

Chapitre 3

Le quasi-ordre à longue portée

Sommaire

1	L'approche champ classique	2
1-1	Analogie optique	2
1-2	Simplification du problème quantique à N corps	2
1-3	Retour sur les distributions statistiques	3
1-4	Que reste-t-il de quantique?	5
2	Fonctionnelle de Gross-Pitaevskii	6
2-1	De l'hamiltonien quantique au champ classique .	6
2-2	Factorisation du mouvement "gelé"	7
2-3	Coupure ultra-violette et longueur de cicatrisation	8
2-4	La version "optique non linéaire"	10
3	Fluctuations de phase et quasi-ordre	11
3-1	Suppression des fluctuations de densité	11
3-2	Hamiltonien effectif à basse énergie	12
3-3	Analyse de Fourier des fluctuations de phase . .	13
3-4	Corrélations en phase à l'équilibre thermique . .	13
3-5	Le modèle xy	16
4	L'approche de Bogoliubov	17
4-1	Équations du mouvement « amplitude – phase »	17
4-2	Spectre de Bogoliubov et ondes sonores	18
4-3	Fluctuations de phase et fluctuations de densité .	19

Nous abordons maintenant la description d'un gaz à deux dimensions en interaction. Nous allons nous concentrer dans ce cours sur le régime de basse température, où l'état du gaz peut être décrit comme un "quasi-condensat", c'est-à-dire un condensat avec une phase fluctuante (KAGAN, SVISTUNOV et al. 1987; POPOV 1987; PETROV, GANGARDT et al. 2004).

Nous allons adopter une description du fluide atomique en termes de champ classique, ce qui va amener des simplifications importantes par rapport à la description quantique. Toutefois nous montrerons que cette description en terme de champ classique contient toujours un « élément quantique » essentiel, la *quantification de la circulation de la vitesse*. Cette dernière jouera un rôle central dans le cours suivant, où nous nous pencherons sur la physique des vortex.

Dans le cours d'aujourd'hui, nous allons nous concentrer sur les excitations « douces » du gaz, c'est-à-dire les phonons, qui sont prépondérantes à basse température. Notre résultat essentiel sera de montrer que les interactions répulsives entre atomes, qui sont à la base de cette physique des phonons, induisent un quasi-ordre à longue portée dans le gaz, avec une décroissance algébrique de la fonction de corrélation à un corps $G_1(r)$. Ce résultat est radicalement différent de celui trouvé pour un gaz parfait dans le cours précédent; nous avons en effet montré que $G_1(r)$ décroissait toujours exponentiellement avec la distance en l'absence d'interactions.

1 L'approche champ classique

1-1 Analogie optique

Les états condensés de Bose ou les états superfluides sont considérés à juste titre comme des états quantiques de la matière. Pour les décrire théoriquement, il faut aller au-delà de la statistique de Boltzmann et prendre en compte l'indiscernabilité des particules. Les statistiques quantiques qui apparaissent alors, Bose–Einstein ou Fermi–Dirac, permettent d'expliquer l'émergence de l'état superfluide ou de l'état supraconducteur quand on tient compte des interactions entre particules.

De ce point de vue, l'approche que nous allons adopter dans ce chapitre et dans le suivant peut sembler paradoxale : nous allons décrire par un champ classique l'assemblée de N particules en interaction. D'où la question immédiate : cette approche « champ classique » n'est-elle pas contradictoire avec le phénomène quantique que l'on cherche à décrire ? Le but de cette première section est de montrer qu'il n'en est rien. Il ne faut pas confondre un traitement classique des particules composant le gaz (ce que nous ne ferons pas) et le traitement de ce même gaz par un champ classique (ce que nous allons faire). En un sens que nous allons bientôt préciser, ces deux concepts – bien qu'ils soient tous deux qualifiés de « classiques » – correspondent à deux cas limites opposés de la distribution de Bose–Einstein.

Une analogie optique peut être utile à ce stade. Le traitement « champ classique » correspond simplement à la résolution des équations de Maxwell pour les champs électriques $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et magnétiques $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. On sait que ce traitement permet de décrire de multiples phénomènes optiques, y compris ceux que l'on a envie de qualifier de « non classiques » comme le fonctionnement d'un laser. Les phénomènes qui échappent à ce traitement en terme de champs classiques sont ceux où la granularité de la lumière joue un rôle important, le phénomène d'émission spontanée par exemple. Une autre difficulté est le *problème du corps noir* : l'énergie du champ classique diverge du fait de la contribution des modes de haute énergie et donc faiblement peuplés. Mais pour les situations où le nombre de photons dans les modes pertinents est grand devant 1, cette restriction n'est pas essentielle.

1-2 Simplification du problème quantique à N corps

L'état d'un système quantique à N corps est décrit par sa fonction d'onde $\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ ou plus généralement par son opérateur densité $\hat{\rho}$. L'idée du traitement *champ classique* est d'approcher cet état quantique par un mélange statistique d'états caractérisés par un champ $\psi(\mathbf{r})$, commun aux N particules et noté :

$$|N : \psi\rangle \text{ ou encore } \psi(\mathbf{r}_1) \dots \psi(\mathbf{r}_N), \quad (1)$$

et appelé *fonction de Hartree*. Le problème est de trouver une distribution de probabilité $\mathcal{P}[\psi]$ qui reproduise aussi fidèlement que possible l'état Φ ou la matrice densité de départ. Idéalement, on souhaiterait que pour toute quantité physique A décrite par l'observable \hat{A} , on ait en utilisant le formalisme de l'intégrale fonctionnelle pour le champ ψ

$$\text{Tr}(\hat{A} \hat{\rho}) = \int \langle N : \psi | \hat{A} | N : \psi \rangle \mathcal{P}[\psi] d[\psi]. \quad (2)$$

Comme nous allons le voir ci-dessous sur un exemple simple, il n'est pas toujours possible de trouver une fonction $\mathcal{P}[\psi]$ satisfaisant toutes les propriétés requises pour une distribution de probabilité (positivité, régularité). Il s'agit donc plutôt, pour un problème donné, de trouver la distribution $\mathcal{P}[\psi]$ qui s'approche au mieux de l'état quantique de départ. Cette recherche a fait l'objet de multiples travaux en optique quantique pour les photons, avec les représentations de Wigner, de Glauber–Sudarshan ou de Husimi par exemple (GARDINER & ZOLLER 2004).

L'impossibilité de trouver pour tout $|\Phi\rangle$ une distribution $\mathcal{P}[\psi]$ se montre sur un contre-exemple, en considérant un système de deux particules identiques ayant chacune deux états possibles \uparrow et \downarrow . On considère l'état

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1 : \uparrow ; 2 : \downarrow\rangle + |1 : \downarrow ; 2 : \uparrow\rangle) \quad (3)$$

et on s'intéresse¹ à la probabilité $P_{\uparrow\uparrow}$ de trouver les deux particules dans l'état \uparrow et à la probabilité $P_{\downarrow\downarrow}$ de trouver les deux particules dans l'état \downarrow . Ces deux probabilités sont clairement nulles pour l'état $|\Phi\rangle$, alors qu'elles ne le seront pas simultanément si on considère un mélange statistique de

1. Opérateurs associés : $\hat{A} = |1 : \uparrow ; 2 : \uparrow\rangle\langle 1 : \uparrow ; 2 : \uparrow|$ et $\hat{B} = |1 : \downarrow ; 2 : \downarrow\rangle\langle 1 : \downarrow ; 2 : \downarrow|$.

fonctions $|\psi\rangle$. En effet, ces fonctions peuvent être paramétrées par exemple par les deux angles θ et φ :

$$|\psi\rangle = \cos\theta |\uparrow\rangle + \sin\theta e^{i\varphi} |\downarrow\rangle. \quad (4)$$

et on trouve $P_{\uparrow\uparrow} = \langle \cos^4\theta \rangle$, $P_{\downarrow\downarrow} = \langle \sin^4\theta \rangle$. On a donc

$$P_{\uparrow\uparrow} + P_{\downarrow\downarrow} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \langle \cos(4\theta) \rangle \quad \rightarrow \quad P_{\uparrow\uparrow} + P_{\downarrow\downarrow} \geq \frac{1}{2}. \quad (5)$$

Ce contre-exemple est instructif. Dans le point de vue de la seconde quantification, la nullité de la probabilité $P_{\uparrow\uparrow}$ vient du fait qu'il faut calculer la valeur moyenne de l'opérateur $\hat{a}_{\uparrow}^{\dagger}\hat{a}_{\uparrow}^{\dagger}\hat{a}_{\uparrow}\hat{a}_{\uparrow}$ qui est nul car on ne peut pas détruire deux particules dans l'état \uparrow pour l'état $|\Phi\rangle$. En revanche si on considère $\hat{a}_{\uparrow}^{\dagger}\hat{a}_{\uparrow}\hat{a}_{\uparrow}^{\dagger}\hat{a}_{\uparrow}^{\dagger}$, on trouve une valeur moyenne non nulle et compatible avec une représentation en champ classique. C'est donc parce que le commutateur $[\hat{a}_{\uparrow}^{\dagger}, \hat{a}_{\uparrow}]$ n'est pas nul que ce contre-exemple fonctionne.

Cette remarque nous donne le principal critère de validité pour la représentation en champ classique. Tant qu'on s'intéressera à des modes de population grande devant 1, la différence entre $\hat{a}_{\uparrow}^{\dagger}\hat{a}_{\uparrow}$ et $\hat{a}_{\uparrow}\hat{a}_{\uparrow}^{\dagger}$, c'est-à-dire le commutateur $[\hat{a}_{\uparrow}, \hat{a}_{\uparrow}^{\dagger}] = 1$, ne jouera pas de rôle important et l'approximation sera pertinente. En revanche, pour les modes de population de l'ordre de ou plus petite que 1, les effets de "granularité quantique" seront essentiels et l'approximation ne sera pas valable.

1-3 Retour sur les distributions statistiques

Pour bien expliquer en quoi l'approche *champ classique* que nous adoptons ici est radicalement différente du traitement classique des particules à la Boltzmann, il est utile de revenir sur les hypothèses sous-jacentes aux différentes distributions statistiques. Nous allons reprendre ici les grandes lignes d'un argument que nous avons déjà présenté dans le cours 2015-16.

Statistique de Boltzmann. À la base des lois statistiques pour un gaz idéal, on trouve implicitement un bilan d'équilibre entre différents processus de collision. Considérons une paire de particules dans les états j_1 et j_2 , d'énergies respectives E_1 et E_2 . Ces particules peuvent entrer en collision

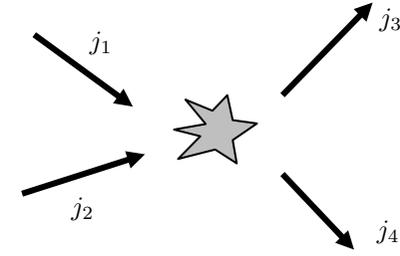


FIGURE 1. Collision élastique entre deux particules permettant d'assurer l'atteinte de l'équilibre thermique. La conservation de l'énergie impose $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$.

élastique (figure 1) et sortir de la collision dans deux autres états, j_3 et j_4 , la conservation de l'énergie imposant :

$$j_1 + j_2 \rightarrow j_3 + j_4 \quad \text{si} \quad E_1 + E_2 = E_3 + E_4. \quad (6)$$

Le processus inverse $j_3 + j_4 \rightarrow j_1 + j_2$ est également possible et à l'équilibre, la condition de *bilan détaillé* impose l'égalité entre les taux des deux processus :

$$N_{j_1} N_{j_2} = N_{j_3} N_{j_4} \quad \text{si} \quad E_1 + E_2 = E_3 + E_4. \quad (7)$$

Supposons pour simplifier que la population d'un état j ne dépend que de l'énergie E_j de cet état, $N_j = N(E_j)$, de sorte que la relation de bilan détaillé s'écrit :

$$N(E_1) N(E_2) = N(E_3) N(E_4) \quad \text{si} \quad E_1 + E_2 = E_3 + E_4. \quad (8)$$

Une analyse mathématique simple (voir cours 2015-16) montre que les fonctions $N(E)$ satisfaisant cette équation sont les exponentielles d'une fonction affine $aE + b$:

$$N(E) = e^{aE+b} \equiv e^{(\mu-E)/k_B T} \quad \text{avec} \quad a = -1/k_B T, \quad b = \mu/k_B T. \quad (9)$$

On a retrouvé la statistique de Maxwell-Boltzmann.

Statistique de Bose–Einstein. La différence avec le cas du gaz de Boltzmann est que les probabilités de transition sont augmentées du fait de l'émission stimulée si les états finaux sont déjà occupés. Le bilan détaillé s'écrit alors

$$N_{j_1} N_{j_2} [1 + N_{j_3}] [1 + N_{j_4}] = N_{j_3} N_{j_4} [1 + N_{j_1}] [1 + N_{j_2}], \quad (10)$$

qui peut se réécrire

$$\frac{N_{j_1}}{1 + N_{j_1}} \frac{N_{j_2}}{1 + N_{j_2}} = \frac{N_{j_3}}{1 + N_{j_3}} \frac{N_{j_4}}{1 + N_{j_4}} \quad (11)$$

pour tout quadruplet d'états tel que $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$. Faisons là aussi l'hypothèse que N_j ne dépend que de l'énergie E_j de l'état j et posons

$$G(E) = \frac{N(E)}{1 + N(E)} \quad (12)$$

qui satisfait donc une équation identique à celle trouvée pour la statistique de Boltzmann

$$G(E_1) G(E_2) = G(E_3) G(E_4) \quad \text{si} \quad E_1 + E_2 = E_3 + E_4. \quad (13)$$

Les solutions sont $G(E) = e^{(\mu-E)/k_B T}$, ce qui conduit à

$$N(E) = \frac{1}{\frac{1}{G(E)} - 1} = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} - 1}. \quad (14)$$

Nous retrouvons donc bien la statistique de Bose–Einstein.

Avant de passer au cas d'un champ classique, il est intéressant de distinguer deux régimes pour la statistique de Bose–Einstein, selon les valeurs relatives de $E - \mu$ et $k_B T$ [cf. figure 2] :

— Si $E - \mu \gg k_B T$, l'exponentielle domine au dénominateur de $N(E)$ et on peut négliger le "- 1" devant cette exponentielle. On trouve alors

$$N(E) \approx e^{-(E-\mu)/k_B T}, \quad (15)$$

c'est-à-dire le résultat de Boltzmann. Ce résultat est par construction valable si et seulement si $N(E) < 1$, puisqu'on a requis que l'exponentielle soit dominante au dénominateur.

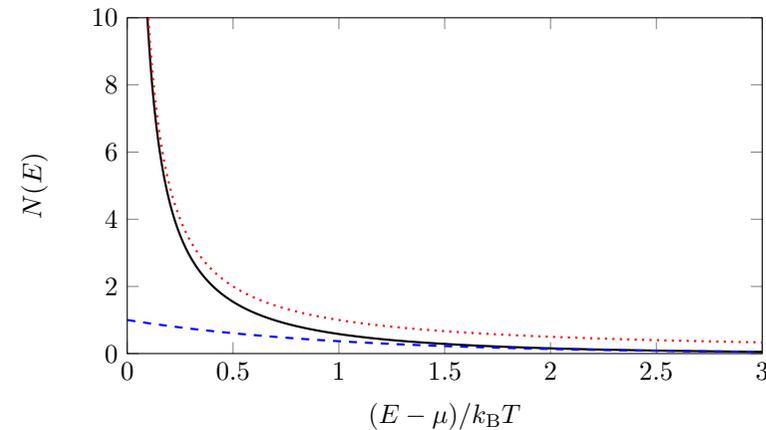


FIGURE 2. Ligne continue noire : distribution de Bose-Einstein $N(E) = 1/[e^{(E-\mu)/k_B T} - 1]$. Ligne en tirets noirs : distribution de Maxwell-Boltzmann $N(E) = e^{-(E-\mu)/k_B T}$. Ligne en pointillés rouges : distribution pour un champ classique $N(E) = \frac{k_B T}{E-\mu}$.

— Dans le cas opposé $E - \mu \ll k_B T$, on peut faire un développement limité de l'exponentielle, $e^{(E-\mu)/k_B T} \approx 1 + (E - \mu)/k_B T$, similaire à celui fait au chapitre précédent dans le cas du gaz parfait, et on trouve

$$N(E) \approx \frac{k_B T}{E - \mu}. \quad (16)$$

Ce résultat est par construction valable seulement si $N(E) > 1$.

On dispose donc de deux approximations de la loi de Bose–Einstein, selon que le taux d'occupation d'un état à une particule est petit ou grand devant 1. Dans le premier cas, on retrouve le résultat de particules classiques à la Boltzmann. Le deuxième cas, comme nous l'avons déjà indiqué, correspond au domaine de validité de l'approche *champ classique*.

Statistique de champ classique. Comme le champ classique va jouer un rôle central dans la suite, il peut être utile de montrer comment l'approximation (16) peut être retrouvé directement à partir de l'équation de bilan

détaillé obtenue pour les bosons

$$N_{j_1} N_{j_2} [1 + N_{j_3}] [1 + N_{j_4}] = N_{j_3} N_{j_4} [1 + N_{j_1}] [1 + N_{j_2}] \quad (17)$$

quand les N_j sont grands devant 1. Si on néglige tous les "1" dans cette équation, on obtient le résultat trivial que $N_{j_1} N_{j_2} N_{j_3} N_{j_4}$ doit être égal à lui-même. Allons donc à l'ordre suivant, ce qui donne

$$N_{j_1} N_{j_2} [N_{j_3} + N_{j_4}] = N_{j_3} N_{j_4} [N_{j_1} + N_{j_2}] \quad (18)$$

ou encore

$$\frac{1}{N_{j_1}} + \frac{1}{N_{j_2}} = \frac{1}{N_{j_3}} + \frac{1}{N_{j_4}} \quad \text{si } E_1 + E_2 = E_3 + E_4. \quad (19)$$

La solution de cette équation est simple : la fonction $1/N(E)$ doit être une fonction affine de E et elle peut donc s'écrire

$$\frac{1}{N(E)} = \frac{E - \mu}{k_B T} \quad \rightarrow \quad N(E) = \frac{k_B T}{E - \mu}. \quad (20)$$

Ceci nous redonne bien la limite "haute occupation" de la distribution de Bose-Einstein trouvée plus haut. Ce comportement $N(E) \propto 1/E$ pour les énergies assez grandes sera caractéristique de l'état d'équilibre du champ classique que nous trouverons dans ce chapitre.

Maintenant que nous avons vérifié que l'approximation de champ classique décrivait correctement les modes très peuplés, donc de basse énergie, la pertinence de cette approximation pour le problème traité dans le cours de cette année apparaît clairement. Nous avons vu dans les chapitres qui précèdent que la spécificité du cas bi-dimensionnel, avec le théorème de Mermin-Wagner-Hohenberg, résidait dans le comportement du système aux grandes longueurs d'onde. Or ces longueurs d'onde sont associées aux modes de basse énergie, modes qui seront donc bien décrits par un champ classique. Il en va de même si on cherche à étudier la condensation de Bose-Einstein dans le cas tri-dimensionnel.

1-4 Que reste-t-il de quantique ?

Comme nous l'avons déjà indiqué, l'approche champ classique revient à oublier la granularité de la matière en négligeant le commutateur $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$,

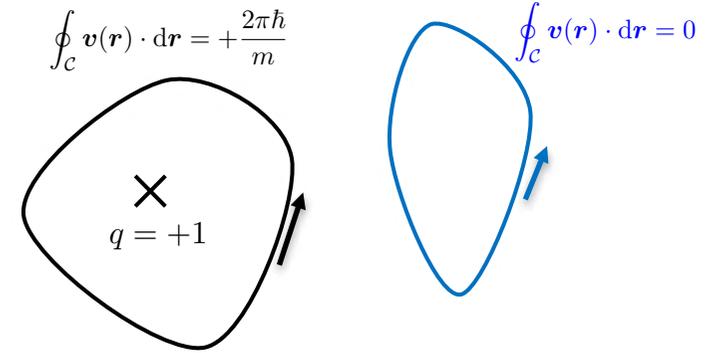


FIGURE 3. Quantification de la circulation de la vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta$ associée au champ classique $\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})} e^{i\theta(\mathbf{r})}$. La valeur de la circulation ne peut changer que si le contour C passe sur un vortex, c'est-à-dire un point où $\rho(\mathbf{r})$ s'annule.

où \hat{a} est l'opérateur destruction d'un mode donné. Il reste néanmoins un aspect quantique dans la description de l'état de l'assemblée d'atomes par un champ $\psi(\mathbf{r})$, lié à la nature même de ce champ. Pour un gaz à deux dimensions x, y , le champ complexe $\psi(\mathbf{r})$ est caractérisé par son amplitude et sa phase : $\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})} e^{i\theta(\mathbf{r})}$. À ce champ, on associe une vitesse en tout point où la phase est définie, c'est-à-dire où la densité est non nulle :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta. \quad (21)$$

Comme expliqué par SVISTUNOV, BABAEV et al. (2015), cette équation met en évidence le paramètre pertinent \hbar/m de l'approche champ classique. La masse m d'un atome a perdu sa signification physique puisqu'on a effacé la granularité de la matière. Il en va de même pour \hbar pris de manière individuelle. En revanche, le rapport \hbar/m joue un rôle central en reliant le champ ψ au flux de matière observable.

Une fois établi ce point, l'aspect quantique qui subsiste est clair. Il s'agit de la quantification de la circulation de la vitesse sur n'importe quel contour fermé ne passant pas par un point où $\rho(\mathbf{r})$ s'annule (figure 3) :

$$\oint_C \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = n \frac{2\pi\hbar}{m}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (22)$$

Cette quantification découle directement du fait que la vitesse est proportionnelle au gradient d'une phase. Elle est essentielle pour faire émerger la notion de défauts topologiques, les vortex, qui seront eux-mêmes les briques élémentaires du mécanisme BKT.

2 Fonctionnelle de Gross-Pitaevskii

2-1 De l'hamiltonien quantique au champ classique

Nous considérons ici un fluide composé de particules identiques (bosons) avec une interaction binaire décrite par le potentiel $U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$. Ces particules sont par ailleurs piégées par le potentiel extérieur

$$V_{\text{trap}}^{(3D)}(\mathbf{r}) = V_{\text{trap}}^{(1D)}(z) + V_{\text{trap}}^{(2D)}(x, y) \quad (23)$$

qui est responsable

- du confinement fort le long de l'axe z , qui gèle le mouvement correspondant et rend ainsi le gaz bi-dimensionnel.
- d'un confinement plus faible dans le plan xy , par exemple sous forme d'un potentiel harmonique ou d'une boîte de taille $L \times L$. Dans ce chapitre, nous nous placerons dans le cas de la boîte et nous prendrons des conditions aux limites périodiques dans le plan xy .

L'hamiltonien du gaz s'écrit dans le formalisme de la première quantification :

$$1^{\text{ère}} \text{ quantif. : } \hat{H} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m} + V_{\text{trap}}^{(3D)}(\hat{\mathbf{r}}_j) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U(\hat{\mathbf{r}}_i - \hat{\mathbf{r}}_j). \quad (24)$$

On peut également l'écrire en formalisme de seconde quantification, en introduisant l'opérateur $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$, qui détruit une particule au point \mathbf{r} et son hermitique conjugué $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$ qui crée une particule en ce point :

$$2^{\text{ème}} \text{ quantif. : } \hat{H} = \int \left(\frac{1}{2m} \nabla \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \cdot \nabla \hat{\Psi}(\mathbf{r}) + \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) V_{\text{trap}}^{(3D)}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \right) d^3r \\ + \frac{1}{2} \iint \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}) d^3r d^3r'.$$

Le traitement exact de cet hamiltonien est compliqué dès que le potentiel d'interaction entre atomes U est non nul. A deux et trois dimensions, il n'est par exemple pas possible de remplacer simplement ce potentiel par une interaction de contact $U(\mathbf{r}) = U_0 \delta(\mathbf{r})$ car cela conduit à des incohérences sur le plan mathématique. En revanche, cela ne pose pas de problème dans le formalisme de champ classique que nous avons décrit au premier paragraphe et que nous allons maintenant utiliser.

Comme expliqué plus haut, une méthode simple pour aborder le problème à N corps bosonique (quelle que soit la dimensionnalité) consiste à prendre pour classe de fonctions possibles l'*ansatz* de Hartree :

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \propto \phi(\mathbf{r}_1) \dots \phi(\mathbf{r}_N), \quad (25)$$

la fonction ϕ étant normée ici par le nombre de particules² :

$$\int |\phi(\mathbf{r})|^2 d^3r = N. \quad (26)$$

Cet *ansatz* est bien sûr inspiré du concept de condensation de Bose-Einstein, puisqu'on place toutes les particules dans le même état. Mais la fonction ϕ ne correspond pas ici à l'état d'énergie minimal ; elle fournit simplement un échantillonnage possible du fluide à un instant donné. Dans ce qui va suivre, cette fonction aura sa dynamique propre, avec notamment des fluctuations d'amplitude et de phase qui joueront un rôle important. Par l'intermédiaire de ces fluctuations, on pourra assigner une température au fluide et mettre en évidence la transition de phase recherchée.

L'énergie $E(\phi)$ associée à une fonction ϕ donnée se calcule à partir de $\langle \Phi | \hat{H} | \Phi \rangle$ en y injectant l'*ansatz* de Hartree :

$$E(\phi) = \int \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi|^2 + V_{\text{trap}}^{(3D)}(\mathbf{r}) |\phi(\mathbf{r})|^2 \right) d^3r \quad (27) \\ + \frac{1}{2} \iint U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |\phi(\mathbf{r})|^2 |\phi(\mathbf{r}')|^2 d^3r d^3r'$$

où l'on a pris $N - 1 \approx N$.

2. Dans le cours 2015-16, nous avons normalisé ϕ à l'unité.

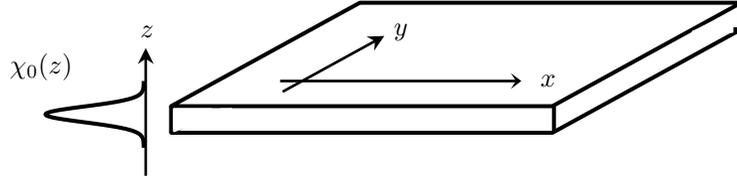


FIGURE 4. Fonction d'onde $\chi_0(z)$ correspondant au gel du mouvement dans la direction z .

Dans cette approche "champ classique", il n'y a pas de problème pour modéliser l'interaction entre atomes par une interaction de contact

$$U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \text{avec} \quad g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}, \quad (28)$$

où a est la longueur de diffusion associée au potentiel U initial. La fonctionnelle d'énergie (toujours à 3D pour l'instant) s'écrit donc :

$$E(\phi) = \int \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\phi|^2 + V_{\text{trap}}^{(3D)}(\mathbf{r}) |\phi(\mathbf{r})|^2 + \frac{g}{2} |\phi(\mathbf{r})|^4 \right) d^3r. \quad (29)$$

2-2 Factorisation du mouvement "gelé"

Il nous reste à prendre en compte le fait que le mouvement selon la dimension z est gelé par le potentiel fortement confinant le long de cet axe (figure 4). Nous allons donc faire un *ansatz* supplémentaire, qui consiste à écrire la fonction $\phi(\mathbf{r})$ sous la forme factorisée :

$$\phi(x, y, z) = \psi(x, y) \chi_0(z) \quad (30)$$

où $\chi_0(z)$ est l'état fondamental du mouvement à une particule selon z :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\chi_0}{dz^2} + V_{\text{trap}}^{(1D)}(z) \chi_0(z) = \epsilon_0 \chi_0(z), \quad (31)$$

que nous prendrons normalisé à l'unité :

$$\int |\chi_0(z)|^2 dz = 1. \quad (32)$$

Cette hypothèse de factorisation est valable si l'énergie associée aux interactions entre particules et l'énergie thermique $k_B T$ sont toutes deux petites devant l'écart entre l'énergie du fondamental de ce mouvement selon z et celle de son premier état excité.

À une constante additive près sans importance ici, on arrive alors à l'énergie associée à $\psi(x, y)$:

$$E(\psi) = \int \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\psi|^2 + V_{\text{trap}}^{(2D)}(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \tilde{g} |\psi(\mathbf{r})|^4 \right) d^2r, \quad (33)$$

où l'on a introduit le nombre sans dimension \tilde{g} qui caractérise la force des interactions dans ce problème 2D :

$$\tilde{g} = 4\pi a \int |\chi_0(z)|^4 dz. \quad (34)$$

Pour un confinement harmonique de pulsation ω_z le long de l'axe z , l'état χ_0 s'écrit :

$$\chi_0(z) = \frac{1}{(\pi a_{\text{oh}}^2)^{1/4}} e^{-z^2 / (2a_{\text{oh}}^2)} \quad \text{avec} \quad a_{\text{oh}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_z}}, \quad (35)$$

ce qui conduit à

$$\tilde{g} = \sqrt{8\pi} \frac{a}{a_{\text{oh}}}. \quad (36)$$

On retrouve le paramètre sans dimension caractéristique des interactions à deux dimensions que nous avons introduit au chapitre précédent.

À ce stade, il est intéressant d'écrire l'équation du mouvement du champ $\psi(\mathbf{r})$, c'est-à-dire l'équation de Gross-Pitaevskii dépendante du temps³. En prenant un piègeage harmonique isotrope de pulsation ω dans

3. Cette équation s'obtient par exemple en utilisant l'approche lagrangienne, avec [cf. cours 2015-16]

$$L(\psi) = \int \mathcal{L}_{\text{dyn}}[\psi(\mathbf{r})] d^2r - E(\psi) \quad (37)$$

où la partie dynamique du Lagrangien s'écrit, à une dérivée totale par rapport au temps près :

$$\mathcal{L}_{\text{dyn}}[\psi(\mathbf{r})] = \frac{i\hbar}{2} (\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi}^* \psi). \quad (38)$$

le plan xy , on arrive à :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 \psi + \frac{m}{2\hbar} \omega^2 r^2 \psi + \frac{\hbar}{m} \tilde{g} |\psi|^2 \psi \quad (39)$$

Comme annoncé plus haut, on peut vérifier sur cette équation que le paramètre pertinent est \hbar/m , conjointement avec la pulsation du piège ω et le paramètre d'interaction \tilde{g} . Par ailleurs, on peut vérifier explicitement sur cette équation que le nombre total de particules $N(\psi) = \int |\psi|^2$ ainsi que l'énergie totale $E(\psi)$ sont des quantités conservées.

Pour simplifier, considérons désormais le cas d'un gaz confiné dans une boîte de taille $L \times L$ avec des conditions aux limites périodiques. L'énergie totale (33) est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie d'interaction :

$$E_{\text{cin}} = \frac{\hbar^2}{2m} \int |\nabla \psi|^2 d^2r \quad E_{\text{int}} = \frac{\hbar^2}{2m} \tilde{g} \int \rho^2(\mathbf{r}) d^2r \quad (40)$$

où l'on a introduit la densité surfacique au point \mathbf{r}

$$\rho(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2 \quad \text{avec} \quad \int \rho(\mathbf{r}) d^2r = N. \quad (41)$$

L'état fondamental du système correspond à la fonction d'onde uniforme :

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho} \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{N}{L^2}, \quad (42)$$

avec uniquement l'énergie d'interaction qui est non nulle :

$$E_{\text{int}} = \frac{\hbar^2}{2m} \tilde{g} \rho N. \quad (43)$$

Pour acquérir une intuition de la valeur de \tilde{g} correspondant à une "interaction forte", on peut comparer l'énergie d'interaction du fondamental à l'énergie cinétique du gaz si on dispose les N particules sur les N premiers états d'énergie de la boîte, allant de l'énergie $E = 0$ à l'énergie E_{max} (un état "fermionisé" en quelque sorte⁴). En utilisant la densité d'états $D(E)$

4. C'est le type d'état qui apparaît dans l'effet Hall quantique (état de Laughlin) ou dans des problèmes 1D (état de Tonks-Girardeau).

(constante) déterminée au chapitre 2, on commence par déterminer la valeur de E_{max} :

$$N = \int_0^{E_{\text{max}}} D(E) dE \quad \text{avec} \quad D(E) = \frac{mL^2}{2\pi\hbar^2} \quad \implies \quad E_{\text{max}} = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \rho. \quad (44)$$

On en déduit l'énergie cinétique de ce gaz fermionisé :

$$E_{\text{cin, fermion.}} = \int_0^{E_{\text{max}}} E D(E) dE = \frac{\pi\hbar^2}{m} \rho N. \quad (45)$$

Selon ce critère, bien sûr quelque peu arbitraire, on voit qu'une interaction "forte" correspond à

$$E_{\text{int}} \sim E_{\text{cin, fermion.}} \quad \longrightarrow \quad \tilde{g} \sim 2\pi. \quad (46)$$

Pour une telle valeur de \tilde{g} , l'approche champ classique développée ici ne s'appliquera plus car les corrélations entre particules créées par les interactions sont trop fortes : elles sont en effet susceptibles d'empêcher toute accumulation de plusieurs particules dans le même état quantique. Dans les expériences menées avec des atomes froids, la valeur de \tilde{g} est notablement inférieure à 1 ; pour des atomes de rubidium confinés selon z par un potentiel de fréquence $\omega_z/(2\pi) = 10$ kHz, on trouve ainsi $\tilde{g} = 0.24$.

2-3 Coupure ultra-violette et longueur de cicatrisation

Comme toute théorie de champ classique, la modélisation du fluide en terme d'une fonction d'onde $\psi(\mathbf{r})$ souffre d'un problème de divergence ultra-violette. C'est le fameux problème du "corps noir" : Il y a des modes de vecteur d'onde \mathbf{q} arbitrairement élevé, et l'équipartition de l'énergie appliquée à chacun de ces modes conduit à une divergence des quantités physiques calculées en sommant sur \mathbf{q} . En effet, comme nous l'avons vu en (20), la population de ces modes $N(E)$ décroît "mollement" comme $1/E_q$, et cette décroissance douce associée à la densité d'états constante $D(E)$ (pour des particules libres) fait diverger l'intégrale $\int E N(E) D(E) dE$. Ce problème ne se résout de manière exacte qu'en quantifiant le champ, ce qui introduit une coupure effective pour les modes de fréquence ω_q supérieure à $k_B T/\hbar$ [plus précisément en introduisant une décroissance exponentielle pour $N(E)$, cf. (15)].

En pratique, cette divergence ne sera pas une difficulté majeure pour nous : nous nous intéressons au comportement à grande distance des fonctions de corrélation de notre fluide, qui sont associées à des petits vecteurs d'onde. La connaissance précise dans l'ultra-violet des quantités physiques intéressantes ne sera donc pas nécessaire. Pour éliminer les divergences, il sera suffisant d'établir une coupure à un nombre d'onde $q_{\text{coup.}}$ donné par

$$q_{\text{coup.}} \sim \frac{1}{\lambda_T} \quad \leftrightarrow \quad \hbar\omega_{\text{coup.}} \approx \frac{\hbar^2 q_{\text{coup.}}^2}{2m} \sim k_B T, \quad (47)$$

au moins dans le régime "habituel" où $k_B T$ est plus grande que l'énergie d'interaction par particule E_{int}/N .

Une connaissance précise du comportement du fluide sur des échelles de longueur plus courtes que λ_T nécessiterait un traitement au-delà de notre approche classique, mais elle ne sera pas nécessaire pour étudier les phases macroscopiques (superfluides ou non) susceptibles d'apparaître. Notons qu'une "méthode semi-classique" ne nécessitant pas l'introduction d'une coupure UV a été proposée et appliquée au cas du gaz de Bose à deux dimensions par GIORGETTI, CARUSOTTO et al. (2007). Par ailleurs, pour obtenir une théorie plus complète au moins dans le régime où les interactions ne sont pas fortes, on peut raccorder la théorie de champ classique pour $q < q_{\text{coup.}}$ à la théorie quantique du gaz parfait pour $q > q_{\text{coup.}}$ [voir par exemple PROKOF'EV & SVISTUNOV (2002)].

La longueur λ_T n'apparaît donc pas en tant que telle dans le traitement champ classique, sinon sous la forme d'une coupure « courte distance » mise à la main. On pouvait s'y attendre *a priori* puisque $\lambda_T \propto \hbar/\sqrt{m}$ n'est pas fonction de notre seul paramètre \hbar/m . L'autre distance caractéristique d'un gaz quantique est la distance de cicatrisation qui peut quant à elle être accessible dans cette approche champ classique. Rappelons que la distance de cicatrisation est l'échelle de longueur associée à l'énergie d'interaction par particule :

$$\frac{\hbar^2}{2m\xi^2} = \frac{\hbar^2}{m} \tilde{g}\rho \quad \rightarrow \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{g}\rho}}. \quad (48)$$

Elle donne l'échelle de longueur sur laquelle la densité du fluide reprend sa valeur normale, si on lui impose de s'annuler en un point (figure 5). Ce point peut être l'emplacement d'une bosse de potentiel ou le centre d'un

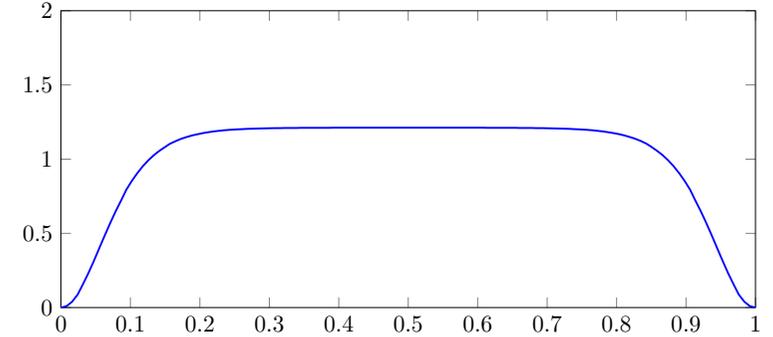


FIGURE 5. La longueur de cicatrisation est la distance caractéristique nécessaire pour que la densité reprenne sa valeur moyenne, quand on impose à la fonction d'onde de s'annuler en un point donné (ici les deux extrémités du segment).

vortex. Il est intéressant d'évaluer le nombre d'atomes manquants autour de ce point :

$$\delta N \approx \pi \xi^2 \rho = \frac{\pi}{2\tilde{g}} \quad (49)$$

Plus le paramètre d'interaction \tilde{g} est grand, plus ce nombre manquant est faible. Pour des interactions assez fortes ($\tilde{g} \gtrsim 1$), ce nombre devient inférieur à un atome. On ne peut alors plus détecter ce défaut par une imagerie *in situ* du gaz ; c'est simplement un point où une singularité mathématique se produit.

Comme nous l'avons écrit au paragraphe précédent, le régime habituel des expériences menées avec des gaz atomiques correspond à une énergie d'interaction par particule plus faible que l'énergie thermique $k_B T$, ce qui entraîne⁵ :

$$E_{\text{int}}/N < k_B T \quad \rightarrow \quad \xi > \lambda_T, \quad (51)$$

ce qui confirme le fait que ξ peut être calculable à partir de la simulation de champ classique alors que λ_T correspond à une distance de coupure, associée à l'énergie de coupure $\sim k_B T$.

5. On a plus précisément

$$\frac{\xi^2}{\lambda_T^2} = \frac{1}{8\pi} \frac{k_B T}{E_{\text{int}}/N}. \quad (50)$$

2-4 La version "optique non linéaire"

Le formalisme de champ classique développé ci-dessus pour décrire une onde de matière macroscopique s'applique de manière quasi-inchangée à la propagation d'un champ lumineux intense dans un milieu non-linéaire. Ce problème de base en optique a fait l'objet de recherches expérimentales récentes en lien avec la condensation ou la quasi-condensation [citons en particulier SUN, JIA et al. (2012), ainsi qu'une communication privée de Robin Kaiser d'avril 2017].

Notons tout de suite qu'il s'agit d'une problématique différente de celle étudiée à Bonn sur la condensation de photons, et que nous avons abordée au chapitre précédent (KLAERS, SCHMITT et al. 2010). Dans les expériences de Bonn, nous avons vu que l'on gèle le degré de liberté selon z grâce à une cavité Fabry–Perot. Dans ce que nous décrivons ici, le faisceau se propage librement selon l'axe z , cette propagation jouant le rôle du temps dans une équation de Schrödinger effective, décrivant la dynamique du champ dans le plan xy perpendiculaire à l'axe de propagation.

Commençons par l'équation d'onde pour une des composantes $u(\mathbf{r}, t)$ du vecteur champ électrique ou champ magnétique dans un milieu d'indice n_0 . Partant des équations de Maxwell, on peut écrire cette équation sous la forme :

$$\nabla^2 u - \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (52)$$

Une catégorie bien connue de solutions est formée par les ondes planes, comme celles se propageant le long de l'axe z , $u(\mathbf{r}, t) = u_0 e^{i(kz - \omega t)}$ avec la relation de dispersion $\omega = ck/n_0$. Intéressons-nous à des solutions déduites de ces ondes planes, écrites sous la forme

$$u(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) e^{i(kz - \omega t)} \quad (53)$$

où $\psi(\mathbf{r})$ est supposée "lentement variable" dans l'espace, c'est-à-dire

$$\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right| \ll k \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|. \quad (54)$$

En injectant cette forme pour $u(\mathbf{r}, t)$ dans l'équation d'onde (52) et en négligeant les terme faisant intervenir $\partial^2 \psi / \partial z^2$, on arrive à

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{2k} \nabla_{\perp}^2 \psi \quad (55)$$

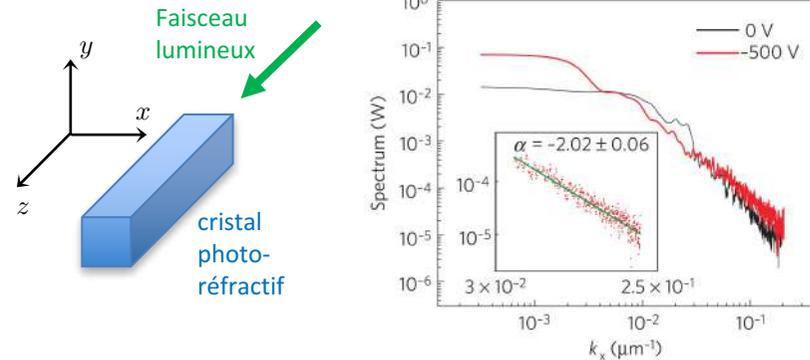


FIGURE 6. Principe de la « condensation d'ondes classiques lumineuses » : on envoie un faisceau laser avec un certain désordre en amplitude et en phase dans un cristal photo-réfractif. Pour une longueur d'interaction suffisamment grande, l'évolution non-linéaire du champ lumineux conduit à une distribution quasi-thermique des modes transverses du faisceau lumineux. Cette distribution est caractérisée par une décroissance de la population des modes comme $1/k_{\perp}^2$. Figure extraite de SUN, JIA et al. (2012).

où le laplacien transverse ∇_{\perp}^2 correspond à l'opérateur $\partial_x^2 + \partial_y^2$. Cette équation est formellement identique à l'équation de Schrödinger pour une particule libre à deux dimensions, le temps étant remplacé par la coordonnée z le long de l'axe de propagation. On peut d'ailleurs passer véritablement à une coordonnée temporelle en introduisant $\tau = n_0 z / c$, qui paramètre le temps de propagation pour une distance z donnée. L'équation (55) s'écrit alors

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{\hbar}{2m_{\text{phot}}} \nabla_{\perp}^2 \psi \quad (56)$$

où l'on a introduit, comme au chapitre précédent, la masse effective des photons $m_{\text{phot}} = n_0^2 \hbar \omega / c^2$.

Pour que l'évolution de ψ soit similaire à celle du champ ψ étudiée dans ce chapitre, on utilise un milieu optiquement non linéaire de sorte que l'indice n_0 doit être remplacé par $n_0 + n_2 |\psi|^2 / k^2$. Notons que ψ a la dimension de l'inverse d'une longueur pour que $\int |\psi|^2 d^2 r$ soit sans dimension, de sorte que n_2 est également sans dimension. En injectant cette expression

pour l'indice dans (52) et en nous limitant au premier terme non nul en n_2 , nous arrivons à :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{2k} \nabla_{\perp}^2 \psi - \frac{n_2}{n_0 k} |\psi|^2 \psi \quad (57)$$

qui a exactement la structure de l'équation de Gross–Pitaevskii (39) en l'absence de piège si l'on prend une non-linéarité défocalisante ($n_2 < 0$).

Dans l'expérience de SUN, JIA et al. (2012), on imprime un désordre contrôlé sur le faisceau lumineux à l'entrée du milieu non-linéaire. Lors de la propagation, on peut définir deux quantités conservées indépendantes, l'équivalent du nombre de particules N donné par l'intégrale de $|\psi|^2$ et l'énergie E donnée par la fonctionnelle de Gross–Pitaevskii. Si la longueur d'interaction le long de l'axe z est suffisante, on réalise l'équivalent d'un ensemble microcanonique, la configuration du champ en sortie étant un échantillonnage de cet ensemble pour le couple (N, E) choisi. Plus le désordre initial est important, plus cette énergie – et donc la température – sont grandes.

Nous avons vu au début de ce chapitre que pour un champ classique en interaction faible, l'équilibre thermodynamique correspond à une population des modes de vecteur d'onde k_{\perp} variant comme $T/[E(k_{\perp}) - \mu]$ avec dans l'approximation paraxiale $E(k_{\perp}) \propto k_{\perp}^2$ (CONNAUGHTON, JOSERAND et al. 2005; PICOZZI, GARNIER et al. 2014). Rappelons que cette distribution n'est valable que sur un intervalle fini de valeurs de k_{\perp} , en raison de la divergence ultra-violette propre à toute théorie de champ classique. En pratique, cette loi en k_{\perp}^{-2} est vérifiée expérimentalement sur plus d'une décade [figure 6 tirée de SUN, JIA et al. (2012)]. Par ailleurs, les effets de taille finie dans cette expérience conduisent à une population macroscopique dans le mode central $k_{\perp} = 0$ (d'où la terminologie "condensation d'ondes lumineuses").

3 Fluctuations de phase et quasi-ordre

À température strictement nulle, un gaz de Bose 2D en interaction relativement faible a pour énergie la fonctionnelle (33) et est donc condensé : il est décrit par la fonction d'onde uniforme dans l'espace $\psi = \sqrt{\rho} e^{i\theta}$, où $\rho = N/L^2$ et θ sont eux aussi uniformes, θ pouvant être choisie arbitraire-

ment entre 0 et 2π (invariance de jauge). Son énergie cinétique est nulle et son énergie d'interaction est :

$$E_{\text{cin}} = 0 \quad E_{\text{int}} = \frac{\hbar^2}{2m} \tilde{g} L^2 \rho^2. \quad (58)$$

À température non nulle, $\rho(\mathbf{r})$ et $\theta(\mathbf{r})$ seront des fonctions variant dans l'espace sous l'effet des fluctuations thermiques. La caractérisation de ces fluctuations en termes de fonctions de corrélations entre deux point \mathbf{r} et \mathbf{r}' permet de préciser le type d'ordre présent dans le fluide.

3-1 Suppression des fluctuations de densité

Un point important dans ce qui va suivre, au moins pour la région de basse température, est la réduction des fluctuations de densité par rapport au cas du gaz parfait, du fait des interactions répulsives entre particules. Le lien entre considérations énergétiques et réduction de ces fluctuations est immédiat si l'on remarque que l'énergie d'interaction (40) peut s'écrire

$$E_{\text{int}} = \frac{\hbar^2}{2m} \tilde{g} L^2 \langle \rho^2(\mathbf{r}) \rangle \quad (59)$$

de sorte que le surcoût en énergie d'interaction par rapport au gaz à température nulle est directement proportionnel aux fluctuations de densité caractérisées par (COHEN-TANNOUJJI & ROBILLIARD 2001)

$$(\Delta\rho)^2 = \langle \rho^2(\mathbf{r}) \rangle - \rho^2 = [g_2(0) - 1] \rho^2, \quad (60)$$

où $g_2(\mathbf{r}) = \langle \rho(\mathbf{r})\rho(0) \rangle / \rho^2$ est la fonction de corrélation densité-densité. Pour un gaz décrit par un champ classique $\psi(\mathbf{r})$, la quantité $(\Delta\rho)^2$ est toujours positive, c'est-à-dire $g_2(0) \geq 1$, du fait de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$L^2 \int \rho^2(\mathbf{r}) d^2r \geq \left(\int \rho(\mathbf{r}) d^2r \right)^2 \quad (61)$$

de sorte que l'énergie d'interaction est toujours plus grande en présence de fluctuations thermiques qu'à température nulle.

Pour un gaz de Bose idéal en l'absence de condensat, ce qui est le cas à 2D si $T \neq 0$, on a toujours $g_2(0) = 2$. Ce résultat s'obtient en exprimant

l'opérateur $\hat{\rho}(\mathbf{r})$ en fonction de l'opérateur champ, développé sur la base des ondes planes à 2D :

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r}) \quad \text{avec} \quad \hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{L} \sum_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \hat{a}_{\mathbf{p}}. \quad (62)$$

En choisissant par exemple le point $\mathbf{r} = 0$, on obtient :

$$\langle \hat{\rho}^2(0) \rangle = \frac{1}{L^4} \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4} \langle \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_3} \hat{a}_{\mathbf{p}_4} \rangle. \quad (63)$$

S'il n'y a pas d'état macroscopiquement peuplé, on peut négliger dans cette somme la contribution des termes où $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_4$. Pour les autres termes, en utilisant le fait que l'opérateur densité à l'équilibre thermique est diagonal dans la base des \mathbf{p} , on remarque qu'un terme du type $\langle \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_3} \hat{a}_{\mathbf{p}_4} \rangle$ est non nul si et seulement si

$$\{\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_3 \text{ et } \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_4\} \quad \text{ou} \quad \{\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_4 \text{ et } \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3\}, \quad (64)$$

chacune des deux options ayant la même contribution. On a donc :

$$\langle \hat{\rho}^2(0) \rangle \approx 2 \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \langle \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_1} \rangle \langle \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2} \rangle = 2 (\langle \hat{\rho}(0) \rangle)^2. \quad (65)$$

Pour un gaz en interaction en revanche, l'énergie E_{int} finit toujours par dominer si on va à suffisamment basse température. L'énergie d'interaction par particule, qui est de l'ordre de $\frac{\hbar^2}{2m} \tilde{g} \rho$, devient en effet toujours plus grande que $k_B T$ si T est suffisamment faible. Plus précisément :

$$\frac{\hbar^2}{2m} \tilde{g} \rho = \frac{\tilde{g}}{4\pi} \mathcal{D} \quad (66)$$

où l'on a introduit la densité dans l'espace des phases

$$\mathcal{D} = \rho \lambda_T^2 \quad \text{avec} \quad \lambda_T = \frac{\hbar \sqrt{2\pi}}{\sqrt{m k_B T}}. \quad (67)$$

Par conséquent, pour une densité dans l'espace des phases telle que

$$\mathcal{D} \gg \frac{4\pi}{\tilde{g}}, \quad (68)$$

toute modification significative de la densité par rapport à sa valeur moyenne, conduisant à une valeur de $g_2(0)$ notablement supérieure à 1, aura un coût prohibitif comparé à $k_B T$.

3-2 Hamiltonien effectif à basse énergie

Dans la limite où les fluctuations de densité peuvent être négligées, le gradient de la fonction d'onde $\psi(\mathbf{r})$ qui intervient dans le terme d'énergie cinétique s'écrit

$$\nabla \psi = \nabla \left(\sqrt{\rho(\mathbf{r})} e^{i\theta(\mathbf{r})} \right) \approx \sqrt{\rho} (i \nabla \theta) e^{i\theta(\mathbf{r})} \quad (69)$$

de sorte que le terme d'énergie cinétique devient

$$E_{\text{cin}} \approx \frac{\hbar^2}{2m} \rho \int (\nabla \theta)^2 d^2 r. \quad (70)$$

Cette expression pour l'énergie traduit la rigidité de phase du système : les excitations pertinentes sont les fluctuations de phase et leur énergie est liée au prix à payer pour "tordre" cette phase entre deux zones de l'échantillon.

Nous avons montré dans le cours 2015-16 que cette notion de rigidité en phase peut être utilisée pour définir de manière rigoureuse la densité superfluide dans un gaz homogène. De ce point de vue, l'expression (70) montre qu'implicitement, un système 2D décrit par la fonctionnelle d'énergie de Gross-Pitaevskii est superfluide si on néglige totalement ses fluctuations de densité. De plus, sa densité superfluide ρ_s – c'est-à-dire le coefficient devant $(\nabla \theta)^2$ – est égale à la densité totale ρ .

Ce point de vue consistant à utiliser (70) et conduisant à $\rho_s = \rho$ est certainement valable à très basse température, mais ne rend pas compte de la diminution observée de la densité superfluide quand la température augmente. Pour rendre compte de manière rigoureuse de cette diminution, il faut

- traiter de manière couplée les fluctuations de phase et de densité, ce que nous ferons par la méthode de Bogoliubov un peu plus loin ;
- prendre en compte les vortex qui, comme nous le verrons dans le chapitre suivant, peuvent exister dans la partie superfluide sous forme de paires de tourbillons de signes opposés.

Mais on peut également procéder de manière phénoménologique, en introduisant "à la main" une densité superfluide ρ_s , qui dépend de la température, et qui conduit à l'énergie

$$E_{\text{cin}} \approx \frac{\hbar^2}{2m} \rho_s(T) \int (\nabla \theta)^2 d^2 r. \quad (71)$$

Cette renormalisation de ρ en ρ_s est un moyen simple pour absorber toutes les fluctuations thermiques non essentielles, y compris les fluctuations de densité sur des courtes distances, pour se concentrer sur la physique à longue distance et le quasi-ordre à longue portée susceptible d'apparaître.

Il doit être bien clair que l'énergie E_{cin} donnée en (71) ne peut pas être considérée comme un hamiltonien microscopique, ne serait-ce que parce qu'elle dépend de la température via ρ_s . Il s'agit en fait de l'accroissement de l'énergie libre du gaz si on impose le courant superfluide $(\hbar/m) \nabla\theta$ [voir par exemple la discussion en appendice de l'article de BLOCH, DALIBARD et al. 2008].

3-3 Analyse de Fourier des fluctuations de phase

Partant de l'expression phénoménologique (71) pour l'énergie associée à une fluctuation de phase $\theta(\mathbf{r})$, nous voulons évaluer la fonction $G_1(r)$ décrivant les corrélations entre deux points du système :

$$G_1(\mathbf{r}) = \langle \psi(\mathbf{r}) \psi^*(0) \rangle = \rho \langle e^{i[\theta(\mathbf{r}) - \theta(0)]} \rangle. \quad (72)$$

Nous devons donc dans un premier temps déterminer les fluctuations de $\theta(\mathbf{r}) - \theta(0)$, ce que nous allons faire à partir d'un développement en série de Fourier de la fonction $\theta(\mathbf{r})$ et de l'utilisation du théorème d'équipartition de l'énergie.

Commençons par écrire la phase $\theta(\mathbf{r})$ sous la forme

$$\theta(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \quad (73)$$

où la réalité de θ entraîne

$$c_{\mathbf{q}}^* = c_{-\mathbf{q}}. \quad (74)$$

Notons qu'un tel développement, si naturel qu'il paraisse compte tenu des conditions aux limites périodiques, n'est pas anodin : il ne rend pas compte de la périodicité de la fonction $e^{i\theta}$ quand $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$. Ce n'est pas un problème si on se limite à des situations où θ varie de manière douce et régulière sur l'échantillon, mais il néglige d'emblée les vortex, qui sont des points autour desquels la phase varie de 0 à π sur des distances arbitrairement courtes.

Injectons le développement (73) dans l'énergie (71) :

$$E_{\text{cin}} = \rho_s L^2 \sum_{\mathbf{q}} \frac{\hbar^2 q^2}{2m} |c_{\mathbf{q}}|^2. \quad (75)$$

Pour tenir compte du fait que les modes \mathbf{q} et $-\mathbf{q}$ sont liés par (74), nous pouvons restreindre la somme sur \mathbf{q} aux $q_x > 0$ et l'écrire :

$$E_{\text{cin}} = \sum_{\mathbf{q}, q_x > 0} \epsilon_{\mathbf{q}} |c_{\mathbf{q}}|^2 \quad \text{avec} \quad \epsilon_{\mathbf{q}} = \rho_s L^2 \frac{\hbar^2 q^2}{m}. \quad (76)$$

La probabilité d'occurrence d'une configuration correspondant à un tirage $\{c_{\mathbf{q}}\}$ donné est donnée par la loi de Boltzmann :

$$\mathcal{P}[\{c_{\mathbf{q}}\}] \propto \prod_{\mathbf{q}} e^{-\epsilon_{\mathbf{q}} |c_{\mathbf{q}}|^2 / k_B T}. \quad (77)$$

Les $c_{\mathbf{q}}$ avec $q_x > 0$ sont donc des variables gaussiennes indépendantes complexes. En les décomposant en partie réelle et imaginaire,

$$c_{\mathbf{q}} = c'_{\mathbf{q}} + i c''_{\mathbf{q}} \quad \text{avec} \quad c'_{\mathbf{q}} = c'_{-\mathbf{q}} \quad \text{et} \quad c''_{\mathbf{q}} = -c''_{-\mathbf{q}} \quad (78)$$

on trouve à l'équilibre thermique :

$$\langle (c'_{\mathbf{q}})^2 \rangle = \langle (c''_{\mathbf{q}})^2 \rangle = \frac{k_B T}{2\epsilon_{\mathbf{q}}}. \quad (79)$$

Notons que l'on trouve ici que la population moyenne $\langle |c_{\mathbf{q}}|^2 \rangle$ d'un mode \mathbf{q} donné est égale à $k_B T / \epsilon_{\mathbf{q}}$, comme nous l'avions annoncé en (20) en posant les bases de la théorie de champ classique.

3-4 Corrélations en phase à l'équilibre thermique

Considérons maintenant la différence de phase $\theta(\mathbf{r}) - \theta(0)$ qui apparaît dans (72). On a :

$$\begin{aligned} \theta(\mathbf{r}) - \theta(0) &= \sum_{\mathbf{q}} (c'_{\mathbf{q}} + i c''_{\mathbf{q}}) (e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} - 1) \\ &= -2 \sum_{\mathbf{q}, q_x > 0} \{ c'_{\mathbf{q}} [1 - \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})] + c''_{\mathbf{q}} \sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \} \end{aligned} \quad (80)$$

ce qui donne quand on prend la moyenne du carré de cette expression à l'équilibre thermique

$$\begin{aligned} \langle [\theta(\mathbf{r}) - \theta(0)]^2 \rangle &= 4 \sum_{\mathbf{q}, q_x > 0} \langle (c'_q)^2 \rangle [1 - \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})]^2 + \langle (c''_q)^2 \rangle \sin^2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \\ &= 4 \sum_{\mathbf{q}, q_x > 0} \frac{k_B T}{\epsilon_q} [1 - \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})] \\ &= 2 \sum_{\mathbf{q}} \frac{k_B T}{\epsilon_q} [1 - \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})] \end{aligned} \quad (81)$$

où l'on relâché la contrainte $q_x > 0$ dans la dernière ligne. En transformant cette somme discrète en intégrale, on arrive à

$$\begin{aligned} \langle [\theta(\mathbf{r}) - \theta(0)]^2 \rangle &= 2 \frac{L^2}{4\pi^2} \int \frac{k_B T}{\epsilon(\mathbf{q})} [1 - \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})] d^2 q \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\rho_s \lambda_T^2} \int \frac{1 - \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})}{q^2} d^2 q. \end{aligned} \quad (82)$$

La fonction

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1 - \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})}{q^2} d^2 q \quad (83)$$

peut être estimée en remarquant que son laplacien a une expression simple :

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) d^2 q = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d^2 q = \delta(\mathbf{r}) \quad (84)$$

ce qui s'intègre à deux dimensions⁶ en

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \ln(r) + \text{constante}. \quad (86)$$

Il n'est toutefois pas immédiat de fixer la valeur pertinente de la constante, puisque cette fonction n'admet pas de limite finie ni à courte, ni à longue distance.

6. C'est l'équivalent bi-dimensionnel de

$$3D: \quad \nabla^2 f(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad f(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r} + \text{constante}. \quad (85)$$

Pour ce qui va suivre, il est instructif d'évaluer cette intégrale "à la main", en coupant – pour une valeur de r donnée – l'espace des vecteurs d'onde en deux parties comme nous l'avons fait dans le premier chapitre lors de notre étude d'un cristal :

$$\begin{aligned} (2\pi)^2 f(\mathbf{r}) &= \int_{|\mathbf{q}| < \pi/r} \frac{1 - \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})}{q^2} d^2 q + \int_{|\mathbf{q}| > \pi/r} \frac{1 - \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})}{q^2} d^2 q \\ &\approx \int_{|\mathbf{q}| < \pi/r} \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})^2 / 2}{q^2} d^2 q + \int_{|\mathbf{q}| > \pi/r} \frac{1}{q^2} d^2 q \end{aligned} \quad (87)$$

La première partie, dans laquelle on a remplacé le cosinus par son approximation au voisinage de 0, donne après intégration une contribution constante, égale à $\pi/4$. La seconde partie, dans laquelle on a pris une moyenne nulle pour le cosinus, diverge du côté des grandes valeurs de q . Mettons comme expliqué ci-dessus une coupure au niveau du vecteur d'onde π/λ_T . On arrive alors à

$$f(\mathbf{r}) \approx \frac{\pi}{16} + \frac{1}{2\pi} \ln(r/\lambda_T). \quad (88)$$

soit, en négligeant le terme constant devant le logarithme, qui est *a priori* grand devant 1 si on s'intéresse aux grandes valeurs de r :

$$f(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{2\pi} \ln(r/\lambda_T). \quad (89)$$

Nous disposons maintenant de tous les ingrédients nécessaires pour évaluer la fonction de corrélation en phase. Nous trouvons tout d'abord :

$$\langle [\theta(\mathbf{r}) - \theta(0)]^2 \rangle \approx \frac{2}{\rho_s \lambda_T^2} \ln(r/\lambda_T) \quad (90)$$

puis en injectant ce résultat dans la fonction G_1 et en utilisant le résultat $\langle e^{iu} \rangle = e^{-\langle u^2 \rangle / 2}$ pour une variable gaussienne u :

$$\begin{aligned} G_1(r) &= \langle \psi(\mathbf{r}) \psi^*(0) \rangle \\ &\approx \rho \langle e^{i[\theta(\mathbf{r}) - \theta(0)]} \rangle \\ &\approx \rho e^{-\langle [\theta(\mathbf{r}) - \theta(0)]^2 \rangle / 2} \\ &\approx \rho \left(\frac{\lambda_T}{r} \right)^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1}{\rho_s \lambda_T^2}. \end{aligned} \quad (91)$$

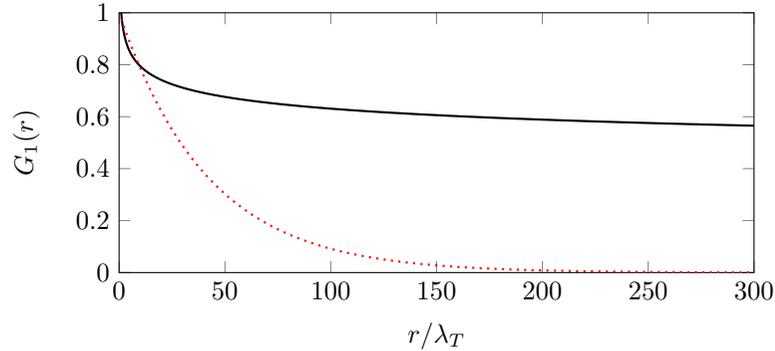


FIGURE 7. Ligne continue noire : variation de G_1 pour une densité dans l'espace des phases $\mathcal{D} = 10$ pour le cas algébrique (en présence d'interactions), $G_1(r) \sim (\lambda_T/r)^{1/\mathcal{D}}$. Ligne pointillée rouge : cas sans interaction, $G_1(r) \sim e^{-r/\ell}$ avec $\ell = (\lambda_T/\sqrt{4\pi}) e^{\mathcal{D}/2} \approx 40 \lambda_T$.

Nous trouvons donc une décroissance algébrique pour la fonction $G_1(r)$ quand $r \rightarrow \infty$. Cette conclusion est compatible avec le théorème de Mermin–Wagner–Hohenberg, ce qui est rassurant. Mais on note que cette décroissance est beaucoup moins rapide que celle trouvée pour le gaz parfait au chapitre précédent, qui était de nature exponentielle en $e^{-r/\ell}$ avec $\ell = (\lambda_T/\sqrt{4\pi}) e^{\rho\lambda_T^2/2}$. Par ailleurs, nous verrons au chapitre suivant que la phase superfluide, quand elle existe, vérifie toujours $\rho_s\lambda_T^2 > 4$, ce qui signifie que la décroissance (91) est toujours plus lente que $r^{-1/4}$.

Exemple pratique. À ce stade, il est utile d'examiner un exemple réaliste pour voir combien le cas du gaz en interaction diffère de celui du gaz parfait. Prenons pour simplifier $\rho = \rho_s$ et considérons une densité dans l'espace des phases $\mathcal{D} = \rho\lambda_T^2 = 10$, correspondant à un gaz assez fortement dégénéré (figure 7).

- On trouve pour le gaz parfait une distance caractéristique de décroissance $\ell \approx 40\lambda_T$. Pour un échantillon de taille $L = 300 \lambda_T$, la fonction $G_1(r)$ décroît par un facteur > 1000 d'un bord à l'autre de l'échantillon : il n'y a aucune cohérence de phase appréciable à cette distance.

- Passons maintenant à un gaz en interaction, pour lequel la loi de décroissance algébrique (91) nous indique que la fonction $G_1(r)$ décroît entre $r = \lambda_T$ et $r = L$ par le facteur $(300)^{1/10} < 2$: il subsiste une forte cohérence de phase entre les deux bords de l'échantillon, comparable à ce qu'on attend pour un vrai condensat.

Cet exemple montre combien le changement de type de décroissance, d'exponentielle à algébrique, modifie radicalement la cohérence de phase de ce système. Cette cohérence est induite par les interactions répulsives, qui sont responsables du gel des fluctuations de densité. Dans des systèmes de taille finie raisonnable, elle est également à l'origine d'une fraction condensée importante. La fraction condensée dans un système de taille L peut en effet se définir comme la valeur de $G_1(L)$ [cf. cours 2015-16] et l'exemple ci-dessus nous montre que pour les paramètres envisagés, la fraction condensée est supérieure à 50 %, une fois que les interactions répulsives ont joué leur rôle de « lisseur de densité ».

Plus généralement, ces considérations indiquent combien la notion de limite thermodynamique pour des systèmes de dimension réduite est délicate à prendre. Si, en accord avec le théorème de Mermin-Wagner, on définit cette limite comme un gaz dont la fraction condensée $G_1(L)$ ne dépasse pas 1 % (valeur arbitraire, mais parlante), on voit que la taille L à prendre est

$$\left(\frac{\lambda_T}{L}\right)^\alpha = 0.01 \quad \rightarrow \quad L = \frac{\lambda_T}{(0.01)^{1/\alpha}} = 10^{20} \lambda_T. \quad (92)$$

On retrouve ici le fameux argument de BRAMWELL & HOLDSWORTH (1994) qui dans le contexte de la magnétisation de systèmes 2D, montraient qu'il faudrait des échantillons de la taille de "l'état du Texas" pour atteindre la limite thermodynamique.

Nous sommes donc dans une situation subtile où le théorème de Mermin–Wagner interdit l'ordre à longue portée et l'apparition d'un condensat à la limite thermodynamique, mais où les interactions entre atomes permettent d'établir un quasi-ordre qui, dans beaucoup de cas réalistes de taille finie, "simule" l'existence d'un véritable condensat.

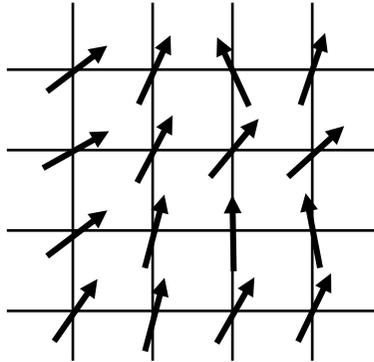


FIGURE 8. Le modèle xy à deux dimensions, qui peut être considéré comme la version discrétisée du gaz de Bose dont on a gelé les fluctuations de densité.

3-5 Le modèle xy et son implémentation avec des atomes

L'hamiltonien effectif que nous avons étudié dans cette section, $\hat{H} \propto \int (\nabla\theta)^2$, possède une version discrète qui est un modèle très utilisé en physique statistique, le modèle xy [voir par exemple KARDAR (2007)]. On considère un réseau régulier et on dispose en chaque site j du réseau un vecteur unitaire S_j évoluant dans un espace fictif à deux dimensions (d'où le nom de modèle xy). Ce vecteur peut être paramétré par l'angle θ_j (défini modulo 2π) qu'il fait avec une direction de référence. Dans le problème 2D qui nous intéresse, le réseau régulier est lui-même de dimension 2; ce peut être un réseau carré comme sur la figure 8 ou un réseau triangulaire.

Dans la version la plus simple du modèle xy , on se limite à une interaction entre sites voisins que l'on écrit

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i \cdot S_j = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_j - \theta_i). \quad (93)$$

Le choix $J > 0$ conduit à un état fondamental où tous les θ_j sont égaux entre eux. Les excitations de basse énergie correspondent à des variations lentes des θ_j , de sorte qu'un développement limité du cosinus re-

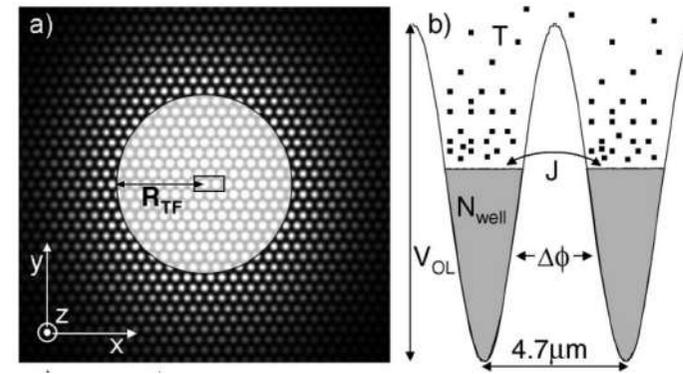


FIGURE 9. Réseau triangulaire de micro-condensats piégés aux nœuds d'un réseau optique, avec un couplage tunnel entre proches voisins. Chaque site contient environ 7000 atomes, ce qui assure que la phase d'un micro-condensat est bien définie. Cette expérience constitue une implémentation pratique du modèle xy . Figure extraite de SCHWEIKHARD, TUNG et al. (2007).

donne bien l'hamiltonien $\int (\nabla\theta)^2$ après passage à la limite continue. Le modèle xy conduit à un comportement similaire au modèle continu que nous avons étudié : à basse température, décroissance algébrique de la fonction de corrélation à un corps comme nous l'avons vu ci-dessus; au dessus d'une température critique, transition BKT vers un état complètement désordonné similaire à ce que nous verrons dans le prochain cours. L'intérêt de ce modèle sur réseau est d'une part de fournir de manière naturelle une coupure à haute énergie évitant les divergences ultra-violettes, et d'autre part de permettre l'utilisation de méthodes de résolution propres aux modèles périodiques comme les matrices de transfert.

Ce modèle xy a été réalisé expérimentalement avec un gaz d'atomes froids par SCHWEIKHARD, TUNG et al. (2007). Partant d'un condensat 3D de forme approximativement sphérique, les chercheurs de Boulder ont utilisé un réseau optique pour découper environ 200 tubes verticaux et formant un réseau triangulaire dans un plan horizontal (figure 9). Chaque tube contient environ 7000 atomes; ce nombre est suffisamment grand pour que chaque tube constitue un micro-condensat de phase bien définie, qui joue le rôle de la variable θ_j du modèle xy . Chaque tube est couplé

à ses six voisins par effet tunnel, réalisant ainsi l'équivalent de jonctions Josephson. L'élément de matrice tunnel joue quant à lui le rôle du couplage J de l'hamiltonien du modèle xy . Nous n'irons pas plus loin pour l'instant dans la description de cette expérience; notons simplement qu'elle a permis, à l'instar de celles menées sur des gaz continus, d'observer le mécanisme BKT en détectant au dessus d'une valeur critique du paramètre J/T la prolifération de vortex lorsque tous les micro-condensats sont fusionnés entre eux.

4 L'approche de Bogoliubov

Nous allons maintenant chercher à aller au-delà de l'approche "densité gelée" développée au paragraphe précédent, pour acquérir une vision plus complète de la dynamique du fluide dans le régime de basse température. Nous allons pour cela utiliser le formalisme de Bogoliubov, dans une version adaptée⁷ au cas des quasi-condensats (MORA & CASTIN 2003; CASTIN 2004). L'idée ne sera pas d'écrire comme à 3D $\psi(\mathbf{r}) = \psi_0 + \delta\psi(\mathbf{r})$ avec $\psi_0 = \sqrt{\rho_0} e^{i\theta_0}$, où $\delta\psi$ serait en tout point petit devant ψ_0 . En effet, il n'y a pas de phase homogène θ_0 dans notre fluide 2D. Notre approche sera de faire un développement en puissance des fluctuations de densité, en laissant à la phase la possibilité de varier de manière importante sur l'étendue de l'échantillon (tout en restant développable en série de Fourier, ce qui exclut comme précédemment les vortex).

4-1 Équations du mouvement « amplitude – phase »

Partant de l'expression $\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\rho(\mathbf{r}, t)} e^{i\theta(\mathbf{r}, t)}$, nous allons supposer que la phase θ varie lentement dans l'espace et peut être développée en série de Fourier, comme au paragraphe précédent :

$$\theta(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}}(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \quad (94)$$

7. Le programme de MORA & CASTIN (2003) est en fait plus ambitieux que le nôtre puisqu'il s'agit de donner un sens aux opérateurs densité et phase dans le cadre de la théorie des champs quantiques. Ceci est possible de manière approchée en discrétisant l'espace et en s'assurant que chaque site du réseau contient en moyenne un grand nombre de particules.

Nous supposerons également que les fluctuations relatives de densité sont faibles. Comme indiqué plus haut [cf. (68)], cette hypothèse est valable pourvu que la densité dans l'espace des phases soit suffisamment grande. La densité peut donc s'écrire

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 (1 + 2\eta(\mathbf{r}, t)) \quad \text{avec} \quad \rho_0 = \frac{N}{L^2} \quad \text{et} \quad \eta \ll 1. \quad (95)$$

La fonction η peut également être décomposée en série de Fourier :

$$\eta(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{q}} d_{\mathbf{q}}(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}. \quad (96)$$

Les fonctions θ et η sont réelles, ce qui implique $c_{\mathbf{q}}^* = c_{-\mathbf{q}}$ et $d_{\mathbf{q}}^* = d_{-\mathbf{q}}$. La conservation de la norme entraîne

$$\int \eta d^3r = 0 \quad \rightarrow \quad d_0 = 0. \quad (97)$$

La fonctionnelle d'énergie (33)

$$\begin{aligned} E[\psi] &= \frac{\hbar^2}{2m} \int (|\nabla\psi|^2 + \tilde{g}|\psi|^4) d^2r \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \int \left(\rho(\nabla\theta)^2 + \frac{(\nabla\rho)^2}{4\rho} + \tilde{g}\rho^2 \right) d^2r \end{aligned} \quad (98)$$

s'écrit avec ce paramétrage :

$$\begin{aligned} E[\psi] &= \frac{\hbar^2}{2m} \tilde{g}\rho_0 N + \frac{\hbar^2}{2m} \rho_0 \int [(\nabla\theta)^2 + (\nabla\eta)^2 + 4\tilde{g}\rho_0 \eta^2(\mathbf{r})] d^2r, \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \tilde{g}\rho_0 N + \frac{\hbar^2}{2m} N \sum_{\mathbf{q}} [q^2 |c_{\mathbf{q}}|^2 + (q^2 + 4\tilde{g}\rho_0) |d_{\mathbf{q}}|^2]. \end{aligned} \quad (99)$$

L'équation de Gross-Pitaevskii dépendante du temps (39) conduit alors aux deux équations couplées⁸

$$\left(\frac{2m}{\hbar} \right) \frac{\partial\theta}{\partial t} = \nabla^2\eta - 4\tilde{g}\rho_0 \eta, \quad (100)$$

$$\left(\frac{2m}{\hbar} \right) \frac{\partial\eta}{\partial t} = -\nabla^2\theta. \quad (101)$$

8. Avec les variables adoptées ici, le lagrangien dynamique peut être pris égal à $\mathcal{L}_{\text{dyn}}[\psi(\mathbf{r})] = -2\hbar\rho_0 \dot{\theta} \eta$.

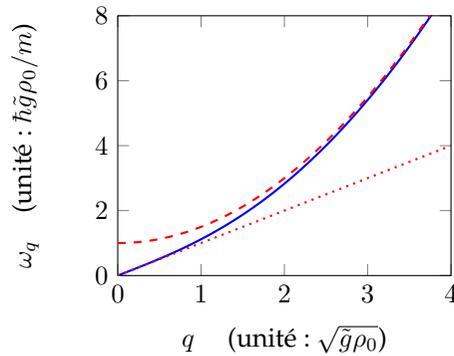


FIGURE 10. Relation de dispersion de Bogoliubov (104). La droite pointillée correspond à l'approximation linéaire (106) aux petites valeurs de q déterminant le régime de phonons. La courbe parabolique en tirets correspond aux grandes valeurs de q où l'on retrouve le régime de particule libre (108).

L'évolution des coefficients c_q et d_q déduite de (100–101) s'écrit :

$$\begin{aligned} \left(\frac{2m}{\hbar}\right) \dot{c}_q &= -(q^2 + 4\tilde{g}\rho_0) d_q, \\ \left(\frac{2m}{\hbar}\right) \dot{d}_q &= q^2 c_q. \end{aligned} \quad (102)$$

Pour $q = 0$, on obtient $\dot{c}_0 = 0$, ce qui traduit le fait que la phase globale du gaz n'évolue pas puisque l'énergie du fondamental de (99) vaut 0.

En éliminant une des deux variables (c_q ou d_q) au profit de l'autre, on obtient l'évolution

$$\ddot{c}_q + \omega_q^2 c_q = 0, \quad \ddot{d}_q + \omega_q^2 d_q = 0, \quad (103)$$

avec la fréquence ω_q donnée par

$$\omega_q = \frac{\hbar}{2m} [q^2 (q^2 + 4\tilde{g}\rho_0)]^{1/2}, \quad (104)$$

ce qui n'est autre que le spectre bien connu de Bogoliubov dont nous allons rappeler ci-dessous quelques propriétés.

4-2 Spectre de Bogoliubov et ondes sonores

La formule de Bogoliubov fournit la relation de dispersion reliant le vecteur d'onde q d'une perturbation et sa fréquence ω_q . Compte tenu de la forme (104), il est naturel de séparer deux régimes (figure 10) :

— La partie de petit vecteur d'onde

$$q^2 \ll 4\tilde{g}\rho_0 \quad (105)$$

pour laquelle on trouve un spectre d'ondes sonores (phonons) :

$$\omega_q = c_0 q \quad \text{avec} \quad c_0 = \frac{\hbar}{m} \sqrt{\tilde{g}\rho_0}. \quad (106)$$

— La partie de grands vecteurs d'onde :

$$q^2 \gg 4\tilde{g}\rho_0 \quad (107)$$

pour laquelle on retrouve un spectre de particule libre, décalé de l'énergie d'interaction ϵ_{int}

$$\hbar\omega_q = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} + \epsilon_{\text{int}} \quad \text{avec} \quad \epsilon_{\text{int}} = \frac{\hbar^2}{m} \tilde{g}\rho_0. \quad (108)$$

La forme du spectre d'excitation de Bogoliubov, démarré linéairement à bas vecteur d'onde, est souvent présenté comme une condition suffisante de superfluidité. En effet, en utilisant le critère de Landau, on en déduit qu'une impureté bougeant suffisamment lentement ne peut pas exciter le fluide et n'est donc pas freinée. Toutefois, la définition plus complète d'un état superfluide passe par la notion de métastabilité de courants et de rigidité en phase [voir par exemple MA (1985) ainsi que le cours 2015-16]. Nous avons déjà mentionné que le gaz de Bose décrit par la fonctionnelle d'énergie (71) présente cette rigidité et est donc bien superfluide. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point et le généraliser dans le prochain cours.

Mise en évidence d'ondes sonores à 2D. L'étude de la propagation d'ondes sonores dans des gaz atomiques dégénérés a fait l'objet de nombreuses études. Ces dernières sont souvent menées dans des pièges harmoniques, de sorte que la densité varie à la fois dans le plan d'onde et le

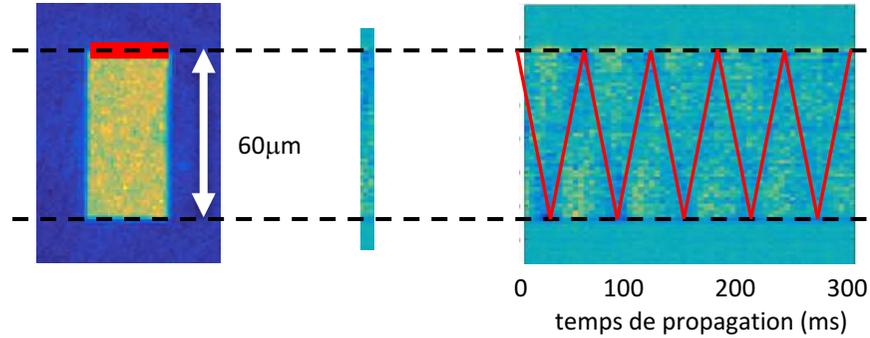


FIGURE 11. Mise en évidence d'ondes sonores dans un gaz 2D d'atomes de rubidium. Le gaz est confiné dans une boîte rectangulaire et l'onde sonore est générée en modulant brièvement la densité atomique sur un côté de la boîte.

long de la direction de propagation. Cette inhomogénéité peut bien sûr être prise en compte dans la description théorique, mais complique malgré tout la comparaison avec les résultats expérimentaux. Récemment, l'équipe du LKB-Collège de France⁹ a réalisé une expérience visant à mesurer la propagation d'ondes sonores dans un gaz 2D uniforme. Ce gaz est piégé dans une "boîte" rectangulaire dont les parois sont formées par de la lumière. La densité atomique sur un côté du rectangle est modulée temporellement à l'aide d'un faisceau lumineux annexe, ce qui génère un paquet d'ondes qui se propage dans le gaz pendant une assez longue durée (plusieurs dizaines de millisecondes) en rebondissant sur les parois de la boîte. On peut ainsi effectuer une mesure précise de la vitesse du son dans ce gaz. L'expérience représentée sur la figure 11 conduit à $c_0 = 2.0 \text{ mm/s}$, en bon accord avec la prédiction faite plus haut ($\tilde{g} = 0.15$, $\rho_0 = 50 \mu\text{m}^{-2}$).

L'étude que nous venons de faire est valable à basse température, où l'on s'intéresse au mouvement de l'ensemble du fluide. À plus haute température, la situation est plus complexe car il faut considérer les mouvements indépendants de la composante superfluide et de la composante normale. Le formalisme général est présenté pour le cas bi-dimensionnel par OZAWA & STRINGARI (2014).

9. Cette expérience a été faite par Monika Aidelsburger, Jérôme Beugnon, Sylvain Nascimbene, Raphaël Saint-Jalm et Jean-Loup Ville.

4-3 Fluctuations de phase et fluctuations de densité

Considérons un mode de Bogoliubov caractérisé par les amplitudes \bar{c}_q et \bar{d}_q des modulations de phase et de densité. On obtient à partir du système (102) :

$$\frac{\bar{d}_q}{\bar{c}_q} = \frac{q}{\sqrt{q^2 + 4\tilde{g}\rho_0}}. \quad (109)$$

Pour q petit, plus précisément quand $q^2 \ll 4\tilde{g}\rho_0$ c'est-à-dire $q \ll \frac{1}{\xi}$, on trouve $\bar{d}_q \ll \bar{c}_q$, ce qui signifie que les modes consistent essentiellement en une oscillation de la phase, la densité n'étant presque pas affectée. Ceci valide *a posteriori* l'approche suivie en § 3, où nous nous étions concentrés sur les fluctuations de phase pour trouver le comportement du fluide à grande échelle spatiale, c'est-à-dire à petit vecteur d'onde.

Nous avons donc déjà caractérisé l'effet essentiel des fluctuations de phase, à savoir l'émergence d'un quasi-ordre à longue portée. Intéressons-nous maintenant aux fluctuations de densité à l'équilibre thermique, ne serait-ce que pour vérifier que l'hypothèse de linéarisation de ces fluctuations, via la fonction $\eta(\mathbf{r})$, est bien cohérente avec le résultat final.

Partons de :

$$\frac{\Delta\rho^2}{\rho_0^2} = \frac{\langle\rho^2(0)\rangle}{\rho_0^2} - 1 = 4 \sum_q \langle |d_q|^2 \rangle \quad (110)$$

Pour évaluer cette quantité, nous allons utiliser le théorème d'équipartition de l'énergie pour le champ classique $\eta(\mathbf{r})$. Comme nous l'avons expliqué plus haut, pour éviter des divergences de type "corps noir" sans passer par une quantification de ce champ, nous attribuons une énergie moyenne $k_B T/2$ à tous les modes d'énergie $\hbar\omega_q$ inférieure à $k_B T$, et nous supposons que les modes d'énergie supérieure sont non peuplés. Ceci conduit à :

$$\frac{\hbar^2}{m} N (q^2 + 4\tilde{g}\rho_0) \langle |d_q|^2 \rangle = \begin{cases} k_B T & \text{if } \hbar\omega_q < k_B T, \\ 0 & \text{if } \hbar\omega_q > k_B T. \end{cases} \quad (111)$$

Le calcul des fluctuations de densité peut alors être fait explicitement à partir de (110) :

$$\frac{\Delta\rho^2}{\rho_0^2} = \frac{2}{\pi\rho_0\lambda_T^2} \int \frac{1}{q^2 + 4\tilde{g}\rho_0} d^2q \approx \frac{2}{\rho_0\lambda_T^2} \log\left(\frac{k_B T}{E_{\text{int}}/N}\right) \quad (112)$$

Comme nous l'avons écrit plus haut, l'énergie thermique $k_B T$ est généralement supérieure à l'énergie d'interaction par particule E_{int}/N . Le rapport entre ces deux quantités peut atteindre en pratique une valeur de l'ordre de quelques dizaines, de sorte que le logarithme est lui-même compris entre 1 et 3. Le dénominateur de l'expression ci-dessus est quant à lui égal à la densité dans l'espace des phases, qui doit valoir au moins la dizaine pour que la transition superfluide soit atteinte (cf. chapitre 4) ; il peut monter en pratique jusqu'à la centaine pour des échantillons froids et denses. On en déduit que $\Delta\rho \ll \rho_0$ pour ces échantillons froids, ce qui justifie l'approximation des faibles fluctuations de densité et leur linéarisation utilisée dans cette section.

Références

- BLOCH, I., J. DALIBARD & W. ZWERGER (2008), « Many-body physics with ultracold gases », in *Rev. Mod. Phys.* 80.3, 885, p. 885.
- BRAMWELL, S. T. & P. C. W. HOLDSWORTH (1994), « Magnetization : A characteristic of the Kosterlitz–Thouless–Berezinskii transition », in *Phys. Rev. B* 49.13, p. 8811–8814.
- CASTIN, Y. (2004), « Simple theoretical tools for low dimension Bose gases », in *Journal de Physique IV, France* 116, p. 87.
- COHEN-TANNOUJDI, Claude & Cécile ROBILLIARD (2001), « Wave functions, relative phase and interference for atomic Bose–Einstein condensates », in *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IV-Physics* 2.3, p. 445–477.
- CONNAUGHTON, Colm, Christophe JOSSE RAND, Antonio PICOZZI, Yves POMEAU & Sergio RICA (2005), « Condensation of Classical Nonlinear Waves », in *Phys. Rev. Lett.* 95 (26), p. 263901.
- GARDINER, Crispin & Peter ZOLLER (2004), *Quantum noise : a handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics*, t. 56, Springer Science & Business Media.
- GIORGETTI, L., I. CARUSOTTO & Y. CASTIN (2007), « Semiclassical field method for the equilibrium Bose gas and application to thermal vortices in two dimensions », in *Phys. Rev. A* 76.1, 013613, p. 013613.
- KAGAN, Y., B. V. SVISTUNOV & G. V. SHLYAPNIKOV (1987), « Influence on inelastic processes of the phase transition in a weakly collisional two-dimensional Bose gas », in *Sov. Phys. JETP* 66, p. 314.
- KARDAR, Mehran (2007), *Statistical physics of fields*, Cambridge University Press.
- KLAERS, Jan, Julian SCHMITT, Frank VEWINGER & Martin WEITZ (2010), « Bose-Einstein condensation of photons in an optical microcavity », in *Nature* 468.7323, p. 545–548.
- MA, Shang-Keng (1985), *Statistical Mechanics*, World Scientific.
- MORA, C. & Y. CASTIN (2003), « Extension of Bogoliubov theory to quasi-condensates », in *Phys. Rev. A* 67, p. 053615.
- OZAWA, Tomoki & Sandro STRINGARI (2014), « Discontinuities in the First and Second Sound Velocities at the Berezinskii-Kosterlitz-Thouless Transition », in *Phys. Rev. Lett.* 112 (2), p. 025302.
- PETROV, D. S., D. M. GANGARDT & G. V. SHLYAPNIKOV (2004), « Low-dimensional trapped gases », in *J. Phys. IV* 116, p. 5–44.
- PICOZZI, Antonio, Josselin GARNIER, Tobias HANSSON, Pierre SURET, Stephane RANDOUX, Guy MILLOT & Demetrios N CHRISTODOULIDES (2014), « Optical wave turbulence : Towards a unified nonequilibrium thermodynamic formulation of statistical nonlinear optics », in *Physics Reports* 542.1, p. 1–132.
- POPOV, V. N. (1987), *Functional Integrals and Collective Modes*, Cambridge : Cambridge University Press.
- PROKOF'EV, N. V. & B. V. SVISTUNOV (2002), « Two-dimensional weakly interacting Bose gas in the fluctuation region », in *Phys. Rev. A* 66, p. 043608.
- SCHWEIKHARD, V., S. TUNG & E. A. CORNELL (2007), « Vortex Proliferation in the Berezinskii–Kosterlitz–Thouless Regime on a Two-Dimensional Lattice of Bose–Einstein Condensates », in *Phys. Rev. Lett.* 99.3, 030401, p. 030401.
- SUN, Can, Shu JIA, Christopher BARSÍ, Sergio RICA, Antonio PICOZZI & Jason W FLEISCHER (2012), « Observation of the kinetic condensation of classical waves », in *Nature Physics* 8.6, p. 470–474.
- SVISTUNOV, Boris V, Egor S BABAIEV & Nikolay V PROKOF'EV (2015), *Superfluid states of matter*, Crc Press.