRES, Miguel A., Steffen WITTEK, Gal HARARI, Midya PARTO, Jinhan REN, Mordechai SEGEV, Demetrios N. CHRISTODOULIDES & Mercedeh KHAJAVIKHAN (2018), « Topological insulator laser : Experiments », in *Science* **359**, p. 4005.
- BERNEVIG, B Andrei, Taylor L HUGHES & Shou-Cheng ZHANG (2006), « Quantum spin Hall effect and topological phase transition in HgTe quantum wells », in *Science* **314**, p. 1757–1761.
- BILITEWSKI, Thomas & Nigel R. COOPER (2015a), « Population dynamics in a Floquet realization of the Harper-Hofstadter Hamiltonian », in *Phys. Rev. A* **91** (6), p. 063611.
- (2015b), « Scattering theory for Floquet-Bloch states », in *Phys. Rev. A* **91** (3), p. 033601.
- CELI, A., P. MASSIGNAN, J. RUSECKAS, N. GOLDMAN, I. B. SPIELMAN, G. JUZELIUNAS & M. LEWENSTEIN (2014), « Synthetic Gauge Fields in Synthetic Dimensions », in *Phys. Rev. Lett.* **112** (4), p. 043001.
- CHOUDHURY, Sayan & Erich J. MUELLER (2015), « Transverse collisional instabilities of a Bose-Einstein condensate in a driven one-dimensional lattice », in *Phys. Rev. A* **91** (2), p. 023624.
- COHEN-TANNOUJJI, C., B. DIU & F. LALOË (1973), *Mécanique Quantique*, Hermann.
- COOPER, N. R. (2011), « Optical Flux Lattices for Ultracold Atomic Gases », in *Phys. Rev. Lett.* **106**, p. 175301.
- COOPER, N. R. & J. DALIBARD (2011a), « Optical flux lattices for two-photon dressed states », in *Europhysics Letters* **95**, p. 66004.
- COOPER, Nigel R. & Jean DALIBARD (2011b), « Optical Flux Lattices for Two-Photon Dressed States », in *EPL (Europhysics Letters)* **95**, p. 66004.
- (2013), « Reaching Fractional Quantum Hall States with Optical Flux Lattices », in *Phys. Rev. Lett.* **110** (18), p. 185301.
- COOPER, NR, J DALIBARD & IB SPIELMAN (2018), « Topological Bands for Ultracold Atoms », in *arXiv :1803.00249*.
- ECKARDT, Andre & Martin HOLTHAUS (2007), « AC-induced superfluidity », in *EPL (Europhysics Letters)* **80**, p. 50004.
- GERBIER, Fabrice & Jean DALIBARD (2010), « Gauge fields for ultracold atoms in optical superlattices », in *New Journal of Physics* **12**, p. 033007.
- GOLDMAN, N., J. DALIBARD, M. AIDELSBURGER & N.R. COOPER (2015), « Periodically driven quantum matter : The case of resonant modulations », in *Phys. Rev. A* **91**, p. 033632.
- HAFEZI, Mohammad, Eugene A DEMLER, Mikhail D LUKIN & Jacob M TAYLOR (2011), « Robust optical delay lines with topological protection », in *Nature Physics* **7**, p. 907.
- HAFEZI, Mohammad, S MITTAL, J FAN, A MIGDALL & JM TAYLOR (2013), « Imaging topological edge states in silicon photonics », in *Nature Photonics* **7**, p. 1001.
- HARARI, Gal, Miguel A. BANDRES, Yaakov LUMER, Mikael C. RECHTMAN, Y. D. CHONG, Mercedeh KHAJAVIKHAN, Demetrios N. CHRISTODOULIDES & Mordechai SEGEV (2018), « Topological insulator laser : Theory », in *Science* **359**, p. 1230.
- HARPER, P. G. (1955), « Single Band Motion of Conduction Electrons in a Uniform Magnetic Field », in *Proceedings of the Physical Society. Section A* **68**, p. 874–878.
- HOFSTADTER, D. R. (1976), « Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields », in *Phys. Rev. B* **14**, p. 2239–2249.
- HUANG, K. (1987), *Statistical Mechanics*, New York : Wiley.
- JAKSCH, D. & P. ZOLLER (2003), « Creation of effective magnetic fields in optical lattices : the Hofstadter butterfly for cold neutral atoms », in *New Journal of Physics* **5**, p. 56.1.
- KANE, Charles L & Eugene J MELE (2005a), « Quantum spin Hall effect in graphene », in *Phys. Rev. Lett.* **95**, p. 226801.
- (2005b), « Z<sub>2</sub> topological order and the quantum spin Hall effect », in *Phys. Rev. Lett.* **95**, p. 146802.

- KOLKOWITZ, S, SL BROMLEY, T BOTHWELL, ML WALL, GE MARTI, AP KOLLER, X ZHANG, AM REY & J YE (2017), « Spin-orbit-coupled fermions in an optical lattice clock », in *Nature* **542**, p. 66.
- LAZARIDES, Achilleas, Arnab DAS & Roderich MOESSNER (2014), « Periodic Thermodynamics of Isolated Quantum Systems », in *Phys. Rev. Lett.* **112** (15), p. 150401.
- LELLOUCH, S., M. BUKOV, E. DEMLER & N. GOLDMAN (2017), « Parametric Instability Rates in Periodically Driven Band Systems », in *Phys. Rev. X* **7** (2), p. 021015.
- LIU, Xiong-Jun, Kam-Tuen LAW, Tai-Kai NG & Patrick A LEE (2013), « Detecting topological phases in cold atoms », in *Phys. Rev. Lett.* **111**, p. 120402.
- LIVI, LF, G CAPPELLINI, M DIEM, L FRANCHI, C CLIVATI, M FRITTELLI, F LEVI, D CALONICO, J CATANI, M INGUSCIO et al. (2016), « Synthetic dimensions and spin-orbit coupling with an optical clock transition », in *Phys. Rev. Lett.* **117**, p. 220401.
- MANCINI, M, G PAGANO, G CAPPELLINI, L LIVI, M RIDER, J CATANI, C SIAS, P ZOLLER, M INGUSCIO, M DALMONTE et al. (2015), « Observation of chiral edge states with neutral fermions in synthetic Hall ribbons », in *Science* **349**, p. 1510–1513.
- MIYAKE, Hirokazu, Georgios A. SIVILOGLOU, Colin J. KENNEDY, William Cody BURTON & Wolfgang KETTERLE (2013), « Realizing the Harper Hamiltonian with Laser-Assisted Tunneling in Optical Lattices », in *Phys. Rev. Lett.* **111** (18), p. 185302.
- REPELLIN, Cécile & Nicolas REGNAULT (2018), « Lattices for fractional Chern insulators », in *Science* **360**, p. 31–32.
- STUHL, BK, H-I LU, LM AYCOCK, D GENKINA & IB SPIELMAN (2015), « Visualizing edge states with an atomic Bose gas in the quantum Hall regime », in *Science* **349**, p. 1514–1518.
- SUN, Wei, Bao-Zong WANG, Xiao-Tian XU, Chang-Rui YI, Long ZHANG, Zhan WU, Youjin DENG, Xiong-Jun LIU, Shuai CHEN & Jian-Wei PAN (2017), « Long-lived 2D Spin-Orbit coupled Topological Bose Gas », in *ArXiv eprints*, p. 1710.00717.
- THOULESS, D. J., M. KOHMOTO, M. P. NIGHTINGALE & M. den NIJS (1982), « Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential », in *Phys. Rev. Lett.* **49**, p. 405–408.
- WANG, Zheng, Yidong CHONG, John D JOANNOPOULOS & Marin SOLJAČIĆ (2009), « Observation of unidirectional backscattering-immune topological electromagnetic states », in *Nature* **461**, p. 772.
- WILLIAMS, R. A., L. J. LEBLANC, K. JIMENEZ-GARCIA, M. C. BEELER, A. R. PERRY, W. D. PHILLIPS & I. B. SPIELMAN (2012), « Synthetic Partial Waves in Ultracold Atomic Collisions », in *Science* **335**, p. 314–317.
- WU, Zhan, Long ZHANG, Wei SUN, Xiao-Tian XU, Bao-Zong WANG, Si-Cong JI, Youjin DENG, Shuai CHEN, Xiong-Jun LIU & Jian-Wei PAN (2016), « Realization of two-dimensional spin-orbit coupling for Bose-Einstein condensates », in *Science* **354**, p. 83–88.
- ZHANG, Chuanwei, Sumanta TEWARI, Roman M. LUTCHYN & S. DAS SARMA (2008), «  $p_x + ip_y$  Superfluid from  $s$ -Wave Interactions of Fermionic Cold Atoms », in *Phys. Rev. Lett.* **101** (16), p. 160401.