

Chapitre 7

Magnétisme artificiel et interactions : condensats en rotation

Sommaire

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Interactions dans un gaz froid | 2 |
| 1-1 | Interaction de contact | 2 |
| 1-2 | Approximation de champ moyen | 4 |
| 1-3 | Passage à deux dimensions | 5 |
| 1-4 | Régime de Thomas-Fermi à 2D | 6 |
| 2 | Vortex dans un condensat | 7 |
| 2-1 | L'apparition du premier vortex | 7 |
| 2-2 | L'argument de Feynman | 9 |
| 2-3 | La forme d'équilibre du condensat | 11 |
| 2-4 | Observations expérimentales | 11 |
| 3 | Rotation et niveau de Landau fondamental | 12 |
| 3-1 | Rappel : niveaux de Landau en jauge symétrique | 13 |
| 3-2 | Fonctions du LLL et vortex | 14 |
| 3-3 | Expériences dans le LLL | 15 |
| 4 | Au delà du champ moyen | 16 |
| 4-1 | État fondamental à N particules dans le LLL | 17 |
| 4-2 | Quelques états remarquables | 17 |
| 4-3 | Schémas de détection envisageables | 18 |

Nous allons dans ce dernier chapitre nous intéresser à l'effet combiné d'un champ magnétique artificiel et des interactions. Il s'agit d'un sujet extrêmement vaste qui donne naissance à de nombreux phénomènes en physique de la matière condensée, autant à partir du magnétisme de spin que du magnétisme orbital : ferro et antiferromagnétisme, effet Hall quantique, supraconductivité et effet Meissner, spintronique, isolants et supraconducteurs topologiques, etc. Nous n'allons aborder ici qu'une très faible partie de ce vaste domaine en nous concentrant sur le comportement d'un superfluide en présence d'un champ magnétique uniforme.

Le système que nous allons considérer est un condensat de bosons en interaction répulsive. Nous partirons de l'équivalence

$$\text{Magnétisme orbital} \longleftrightarrow \text{Rotations}$$

pour étudier le comportement d'un gaz de Bose placé dans un piège harmonique tournant. Ce système en apparence très simple va nous permettre d'introduire une série de notions importantes : approximation de champ moyen, fréquence critique pour la nucléation d'un vortex, réseau d'Abrikosov, passage vers des états fortement corrélés. Des phénomènes similaires à ceux que nous allons décrire ici sont attendus également pour des gaz de fermions en interaction, si ces gaz sont suffisamment froids pour être décrit par une fonction d'onde macroscopique.

Nous nous intéresserons ici au cas d'une interaction répulsive entre atomes, qui représente le cas le plus intéressant sur le plan pratique. Nous nous limiterons à une interaction de contact, et nous renvoyons le lecteur vers l'article de revue de Cooper (2008) pour une description des phé-

nomènes susceptibles d'apparaître pour une interaction à longue portée comme l'interaction dipole-dipole.

Nous allons commencer ce chapitre par une brève présentation de la description des interactions présentes dans un gaz d'atomes froids, pour passer ensuite à la description d'un condensat en régime de champ moyen. Nous verrons comment la notion de niveau de Landau fondamental apparaît naturellement dans ce contexte, et nous terminerons par la description de la transition vers des états fortement corrélés, qui n'a pas encore été observée expérimentalement pour ces gaz d'atomes froids. Nous allons faire toute cette présentation pour un gaz à deux dimensions, ce qui permet de simplifier quelque peu le traitement mathématique tout en conservant les phénomènes essentiels. On trouvera dans les articles de revue de Bloch et al. (2008); Cooper (2008); Fetter (2009) de nombreuses références aux phénomènes qui seront évoqués ici.

1 Interactions dans un gaz froid

1-1 Interaction de contact

Nous nous limiterons dans tout ce qui suit à un gaz de particules interagissant via un potentiel à courte portée. Plus précisément, pour deux atomes séparés par une distance r , le potentiel d'interaction comporte (cf. figure 7.1) :

- une partie attractive due aux forces de van der Waals

$$U_{\text{vdW}}(r) = -\frac{C_6}{r^6} \quad (7.1)$$

qui est dominant quand r est suffisamment grand pour que le passage par effet tunnel d'un électron d'un atome à l'autre soit négligeable (typiquement $r > 8 \text{ \AA}$),

- une partie intermédiaire attractive ou répulsive correspondant à la liaison covalente (saut de l'électron d'un atome à l'autre), donnant naissance aux potentiels singulet et triplet.
- une partie répulsive à très courte distance ($r < 4 \text{ \AA}$) due à la répulsion électrostatique des cœurs électroniques.

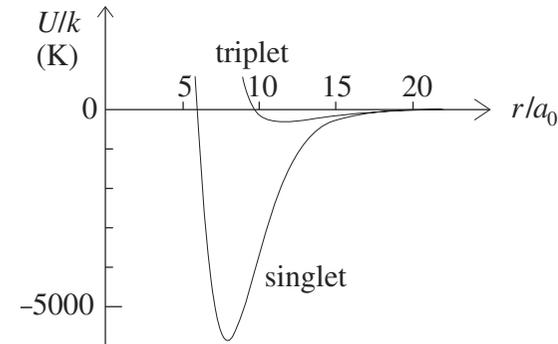


FIGURE 7.1. Représentation simplifiée du potentiel d'interaction entre deux atomes de rubidium séparés par la distance r . L'unité de longueur est le rayon de Bohr $a_0 = 0.53 \text{ \AA}$ (figure extraite de Pethick & Smith (2002)).

À très basse énergie, l'amplitude de diffusion caractérisant la collision entre deux atomes de vecteur d'onde relatif k est isotrope et quasiment indépendante de l'énergie (collision dans l'onde s). La collision se décrit par un seul nombre, la longueur de diffusion a , dont on déduit les différentes quantités pertinentes. Par exemple, pour un gaz de bosons tous préparés dans le même état interne, la section efficace de collision vaut $\sigma = 8\pi a^2$.

Puisque seule compte la longueur de diffusion pour décrire les interactions dans un gaz d'atomes froids, il est inutile de connaître la forme exacte du potentiel représenté sur la figure 7.1. Tout autre potentiel à courte portée conduisant à la même longueur de diffusion donnera naissance à la même physique. On utilise donc traditionnellement une forme mathématique très simple, une interaction de contact, pour modéliser le potentiel réel à trois dimensions :

$$U^{(3D)}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{M} \delta^{(3D)}(\mathbf{r}), \quad (7.2)$$

Remarque : le pseudo-potentiel. En dehors du cas uni-dimensionnel, un potentiel proportionnel à la distribution de Dirac présente des singularités qui peuvent conduire à des difficultés mathématiques. Une version légèrement plus compliquée de l'interaction de contact à trois dimensions

permet d'éviter ces difficultés ; il s'agit du pseudo-potentiel (Huang 1987) défini par son action sur une fonction $\psi(\mathbf{r})$:

$$U^{(3D)}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{M} \delta(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} (r\psi(\mathbf{r})). \quad (7.3)$$

En pratique, nous n'aurons pas à recourir à ce pseudo-potentiel pour le traitement de champ moyen qui va suivre.

Qu'est-ce qu'un gaz froid pour les collisions ? Nous avons mentionné que la section efficace devenait isotrope pour une énergie de collision suffisamment basse. Donnons un critère précis pour cette approximation. Quand on fait un développement en ondes partielles pour traiter la collision entre particules, on voit apparaître pour chaque onde partielle de moment cinétique ℓ la barrière centrifuge

$$U_{\text{centrif.}}^{(\ell)}(r) = \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m_r r^2}, \quad (7.4)$$

où $m_r = M/2$ est la masse réduite de la paire d'atomes. Pour les collisions en onde s , cette barrière est nulle. En revanche, dès que l'on considère $\ell \neq 0$, cette barrière vient empêcher les atomes de s'approcher l'un de l'autre et elle a donc un effet opposé au potentiel attractif de van der Waals.

Regardons la somme de ces potentiels pour l'onde partielle¹ $\ell = 2$ (cf. figure 7.2) :

$$U_{\text{tot}}^{(\ell=2)}(r) = U_{\text{vdW}}(r) + U_{\text{centrif.}}^{(\ell=2)}(r) = -\frac{C_6}{r^6} + \frac{3\hbar^2}{m_r r^2}. \quad (7.5)$$

Ce potentiel est maximal pour $r = a_c/2^{1/4}$, où a_c est la longueur caractéristique associée à l'interaction de van der Waals :

$$a_c = \left(\frac{2m_r C_6}{\hbar^2} \right)^{1/4}. \quad (7.6)$$

La hauteur de la barrière en ce point vaut

$$U_{\text{tot,max}}^{(2)} = \sqrt{8} \frac{\hbar^2}{m_r a_c^2}. \quad (7.7)$$

1. Pour des bosons polarisés, l'onde partielle $\ell = 1$ est interdite car elle correspond à une fonction d'onde antisymétrique par échange des deux particules.

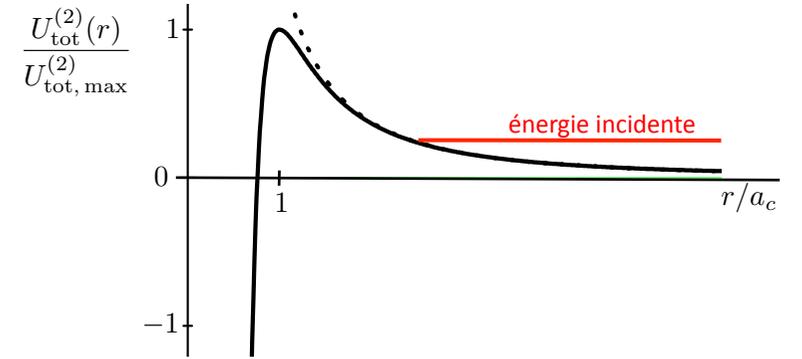


FIGURE 7.2. Trait continu : somme du potentiel de van der Waals et du potentiel centrifuge pour $\ell = 2$, pointillé : potentiel centrifuge uniquement. Pour une énergie incidente beaucoup plus basse que la hauteur $U_{\text{tot,max}}^{(2)}$, les particules ne ressentent pratiquement pas le potentiel de Van der Waals.

Si l'énergie incidente des particules est bien inférieure à cette hauteur, soit

$$k_B T \ll \frac{\hbar^3}{(m_r^3 C_6)^{1/2}}, \quad (7.8)$$

leur distance minimale d'approche pour cette onde partielle va rester beaucoup plus grande que a_c . Ceci signifie que les particules seront essentiellement sensibles au potentiel centrifuge, et pas au potentiel de van der Waals.

Pour cette onde partielle $\ell = 2$ (et pour toutes les suivantes qui ont une barrière centrifuge encore plus grande), tout se passe donc comme si l'interaction de van der Waals n'existait pas. Seule l'onde s correspondant à $\ell = 0$, qui ne contient pas de potentiel centrifuge, contribue. Or, la diffusion dans l'onde s est par définition isotrope, d'où le résultat. Pour les atomes alcalins, on trouve que le membre de droite de l'inégalité (7.8) est de l'ordre de la centaine de microkelvins, voire davantage, et l'approximation de collisions dans l'onde s est excellente dans le régime de dégénérescence quantique atteignable expérimentalement (autour ou en dessous du microkelvin).

1-2 Approximation de champ moyen

Considérons maintenant une assemblée de N atomes placés dans un potentiel extérieur $V(\mathbf{r})$ et interagissant par l'intermédiaire du potentiel $\sum U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$, où \mathbf{r}_i et \mathbf{r}_j sont les coordonnées de deux atomes. L'hamiltonien total du système s'écrit donc :

$$\hat{H}^{(N)} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\hat{p}_j^2}{2M} + V(\mathbf{r}_j) \right) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (7.9)$$

Nous allons chercher l'état fondamental de ce système de manière approchée, correspondant à l'idée physique que toutes les particules sont condensées et décrites par la même fonction d'onde. Ceci revient à utiliser une approximation de champ moyen ; on néglige toute corrélation entre atomes et on écrit l'état fondamental sous la forme

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \psi(\mathbf{r}_1) \dots \psi(\mathbf{r}_N), \quad (7.10)$$

où la fonction d'onde macroscopique ψ est normalisée :

$$\int |\psi(\mathbf{r})|^2 d^3r = 1. \quad (7.11)$$

Une fois choisie la fonction $\psi(\mathbf{r})$, on peut évaluer l'énergie moyenne du système

$$E^{(N)}[\psi] = \langle \Psi | \hat{H}^{(N)} | \Psi \rangle \quad (7.12)$$

Les N termes d'énergie cinétique et d'énergie potentielle donnent tous la même contribution

$$\int \left(\frac{\hbar^2}{2M} |\nabla \psi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r})|^2 \right) d^3r, \quad (7.13)$$

et les $N(N-1)/2$ termes d'interaction ont également tous la même expression

$$\iint U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) |\psi(\mathbf{r}_1)|^2 |\psi(\mathbf{r}_2)|^2 d^3r_1 d^3r_2 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{M} \int |\psi(\mathbf{r})|^4 d^3r. \quad (7.14)$$

En prenant $N-1 \approx N$, on obtient donc dans cette approximation de champ moyen l'énergie par particule $E[\psi] = E^{(N)}[\psi]/N$:

$$E[\psi] = \int \left(\frac{\hbar^2}{2M} |\nabla \psi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{2\pi\hbar^2 a N}{M} |\psi(\mathbf{r})|^4 \right) d^3r \quad (7.15)$$

qu'il s'agit de minimiser en choisissant la valeur appropriée de ψ , tout en tenant compte de la contrainte de normalisation.

Équation de Gross-Pitaevskii. La minimisation de l'énergie (7.15) sous la contrainte que la fonction d'onde doit être normée (7.11) est un problème variationnel qui peut se résoudre par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Les états qui rendent (7.15) extrême sont les solutions de l'équation de Gross-Pitaevskii

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) + \frac{4\pi\hbar^2 a N}{M} |\psi(\mathbf{r})|^2 \psi(\mathbf{r}) = \mu \psi(\mathbf{r}), \quad (7.16)$$

où le *potentiel chimique* μ est le multiplicateur de Lagrange introduit pour prendre en compte la contrainte sur la norme. Il correspond physiquement à l'augmentation $E^{(N+1)} - E^{(N)}$ de l'énergie de l'état fondamental quand on ajoute une particule au système à N corps.

Longueur de cicatrisation ξ . Un point important de cette description en champ moyen est l'émergence d'une longueur caractéristique associée aux interactions, la *longueur de cicatrisation* ξ . Pour montrer comment cette longueur apparaît, considérons un condensat confiné dans le demi-espace $x > 0$, avec une paroi dans le plan $x = 0$ qui impose à la fonction d'onde de s'annuler sur ce plan. Les interactions répulsives entre atomes vont favoriser les états où le gaz occupe un maximum d'espace ; pour ces états, la fonction d'onde prend des valeurs significatives à des distances arbitrairement proches de la paroi, donc augmentant lentement depuis le nœud en $x = 0$. En revanche, le terme d'énergie cinétique favorise des fonctions d'onde variant lentement dans l'espace. La longueur de cicatrisation émerge comme le meilleur compromis entre ces deux contraintes.

On peut trouver la solution exacte de l'équation de Gross-Pitaevskii (7.16) dans le cas qui nous intéresse

$$\psi(x) = \psi_0 \tanh(x/\xi), \quad (7.17)$$

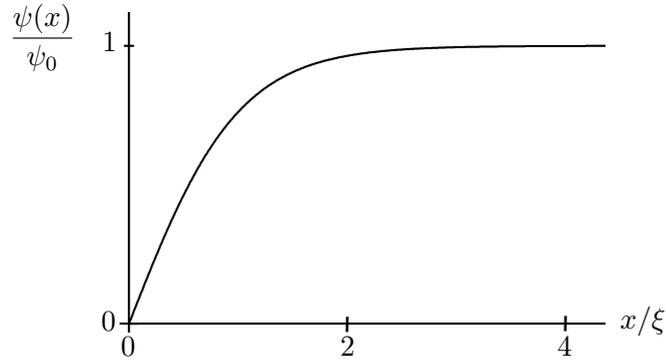


FIGURE 7.3. Variation (7.17) de la fonction d'onde au voisinage d'une paroi, modélisée comme la surface plane $x = 0$ sur laquelle $\psi(x)$ doit s'annuler. La longueur caractéristique ξ , appelée longueur de cicatrisation (healing length) est reliée au potentiel chimique μ par $\xi = \hbar/\sqrt{M\mu}$ (relation valable aussi bien à 3D qu'à 2D).

avec

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{M\mu}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi a \rho^{(3D)}}}, \quad \mu = \frac{4\pi\hbar^2 a}{M} \rho^{(3D)}, \quad \rho^{(3D)} = N\psi_0^2. \quad (7.18)$$

Cette fonction d'onde s'annule bien en $x = 0$ et tend vers la constante ψ_0 pour $x \gg \xi$.

1-3 Passage à deux dimensions

Nous allons désormais nous concentrer sur les propriétés du gaz d'atomes dans le plan xy . Ce choix est motivé par le fait que le magnétisme induit par un champ \mathbf{B} parallèle à l'axe z se manifeste essentiellement dans ce plan. Cette restriction va nous permettre de simplifier notablement les calculs et les notations, tout en conservant les éléments physiquement importants.

Sur le plan mathématique, cette restriction au plan xy se fait en recherchant les fonctions d'onde ψ qui minimisent l'énergie (7.15) sous la forme

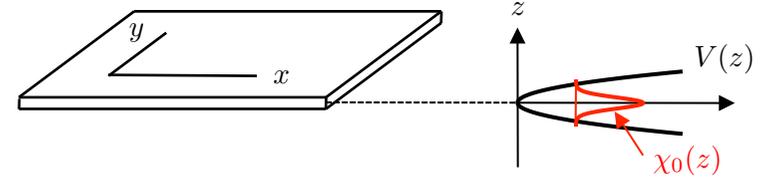


FIGURE 7.4. Confinement selon la direction z par un potentiel harmonique. L'état du gaz selon z est supposé « gelé » et décrit par la fonction d'onde $\chi_0(z)$, d'extension a_z . Les interactions dans le plan xy sont alors décrites par le nombre sans dimension $g \propto a/a_z$ (cf. 7.22), où a est la longueur de diffusion à 3D.

factorisée

$$\psi(x, y, z) = \phi(x, y) \chi_0(z), \quad (7.19)$$

et en supposant que $\chi_0(z)$ est figée. Physiquement, un tel régime peut être atteint en appliquant selon z un régime de confinement très fort de sorte que les atomes occupent seulement l'état fondamental de l'hamiltonien décrivant le mouvement selon cette direction (figure 7.4).

Nous allons supposer par ailleurs que le potentiel de confinement dans le plan xy est harmonique et isotrope, de pulsation ω . On se ramène donc à l'énergie de champ moyen :

$$E[\phi] = \int \left(\frac{\hbar^2}{2M} |\nabla \phi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} M \omega^2 r^2 |\phi(\mathbf{r})|^2 + \frac{\hbar^2}{2M} N g |\phi(\mathbf{r})|^4 \right) d^2r, \quad (7.20)$$

où la constante d'interaction g (sans dimension) est définie par

$$g = 4\pi a \int |\chi_0(z)|^4 dz. \quad (7.21)$$

Si le confinement selon z est harmonique de pulsation ω_z et si $\chi_0(z) \propto \exp(-z^2/2a_z^2)$ représente l'état fondamental de cet oscillateur, alors

$$g = \sqrt{8\pi} \frac{a}{a_z}, \quad (7.22)$$

où $a_z = \sqrt{\hbar/M\omega_z}$. Considérons par exemple un gaz de rubidium confiné par un piège de fréquence $\omega_z/2\pi = 5$ kHz ; on trouve $a_z = 150$ nm, ce qui combiné avec $a = 5.1$ nm, conduit à un couplage $g = 0.17$.

Interaction effective à deux dimensions. L'énergie en champ moyen à deux dimensions donnée en (7.20) peut être obtenue formellement en prenant pour potentiel d'interaction entre deux particules

$$U^{(2D)}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{M} g \delta^{(2D)}(\mathbf{r}). \quad (7.23)$$

Dans le cas général, cette distribution de Dirac bi-dimensionnelle peut conduire à des singularités mathématiques; pour décrire un processus de collision à deux dimensions en physique quantique, il faut en principe introduire un coefficient de couplage dépendant de l'énergie [voir par exemple Adhikari (1986); Petrov & Shlyapnikov (2001); Olshanii & Pricoupenko (2002)]. Toutefois, ces singularités n'interviennent pas dans le traitement de champ moyen que nous considérons ici, ni dans le traitement au delà du champ moyen, mais restreint au niveau de Landau fondamental, que nous aborderons au paragraphe 4 (Haldane 1983); dans ces deux cas, on peut représenter l'interaction entre particules par le potentiel de contact à deux dimensions (7.23), caractérisé par le coefficient de couplage constant g , sans introduire de pathologie mathématique.

1-4 Régime de Thomas-Fermi à 2D

Pour progresser dans l'étude de l'état d'équilibre du gaz, commençons par remarquer que la stabilité du nuage résulte de deux phénomènes antagonistes présents dans l'expression de l'énergie (7.20) :

- Le terme de piégeage en $M\omega^2 r^2/2$ favorise une fonction ϕ localisée au voisinage de l'origine pour minimiser l'énergie potentielle.
- Les deux termes d'énergie cinétique et d'interaction ont l'effet contraire : ces deux énergies diminuent quand on augmente l'extension de la fonction ϕ .

Le terme de piégeage joue donc toujours un rôle essentiel dans l'équilibre. Son effet sera contrebalancé majoritairement soit par l'énergie cinétique, soit par l'énergie d'interaction. Pour déterminer laquelle de ces deux énergies est dominante pour assurer l'équilibre, introduisons la taille R caractérisant l'extension de ϕ . Puisque ϕ est normée, on a $\phi \sim 1/R$ sur la zone

où elle prend des valeurs significatives. On en déduit

$$\frac{\hbar^2}{M} \int |\nabla\phi(\mathbf{r})|^2 d^2r \sim \frac{\hbar^2}{MR^2}, \quad \frac{\hbar^2}{M} Ng \int |\phi(\mathbf{r})|^4 d^2r \sim \frac{\hbar^2}{MR^2} Ng. \quad (7.24)$$

Par conséquent si $Ng \ll 1$, c'est l'énergie cinétique qui vient contrebalancer l'énergie potentielle et on peut ignorer les interactions. Dans le cas opposé $Ng \gg 1$, c'est l'interaction répulsive entre atomes qui s'oppose à la force de piégeage et l'énergie cinétique est négligeable. Ce deuxième cas, qui correspond au régime de Thomas-Fermi, est aisément atteint en pratique; si on reprend la valeur $g \sim 0.2$ donnée plus haut, il suffit de placer une dizaine d'atomes dans le piège.

Si on néglige l'énergie cinétique, (7.20) se simplifie pour donner

$$Ng \gg 1: \quad E[\phi] \approx \frac{1}{2} M\omega^2 \int r^2 |\phi|^2 + \frac{\hbar^2}{2M} Ng \int |\phi|^4, \quad (7.25)$$

et l'équation de Gross-Pitaevskii associée devient une équation algébrique

$$\frac{1}{2} M\omega^2 r^2 \phi(\mathbf{r}) + \frac{\hbar^2}{M} Ng |\phi(\mathbf{r})|^2 \phi(\mathbf{r}) = \mu \phi(\mathbf{r}). \quad (7.26)$$

dont la résolution est simple. En introduisant le rayon de Thomas-Fermi R_{TF}

$$\mu = \frac{1}{2} m\omega^2 R_{\text{TF}}^2; \quad (7.27)$$

on obtient

$$\begin{aligned} Ng |\phi(\mathbf{r})|^2 &= \frac{1}{2a_{\perp}^4} (R_{\text{TF}}^2 - r^2) & \text{si } r < R \\ \phi(\mathbf{r}) &= 0 & \text{si } r \geq R. \end{aligned} \quad (7.28)$$

où on a posé $a_{\perp} = (\hbar/M\omega)^{1/2}$. Pour terminer notre analyse, il reste à exprimer le fait que la fonction $\phi(\mathbf{r})$ est normée, ce qui fournit une relation entre le rayon de Thomas-Fermi et le paramètre Ng :

$$R_{\text{TF}} = a_{\perp} \left(\frac{4Ng}{\pi} \right)^{1/4}, \quad \mu = \hbar\omega \left(\frac{Ng}{\pi} \right)^{1/2}. \quad (7.29)$$

Une quantité utile pour la suite est la densité surfacique $\rho(\mathbf{r})$, et en particulier sa valeur au centre du condensat :

$$\rho(0) = N|\phi(0)|^2 = \sqrt{\frac{N}{\pi g}} a_{\perp}^{-2}. \quad (7.30)$$

On constate donc que deux effets se produisent lorsque l'on augmente le nombre d'atomes dans le condensat :

- le rayon augmente comme $N^{1/4}$, donc la surface comme \sqrt{N} .
- la densité au centre augmente elle aussi comme \sqrt{N} .

Remarque. Les relations entre potentiel chimique, longueur de cicatrization et rayon de Thomas–Fermi :

$$\mu = \frac{\hbar^2}{M\xi^2}, \quad \mu = \frac{1}{2}M\omega^2 R_{\text{TF}}^2 = \hbar\omega \frac{R_{\text{TF}}^2}{2a_{\perp}^2}, \quad (7.31)$$

peuvent se combiner pour donner

$$\xi = a_{\perp} \left(\frac{\pi}{Ng} \right)^{1/4}, \quad \xi R_{\text{TF}} = \sqrt{2} a_{\perp}^2. \quad (7.32)$$

Pour un piège de fréquence et donc de a_{\perp} donnés, la longueur de cicatrization et le rayon de Thomas-Fermi varient en sens inverse quand on augmente le nombre d'atomes : ξ diminue et R_{TF} augmente, leur produit restant constant.

2 Vortex dans un condensat

Nous considérons maintenant un condensat confiné dans un piège harmonique isotrope de pulsation ω dans le plan xy et mis en rotation avec un agitateur tournant à fréquence angulaire Ω . L'hamiltonien à une particule s'écrit dans le référentiel tournant

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2 \hat{\mathbf{r}}^2 - \Omega \hat{L}_z \quad (7.33)$$

Nous allons nous intéresser dans ce qui suit à l'état fondamental de ce condensat en présence d'interactions, dans l'hypothèse où ces dernières peuvent être décrites par une interaction de champ moyen. Il va donc s'agir de trouver la fonction $\phi(x, y)$ qui minimise la fonctionnelle d'énergie associée à (7.33) :

$$E[\phi] = \int \left(\frac{\hbar^2}{2M} |\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2}M\omega^2 r^2 |\phi|^2 - \Omega\phi^* (\hat{L}_z\phi) + \frac{\hbar^2}{2M} Ng |\phi|^4 \right) d^2r. \quad (7.34)$$

2-1 L'apparition du premier vortex

La notion de vortex, ou tourbillon, va jouer un rôle crucial dans la recherche de l'état fondamental en présence d'un champ de jauge. Nous avons déjà rencontré cette notion quand nous avons étudié au chapitre 2 les états propres de l'hamiltonien à une particule dans un piège isotrope. Nous avons montré que l'état fondamental et les deux premiers états excités étaient donnés par

$$\text{Fondamental :} \quad \psi_0(\mathbf{r}) = e^{-r^2/2a_{\perp}^2}, \quad (7.35)$$

$$\text{Premier niveau excité :} \quad \psi_{\pm}(\mathbf{r}) = r e^{\pm i\varphi} e^{-r^2/2a_{\perp}^2} \quad (7.36)$$

Les deux états qui forment une base du premier niveau excité portent un moment cinétique non nul, en l'occurrence $\pm\hbar$. Ils possèdent toutes les caractéristiques des vortex que nous allons rencontrer dans ce qui suit :

- Le centre d'un vortex est toujours un point auquel la densité $\rho(\mathbf{r}) = |\phi(\mathbf{r})|^2$ s'annule.
- Le long d'un contour fermé entourant le centre du vortex, la phase de $\phi(\mathbf{r})$ évolue continûment pour donner un enroulement de $\pm 2\pi$, ou un multiple de cette quantité dans le cas d'un vortex de charge multiple.
- Pour un vortex unique au centre d'un condensat, le champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ que l'on déduit de la phase $\theta(\mathbf{r})$ de la fonction d'onde

$$\phi(\mathbf{r}) = |\phi(\mathbf{r})| e^{i\theta(\mathbf{r})} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{M} \nabla\theta(\mathbf{r}), \quad (7.37)$$

varie comme $1/r$. Cette propriété existe également pour un fluide classique, mais la spécificité d'un condensat est la quantification de la cir-

culution de la vitesse : sur un contour entourant le vortex, on a

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \pm \frac{\hbar}{Mr} \mathbf{u}_\varphi, \quad \oint \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \pm \frac{h}{M} \quad (7.38)$$

pour un vortex de charge 1.

La modification importante qui va apparaître en présence d'interactions est la taille du cœur du vortex. Alors que pour les états (7.36), la taille du cœur (typiquement la largeur à mi-hauteur du trou central de densité) est de l'ordre de a_\perp , la taille du cœur d'un vortex à l'équilibre en présence d'interactions est plus petite, d'ordre ξ (ceci ne sera plus vrai quand l'état fondamental sera restreint au LLL, voir § 3). L'apparition de la longueur de cicatrization dans ce contexte n'est pas surprenante. Imposer la présence d'un vortex en un point donné revient à imposer à la fonction d'onde de s'annuler en ce point. Quand on s'éloigne du cœur, la densité surfacique $\rho(\mathbf{r})$ augmente pour reprendre au loin sa valeur en l'absence de vortex. La taille d'équilibre du cœur, qui résulte d'un compromis en énergie cinétique et énergie d'interaction, est donc naturellement donnée [à un facteur numérique près, voir par exemple Castin & Dum (1999)] par la longueur de cicatrization.

Il est intéressant d'évaluer le nombre d'atomes manquants δN dans un cœur de vortex dans ce cas bi-dimensionnel. En utilisant (7.30-7.32), on trouve

$$\delta N \sim \rho(0) \pi \xi^2 = \frac{\pi}{g}. \quad (7.39)$$

Pour la situation physique envisagée en § 1-3 pour des atomes de rubidium ($g = 0.17$), on trouve $\delta N \sim 20$. Le déficit en atomes lié à la présence d'un vortex est donc petit devant le nombre d'atomes typique dans un condensat (de 10^3 à 10^6). La situation devient encore plus frappante quand on augmente la force des interactions pour atteindre une valeur du couplage g qui dépasse l'unité. Le déficit en atomes δN devient alors inférieur à 1, ce qui veut dire qu'un vortex ne peut pas être détecté par le trou qu'il crée dans le gaz *in situ*. C'est ce qui se produit dans les films d'hélium liquide par exemple.

Puisqu'un état à un vortex centré correspond à un moment cinétique de \hbar par particule, il provoque un abaissement d'énergie pour au moins un des termes de $E[\phi]$ donné en (7.34), $-\Omega \langle L_z \rangle$. On peut donc s'attendre à

voir un ou plusieurs vortex apparaître dans l'état fondamental du gaz en rotation.

Toutefois, il y a une énergie cinétique supplémentaire² associée au champ de vitesse du vortex $\mathbf{v}(\mathbf{r})$:

$$\Delta E^{(N)} = \frac{M}{2} \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{v}^2(\mathbf{r}) d^2r, \quad (7.40)$$

que nous devons évaluer pour déterminer quand l'état à un vortex devient énergiquement favorable par rapport à l'état sans vortex. Le profil de densité $\rho(\mathbf{r})$ est essentiellement inchangé par rapport à sa valeur en absence de vortex, excepté au voisinage immédiat du cœur, c'est-à-dire pour $r \lesssim \xi$. Pour le champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ orthoradial (7.38), l'accroissement d'énergie cinétique par particule vaut

$$\Delta E = \frac{\Delta E^{(N)}}{N} \approx \frac{M}{2N} \rho(0) \int_\xi^{R_{\text{TF}}} \left(1 - \frac{r^2}{R_{\text{TF}}^2}\right) \frac{\hbar^2}{M^2 r^2} 2\pi r dr. \quad (7.41)$$

L'intégrale se calcule simplement pour donner

$$\Delta E \approx \hbar \omega \sqrt{\frac{\pi}{Ng}} \ln \frac{R_{\text{TF}}}{e\xi} \quad (7.42)$$

L'approximation de Thomas–Fermi est valable dans le cas $Ng \gg 1$; cet accroissement d'énergie par particule est donc petit³ devant $\hbar\omega$, alors que l'énergie par particule ($\sim \mu$) est quant à elle grande devant $\hbar\omega$ [voir par exemple (7.31)].

Le coût en énergie cinétique d'un vortex est donc relativement minime et, grâce au terme en $-\Omega L_z$, il suffit d'une faible rotation pour favoriser sa création sur le plan énergétique. Plus précisément, puisqu'un vortex centré correspond à un moment cinétique \hbar , la variation d'énergie $\Delta E - \hbar\Omega$ devient négative quand Ω dépasse la valeur critique Ω_c donnée par (Baym & Pethick 1996; Dalfvo & Stringari 1996):

$$\frac{\Omega_c}{\omega} \approx \sqrt{\frac{\pi}{Ng}} \ln \frac{R_{\text{TF}}}{e\xi} \ll 1. \quad (7.43)$$

2. On pourra estimer également l'accroissement d'énergie potentielle du nuage du fait du transfert des particules initialement à une distance $r \lesssim \xi$ du centre vers les couches extérieures, et vérifier qu'il est négligeable devant l'augmentation d'énergie cinétique calculée ici.

3. L'argument du logarithme est au plus de l'ordre du millier, et le logarithme est donc lui-même de l'ordre de quelques unités.

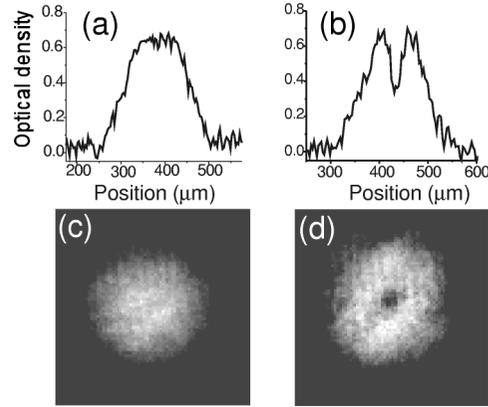


FIGURE 7.5. Tourbillon observé à l'ENS dans un condensat (3D) de rubidium en rotation (Madison et al. 2000a). Ces images ont été prises après un temps de vol qui augmente la taille du coeur du vortex, qui devient ainsi observable (pour une description théorique de l'effet de ce temps de vol, voir par exemple Dalfovo & Modugno (2000)). Expériences menées avec $\sim 10^5$ atomes de rubidium dans un piège tel que $\omega/2\pi = 220$ Hz. À gauche, $\Omega/2\pi = 145$ Hz, à droite $\Omega/2\pi = 152$ Hz.

Premières expériences. Nous avons reporté sur la figure 7.5 les premières observations de vortex dans des condensats atomiques en rotation (Madison et al. 2000a). On trouve bien qu'au dessus d'une fréquence de rotation critique, un premier vortex apparaît dans le condensat. Dans cette première expérience, la fréquence critique Ω_c ne correspondait pas à celle prédite en (7.43), mais était systématiquement plus élevée et égale environ à $\omega/\sqrt{2}$. L'explication quantitative de ce phénomène réside dans le fait qu'il y a une barrière énergétique à fournir pour faire pénétrer un vortex dans un condensat. Il ne suffit pas que l'état final avec vortex ait une énergie plus basse que l'état sans vortex, il faut également qu'il existe un chemin pour que le vortex initialement à l'extérieur du nuage pénètre à l'intérieur. L'existence d'un tel chemin est favorisée pour $\Omega \approx \omega/\sqrt{2}$, en raison d'une instabilité dynamique de la surface du condensat autour de cette fréquence de rotation (Sinha & Castin 2001), [voir également Recati et al. (2001), Lobo et al. (2004) et les films associés sur la page personnelle d'Yvan Castin].

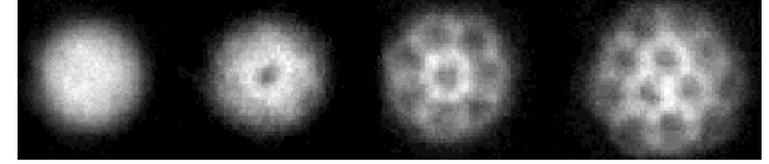


FIGURE 7.6. Augmentation du nombre de vortex avec la fréquence de rotation. Figure obtenue à l'ENS, extraite de Madison et al. (2000b).

2-2 L'argument de Feynman

Quand le champ magnétique artificiel ou la fréquence de rotation Ω augmentent, le nombre de vortex au sein du condensat à l'équilibre croît, comme on peut le voir sur la figure 7.6. Avant d'étudier ce problème spécifiquement quantique, il est utile de commencer par l'étude du problème classique équivalent. Considérons donc un fluide classique (supposé incompressible pour simplifier), de densité ρ et confiné dans une boîte circulaire de rayon R . La boîte tourne autour de son axe à la fréquence angulaire Ω et on suppose que les parois sont suffisamment rugueuses pour mettre le fluide en mouvement. La recherche de l'état d'équilibre doit donc se faire dans le référentiel en rotation, puisque ce référentiel est le seul où les forces agissant sur le fluide sont indépendantes du temps.

Plaçons-nous à deux dimensions et cherchons le champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ du fluide dans le laboratoire, une fois l'équilibre atteint. L'énergie cinétique du fluide dans le laboratoire est

$$E_c^{(\text{lab})} = \frac{1}{2} M \rho \int \mathbf{v}^2(\mathbf{r}) \, d^2r \quad (7.44)$$

et l'énergie dans le référentiel tournant vaut :

$$E_c^{(\text{rt})} = E_c^{(\text{lab})} - \Omega L_z, \quad \text{avec} \quad L_z = \rho \int \mathbf{r} \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) \, d^2r. \quad (7.45)$$

Cette énergie peut se mettre sous la forme

$$E_c^{(\text{rt})} = \frac{1}{2} M \rho \int (\mathbf{v}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 \, d^2r - \frac{1}{2} J \Omega^2, \quad (7.46)$$

avec $\Omega = \Omega \mathbf{u}_z$. La quantité $J = M \int r^2 d^2r$ désigne le moment d'inertie du disque. Il est alors immédiat de constater que le champ de vitesse qui minimise (7.46) est le champ de rotation rigide :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \Omega \times \mathbf{r}. \quad (7.47)$$

Ce champ de vitesse correspond à une vorticité (rotationnel du champ de vitesse) uniforme

$$\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 2\Omega. \quad (7.48)$$

Revenons maintenant au cas d'un superfluide décrit par une fonction d'onde macroscopique $\phi(\mathbf{r}) = |\phi(\mathbf{r})| e^{i\theta(\mathbf{r})}$. Nous avons déjà indiqué que le champ de vitesse en un point de densité non nulle vaut

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{M} \nabla \theta(\mathbf{r}). \quad (7.49)$$

On en déduit qu'en dehors d'un zéro de densité, la vorticité s'annule puisque le rotationnel d'un gradient est toujours nul.

Considérons maintenant un vortex centré en \mathbf{r}_0 ; le champ de vitesse est orthoradial au voisinage de ce point :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) \approx \frac{\hbar}{M|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \mathbf{u} + \dots, \quad (7.50)$$

ce qui correspond à la vorticité :

$$\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{2\pi\hbar}{M} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \dots \quad (7.51)$$

Dans un superfluide, la vorticité est donc concentrée en des points discrets correspondant aux centres des vortex, alors qu'elle est diffuse dans un fluide classique [cf. eq. (7.48)].

Pour trouver la répartition des vortex dans un superfluide à l'équilibre, Feynman (1955) a suggéré d'utiliser le principe de correspondance et de poser que la densité moyenne de vortex ρ_v doit conduire à une vorticité après lissage égale à la vorticité d'un fluide classique pour la même rotation. En comparant (7.48) et (7.51), cet argument conduit à

$$2\Omega = \frac{2\pi\hbar}{M} \rho_v \quad \Rightarrow \quad \rho_v = \frac{M\Omega}{\pi\hbar}. \quad (7.52)$$

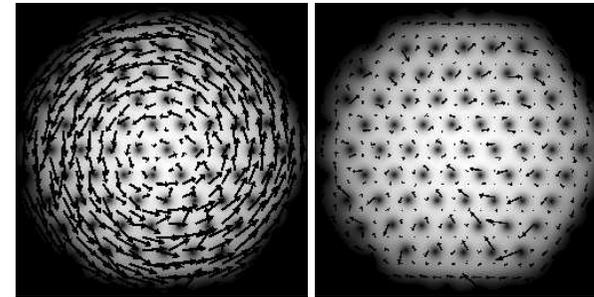


FIGURE 7.7. Figure extraite de l'article de Feder & Clark (2001), montrant la distribution en densité et le champ de vitesse d'un condensat dans le référentiel du laboratoire (à gauche) et dans le référentiel tournant (à droite). Ces résultats ont été obtenus pour un condensat de $2 \cdot 10^5$ atomes de rubidium dans un piège 3D de fréquences $\omega/2\pi = 8$ Hz et $\omega_z/2\pi = 5$ Hz. La fréquence de rotation est $\Omega = 0.95\omega$.

Cette hypothèse est confirmée par les simulations numériques; nous donnons en figure 7.7 le résultat d'un calcul fait par Feder et al. (1999), montrant l'état d'énergie minimale d'un condensat en rotation. Cet état contient effectivement des vortex qui s'arrangent en un réseau triangulaire régulier, similaire au réseau d'Abrikosov des vortex dans les supraconducteurs de type II plongés dans un champ magnétique. La densité moyenne de vortex est en bon accord avec la prédiction de Feynman (7.52) et le champ de vitesse reproduit correctement le champ de rotation rigide (7.47) (avec bien sûr des déviations au voisinage du cœur des vortex).

Remarque. Nous nous sommes limités ici au cas de vortex de charge 1, ce qui est justifié par une analyse de stabilité dynamique ou thermodynamique des vortex de charge plus élevée : ces derniers sont instables et il est toujours préférable sur le plan énergétique de les séparer en deux (ou plusieurs) vortex de charge unité (Castin & Dum 1999).

2-3 La forme d'équilibre du condensat

La distribution d'équilibre des atomes dans un piège en rotation s'obtient (dans l'approximation de champ moyen) en minimisant l'énergie totale (7.20) que nous réécrivons ici dans le référentiel tournant :

$$E[\phi] = E_c[\phi] + E_p[\phi] + E_{\text{int}}[\phi] - \Omega \langle L_z \rangle_\phi \quad (7.53)$$

avec

$$E_c[\phi] = \frac{\hbar^2}{2M} \int |\nabla \phi|^2, \quad E_p[\phi] = \frac{1}{2} M \omega^2 \int r^2 |\phi|^2 \quad (7.54)$$

$$E_{\text{int}}[\phi] = \frac{\hbar^2}{2M} N g \int |\phi|^4, \quad \langle L_z \rangle_\phi = -i\hbar \int \phi^* (\mathbf{r} \times \nabla) \phi \quad (7.55)$$

Il s'agit maintenant de trouver une forme approchée de la fonction ϕ qui minimise l'énergie totale (7.53). Pour cela, nous allons faire l'hypothèse suivante :

La taille ξ des vortex est petite devant la distance moyenne entre vortex ρ_v^{-2} .

Cette hypothèse nous permet de négliger la variation en densité au voisinage du cœur dans l'estimation de l'énergie cinétique et de l'énergie d'interaction, et de traiter la fonction ϕ comme une fonction régulière. Grâce à l'argument de Feynman, on sait par ailleurs que le champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ est donné en bonne approximation par le champ de vitesse de rotation rigide (7.47). On peut alors faire l'approximation :

$$\mathbf{v} \approx \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \Rightarrow E_c[\phi] \approx \frac{1}{2} M \Omega^2 \int r^2 |\phi|^2, \quad (7.56)$$

$$\text{et } -\Omega \langle L_z \rangle_\phi \approx -M \Omega^2 \int r^2 |\phi|^2. \quad (7.57)$$

A partir de ces deux hypothèses, l'énergie (7.53) peut se réécrire

$$E[\phi] \approx \frac{1}{2} M (\omega^2 - \Omega^2) \int r^2 |\phi|^2 + \frac{\hbar^2}{2M} N g \int |\phi|^4 \quad (7.58)$$

On retrouve alors une fonctionnelle d'énergie standard dans l'approximation de Thomas-Fermi, la seule modification par rapport à (7.25) étant la substitution :

$$\omega^2 \longrightarrow \omega^2 - \Omega^2, \quad (7.59)$$

qui correspond à la réduction de la raideur du piège du fait du potentiel centrifuge.

Tous les résultats obtenus dans le premier paragraphe à propos de la forme d'équilibre d'un condensat dans la limite de Thomas-Fermi restent donc qualitativement valables : en particulier, le profil de densité moyen du condensat garde sa forme parabolique, mais le rayon R_{TF} augmente

$$R_{\text{TF}} = a_\perp \left(\frac{4}{\pi} N g \right)^{1/4} \longrightarrow R_{\text{TF}} = a_\perp \left(\frac{4}{\pi} \frac{N g}{1 - \Omega^2/\omega^2} \right)^{1/4}. \quad (7.60)$$

Ce rayon croît donc indéfiniment quand Ω augmente et on retrouve la limite centrifuge : le rayon d'équilibre devient infini quand Ω atteint la valeur de piègeage ω avec :

$$\Omega \rightarrow \omega : \quad R_{\text{TF}} \approx a_\perp \left(\frac{2}{\pi} \frac{N g}{1 - \Omega/\omega} \right)^{1/4}. \quad (7.61)$$

2-4 Observations expérimentales

Nous avons reporté sur la figure 7.8a une observation spectaculaire faite au MIT d'un réseau de plus d'une centaine de vortex [figure tirée de l'article de Abo-Shaeer et al. (2001)]. Cette expérience a fourni un premier test de la loi de variation du nombre total de vortex dans le nuage

$$N_v = \rho_v \pi R_{\text{TF}}^2 \quad \text{avec} \quad \rho_v = \frac{M \Omega}{\pi \hbar}, \quad (7.62)$$

en fonction de la fréquence de rotation Ω . Cette prédiction (adaptée au cas 3D) est tracée en ligne pointillée sur la figure 7.8b, extraite de Raman et al. (2001). On constate sur cette figure que le nombre de vortex détecté est systématiquement un peu plus bas que celui attendu, ce que les auteurs de Raman et al. (2001) attribuent à un état d'équilibre imparfait du condensat avec l'agitateur tournant.

Des expériences similaires ont également été menées avec des gaz de fermions préparés dans un état superfluide dans un régime d'interaction forte (*crossover* BEC-BCS). Des réseaux de vortex ont également été observés, de part et d'autre de la limite unitaire [voir la figure 7.9, tirée de l'article de Zwierlein et al. (2005)].

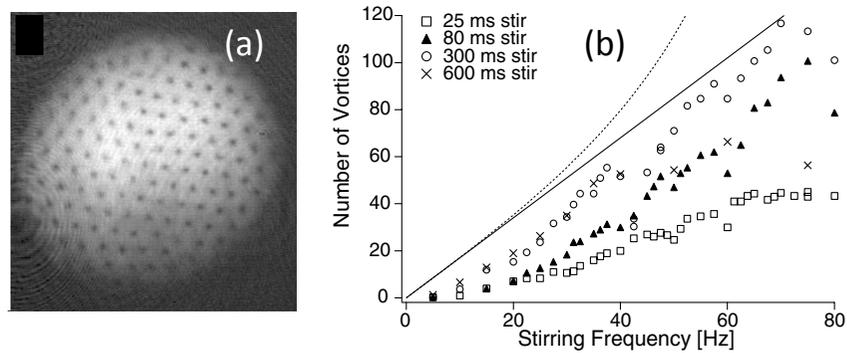


FIGURE 7.8. Figures obtenues au MIT, tirées des articles de Abo-Shaeer et al. (2001) et Raman et al. (2001), montrant un grand réseau de vortex pour un condensat 3D de 50 millions d'atomes de sodium, dans un piège de fréquence $\omega/2\pi = 86$ Hz dans le plan xy . La fréquence de rotation pour la figure a est de 60 Hz. La ligne continue dans la figure b montre le nombre de vortex attendu selon la loi $\rho_v = M\Omega/\pi\hbar$, en prenant en compte l'accroissement du rayon lié à la déformation centrifuge.

3 Rotation et niveau de Landau fondamental

Quand on augmente la vitesse de rotation Ω pour approcher la limite centrifuge $\Omega = \omega$ et atteindre des champs magnétiques artificiels de plus en plus grands, on constate que l'hypothèse ayant conduit au régime de Thomas-Fermi devient incorrecte. Nous avons supposé que la taille ξ du cœur des vortex était petite devant la distance entre vortex, de sorte qu'on pouvait négliger le trou de densité correspondant et remplacer la vraie fonction d'onde du condensat par une fonction d'onde lissée. Or, la longueur de cicatrisation croît indéfiniment quand la fréquence de rotation Ω se rapproche de ω . En effet, la densité spatiale au centre du condensat varie avec la fréquence effective du piège $(\omega^2 - \Omega^2)^{1/2}$ comme [cf. 7.30] :

$$\Omega \rightarrow \omega : \quad \rho(0) \propto (\omega^2 - \Omega^2)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \xi \propto (\omega^2 - \Omega^2)^{-1/4}. \quad (7.63)$$

L'interprétation de ce résultat est simple : quand on augmente la vitesse de rotation, la force centrifuge déforme de plus en plus le gaz, dont la taille

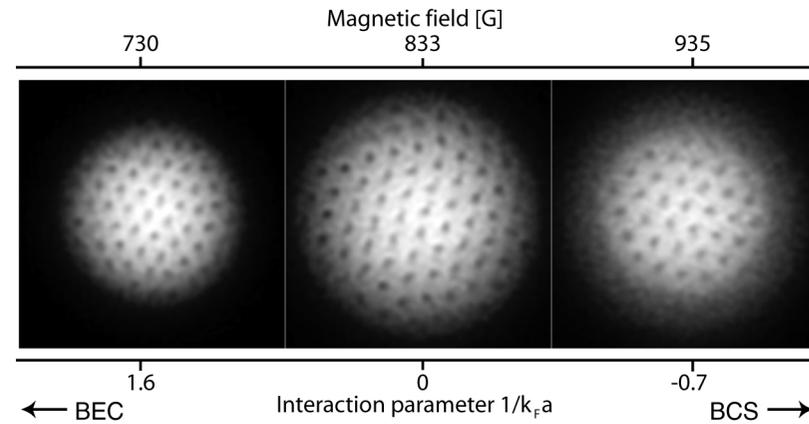


FIGURE 7.9. Observation par Zwierlein et al. (2005) d'un réseau de vortex pour un superfluide fermionique d'atomes de ${}^6\text{Li}$ en rotation. On utilise une résonance de Feshbach pour se placer au voisinage de la limite unitaire $a = \infty$. A droite, le gaz est dans un régime BCS, à gauche dans un régime de condensat de molécules. Cette figure a été obtenue avec 2 millions d'atomes de ${}^6\text{Li}$ dans un piège 3D correspondant à $\omega/2\pi = 57$ Hz, pour une fréquence de rotation $\Omega/2\pi = 45$ Hz.

diverge à la limite $\Omega = \omega$. Le gaz étant de plus en plus dilué, les particules interagissent de moins en moins, le potentiel chimique diminue en conséquence et la longueur de cicatrisation $\xi \propto \mu^{-1/2}$ augmente.

Par ailleurs, dans cette limite de rotation rapide $\Omega \approx \omega$, l'argument de Feynman conduit à une densité de vortex

$$\rho_v = \frac{M\omega}{\pi\hbar} = \frac{1}{\pi a_{\perp}^2}, \quad (7.64)$$

soit une distance entre vortex $\sim a_{\perp}$. Il existe donc une fréquence de rotation pour laquelle ξ devient supérieur à a_{\perp} :

$$\frac{\Omega}{\omega} \gtrsim 1 - \frac{1}{Ng} \quad (7.65)$$

Au delà de cette fréquence, notre hypothèse initiale n'est plus valable et la description de la fonction d'onde du condensat est notablement modifiée. Pour bien préciser le régime susceptible d'apparaître, nous allons d'abord revenir sur les états à une particule et la notion de niveau de Landau.

3-1 Rappel : niveaux de Landau en jauge symétrique

Nous avons rencontré au chapitre 2 les états propres de l'hamiltonien à une particule \hat{H}_0 correspondant à un oscillateur isotrope bi-dimensionnel. Rappelons les résultats principaux :

- Les niveaux d'énergie sont repérés par un entier $n_0 \geq 0$ et s'écrivent :

$$E_{n_0} = (n_0 + 1)\hbar\omega. \quad (7.66)$$

- Chaque niveau a pour dégénérescence $n_0 + 1$: le niveau fondamental $n_0 = 0$ n'est pas dégénéré, le niveau $n_0 = 1$ dégénéré deux fois, etc. Ces niveaux à une particule sont représentés sur la figure 7.10a.
- Comme l'hamiltonien à une particule commute avec la composante selon z de l'opérateur moment cinétique \hat{L}_z , on peut trouver une base propre commune aux deux opérateurs. Rappelons que les fonctions propres de $\hat{L}_z = -i\hbar\partial_\varphi$ ont une dépendance angulaire en $e^{im\varphi}$, et que la valeur propre correspondante pour \hat{L}_z est $m\hbar$, où m est un entier positif, négatif ou nul. Les états de la base propre commune à \hat{H} et \hat{L}_z sont donc repérés par les deux nombres quantiques n_0 et m , et notés $|n_0, m\rangle$.
- Les $n_0 + 1$ valeurs possibles de L_z dans le sous-espace propre de \hat{H} d'énergie $(n_0 + 1)\hbar\omega$ sont les $m\hbar$ avec :

$$m \in \{-n_0, -n_0 + 2, \dots, n_0 - 2, n_0\}, \quad \text{soit } |m| \leq n_0, \quad n_0 - m \text{ pair.} \quad (7.67)$$

En particulier, les états

$$\phi_m(r, \varphi) \propto r^m e^{im\varphi} e^{-r^2/2a_\perp^2}, \quad (7.68)$$

sont états propres de l'hamiltonien à une particule avec l'énergie $(m + 1)\hbar$ et correspondent donc aux états $|n_0 = m, m\rangle$.

Effectuons maintenant le passage dans le référentiel tournant $\hat{H}_0 \rightarrow \hat{H} = \hat{H}_0 - \Omega\hat{L}_z$. La recherche des états propres de cet hamiltonien à une particule est calquée sur ce que nous avons vu au chapitre 2 pour le problème de Landau en jauge symétrique. Plus précisément, les états $|n_0, m\rangle$ restent états propres de \hat{H} avec les valeurs propres (figure 7.10b-c)

$$E_{n_0, m} = (n_0 + 1)\hbar\omega - m\hbar\Omega, \quad |m| \leq n_0, \quad n_0 - m \text{ pair.} \quad (7.69)$$

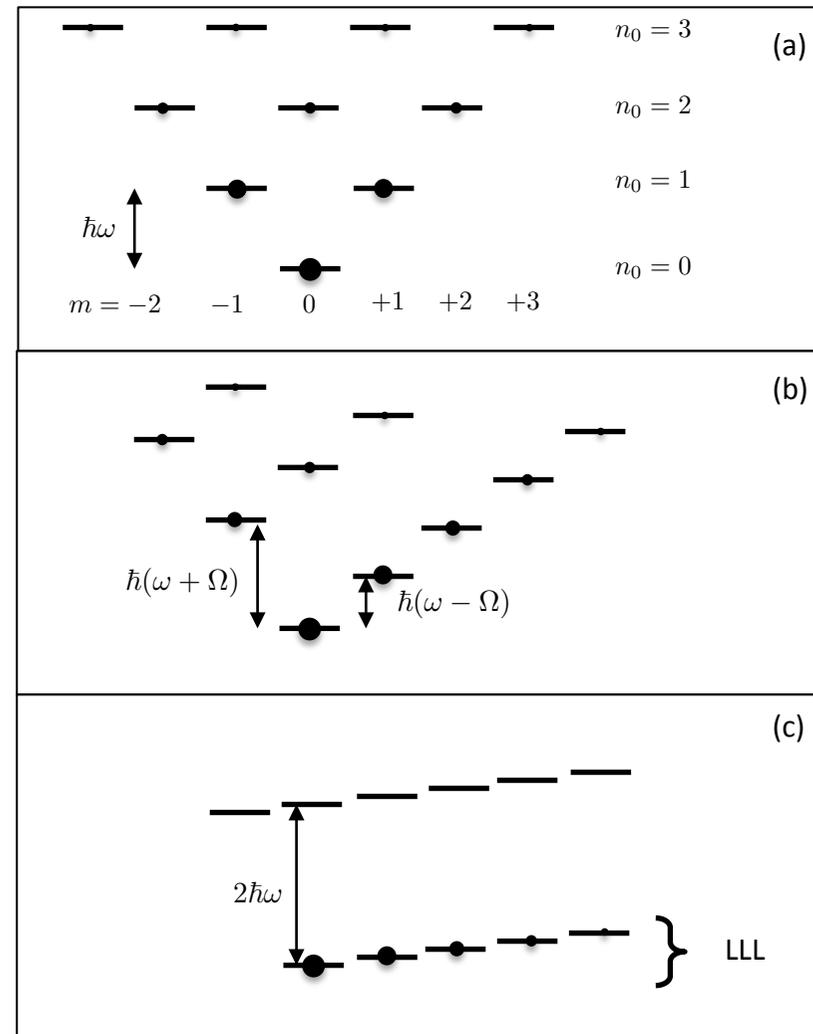


FIGURE 7.10. (a) Niveaux de l'oscillateur harmonique isotrope à deux dimensions. Les points noirs correspondent (qualitativement) aux populations d'un état de champ moyen dont le potentiel chimique μ est de quelques $\hbar\omega$. (b-c) : Niveaux d'énergie de l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique isotrope 2D dans le référentiel tournant, pour des valeurs croissantes de la fréquence de rotation Ω . (b) : $\Omega = 0.4\omega$, (c) $\Omega = 0.9\omega$. Pour (c), on a représenté avec des points noirs les populations d'un état localisé dans le niveau de Landau fondamental (LLL).

En particulier, les états ϕ_m sont états propres de \hat{H} avec les valeurs propres

$$\text{États } \phi_m \text{ de (7.68) : } E_{n_0=m,m} = m\hbar(\omega - \Omega) + \hbar\omega. \quad (7.70)$$

Quand la fréquence de rotation Ω est égale à la fréquence de piégeage ω , les états se regroupent en multiplicités dégénérées, correspondant aux énergies

$$\Omega = \omega : E_n = (2n + 1)\hbar\omega, \quad n = \frac{n_0 - m}{2} \in \mathbb{N}, \quad (7.71)$$

et on retrouve les niveaux de Landau équidistants, avec l'écart $\omega_c = 2\omega$ entre deux niveaux consécutifs. Le niveau de Landau fondamental, $n = 0$, est engendré par l'ensemble des ϕ_m .

Si on se limite à Ω voisin de ω , mais quand même légèrement inférieur pour éviter l'explosion centrifuge, la dégénérescence stricte des niveaux de Landau est levée, mais le spectre à une particule continue à se regrouper en multiplicités, avec deux échelles d'énergie bien distinctes (cf. figure 7.10c) :

- une petite échelle d'énergie $\hbar(\omega - \Omega)$, qui correspond à la distance entre deux états $|n_0, m\rangle$ et $|n_0 + 1, m_0 + 1\rangle$ d'une même multiplicité,
- une grande échelle d'énergie $\hbar(\omega + \Omega) \approx \hbar\omega_c$ correspondant à la distance entre les niveaux les plus bas de deux multiplicités adjacentes.

3-2 Fonctions du LLL et vortex

Une fois identifiés les états propres de l'hamiltonien à une particule, on peut revenir sur la condition

$$\xi \geq a_\perp \Leftrightarrow \mu \leq \hbar\omega \quad (7.72)$$

qui marque la fin de la validité de l'approximation de Thomas–Fermi traditionnelle. Il est clair sur le diagramme d'énergie de la figure 7.10c que l'inégalité $\mu \leq \hbar\omega$ signifie que seuls les états du LLL sont significativement peuplés dans ce régime. L'entrée dans ce régime correspond à une forme bien particulière de l'état fondamental du système, qui est maintenant de la forme :

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_m \alpha_m \phi_m(\mathbf{r}). \quad (7.73)$$

Chaque fonction $\phi_m(\mathbf{r})$ s'écrivant

$$\phi_m(\mathbf{r}) \propto r^m e^{im\varphi} e^{-r^2/2a_\perp^2} = u^m e^{-r^2/2a_\perp^2} \quad \text{avec } u = x + iy, \quad (7.74)$$

une fonction du LLL est du type

$$\phi(\mathbf{r}) = P(u) e^{-r^2/2a_\perp^2}, \quad (7.75)$$

où $P(u)$ est un polynôme ou une fonction analytique de la variable complexe u . Limitons-nous pour simplifier au cas des polynômes : explorer le LLL revient à se donner un degré (arbitraire) m_{\max} pour ce polynôme et ses $m_{\max} + 1$ coefficients, ou de manière équivalente, se donner les m_{\max} zéros $u_1, u_2, \dots, u_{m_{\max}}$ du polynôme et écrire $\phi(\mathbf{r})$ sous la forme

$$\phi(\mathbf{r}) \propto \prod_{m=1}^{m_{\max}} (u - u_m) e^{-r^2/2a_\perp^2}. \quad (7.76)$$

La fonction $\phi(\mathbf{r})$ possède une structure de vortex autour de chaque zéro u_m avec un enroulement de phase positif de $+2\pi$. En effet, au voisinage immédiat d'un zéro donné, par exemple u_1 , la variation de $\phi(\mathbf{r})$ est $\phi(\mathbf{r}) \sim C(u - u_1)$ où C est une constante, ce qui correspond bien à un enroulement de phase de $+2\pi$ quand on tourne autour de u_1 dans le sens positif.

Il y a dans le LLL une correspondance biunivoque entre la position des vortex et la fonction d'onde elle-même (Ho 2001). Partant de l'expression (7.76), la densité atomique ρ et la densité de vortex ρ_v

$$\rho(\mathbf{r}) = |\phi(\mathbf{r})|^2, \quad \rho_v(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^{m_{\max}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m), \quad (7.77)$$

où \mathbf{r}_m est le point de coordonnées $x = \mathcal{R}e(u_m)$, $y = \mathcal{I}m(u_m)$, sont reliées par

$$\Delta \{\ln[\rho(\mathbf{r})]\} = 4\pi\rho_v(\mathbf{r}) - \frac{4}{a_\perp^2}. \quad (7.78)$$

Cette relation découle directement de l'identité mathématique à deux dimensions

$$\Delta [\ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|] = 2\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (7.79)$$

Notons un cas limite intéressant de la relation (7.78). Si on se donne une densité de vortex uniforme dans le plan et égale à $1/(\pi a_\perp^2)$, alors la densité spatiale est également uniforme. Ce cas correspond à des niveaux de

Landau exactement dégénérés, où le gaz s'étale dans tout le plan. Cette situation est équivalente à la limite obtenue en (7.64) en prenant exactement $\Omega = \omega$.

Partant de (7.78), Ho (2001) a fait l'hypothèse *ad hoc* d'une densité de vortex uniforme, mais légèrement inférieure à $1/(\pi a_\perp^2)$. On déduit de (7.78) que $\ln[\rho(\mathbf{r})]$ varie quadratiquement avec r , et donc que $\rho(\mathbf{r})$ est une gaussienne, après moyenne sur les trous causés par la distribution de vortex. Des analyses plus précises [voir par exemple Cooper et al. (2004); Watanabe et al. (2004); Aftalion et al. (2005); Matveenko et al. (2009)] sont venues approfondir et corriger quelque peu cette hypothèse de Ho (2001). En fait, le profil de densité qui minimise l'énergie est (approximativement) une parabole inversée et pas une gaussienne. Cette parabole inversée $\rho(\mathbf{r}) \propto R^2 - r^2$ s'annule au delà du rayon :

$$R = a_\perp \left(\frac{2}{\pi} \frac{bNg}{1 - \Omega/\omega} \right)^{1/4}. \quad (7.80)$$

On retrouve donc la forme de la solution de Thomas–Fermi (7.61), avec un paramètre multiplicatif supplémentaire noté b . Ce nombre $b \approx 1.1596$ est le *paramètre d'Abrikosov*. Il décrit le fait qu'en présence d'un réseau de vortex avec une densité $\rho_v \sim 1/a_\perp^2$, les atomes interagissent entre eux un peu plus que si leur densité était uniforme. Les trous créés par les vortex doivent être compensés par des zones où la densité est plus élevée, et il y a donc un prix supplémentaire à payer en terme d'énergie d'interaction en présence d'un réseau de vortex.

Puisque densité de vortex et densité atomique sont liées par (7.78), le fait que la densité atomique ne soit pas gaussienne entraîne que la densité de vortex n'est pas uniforme. C'est effectivement ce que donne la minimisation de la fonctionnelle d'énergie. On a représenté sur la figure 7.11 la distribution des vortex et la distribution atomique correspondante. On voit que sur les bords du nuage, le réseau de vortex perd son caractère triangulaire pour se distordre. Plus précisément, la densité de vortex chute, ce qui a pour effet d'augmenter la courbure de $\ln[\rho(\mathbf{r})]$, et donc de faire chuter cette densité sur les bords du nuage plus vite que pour une fonction gaussienne.

Notons pour terminer que l'on peut facilement estimer le nombre de fonctions ϕ_m qui sont peuplées significativement dans l'état fondamental.

Une fonction ϕ_m étant piquée en $r \sim \sqrt{m} a_\perp$, le rayon R du nuage constitue une mesure de l'indice m_{\max} des fonctions du LLL peuplées. Ce nombre m_{\max} donne ensuite le nombre de zéros du polynôme caractérisant l'état du système, donc le nombre de vortex à l'intérieur du nuage :

$$N_v = m_{\max} \approx \frac{R^2}{a_\perp^2} \approx \left(\frac{bgN}{1 - \Omega/\omega} \right)^{1/2} \quad (7.81)$$

où on a négligé des coefficients d'ordre unité. On peut calculer dans cette même approximation le moment cinétique moyen par particule

$$\langle L \rangle \approx \frac{m_{\max}}{3} \hbar. \quad (7.82)$$

Le nombre d'états peuplés croît donc indéfiniment quand la fréquence de rotation Ω s'approche de ω . Quand ce nombre m_{\max} devient de l'ordre du nombre de particules N , l'approximation de champ moyen n'est plus valable et on rentre dans le régime fortement corrélé; nous aborderons ce régime dans la partie 4. L'estimation (7.81) prédit que ce nombre d'états devient comparable à N quand $\Omega \sim \omega(1 - g/N)$. En reprenant la fréquence critique pour le premier vortex (7.43) et la condition d'entrée dans le LLL (7.65), on peut donc séparer les fréquences de rotation en différents domaines

$$\frac{\Omega_c}{\omega} < \frac{\Omega}{\omega} < 1 - \frac{1}{gN} : \quad \text{vortex de taille } \xi \ll a_\perp, \quad (7.83)$$

$$1 - \frac{1}{gN} < \frac{\Omega}{\omega} < 1 - \frac{g}{N} : \quad \text{LLL, vortex de taille } a_\perp, \quad (7.84)$$

$$1 - \frac{g}{N} < \frac{\Omega}{\omega} : \quad \text{en dehors du champ moyen.} \quad (7.85)$$

3-3 Expériences dans le LLL

Nous avons déjà décrit au chapitre 4 la méthode de mise en rotation par évaporation sélective (*evaporative spinup*) mise au point par le groupe de Boulder pour atteindre des vitesses de rotation très élevées $\Omega = 0.993\omega$. Ceci a permis d'atteindre le régime LLL, qui se manifeste expérimentalement par une augmentation importante de la taille du cœur des vortex. On

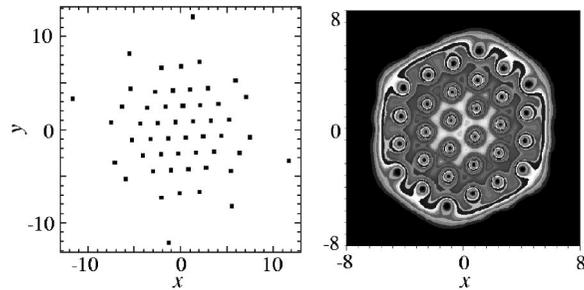


FIGURE 7.11. Exemple de distribution pour les vortex (à gauche) et pour la densité atomique (à droite) dans le LLL. Cette figure est tirée de Aftalion et al. (2005) et correspond à $Ng/(1 - \Omega/\omega) = 3000$. Les longueurs sont données en unité de a_{\perp} .

a représenté sur la figure 7.12 la fraction de la surface occupée par les cœurs de vortex en fonction de la vitesse de rotation dans l'expérience de Boulder (Schweikhard et al. 2004; Coddington et al. 2004). Pour les vitesses de rotation faibles, cette fraction est petite devant 1, comme on s'y attend puisque $\xi \ll a_{\perp}$. Pour des grandes vitesses de rotation, cette fraction devient très significative ($\sim 20\%$), puisque la taille du cœur et l'écart entre vortex sont alors comparables, d'ordre a_{\perp} . Les paramètres de cette expérience correspondent à une constante de couplage $g \approx 5 \cdot 10^{-3}$ avec un nombre d'atomes de l'ordre de 10^5 .

Une autre méthode pour approcher le LLL étudiée à l'ENS consiste à ajouter un potentiel quartique ηr^4 au potentiel harmonique de confinement $m\omega^2 r^2/2$. Ceci permet de choisir des fréquence de rotation Ω proches ou égales à ω sans risquer de perdre le gaz du fait de la force centrifuge (Bretin et al. 2004).

4 Au delà du champ moyen

Pour motiver ce dernier paragraphe, revenons sur le critère de validité du traitement de champ moyen que nous avons utilisé jusqu'ici. Pour qu'un état de champ moyen soit une bonne approximation de l'état fondamental à N corps, il faut que le nombre d'états propres ϕ_m de l'hamiltono-

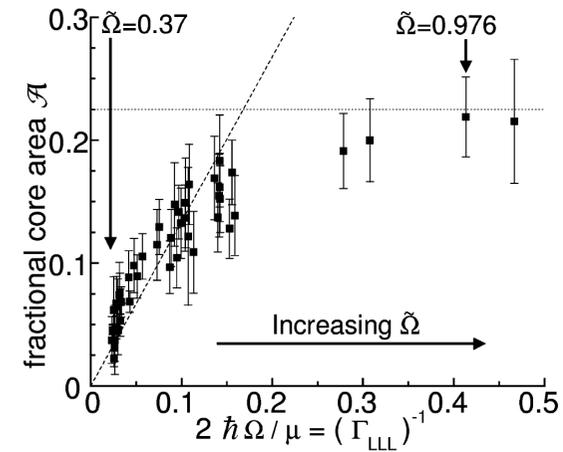


FIGURE 7.12. Fraction de l'espace occupée par les cœurs de vortex en fonction de la vitesse de rotation Ω . L'entrée dans le régime LLL se traduit par une fraction non négligeable devant l'unité [figure extraite de Schweikhard et al. (2004)].

nien à une particule significativement peuplée reste petit devant le nombre d'atomes N . Si ce n'est pas le cas, on peut généralement construire des états présentant des fortes corrélations entre particules qui conduisent à un abaissement notable de l'énergie par rapport au résultat de champ moyen.

Pour le problème du gaz de Bose en rotation, nous avons déjà indiqué en (7.85) que l'entrée dans le régime corrélé correspond à $\Omega \gtrsim \omega(1 - g/N)$. L'analyse de ce régime de rotation ultra-rapide présente de fortes analogies avec celle de l'effet Hall quantique fractionnaire, dans lequel on s'intéresse aux états corrélés d'un gaz d'électrons en interaction coulombienne en présence d'un fort champ magnétique. Dans les deux cas, les états intéressants sont généralement limités au LLL et possèdent une propriété remarquable, l'incompressibilité : l'état fondamental est séparé de tous les états excités du système par un gap qui est indépendant de la taille du système et qui est proportionnel à la force des interactions g .

4-1 État fondamental à N particules dans le LLL

Nous avons vu plus haut que les états à une particule sont de la forme $\phi(\mathbf{r}) = P(u) \exp(-r^2/2a_{\perp}^2)$, avec $u = x + iy$ et $P(u)$ un polynôme de la variable u . Pour un système de bosons sans spin, un état général à N corps est donc de la forme

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \mathcal{P}(u_1, u_2, \dots, u_N) \exp\left(-\sum_i r_i^2/2a_{\perp}^2\right), \quad (7.86)$$

où $\mathcal{P}(u_1, u_2, \dots, u_N)$ est un polynôme symétrique des N variables complexes u_i . La recherche des états propres de l'hamiltonien à N corps se fait généralement par une méthode de diagonalisation exacte pour des nombres de particules pas trop élevés (de l'ordre de la dizaine).

L'hamiltonien à N corps commute avec l'opérateur moment cinétique total \hat{L}_z et on peut donc chercher une base d'états propres commune aux deux opérateurs. Nous allons nous intéresser ici à l'état fondamental de l'hamiltonien pour un moment cinétique total \mathcal{L} donné⁴. Or le moment cinétique d'une fonction du LLL à une particule, $u^m \exp(-r^2/2a_{\perp}^2)$, est directement donné par la valeur de l'exposant m . Pour le système à N particules, on va donc chercher le polynôme \mathcal{P} donnant l'état fondamental à \mathcal{L} fixé comme une somme de monômes ayant tous le même degré total :

$$u_1^{\alpha_1} \dots u_N^{\alpha_N} \quad \text{avec} \quad \sum_i \alpha_i = \mathcal{L}. \quad (7.87)$$

Par exemple, pour un système de 3 particules et un moment cinétique total $\mathcal{L} = 3$, on cherche le polynôme \mathcal{P} correspondant à l'état fondamental sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(u_1, u_2, u_3) &= \alpha u_1 u_2 u_3 \\ &+ \beta [(u_1^2(u_2 + u_3) + u_2^2(u_1 + u_3) + u_3^2(u_1 + u_2))] \\ &+ \gamma (u_1^3 + u_2^3 + u_3^3). \end{aligned}$$

Le premier terme de cette somme, proportionnel à $u_1 u_2 u_3$, correspond à un état de type *champ moyen*, plus précisément un vortex centré puisque

4. Dans cette partie, le moment cinétique total est exprimé en unité de \hbar . La quantité \mathcal{L} est donc un entier positif ou nul.

les trois particules sont dans le même état $\phi_1(\mathbf{r})$. Les autres termes de la somme correspondent à des états corrélés des trois particules.

La procédure pour rechercher l'état fondamental à N corps est donc la suivante :

- On se donne un moment cinétique total \mathcal{L} , correspondant à un sous-espace du LLL pour lequel les polynômes symétriques sont fabriqués à partir des monômes (7.87).
- On considère dans ce sous-espace l'état fondamental de l'hamiltonien

$$\hat{H} = \sum_i \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2M} + \frac{1}{2} M \omega^2 \hat{\mathbf{r}}_i^2 \right) + \frac{\hbar^2}{M} g \sum_{i < j} \delta^{(2)}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (7.88)$$

Or la partie à un corps de cet hamiltonien donne le même résultat $(\mathcal{L} + N)\hbar\omega$ pour tous les états du sous-espace considéré. On se ramène donc à la diagonalisation de l'hamiltonien d'interaction

$$\hat{H}_{\text{int.}} = \frac{\hbar^2}{M} g \sum_{i < j} \delta^{(2)}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad (7.89)$$

dans ce sous-espace.

- Une fois connue l'énergie d'interaction, on obtient l'énergie totale dans le référentiel tournant en ajoutant le terme $(\mathcal{L} + N)\hbar\omega - \Omega\mathcal{L}$ à la valeur propre trouvée pour $\hat{H}_{\text{int.}}$.

4-2 Quelques états remarquables

La description de tous les états corrélés qui ont été identifiés dans cette procédure de diagonalisation exacte dépasse très largement le cadre de ce cours et nous renvoyons le lecteur à l'article de revue très complet de Cooper (2008) pour une présentation détaillée. Nous allons décrire ici quelques phases remarquables qui ont été identifiées quand on varie le rapport \mathcal{L}/N .

La fonte du réseau de vortex. Partant d'un régime bien décrit par le champ moyen, augmentons la vitesse de rotation du gaz ; la première déviation attendue par rapport à ce régime de champ moyen est la fonte du

réseau de vortex du fait des fluctuations quantiques. Cette fonte a été prédite par Cooper et al. (2001) avec une technique de diagonalisation exacte pour des facteurs de remplissage $\nu = N/N_v$ compris entre 6 et 10. Cette valeur peut être retrouvée en calculant l'amplitude Δ des fluctuations quantiques des positions des vortex et appliquant le critère heuristique de Lindemann. On s'attend à ce que ces fluctuations déstabilisent le réseau quand leur amplitude devient de l'ordre du dixième de la distance entre vortex $\rho_v^{-1/2}$ (Sinova et al. 2002).

L'état de Laughlin. Il s'agit d'un état remarquable, fortement corrélé, qui est un état propre exact de l'hamiltonien à N corps. Le polynôme symétrique correspondant à cet état s'écrit

$$\mathcal{P}_{\text{Lau.}}(u_1, u_2, \dots, u_N) = \prod_{i < j} (u_i - u_j)^2, \quad (7.90)$$

de degré total $\mathcal{L} = N(N - 1)$ et s'étendant sur toutes les fonctions à une particule du LLL de $m = 0$ à $m_{\text{max}} = 2(N - 1)$, soit un facteur de remplissage $\nu = 1/2$. L'action de \hat{H}_{int} sur cet état donne strictement 0, puisque \hat{H}_{int} correspond à une interaction de contact alors que l'état de Laughlin correspond à une probabilité strictement nulle de trouver deux particules au même endroit.

L'état de Laughlin est incompressible et le gap au premier état excité de même moment cinétique est $\approx 0.1 g \hbar \omega$ (Regnault & Jolicoeur 2003; Regnault & Jolicoeur 2004). L'état de Laughlin est caractérisé par une distribution quasi-uniforme des particules sur un disque de rayon $a_{\perp} \sqrt{2N}$.

Les descendants de l'état de Laughlin. Pour des moments cinétiques plus grands que celui donnant naissance à l'état de Laughlin $\mathcal{L} = N(N - 1)$, tout état du type

$$\mathcal{P}(u_1, \dots, u_N) = \mathcal{P}_{\text{Lau.}}(u_1, \dots, u_N) Q(u_1, \dots, u_N) \quad (7.91)$$

où Q est un polynôme symétrique quelconque de u_1, \dots, u_N , sera également un état d'énergie d'interaction strictement nulle. L'interprétation physique de ces états dépend du degré de Q . Pour un degré d'ordre 1, il s'agit d'excitations de bord de l'état de Laughlin; en choisissant un

degré égal à N , on peut construire des quasi-trous en un point donné $U_0 = X_0 + iY_0$ en prenant (Paredes et al. 2001; Paredes et al. 2002)

$$Q(u_1, \dots, u_N) = \prod_j (u_j - U_0) \quad (7.92)$$

L'état de Moore-Read. Pour N pair, Cooper et al. (2001) ont identifié l'état de moment cinétique $\mathcal{L} = N(N - 2)/2$, également appelé *Pfaffien* :

$$\mathcal{P}(u_1, \dots, u_N) = \mathcal{S} \left[\prod_{i < j \leq N/2} (u_i - u_j)^2 \prod_{N/2 < l < n} (u_l - u_n)^2 \right] \quad (7.93)$$

comme étant en très bonne approximation un état propre de \hat{H}_{int} (\mathcal{S} désigne l'opérateur de symétrisation). Plus précisément, le recouvrement de l'état (7.93) avec le véritable état propre déterminé numériquement pour cette valeur de \mathcal{L} est supérieur à 0.88 tant que $N \leq 14$ (Chang et al. 2004). Cet état se décompose sur des états à une particule⁵ allant de $m = 0$ à $m = N - 2$, correspondant à un facteur de remplissage $\nu = 1$. Cet état est également séparé par un gap $\sim 0.05 g \hbar \omega$ des états excités de même \mathcal{L} (Chang et al. 2004). Remarquons que pour l'état approché (7.93), la probabilité d'avoir trois particules au même point est nulle.

4-3 Schémas de détection envisageables

Nous terminons ce paragraphe par quelques méthodes qui ont été proposées pour détecter expérimentalement ces états fortement corrélés. Remarquons d'abord que l'observation de ces états sera probablement limitée à de faibles nombres d'atomes si on utilise la méthode de rotation d'un piège harmonique. En effet la relation (7.85) définissant l'entrée dans le régime corrélé, associée à une force d'interaction $g \sim 1$ et une fréquence de rotation réaliste $\Omega \approx 0.99 \omega$ donne un nombre d'atomes maximal de l'ordre de 100.

5. Par exemple, pour $N = 4$, on a

$$\mathcal{P}(u_1, \dots, u_4) = (u_1 - u_2)^2 (u_3 - u_4)^2 + (u_1 - u_3)^2 (u_2 - u_4)^2 + (u_1 - u_4)^2 (u_2 - u_3)^2.$$

Une première signature d'états à la Laughlin ou à la Moore-Read se-rait de voir une réduction des pertes dues aux collisions inélastiques. En effet, la probabilité d'avoir 3 particules au même endroit est nulle pour ces états (alors qu'elle n'est pas nulle pour des états de champ moyen). Une autre voie d'approche est liée à l'incompressibilité de ces états, qui donne naissance à un profil de densité en forme de « pièce montée » dans un piège harmonique, chaque plateau de la pièce montée correspondant à un état incompressible différent. Une troisième possibilité est d'utiliser un système de détection de très bonne résolution spatiale pour détecter un à un les atomes du gaz (éventuellement après un temps de vol), et reconstruire ainsi les fonctions de corrélation spatiales permettant de caractériser l'état de départ.

Signalons pour terminer une proposition plus ambitieuse (Paredes et al. 2001). Il s'agit d'étudier la possibilité de créer des anyons dans un gaz décrit par un état de type *effet Hall quantique fractionnaire* (Wilczek 1982); partant d'un état de Laughlin, on creuserait un trou dans le gaz à l'aide d'un faisceau laser très focalisé, produisant ainsi un état du type (7.92). En bougeant adiabatiquement ce trou dans le gaz, le système devrait acquérir une phase géométrique qui pourrait ensuite être mesurée par une expérience d'interférométrie. La mesure de la phase accumulée devrait révéler le caractère anyonique (ni boson, ni fermion) de la quasi-particule ainsi créée par le faisceau laser.

Références

- Abo-Shaeer, J. R., C. Raman, J. M. Vogels & W. Ketterle (2001), « Observation of Vortex Lattices in Bose–Einstein Condensates », in *Science* 292, pp. 476–479.
- Adhikari, Sadhan K. (1986), « Quantum scattering in two dimensions », in *American Journal of Physics* 54.4, pp. 362–367.
- Aftalion, A., X. Blanc & J. Dalibard (2005), « Vortex patterns in a fast rotating Bose–Einstein condensate », in *Phys. Rev. A* 71.2, p. 023611.
- Baym, G. & C. J. Pethick (1996), « Ground-state properties of magnetically trapped Bose-condensed rubidium gas », in *Phys. Rev. Lett.* 76.1, pp. 6–9.
- Bloch, I., J. Dalibard & W. Zwerger (2008), « Many-body physics with ultracold gases », in *Rev. Mod. Phys.* 80.3, 885, p. 885.
- Bretin, V., S. Stock, Y. Seurin & J. Dalibard (2004), « Fast Rotation of a Bose–Einstein Condensate », in *Phys. Rev. Lett.* 92, p. 050403.
- Castin, Y. & R. Dum (1999), « Bose–Einstein condensates with vortices in rotating traps », in *Eur. Phys. J. D* 7, p. 399.
- Chang, C. C., N. Regnault, T. Jolicoeur & J. K. Jain (2004), « Composite fermionization of bosons in rapidly rotating atomic traps », in *Phys. Rev. A* 72, p. 013611.
- Coddington, I., P. C. Haljan, P. Engels, V. Schweikhard, S. Tung & E. A. Cornell (2004), « Experimental studies of equilibrium vortex properties in a Bose-condensed gas », in *Phys. Rev. A* 70, p. 063607.
- Cooper, N. R. (2008), « Rapidly rotating atomic gases », in *Advances in Physics* 57.6, pp. 539–616.
- Cooper, N. R., N. K. Wilkin & J. M. F. Gunn (2001), « Quantum Phases of Vortices in Rotating Bose–Einstein Condensates », in *Phys. Rev. Lett.* 87.12, p. 120405.
- Cooper, N. R., S. Komineas & N. Read (2004), « Vortex lattices in the lowest Landau level for confined Bose–Einstein condensates », in *Phys. Rev. A* 70.3, p. 033604.
- Dalfovo, F. S. & M. Modugno (2000), « Free expansion of Bose–Einstein condensates with quantized vortices », in *Phys. Rev. A* 61, p. 023605.
- Dalfovo, F. S. & S. Stringari (1996), « Bosons in anisotropic traps : Ground state and vortices », in *Phys. Rev. A* 53, p. 2477.
- Feder, D. L., C. W. Clark & B. I. Schneider (1999), « Nucleation of vortex arrays in rotating anisotropic Bose–Einstein condensates », in *Phys. Rev. A* 61, R011601.
- Feder, David L. & Charles W. Clark (2001), « Superfluid-to-Solid Crossover in a Rotating Bose-Einstein Condensate », in *Phys. Rev. Lett.* 87 (19), p. 190401.
- Fetter, Alexander L. (2009), « Rotating trapped Bose–Einstein condensates », in *Rev. Mod. Phys.* 81.2, pp. 647–691.
- Feynman, R. P. (1955), « Application of quantum mechanics to liquid helium », in *Progress in Low Temperature Physics*, ed. by C. J. Gorter, vol. 1, North Holland Publishing Co., Amsterdam: North-Holland, , p. 17.
- Haldane, F. D. M. (1983), « Fractional Quantization of the Hall Effect : A Hierarchy of Incompressible Quantum Fluid States », in *Phys. Rev. Lett.* 51, p. 605.
- Ho, T. L. (2001), « Bose–Einstein Condensates with Large Number of Vortices », in *Phys. Rev. Lett.* 87, p. 060403.

- Huang, K. (1987), *Statistical Mechanics*, New York: Wiley.
- Lobo, C., A. Sinatra & Y. Castin (2004), « Vortex lattice formation in Bose–Einstein condensates », in *Phys. Rev. Lett.* 92, p. 020403.
- Madison, K. W., F. Chevy, W. Wohlleben & J. Dalibard (2000a), « Vortex Formation in a Stirred Bose–Einstein Condensate », in *Phys. Rev. Lett.* 84, p. 806.
- (2000b), « Vortices in a stirred Bose±Einstein condensate », in *J. Mod. Opt.* 47, p. 2715.
- Matveenko, S. I., D. Kovrizhin, S. Ouvry & G. V. Shlyapnikov (2009), « Vortex structures in rotating Bose-Einstein condensates », in *Phys. Rev. A* 80 (6), p. 063621.
- Olshanii, M. & L. Pricoupenko (2002), « Rigorous Approach to the Problem of Ultraviolet Divergencies in Dilute Bose Gases », in *Phys. Rev. Lett.* 88, p. 010402.
- Paredes, B., P. Fedichev, J. I. Cirac & P. Zoller (2001), « 1/2-Anyons in Small Atomic Bose–Einstein Condensates », in *Phys. Rev. Lett.* 87.1, p. 010402.
- Paredes, B., P. Zoller & J. I. Cirac (2002), « Fermionizing a small gas of ultracold bosons », in *Phys. Rev. A* 66.3, p. 033609.
- Pethick, C.J. & H. Smith (2002), *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press.
- Petrov, D. S. & G. V. Shlyapnikov (2001), « Interatomic collisions in a tightly confined Bose gas », in *Phys. Rev. A* 64, p. 012706.
- Raman, C., J. R. Abo-Shaeer, J. M. Vogels, K. Xu & W. Ketterle (2001), « Vortex nucleation in a stirred Bose–Einstein condensate », in *Phys. Rev. Lett.* 87, p. 210402.
- Recati, A., F. Zambelli & S. Stringari (2001), « Overcritical rotation of a trapped Bose–Einstein condensate », in *Phys. Rev. Lett.* 86, p. 377.
- Regnault, N. & Th. Jolicoeur (2003), « Quantum Hall Fractions in Rotating Bose–Einstein Condensates », in *Phys. Rev. Lett.* 91.3, p. 030402.
- (2004), « Quantum Hall fractions for spinless bosons », in *Phys. Rev. B* 69.23, p. 235309.
- Schweikhard, V., I. Coddington, P. Engels, V. P. Mogendorff & E. A. Cornell (2004), « Rapidly Rotating Bose–Einstein Condensates in and near the Lowest Landau Level », in *Phys. Rev. Lett.* 92.4, p. 040404.
- Sinha, S. & Y. Castin (2001), « Dynamic instability of a rotating Bose–Einstein condensate », in *Phys. Rev. Lett.* 87, p. 190402.
- Sinova, J., C. B. Hanna & A. H. MacDonald (2002), « Quantum Melting and Absence of Bose–Einstein Condensation in Two-Dimensional Vortex Matter », in *Phys. Rev. Lett.* 89.3, p. 030403.
- Watanabe, G., G. Baym & C. J. Pethick (2004), « Landau Levels and the Thomas-Fermi Structure of Rapidly Rotating Bose–Einstein Condensates », in *Phys. Rev. Lett.* 93.19, p. 190401.
- Wilczek, Frank (1982), « Magnetic Flux, Angular Momentum, and Statistics », in *Phys. Rev. Lett.* 48.17, pp. 1144–1146.
- Zwierlein, M. W., J. R. Abo-Shaeer, A. Schirotzek, C. H. Schunck & W. Ketterle (2005), « Vortices and superfluidity in a strongly interacting Fermi gas », in *Nature* 435, p. 1047.