Fluides quantiques de basse dimension et transition de Kosterlitz-Thouless

Jean Dalibard

Chaire Atomes et rayonnement

Année 2016-17



Un monde à deux dimensions

De la sociologie...

... à la physique





R. Peierls 1907-95

Que deviendraient les objets habituels de la physique, cristaux, aimants, si nous vivions dans un monde à deux dimensions?

Objets physiques 2D « du quotidien »



LANL

Puits quantiques en électronique, diodes laser, photodétecteurs, composants électroniques à bas bruit

Supraconducteurs à haute température critique



wikipedia

Graphène



Le résultat de Peierls

En basse dimension, les fluctuations thermiques ($T \neq 0$) et quantiques (T = 0) jouent un rôle accru, car les contraintes imposées par les positions des voisins sont moins importantes

Ces fluctuations empêchent l'apparition d'un ordre à longue portée similaire à celui rencontré à trois dimensions, comme l'ordre cristallin.

Mermin - Wagner - Hohenberg (hypothèses précisées dans la suite du cours)

Ce résultat entraîne-t-il l'absence complète de transition de phase à deux dimensions pour les systèmes avec une symétrie continue ?

L'ordre topologique

1973, Kosterlitz & Thouless :

Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems

Prix Nobel de physique 2016 pour « *les découvertes théoriques des transitions de phase topologiques et des phases topologiques de la matière* »



J.M. Kosterlitz



D.J. Thouless



F.D. Haldane

Pourquoi la topologie joue-t-elle un rôle ?

Topologie : étude mathématique des formes, visant à établir une équivalence entre des objets qui peuvent se transformer l'un en l'autre par une déformation continue

Nombre g d'anses ou de poignées d'un objet :

« genre » d'une surface fermée dans l'espace 3D



Un changement de classe ne peut se faire qu'en passant par une singularité : protection topologique

Le lien entre topologie et géométrie

En géométrie, on peut définir en tout point d'une surface fermée régulière et orientable la courbure $\Omega(r)$, avec par exemple pour une sphère $\Omega=1/R^2$



Le théorème de Gauss - Bonnet :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \Omega(\boldsymbol{r}) \, \mathrm{d}^2 r = 1 - g$$



Figure extraite de la page web de Scientific American et réalisée par Keenan Crane (Columbia U.)

La protection topologique en physique

Si une quantité physique peut s'exprimer comme

$$\int_{\Lambda} \Omega(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda$$

où Λ est une ligne ou une surface fermée, cette quantité peut être :

- quantifiée (par exemple, la conductivité de l'effet Hall quantique)
- protégée topologiquement (inchangée par une perturbation ou du désordre)

Important à la fois pour l'aspect conceptuel et l'aspect pratique

Réalisation de standards « macroscopiques » invariants d'un laboratoire à l'autre

Le gaz de Bose à deux dimensions

Fluide de particules identiques de masse *m* obéissant à la statistique de Bose-Einstein

On suppose que l'on peut décrire ce fluide par un champ « classique » complexe (onde de matière) :

$$m{r}=(x,y)$$
 $\psi(m{r})=\sqrt{
ho(m{r})}~{
m e}^{{
m i} heta(m{r})}$ $ho(m{r})$: densité spatiale du fluide

La phase $\theta(\boldsymbol{r})$ est définie modulo 2π en tout point où la densité est non nulle

Invariant topologique sur un contour fermé du plan xy sur lequel ho(r) ne s'annule pas

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\nabla} \theta(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d} \boldsymbol{r} = n \ 2\pi \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Champ de vitesses du fluide et vortex

Fluide de Bose décrit par l'onde $\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})} e^{i\theta(\mathbf{r})}$

Le champ de vitesses du fluide se déduit de $\psi({m r})$: ${m v}({m r}) = {\hbar\over m}\,{m
abla} \theta({m r})$



La circulation de la vitesse sur tout contour fermé sur lequel $\rho(\mathbf{r}) \neq 0$ est quantifiée

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = n \, \frac{2\pi\hbar}{m} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Un vortex (tourbillon) est associé à un zéro de $\psi(m{r})$, par exemple



$$\psi(\mathbf{r}) = (x \pm iy) F(x^2 + y^2) = r F(r^2) e^{\pm i\varphi}$$
$$\longrightarrow \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \pm \frac{2\pi\hbar}{m}$$

Protection topologique d'un vortex

Représentation graphique de $|\psi(\boldsymbol{r})|$



avec un vortex



La transition de Kosterlitz - Thouless

1971: Vadim Berezinskii (1935-1980) 1973: J. Michael Kosterlitz et David J. Thouless

mécanisme BKT

Transition de phase liée à l'appariement des défauts topologiques (vortex):

• : vortex $+2\pi$

• : vortex -2π



Basse température : pas vraiment un ordre usuel, mais un ordre topologique



Haute température : état désordonné

Les buts de cette série de cours

• Mettre en place les outils pour comprendre le résultat de Peierls

• Analyser le mécanisme BKT sur le cas du gaz de Bose et des vortex

- Discuter plusieurs exemples de systèmes bidimensionnels
- Liquides colloïdaux
- photons dans des cavités électromagnétiques
- films d'hélium liquide
- gaz atomiques (bosons ou fermions)
- particules hybrides lumière-matière (polaritons de cavité)



Dillmann, Maret & Keim

Documents en ligne

Notes de cours et copies des diapositives :

http://www.phys.ens.fr/~dalibard/2017_CdF.html

Pour recevoir les annonces liées au cours, envoyer un courrier électronique à : <u>listes-diffusion.cdf@college-de-france.fr</u>

avec pour sujet : subscribe chaire-ar.ipcdf

Séminaires

3 mai 2017 : Yves Couder, laboratoire Matière et Systèmes Complexes, Université Paris Diderot : *Une dualité onde-particule à échelle macroscopique : le rôle d'une mémoire*

10 mai 2017 : Klaus Moelmer, Aarhus University, Danemark : A relaxed approach to quantum state engineering

17 mai 2017 : Alexia Auffeves, Institut Néel – CNRS, Grenoble : *Contexts, systems, modalities: A physically realist framework for quantum mechanics*

24 mai 2017 : Thierry Giamarchi, Université de Genève, Suisse : *Berezinskii-Kosterlitz-Thouless transition and Sine-Gordon theory: from superconductors to cold atomic gases*

31 mai 2017 : Tilman Pfau, Université de Stuttgart, Allemagne : *Dipolar quantum gases and liquids*

7 juin 2017 : Isabelle Bouchoule, Laboratoire Charles Fabry, Palaiseau : *Physics of onedimensional Bose fluids: Using ultra-cold gases as quantum simulators*

Cours 1

Peierls et l'ordre cristallin en basse dimension



L'argument de Peierls à une dimension



Une version simple : l'empilement de défauts

Température non nulle :

Fixons la position x_0 de l'atome j = 0. La position de l'atome j = 1 peut fluctuer :

$$x_1 = x_0 + a + \delta_1$$
 $\langle \delta_1 \rangle = 0$ $\langle \delta_1^2 \rangle \sim \frac{k_{\rm B}T}{\kappa}$

L'empilement de défauts (suite)

$$\Rightarrow x_j = x_0 + ja + \Delta_j \qquad \Delta_j = \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_j$$

Somme de variables indépendantes : $\langle \Delta_j^2 \rangle \sim \frac{k_{\rm B}T}{\kappa} j$.

Si $\langle \Delta_j^2 \rangle \gtrsim a^2$, c'est-à-dire si $j \gtrsim \frac{\kappa a^2}{k_{\rm B}T}$, on a perdu toute information sur la position de l'atome j par rapport à la maille du cristal : pas d'ordre à longue portée

Le cristal harmonique classique 1D

Conditions aux limites périodiques



Energie du système : $E = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} m \dot{u}_{j}^{2} + \frac{\kappa}{2} (u_{j+1} - u_{j})^{2}$

Hypothèse : $|u_{j+1} - u_j| \ll a$ mais pas nécessairement $|u_j| \ll a$

Equations du mouvement : $m \ddot{u}_j = \kappa (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1})$

Solutions des équations du mouvement

Passage dans l'espace de Fourier :
$$\hat{u}_q = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{-i qX_j} u_j$$
 $X_j = ja$
nombre d'onde q : $q = -\frac{\pi}{a}, \dots, -\frac{2\pi}{Na}, 0, \frac{2\pi}{Na}, \dots, +\frac{\pi}{a}$

N équations indépendantes pour chaque nombre d'onde q :

$$\ddot{\hat{u}}_q + \omega_q^2 \hat{u}_q = 0$$
 avec $\omega_q = 2\sqrt{\frac{\kappa}{m}} |\sin \frac{qa}{2}|$

Pour les petits nombres d'onde, $q \ll \pi/a$, on a la relation de dispersion linéaire :

$$\omega_q = c |q|$$
 avec $c = a \sqrt{rac{\kappa}{m}}$

Ondes sonores (phonons)

L'équilibre thermodynamique du système 1D

Retour dans l'espace des positions : quelle est la corrélation entre les déplacements de deux atomes séparés de *j* sites ?

$$u_j - u_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q \left(e^{iqX_j} - 1 \right) \hat{u}_q \qquad \qquad X_j = ja$$

Moyenne prise à l'équilibre thermique : $\langle \hat{u}_q \hat{u}_{q'}^* \rangle = 0 \text{ si } q \neq q'$

$$\frac{1}{2}m\omega_q^2\langle |\hat{u}_q|^2\rangle = \frac{1}{2}k_{\rm B}T \qquad \longrightarrow \qquad \langle |u_q|^2\rangle = \frac{k_{\rm B}T}{m\omega_q^2}$$

$$\rightarrow \langle u_j - u_0 \rangle = 0$$

$$\rightarrow \langle (u_j - u_0)^2 \rangle = \frac{k_{\rm B}T}{m} \frac{4}{N} \sum_q \frac{\sin^2(qX_j/2)}{\omega_q^2}$$
 à calculer...

Estimation de
$$\langle (u_j - u_0)^2 \rangle$$

Passage d'une somme discrète sur q à une intégrale et utilisation de $\;\omega_qpprox c\;|q|$

$$\langle (u_j - u_0)^2 \rangle \approx \frac{4}{\pi} \frac{k_{\rm B}T}{\kappa a} \int_0^{\pi/a} \frac{\sin^2(qX_j/2)}{q^2} \,\mathrm{d}q$$

On coupe l'intégrale en deux morceaux sur lesquels on fait des approx. différentes :

• Modes de grand nombre d'onde (i.e., courte longueur d'onde) : $q > \pi/X_j$



• Modes de petit nombre d'onde (i.e., grande longueur d'onde) : $q < \pi/X_j$



 $\sin^2(qX_j/2) \approx (qX_j/2)^2$

Estimation de
$$\langle (u_j - u_0)^2 \rangle$$
 (suite)

Contribution des deux types de modes

Modes de grand nombre d'onde :
$$\langle (u_j - u_0)^2 \rangle \approx \frac{4}{\pi} \frac{k_{\rm B}T}{\kappa a} \int_{\pi/X_j}^{\pi/a} \frac{1}{2q^2} \, \mathrm{d}q$$

 $\sim \frac{k_{\rm B}T}{\kappa a} X_j$

Modes de petit nombre d'onde : $\langle (u_j - u_0)^2 \rangle \approx \frac{4}{\pi} \frac{k_{\rm B}T}{\kappa a} \int_0^{\pi/X_j} \frac{(qX_j/2)^2}{q^2} \, \mathrm{d}q$ $\sim \frac{k_{\rm B}T}{\kappa a} X_j$

Les deux morceaux sont similaires et redonnent le résultat trouvé par l'argument fondé sur l'empilement de défauts. La contribution essentielle vient des modes :

 $q \sim \frac{\pi}{X_j}$ responsables de la perte d'ordre à longue portée

2.

Cristaux à deux ou à trois dimensions

Ecarts à l'équilibre dans un réseau bi-dimensionnel



$$\boldsymbol{j} \equiv (j_x, j_y)$$

Analyse similaire au cas 1D, passant par la recherche des modes propres caractérisés par un vecteur d'onde q

$$\boldsymbol{q} \equiv (q_x, q_y)$$

L'étude détaillée est compliquée par le fait que les phonons peuvent avoir deux états de polarisations : parallèle à q ou perpendiculaire à q

Nous allons nous contenter ici de lois d'échelle

Ecart à l'équilibre à deux dimensions



Un traitement similaire au cas 1D conduit à :

$$\langle (\boldsymbol{u_j} - \boldsymbol{u_0})^2 \rangle \sim \frac{k_{\rm B}T}{\kappa} \frac{2}{\pi^2} \int_{\rm ZB} \frac{\sin^2(\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{R_j}/2)}{q^2} \, \mathrm{d}^2 q.$$

où le vecteur $\boldsymbol{q} = (q_x, q_y)$ évolue dans la zone de Brillouin

$$-\frac{\pi}{a} < q_{x,y} < +\frac{\pi}{a}$$

On coupe là aussi l'intégrale en deux morceaux :

• Grands vecteurs d'onde : $q > \pi/R_j$

$$\sim \frac{1}{\pi^2} \frac{k_{\rm B}T}{\kappa} \int_{\pi/R_{j}}^{\pi/a} \frac{1}{q^2} 2\pi q \, \mathrm{d}q \, \left(\sim \frac{2}{\pi} \frac{k_{\rm B}T}{\kappa} \log(R_{j}/a) \right) \, \mathrm{dominant}$$

• Petits vecteurs d'onde : $q < \pi/R_j$

$$\sim \frac{1}{2\pi^2} \frac{k_{\rm B}T}{\kappa} R_j^2 \int_0^{\pi/R_j} \pi q \, \mathrm{d}q \quad \sim \frac{\pi}{4} \frac{k_{\rm B}T}{\kappa}$$
²⁶

Absence d'ordre à longue portée à 2D



Bilan du calcul précédent :
$$\langle (\boldsymbol{u_j} - \boldsymbol{u_0})^2 \rangle \sim \frac{k_{\rm B}T}{\kappa} \log(R_j/a)$$

avec une contribution dominante des vecteurs d'onde $q \sim \pi/R_j$ comme à 1D.



L'ordre cristallin à longue portée n'existe pas à 2D:

$$\langle (\boldsymbol{u_j} - \boldsymbol{u}_0)^2 \rangle
ightarrow \infty$$
 quand $R_j
ightarrow \infty$

mais la divergence n'est que logarithmique alors qu'elle était linéaire à 1D.

On qualifie souvent cette situation de « quasi-ordre à longue portée »

Et le cas tri-dimensionnel?



image I. Bloch

Le même type d'analyse peut être mené, conduisant à une forme similaire pour les écarts à l'équilibre :

$$\langle (\boldsymbol{u_j} - \boldsymbol{u_0})^2 \rangle \sim \frac{ak_{\rm B}T}{\kappa} \int_{\rm ZB} \frac{\sin^2(\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{R_j}/2)}{q^2} \, \mathrm{d}^3 q$$

 $d^3q = q^2 dq d^2\Omega \rightarrow \text{plus de divergence en } q = 0$

On arrive alors à $\langle ({m u}_{m j}-{m u}_0)^2
angle \sim {k_{\rm B}T\over \kappa}$: résultat indépendant de R_j

Si $\frac{k_{\rm B}T}{\kappa} \ll a^2$, l'ordre cristallin peut exister avec une portée infinie.



Le théorème de Mermin - Wagner - Hohenberg

Pour un système de dimension inférieure ou égale à 2 et des interactions à courte portée, il ne peut pas y avoir de brisure spontanée d'une symétrie continue à température non nulle

- Si la portée est infinie, la théorie de champ moyen s'applique et les transitions de phase "standard" prévues par cette théorie peuvent se produire.
- Symétrie continue (translation, magnétisme de Heisenberg, condensation de Bose-Einstein). Le théorème ne s'applique pas tel quel aux symétries discrètes (Ising).

• A température nulle, le gaz de Bose 2D quantique en interaction est condensé

Fluides et cristaux bi-dimensionnels au laboratoire



Expériences faites à Constance dans le groupe de Georg Maret et Peter Keim sur des systèmes colloïdaux

Le montage expérimental de Constance

- Goutte d'eau (diamètre 8 mm) suspendue par tension superficielle
- Contrôle de l'horizontalité au micro radian près
- 10⁵ billes de polystyrène de diamètre 4.5 μm (densité 1.5) à l'interface eau-air
- Dopage des billes avec des nanoparticules d'oxyde de fer + champ magnétique vertical : force de répulsion dipôle-dipôle entre les billes



Le montage expérimental de Constance (suite)



On sélectionne une fenêtre de 1 mm x 1mm : environ 4000 billes, avec une distance moyenne entre billes de 15 µm

On enregistre la position de chaque bille avec une précision submicrométrique chaque seconde

Les constantes de temps pour atteindre l'équilibre peuvent dépasser un mois !

Paramètre de contrôle de l'expérience :
$$\Gamma = \frac{E_{\text{mag}}}{k_{\text{B}}T}$$

Les différentes phases pour l'assemblée de particules

KTHNY : Kosterlitz, Thouless, Halperin, Nelson, Young (1973-1979)



Scénario validé par les expériences et les simulations numériques

- T = 0 : cristal triangulaire parfait (si on néglige les fluctuation quantiques)
- Température très basse : fluctuations logarithmiques à la Peierls

Quasi-ordre translationnel : $\langle (\boldsymbol{u_j} - \boldsymbol{u_0})^2 \rangle \propto \log(R_j/a)$

Défauts locaux sans importance sur le comportement à longue portée

> 5 7 5 5 7



Véritable ordre orientationnel : $\langle (heta_{m j} - heta_0)^2
angle$ ne tend pas vers 0 à l'infini

Les différentes phases pour l'assemblée de particules (2)

Première transition de phase à une température T_m telle que

$$\Gamma_m = \frac{E_{\text{mag}}}{k_{\text{B}}T_m} = 70.3$$

Apparition de « dislocations » : défauts de type 7-5 correspondant à l'ajout d'une demi-ligne d'atomes



- Détruit le quasi-ordre transactionnel à la Peierls
- Un quasi-ordre orientationnel subsiste

Phase hexatique

Les différentes phases pour l'assemblée de particules (3)

Deuxième transition de phase à une température T_i telle que

$$\Gamma_i = \frac{E_{\text{mag}}}{k_{\text{B}}T_i} = 67.3$$

Apparition de « disclinations » : défauts isolés de type 7 ou de type 5



Perte de l'ordre orientationnel : il ne subsiste aucun ordre (ou quasi-ordre) à longue portée

Et le graphène ?



Feuille d'atomes de carbone présentant un ordre cristallin à deux dimensions

Compatibilité avec le théorème de Mermin - Wagner - Hohenberg ?

• Compte tenu de la raideur des liens, la perte de l'ordre cristallin ne se manifeste que sur de très longues distances

Un échantillon de taille finie raisonnable peut présenter un ordre cristallin

 La surface est plissée et le couplage non-linéaire entre fluctuations de hauteur et déplacements parallèles à la surface induit une composante effective à longue portée



Fasolino et al, 2007
En résumé, pour l'état cristallin à 1D et 2D ...

Résultat de Peierls généralisé par le théorème de Mermin-Wagner - Hohenberg:

A température non nulle, il n'y a pas d'ordre translationnel à longue portée en dimension réduite. La contribution des phonons (dominante à basse T) donne :

1D:
$$\langle (\boldsymbol{u_j} - \boldsymbol{u_0})^2 \rangle \sim \frac{k_{\rm B}T}{\kappa} \frac{R_j}{a}$$
 : décroissance rapide des corrélations
2D: $\langle (\boldsymbol{u_j} - \boldsymbol{u_0})^2 \rangle \sim \frac{k_{\rm B}T}{\kappa} \log(R_j/a)$: quasi-ordre

A plus haute température et à 2D, dissociation de défauts locaux de type **7** $\frac{5}{5}$ **7**. Une fois dissociés, ces défauts détruisent complètement l'ordre translationnel

Le rôle des fluctuations quantiques, seules présentes à température nulle :

1D,
$$T = 0$$
: $\langle (\boldsymbol{u_j} - \boldsymbol{u_0})^2 \rangle \sim \frac{\hbar}{m\omega} \log(R_j/a)$ $\omega = \sqrt{\kappa/m}$

loi similaire aux fluctuations thermiques à 2D

Fluides quantiques de basse dimension et transition de Kosterlitz-Thouless

Gaz quantique en dimension deux : du cas idéal aux interactions binaires

Jean Dalibard

Chaire Atomes et rayonnement

Année 2016-17



La physique en basse dimension

Cours précédent : à température non nulle, il n'y a pas d'ordre cristallin (ordre à longue portée) en dimension 1 ou 2



$$\langle (\boldsymbol{u_j} - \boldsymbol{u}_0)^2 \rangle \rightarrow \infty$$
 quand $R_j \rightarrow \infty$

Peierls, Mermin-Wagner-Hohenberg

Thème général des cours qui vont suivre :

Y a-t-il un ordre ou un quasi-ordre dans un gaz de Bose, l'ordre étant caractérisé dans ce cas par une cohérence macroscopique ou un comportement superfluide ?

Transition BKT (Berezinskii - Kosterlitz - Thouless)

Les buts du cours d'aujourd'hui

Traiter le problème du gaz parfait en dimension 2

• Comment l'argument d'Einstein (1924) sur *le gaz parfait saturé* est-il modifié ?

Gaz uniforme vs. gaz confiné dans un piège harmonique

 Discuter une implémentation a priori inattendue : *Une assemblée de photons dans une cavité Bonn, groupe de Martin Weitz*

Un premier pas au delà du gaz parfait

 Comment traiter le problème d'une collision binaire en dimension 2 dans le cadre de la mécanique quantique ?



Klaers et al Nature **468** 545 (2010)

La statistique de Bose-Einstein

Particules dans une boîte de côté L

- Fonctions d'onde : $\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) \stackrel{\text{2D}}{=} \frac{1}{\sqrt{L^2}} e^{i \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r} / \hbar}$
- Impulsion quantifiée : $oldsymbol{p}=rac{2\pi\hbar}{L}oldsymbol{n}, \quad oldsymbol{n}=(n_x,n_y)\in\mathbb{Z}^2$

• Energie :
$$E_{p} = \frac{p^2}{2m}$$

Nombre moyen de particules dans un état d'impulsion p à l'équilibre thermique :

$$N_{p} = \frac{1}{e^{(E_{p}-\mu)/k_{B}T} - 1}$$
Température *T*, potentiel chimique μ

$$= \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{Z}}e^{E_{p}/k_{B}T} - 1}$$

$$Z = e^{\mu/k_{B}T} : \text{fugacité}$$

La densité d'états

Nous serons amenés à effectuer des moyennes ou des sommes sur les états p

$$\sum_{\boldsymbol{p}} F(\boldsymbol{p}) \qquad \longrightarrow \qquad \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^2 \int F(\boldsymbol{p}) \, \mathrm{d}p_x \, \mathrm{d}p_y$$

Si la quantité $F(\mathbf{p})$ ne dépend que $|\mathbf{p}|$, donc de l'énergie $E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$, on obtient

$$\sum_{\boldsymbol{p}} F(\boldsymbol{p}) \qquad \longrightarrow \qquad \int_{0}^{+\infty} F(E) \ D(E) \ \mathrm{d}E$$

D(E) : densité d'états autour de l'énergie E, provenant du décompte du nombre d'états dans la tranche d'énergie comprise entre E et E+dE

Dans une boîte à deux dimensions, D(E) est une quantité indépendante de E

Pour rappel, à trois dimensions : $D(E) \propto \sqrt{E}$

Pourquoi la densité d'états est constante dans une boîte 2D

$$\boldsymbol{p} = \frac{2\pi\hbar}{L}\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{n} = (n_x, n_y) \in \mathbb{Z}^2$$

Points uniformément répartis dans le plan (p_x, p_y)

$$E = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} \quad : \text{équation d'un cercle}$$



D(E) dE: nombre de points dans l'anneau compris entre $\sqrt{2mE}$ et $\sqrt{2m(E + dE)}$ Aire de cet anneau: $\pi \left(\sqrt{2m(E + dE)}\right)^2 - \pi \left(\sqrt{2mE}\right)^2 = 2m\pi dE$ \longrightarrow indépendante de E

On arrive ainsi à :
$$D(E) = 2m\pi \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^2 = \frac{mL^2}{2\pi\hbar^2}$$

La saturation des états excités d'Einstein

A température fixée, le nombre de particules que l'on peut placer dans les états excités est borné.

En effet, la loi de Bose-Einstein :

$$N_{p} = \frac{1}{e^{(E_{p} - \mu)/k_{\rm B}T} - 1}$$

n'a de sens que si $\ \mu < E_0 = 0$

$$N_{\rm exc}(T,\mu) = \sum_{p \neq 0} \frac{1}{e^{(E_p - \mu)/k_{\rm B}T} - 1}$$

$$<\sum_{\boldsymbol{p}\neq 0}\frac{1}{\mathrm{e}^{E_{\boldsymbol{p}}/k_{\mathrm{B}}T}-1}$$

correspondant à $\ \mu
ightarrow 0$

Passage à une intégrale :
$$N_{\text{exc}}(T,\mu) < \int_{0}^{+\infty} \frac{D(E)}{e^{E/k_{\text{B}}T} - 1} dE$$

Cette intégrale a-t-elle un sens, i.e., converge-t-elle en 0 et $+\infty$?



La saturation des états excités d'Einstein (suite)

$$N_{\rm exc}(T,\mu) < \int_0^{+\infty} \frac{D(E)}{{\rm e}^{E/k_{\rm B}T}-1} \, {\rm d}E$$

Convergence en $E = +\infty$? Pas de problème car D(E) varie doucement avec E



Convergence en E=0 ? Tout dépend du comportement de D(E) :

A 3D:
$$D(E) \propto \sqrt{E}$$
 et $\frac{1}{e^{E/k_{\rm B}T} - 1} \approx \frac{1}{\left(1 + \frac{E}{k_{\rm B}T}\right) - 1} = \frac{k_{\rm B}T}{E}$
 $\longrightarrow k_{\rm B}T \int_0 \frac{1}{\sqrt{E}} dE$ est convergente en $E=0$

La saturation des états excités d'Einstein à 3D

A 3D, l'intégrale qui majore la population des états excités est convergente Son calcul exact donne

$$N_{\rm exc}(T,\mu) < 2.612 \ \frac{L^3}{\lambda_T^3} \qquad \text{avec} \qquad \lambda_T = \frac{\hbar\sqrt{2\pi}}{\sqrt{mk_{\rm B}T}} \qquad 2.612 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

Une quantité sans dimension utile : la densité dans l'espace des phases



La non-saturation des états excités à 2D

$$N_{\rm exc}(T,\mu) < \int_0^{+\infty} \frac{D(E)}{{\rm e}^{E/k_{\rm B}T}-1} \,{\rm d}E$$

La densité d'états à deux dimensions est indépendante de E. L'intégrale ne converge donc pas en E = 0:

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{E/k_{\mathrm{B}}T}-1} \approx \frac{k_{\mathrm{B}}T}{E} \qquad \text{et} \quad k_{\mathrm{B}}T \int_{0}^{1} \frac{1}{E} \,\mathrm{d}E \quad \text{diverge}$$

A T fixée, on peut mettre un nombre arbitrairement élevé de particules dans les états excités quand $\mu \to 0$

Pas de saturation, ni de population macroscopique dans l'état fondamental

Distribution en impulsion du gaz de Bose à 2D

Les effets de statistique quantique sont toujours présents, même sans condensation : accumulation d'une majorité des particules dans la zone de petites impulsions

On varie la densité dans l'espace des phases d'une valeur << 1 à une valeur >>1



$$\lambda_T = \frac{\hbar\sqrt{2\pi}}{\sqrt{mk_{\rm B}T}}$$

$$\frac{p\lambda_T}{\hbar} = 1 \iff \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{4\pi}k_{\rm B}T$$

$$N(\mathbf{p}) = \frac{1}{e^{(p^2/2m - \mu)/k_{\rm B}T)} - 1} \approx \frac{k_{\rm B}T}{\frac{p^2}{2m} + |\mu|}$$

distribution Lorentzienne

Cohérence spatiale du gaz de Bose à 2D

La cohérence spatiale est caractérisée par la fonction de corrélation à un corps :

$$G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \langle \boldsymbol{r} | \hat{\rho}_1 | \boldsymbol{r}' \rangle$$

qui est la transformée de Fourier de la distribution en impulsion



Transformée de Fourier d'une lorentzienne en impulsion :

$$G_1(r,0) \propto \mathrm{e}^{-r/\ell}$$

avec la longueur de cohérence ℓ qui augmente très vite avec \mathcal{D}

2.

Le gaz de Bose dans un piège harmonique 2D

La densité d'état dans un piège harmonique 2D



Oscillateur isotrope de pulsation ω

$$E_{\boldsymbol{n}} = (n_x + n_y + 1)\hbar\omega$$

Densité d'états : $D(E) \propto E$

Cette densité d'états vient assurer la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{D(E)}{\mathrm{e}^{E/k_{\rm B}T} - 1} \,\mathrm{d}E$$

La population des états excités sature donc dans un piège harmonique 2D :

$$N_{\rm exc} < 1.64 \, \left(\frac{k_{\rm B}T}{\hbar\omega}\right)^2 \qquad \qquad 1.64... = \frac{\pi^2}{6}$$

On retrouve un condensat comme à 3D quand $\mu \rightarrow 0$ mais...

Ce condensat est « singulier »

Description du gaz piégé à l'approximation semi-classique $(k_{\rm B}T \gg \hbar\omega)$:

$$N(E) = \frac{1}{\frac{1}{Z} e^{E/k_{\rm B}T} - 1} \longrightarrow W(r, p) \propto \frac{1}{\frac{1}{Z} e^{\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2\right)/k_{\rm B}T} - 1}$$

Approximation valable tant qu'on ne cherche pas à en extraire des informations avec une résolution en position et en impulsion qui serait telle que $\Delta r \ \Delta p \lesssim \hbar$

Densité spatiale dans le piège à la limite $~\mu \rightarrow 0$, c'est-à-dire $~Z \rightarrow 1~$:

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \int W(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) \, \mathrm{d}^2 p \quad = -\frac{1}{\lambda_T^2} \, \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-m\omega^2 r^2/(2k_\mathrm{B}T)}\right)$$

c'est-à-dire au voisinage du fond du piège $r \rightarrow 0$:

$$ho(\mathbf{r}) \approx -rac{1}{\lambda_T^2} \, \ln(r^2) + {
m constante} \qquad {
m diverge \ en} \quad r=0$$

Ce condensat 2D est « singulier » (suite)

Même si la divergence $\rho(\mathbf{r}) \approx -\frac{1}{\lambda_T^2} \ln(r^2) + \text{constante}$ est compatible avec un nombre total de particules fini car $\int \rho(\mathbf{r}) d^2 r$ converge, elle sera problématique dès qu'il y aura des interactions répulsives entre atomes

A titre de comparaison, un gaz de Bose dans un piège harmonique 3D condense quand la densité centrale atteint la valeur :

$$r \to 0$$
 $\rho(\mathbf{r}) \to \frac{2.612}{\lambda_T^3}$

Ce « critère central » est alors équivalent au critère trouvé pour une boîte cubique

Il n'y avait pas de condensation dans une boîte à 2D, d'où le caractère singulier du cas piégé

3.

Un gaz 2D presque idéal : les photons en cavité

Des photons massifs et piégés qui condensent ???

- Les photons ne sont pas des particules massives dans l'espace 3D.
 Comment peuvent-ils acquérir une masse à 2D ?
- Pour avoir un condensat à 2D, il faut confiner les particules, par exemple dans un piège harmonique. Comment obtient ce piégeage harmonique pour les photons?
- On pose généralement μ = 0 pour les photons (nombre non conservé).
 Comment obtenir μ non nul dans cette expérience ?
- S'agissant de photons, comment distinguer condensation de Bose-Einstein et effet laser ?

Le dispositif de l'expérience de Bonn



Cavité optique de finesse 10⁵

Entre les deux miroirs, méthanol + colorant (Rhodamine 6G) milieu d'indice $n_0 = 1.33$

Les photons « utiles » ont une longueur d'onde (dans le vide) dans la gamme 500-580 nm

$$L \approx N \frac{\lambda}{2n_0}$$
 avec $N = 7$

Les modes longitudinaux N = 6 ou N = 8 correspondent à des longueurs d'onde non atteintes par la fluorescence des molécules de colorant

Le degré de liberté selon z est figé pour les photons de la cavité

Une masse pour les photons ?

Selon l'axe z de la cavité : $k_z = N\pi/L$ avec N=7

Degrés de liberté transverses (*xy*): $E = \hbar \omega = \frac{\hbar c |\mathbf{k}|}{n_0}$ avec $|\mathbf{k}| = \sqrt{k_z^2 + k_\perp^2}$

Approximation paraxiale : $|{m k}_{\perp}| \ll k_z$

$$E \approx \frac{\hbar c}{n_0} k_z \left(1 + \frac{\boldsymbol{k}_{\perp}^2}{2k_z^2} \right) \qquad \approx \hbar \omega_0 + \frac{\hbar^2 \boldsymbol{k}_{\perp}^2}{2m_{\rm ph}}$$

où l'on a posé : $\hbar\omega_0 = \frac{N\pi\hbar c}{n_0 L}$

$$m_{\rm ph} = \frac{\hbar n_0 k_z}{c}$$

 $m_{\rm ph} \approx 0.7 \times 10^{-35} \, \rm kg$

100 000 fois moins lourd qu'un électron





Un potentiel harmonique pour les photons





$$L(r) = L_0 - 2\left(R - \sqrt{R^2 - r^2}\right)$$
$$\approx L_0 - \frac{r^2}{R}$$

que l'on injecte dans le résultat précédent : $\hbar\omega_0 = \frac{N\pi\hbar c}{n_0L}$

d'où l'énergie d'un photon écarté de r de l'axe optique

$$\hbar\omega_0(r) = \hbar\omega_0(0) + \frac{1}{2}m_{\rm ph}\Omega^2 r^2$$

avec:
$$\Omega = \frac{c}{n_0 \sqrt{L_0 R/2}}$$
 $\Omega/(2\pi) \approx 40 \,\mathrm{GHz}$

Bilan de cette analyse « corpusculaire » : $E(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}_{\perp}) = \frac{\hbar^2 \boldsymbol{k}_{\perp}^2}{2m_{\rm ph}} + \frac{1}{2}m_{\rm ph}\Omega^2 \boldsymbol{r}^2$

Thermodynamique du colorant



La relaxation rovibrationnelle très rapide (femtoseconde) garantit un équilibre thermique entre sous-niveaux de g d'une part, entre sous-niveaux de e d'autre part

$$\frac{N_e(E+\hbar\omega)}{N_g(E)} = Z \,\mathrm{e}^{-\hbar\omega/k_\mathrm{B}T} \qquad T \approx 300 \,\mathrm{K}$$

En revanche, le rapport entre les populations des deux continua associés à e et à g n'est pas thermique, mais imposé par la puissance du laser de pompage.

Rapport caractérisé par le paramètre Z

Thermodynamique des photons



 $\mathcal{N}(\omega)$: nombre de photons dans un mode d'énergie $\hbar\omega$

Analyse simplifiée fondée sur le bilan détaillé :

$$\mathcal{N}(\omega) \ N_g(E) = \begin{bmatrix} 1 + \mathcal{N}(\omega) \end{bmatrix} N_e(E + \hbar \omega)$$

$$\uparrow$$
absorption
$$f$$
émission spontanée + stimulée

A l'équilibre : $\frac{\mathcal{N}(\omega)}{1 + \mathcal{N}(\omega)} = \frac{N_e(E + \hbar\omega)}{N_a(E)} = Z e^{-\hbar\omega/k_B T}$

ou encore :
$$\mathcal{N}(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{Z}e^{\hbar\omega/k_{\rm B}T} - 1}$$

Loi de Bose-Einstein avec une fugacité différente de 1, donc un potentiel chimique non nul dépendant de la puissance du laser de pompage

La différence avec le rayonnement du corps noir



Dans le formalisme conduisant à la formule de Planck, on impose $\mu = 0$ pour les photons

Cela est motivé par l'existence de processus tels que :



Non conservation du nombre d'excitations : $\mu = 2\mu \Rightarrow \mu = 0$

Dans l'expérience de Bonn, il y a conservation du nombre d'excitations :

1 photon + 1 molécule g 1 molécule e

Le potentiel chimique non nul rend compte de cette conservation

Sur le plan mathématique, description à l'approximation RWA

La condensation 2D observée à Bonn





Spectre de la lumière sortant de la cavité pour des puissance de pompage croissante

Ajustement des courbes par une loi de Bose-Einstein avec T=300 K et un potentiel chimique variable

Condensation attendue pour

$$N = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_{\rm B}T}{\hbar\Omega}\right)^2 \approx 60\,000$$

Bon accord avec les observations !

Condensat ou laser ?



 La distribution énergétique fait apparaître un pic étroit au dessus d'un piédestal thermique, généralement absent pour un laser

 Les fluctuations du nombre de photons dans le mode d'un laser sont souvent poissoniennes. Elles sont ici nettement plus importantes et correspondent au résultat attendu dans le cadre de l'ensemble grand-canonique.

• Il s'agit d'un régime forcé plutôt que d'un équilibre thermodynamique au sens strict

Un critère plus contraignant pourrait consister à vérifier certaines relations fluctuation - dissipation (Chiochetta et al.)

Bilan à ce stade

Gaz parfait de bosons à la limite thermodynamique

• Condensation dans un piège harmonique, mais singulier densité centrale $ightarrow\infty$ pour un piège de fréquence $\omega
ightarrow0$

• Pas de condensation dans une boîte à la limite thermodynamique

Peut-il y avoir une transition de phase sans que la densité devienne infinie ?

Oui, mais cette transition est fondamentalement due aux interactions !

Mécanisme BKT

4.

Collisions binaires à deux dimensions

Collisions entre deux particules



$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + U(\hat{r}_1 - \hat{r}_2)$$

On supposera que $U(\mathbf{r})$ ne dépend que de $|\mathbf{r} = |\mathbf{r}|$

Séparation des variables :
$$\hat{H} = \hat{H}_{CM} + \hat{H}_{rel}$$

Centre de masse :
$$\hat{H}_{CM} = \frac{\hat{P}^2}{2M}$$
 $R = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ $P = p_1 + p_2$
 $M = 2m$

Variable relative :
$$\hat{H}_{rel} = \frac{\hat{p}^2}{2m_r} + U(r)$$
 $r = r_1 - r_2$ $p = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)$
 $m_r = m/2$

La physique de la collision est décrite par $\hat{H}_{
m rel}$

Barrière centrifuge et collision en onde s

On cherche les états propres de $\hat{H}_{rel} = \frac{\hat{p}^2}{2m_r} + U(\hat{r})$ d'énergie positive avec par exemple $U(r) = -C_6/r^6$ + un coeur dur

Etat propre commun à $\dot{H}_{
m rel}$ et au moment cinétique, de partie angulaire connue.



Pour un état de moment cinétique non nul, il apparaît un terme de barrière centrifuge $1/r^2$ dans l'hamiltonien radial

A basse énergie, le potentiel d'interaction ne joue un rôle que pour le canal de collision de moment cinétique nul

Collision en onde s, donc isotrope

Etat stationnaire de diffusion

On cherche un état propre $\hat{H}_{rel} \psi_k(\mathbf{r}) = E_k \psi_k(\mathbf{r})$ avec $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

et le comportement asymptotique

$$\psi_{k}(r) \sim e^{ik \cdot r} + f(k) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}$$

onde plane onde cylindrique incidente sortante

On cherche le comportement de l'amplitude de diffusion f(k) dans la limite $k \to 0$

Le cas tri-dimensionnel

Potentiel U(r) de portée b, limite de basse énergie : $kb \ll 1$ Il existe donc une région de l'espace telle que $b < r \ll k^{-1}$



La valeur de la longueur de diffusion *a* est imposée par la régularité de la fonction d'onde en r = 0 et dépend de U(r)

Amplitude de diffusion : $a = -\lim_{k \to 0} f(k)$

Le cas bi-dimensionnel



Ne marche pas car $\frac{e^{\pm ikr}}{\sqrt{r}}$ n'est pas une solution exacte dans le cas U=0, mais simplement une limite asymptotique

En revanche à 3D, $\frac{e^{\pm ikr}}{r}$ est bien une solution exacte quand U=0

Le cas bi-dimensionnel (suite)



Solutions exactes pour U = 0: fonctions de Bessel de 1^{ère} et 2^{ème} espèce

 $J_0(kr) \qquad Y_0(kr)$

Le cas bi-dimensionnel (fin)



 $k \to 0$ Fonction radiale : $R(r) = C_1 \ln(r) + C_2 = C_1 \ln(r/a_2)$

*a*₂ : longueur de diffusion à deux dimension

Amplitude de diffusion :
$$f(k) \approx \frac{1}{-\frac{1}{2\pi}\ln(ka_2) + \frac{i}{4}}$$
Collision dans une géométrie quasi-bidimensionnelle

Petrov - Holzmann - Shlyapnikov



Confinement harmonique selon l'axe z :

$$a_{\rm oh} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_z}}$$

Résultat du même type que celui trouvé pour le problème strictement 2D :

$$f(k) \approx \frac{1}{\frac{1}{\tilde{g}} - \frac{1}{2\pi} \ln(ka_{\rm oh}) + \frac{i}{4}} \qquad \text{avec} \quad \tilde{g} = \sqrt{8\pi} \frac{a}{a_{\rm oh}}$$
$$a: \text{longueur de diffusion 3D}$$

Dans la plupart des cas, le terme $1/ ilde{g}$ domine le dénominateur, ce qui donne

$$\tilde{g} \lesssim 1 \longrightarrow f(k) \approx \tilde{g}$$

mais il faudra se rappeler que cela ne peut pas être correct si \tilde{g} devient grand

Bilan

Le gaz parfait à deux dimensions peut être vu comme un cas particulier du théorème de Mermin -Wagner -Hohenberg

Pas d'ordre à longue portée à la limite thermodynamique

Mais il est « pauvre » au sens où il ne présente pas non plus de transition de phase topologique à la BKT

Les interactions sont indispensables pour faire émerger cette transition de phase

La description de ces interactions peut se faire dans les cas simples en terme d'un nombre sans dimension \tilde{g} qui caractérise l'amplitude de diffusion

$$\tilde{g} = \sqrt{8\pi} \frac{a}{a_{\rm oh}}$$
 $f(k) \approx \tilde{g}$ si $\tilde{g} \lesssim 1$

Fluides quantiques de basse dimension et transition de Kosterlitz-Thouless

Le quasi-ordre à longue portée

Jean Dalibard

Chaire Atomes et rayonnement

Année 2016-17



Bilan des cours précédents

A température non nulle, il n'y a pas d'ordre à longue portée dans un système de basse dimension (Peierls, Mermin-Wagner-Hohenberg) :

- Absence d'ordre cristallin (interactions entre proches voisins)
- Gaz de Bose idéal à 2D : $G_1(r) = \langle \hat{\Psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r}) \hat{\Psi}(0) \rangle \qquad \propto \mathrm{e}^{-r/\ell}$

Berezinskii, Kosterlitz & Thouless ont néanmoins montré qu'une transition de phase « topologique » pouvait se produire entre un état complètement désordonné à haute température et un état quasi-ordonné à basse température

Aucune trace de cette transition dans notre étude du gaz parfait à 2D

Les interactions jouent un rôle central dans cette transition contrairement à la condensation de Bose-Einstein à 3D

Buts du cours d'aujourd'hui

Prise en compte des interactions pour montrer un changement radical de la cohérence d'un fluide de Bose à deux dimensions

Basse température :
$$G_1(r) = \langle \hat{\Psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r}) \hat{\Psi}(0) \rangle \propto \frac{1}{r^{\alpha}}$$

quasi-ordre algébrique

Pour simplifier notre étude, développement d'une approche « champ classique »

- Domaine de validité ?
- Que reste-t-il de quantique dans cette approche ?

Discuter les prédictions de cette approche dans la limite des petites fluctuations Ondes sonores, spectre de Bogoliubov 1.

Approche champ classique

Description d'un système de N particules identiques (bosons) par un champ $|\psi(m{r})|$

$$\Phi(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_N) \longrightarrow \psi(\boldsymbol{r}_1)\ldots\psi(\boldsymbol{r}_N)$$

4

Analogie optique

Un état donné du champ électromagnétique correspond à une certaine distribution d'amplitudes de probabilité des états à nombre de photons donnés :

$$\sum_{\{n_{k,\epsilon}\}} C_{\{n_{k,\epsilon}\}} | n_1 : (k_1, \epsilon_1), n_2 : (k_2, \epsilon_2), \ldots \rangle$$
 bien compliqué...

On utilise souvent une description classique du champ électromagnétique :

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$$
 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$

Cette description permet de décrire des phénomènes qui semblent « quantiques », comme le fonctionnement d'un laser

Quelles sont ses limitations ?

Limitation de l'approche « champ classique » en optique

 Granularité de la lumière, qui se manifeste par exemple dans le mécanisme d'émission spontanée

$$[\hat{a}_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{\epsilon}},\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{\epsilon}}]\neq 0$$

Si $N \gg 1$, cette différence n'est généralement pas bien importante

• Le problème du rayonnement du corps noir : l'équipartition de l'énergie attendue à l'équilibre thermodynamique peut conduire à des divergences

Thermodynamique d'un champ classique

Champ $\mathcal{E}(\mathbf{r})$ avec l'énergie associée $E[\mathcal{E}] = \alpha \int \mathcal{E}^2(\mathbf{r}) d^3r$ Intégrale prise sur un volume L^3

Décomposition du champ en « modes propres » (ou « états propres ») indépendants :

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} \mathcal{E}_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \qquad \mathbf{q} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n} \qquad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3$$

L'état du champ est caractérisé par la donnée des $\{\mathcal{E}_{\mathbf{q}}\}$
 $|\mathcal{E}_{\mathbf{q}}|^2$: population du mode \mathbf{q}
Energie : $E[\mathcal{E}] = \alpha L^3 \sum_{\mathbf{q}} |\mathcal{E}_{\mathbf{q}}|^2 \longrightarrow \mathcal{P}[\{\mathcal{E}_{\mathbf{q}}\}] \propto e^{-E[\mathcal{E}]/k_{\mathrm{B}}T}$
 $\langle |\mathcal{E}_{\mathbf{q}}|^2 \rangle \propto k_{\mathrm{B}}T$

Cette variation linéaire en température de la population moyenne de chaque mode est caractéristique d'une approche « champ classique » (Rayleigh-Jeans)

7

Principe d'une approche « champ classique » pour la matière

On remplace la « vraie » fonction d'onde ou la « vraie » matrice densité à N corps par un mélange statistique d'états à une particule :

$$|N:\psi\rangle \longleftrightarrow \psi(\boldsymbol{r}_1)\ldots\psi(\boldsymbol{r}_N)$$

La densité de probabilité pour qu'un état ψ apparaisse est notée $\mathcal{P}[\psi]$

Moyenne d'une quantité physique A caractérisée par l'observable \hat{A} :

$$\int \langle N:\psi|\hat{A}|N:\psi\rangle \ \mathcal{P}[\psi] \ \mathrm{d}[\psi] \qquad \text{intégrale fonctionnelle}$$

On souhaite que cette moyenne soit aussi proche que possible du résultat exact ${
m Tr}\left(\hat{
ho} \hat{A}
ight)$

N.B. : il s'agit (presque) toujours d'une approximation et pas d'un résultat exact

Retour sur les statistiques quantiques

Bilan d'équilibre à la base des statistiques quantiques



 $j_1 + j_2 \longrightarrow j_3 + j_4 \quad \text{si} \quad E_1 + E_2 = E_3 + E_4$ Le processus inverse est également possible :

$$j_3 + j_4 \longrightarrow j_1 + j_2$$

Bilan détaillé : $N_{j_1} N_{j_2} = N_{j_3} N_{j_4}$

Si la fonction N_j ne dépend que de l'énergie E_j , la fonction N(E) doit vérifier la propriété

$$N(E_1) N(E_2) = N(E_3) N(E_4)$$
 si $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$

Solution générale : $N(E) = e^{aE+b}$ $a = -1/k_{\rm B}T \qquad b = \mu/k_{\rm B}T$

Boltzmann retrouvé : $N(E) = e^{(\mu - E)/k_BT}$

Retour sur les statistiques quantiques (2)



ce qui est possible si
$$\frac{N(E)}{1+N(E)} = e^{aE+b} \longrightarrow N(E) = \frac{1}{e^{-(aE+b)}-1}$$

ou encore
$$N(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_{\rm B}T} - 1}$$

Les deux régimes de la loi de Bose-Einstein



• Aux petites énergies : $E - \mu \ll k_{\rm B}T$

$$N(E) \approx \frac{1}{\left(1 + \frac{E - \mu}{k_{\rm B}T}\right) - 1} \quad \approx \frac{k_{\rm B}T}{E - \mu} \gg 1$$

régime de champ classique, avec des nombres d'occupation grands devant 1

Le champ classique retrouvé par le bilan détaillé $\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_$

Bilan détaillé dans lequel l'émission stimulée domine l'émission spontanée :

$$N_{j_1} N_{j_2} [1+N_{j_3}] [1+N_{j_4}] = N_{j_3} N_{j_4} [1+N_{j_1}] [1+N_{j_2}]$$

avec tous les N_j grands devant 1

Terme dominant : $N_{j_1} N_{j_2} N_{j_3} N_{j_4} = N_{j_1} N_{j_2} N_{j_3} N_{j_4}$ trivial Terme suivant : $N_{j_1} N_{j_2} [N_{j_3} + N_{j_4}] = N_{j_3} N_{j_4} [N_{j_1} + N_{j_2}]$

qui peut aussi s'écrire : $\frac{1}{N_{j_1}} + \frac{1}{N_{j_2}} = \frac{1}{N_{j_3}} + \frac{1}{N_{j_4}}$ si $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$

ou encore :
$$\frac{1}{N(E)} = \frac{E - \mu}{k_{\rm B}T} \rightarrow N(E) = \frac{k_{\rm B}T}{E - \mu}$$

Que reste-t-il de quantique ?

Assemblée de particules décrites par le champ $\psi(\boldsymbol{r})$ complexe :

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\rho(\boldsymbol{r})} e^{i\theta(\boldsymbol{r})}$$

Champ de vitesse associé :
$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \frac{\hbar}{m} \boldsymbol{\nabla} \theta$$

Définition de la phase à 2π près :

$$\oint \boldsymbol{\nabla} \theta(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d} \boldsymbol{r} = n \ 2\pi \qquad n \in \mathbb{Z}$$

pour tout contour fermé

Quantification de la circulation de la vitesse :

$$\oint \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = n \frac{2\pi\hbar}{m}$$



2.

Fonctionnelle d'énergie de Gross-Pitaevskii



$$V_{\text{trap}}^{(3D)}(\mathbf{r}) = V_{\text{trap}}^{(1D)}(z) + V_{\text{trap}}^{(2D)}(x, y)$$

L'énergie du gaz 3D

L'hamiltonien à N corps s'écrit pour des interactions binaires :

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\hat{p}_{j}^{2}}{2m} + V_{\text{trap}}^{(3\text{D})}(\hat{r}_{j}) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U(\hat{r}_{i} - \hat{r}_{j})$$

Traitement en champ classique (ou encore champ moyen, ansatz de Hartree) :

$$\Phi(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_N) \propto \phi(\boldsymbol{r}_1)\ldots\phi(\boldsymbol{r}_N) \qquad \qquad \int |\phi(\boldsymbol{r})|^2 \, \mathrm{d}^3 r = N$$

On calcule l'énergie moyenne : $E[\phi] = \langle \Phi | \hat{H} | \Phi \rangle$

$$E(\phi) = \int \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\boldsymbol{\nabla}\phi|^2 + V_{\text{trap}}^{(3D)}(\boldsymbol{r})|\phi(\boldsymbol{r})|^2 + \frac{g}{2} |\phi(\boldsymbol{r})|^4\right) \, \mathrm{d}^3r$$

où on a modélisé le potentiel d'interaction par le potentiel de contact :

$$U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = g\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad g = rac{4\pi\hbar^2 a}{m} \qquad a:$$
 longueur de diffusion 3D

Factorisation du mouvement gelé



Piégeage harmonique fort selon z

Les particules occupent l'état fondamental de ce mouvement:

$$\chi_0(z) \propto e^{-z^2 / (2a_{oh}^2)} \qquad a_{oh} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_z}}$$

On écrit donc le champ classique $\phi(x, y, z)$ sous la forme factorisée :

$$\phi(x, y, z) = \psi(x, y) \ \chi_0(z)$$

La physique à deux dimensions est décrite par le champ $\psi(x,y)$ avec l'énergie

$$E(\psi) = \int \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\boldsymbol{\nabla}\psi|^2 + V_{\text{trap}}^{(2\text{D})}(\boldsymbol{r})|\psi(\boldsymbol{r})|^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \,\tilde{g} \,|\psi(\boldsymbol{r})|^4\right) \,\mathrm{d}^2r$$

Le paramètre sans dimension $\tilde{g} = \sqrt{8\pi} \frac{a}{a_{\rm oh}}$, déjà trouvé au cours 2, caractérise la force des interactions

L'équation de Gross-Pitaevskii à 2D

Equation du mouvement pour le champ classique $\psi(x,y)$, écrite ici en l'absence de potentiel de piégeage dans le plan xy

$$\mathbf{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\,\boldsymbol{\nabla}^2\psi \ + \ \frac{\hbar}{m}\,\tilde{g}\,|\psi|^2\psi$$

Quantités conservées : nombre de particules et énergie totale

$$N = \int |\psi(\mathbf{r})|^2 \, \mathrm{d}^2 r \qquad E = E_{\mathrm{cin}} + E_{\mathrm{int}} \qquad E_{\mathrm{cin}} = \frac{\hbar^2}{2m} \int |\nabla\psi|^2 \, \mathrm{d}^2 r$$
$$E_{\mathrm{int}} = \frac{\hbar^2}{2m} \, \tilde{g} \, \int |\psi(\mathbf{r})|^4 \, \mathrm{d}^2 r$$

Etat fondamental : densité uniforme dans la boîte $L \ge L$

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho_0} \quad \text{avec} \quad \rho_0 = \frac{N}{L^2} \quad E_{\text{cin}} = 0$$
$$E_{\text{int}} = \frac{\hbar^2}{2m} \tilde{g} \rho_0^2 L^2$$

Coupure ultraviolette et longueur de cicatrisation

L'approche « champ classique » n'est valable que pour des modes fortement peuplés :

$$\frac{p^2}{2m} < k_{\rm B}T \qquad \text{ ou encore } \qquad \lambda_T < \frac{\hbar}{p} \qquad \qquad \lambda_T^2 = \frac{2\pi\,\hbar^2}{mk_{\rm B}T}$$

 $\alpha(m)/\alpha$

La longueur d'onde thermique représente l'échelle de longueur minimale accessible dans le cadre de cette théorie de champ classique

Les interactions introduisent une autre échelle de longueur : longueur de cicatrisation

$$\frac{\hbar^2}{2m\xi^2} = \frac{\hbar^2 \tilde{g}}{m} \rho \qquad \qquad \xi = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{g}\rho}} \qquad \qquad \int_{0.5}^{1} \frac{\xi}{\sqrt{2\tilde{g}\rho}} \qquad \qquad r$$

Selon la valeur de l'énergie d'interaction (plus ou moins grande que $k_{\rm B}T$), la longueur de cicatrisation sera accessible ou non à cette théorie classique

Optique non-linéaire et physique à deux dimensions

Réflexion amorcée par Pomeau, Rica et al.

Expériences menées à Princeton (J. Fleischer) et très récemment à Nice (R. Kaiser)

Principe : étudier la propagation d'un faisceau lumineux à l'approximation paraxiale dans un milieu optiquement non-linéaire, avec l'indice $n_0 + n_2 I$

Equations de Maxwell : équation d'onde pour les composantes du champ électromagnétique

> $\nabla^2 u - \frac{n_0^2}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ Pour l'instant, milieu linéaire d'indice n₀

Solutions en ondes planes : $u(\mathbf{r}, t) = u_0 e^{i(kz - \omega t)}$ $\omega = ck/n_0$ Solutions plus générales : $u(\mathbf{r},t) = \psi(\mathbf{r}) e^{i(kz-\omega t)}$



L'approximation paraxiale

Partant de
$$\nabla^2 u - \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$
 avec la forme $u(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) e^{i(kz - \omega t)}$

on arrive à la forme de l'équation requise pour l'enveloppe $\,\psi({m r})\,$:

$$\mathrm{i} rac{\partial \psi}{\partial z} = -rac{1}{2k} \boldsymbol{
abla}_{\perp}^2 \psi$$
 avec $\boldsymbol{
abla}_{\perp}^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$

Même structure que l'équation de Schrödinger dépendante du temps à 2D.

En posant $\tau = n_0 z/c$ (temps de propagation), on peut écrire cette équation

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = -\frac{\hbar}{2m_{\mathrm{phot}}}\boldsymbol{\nabla}_{\perp}^{2}\psi \qquad \qquad m_{\mathrm{phot}} = n_{0}^{2}\,\hbar\omega/c^{2}$$

Ce raisonnement ondulatoire redonne la masse effective des photons à 2D dans l'approximation paraxiale, trouvée au cours 2 par un raisonnement corpusculaire

Optique non-linéaire et équilibre thermique

On ajoute une composante non-linéaire à l'indice : $n_0 \longrightarrow n_0 + n_2 |\psi|^2 / k^2$

Equation d'évolution de l'enveloppe $\psi(\mathbf{r})$ lors de sa propagation



$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{1}{2k}\boldsymbol{\nabla}_{\perp}^{2}\psi - \frac{n_{2}}{n_{0}k}|\psi|^{2}\psi$$

A l'entrée du cristal, on imprime un désordre contrôlé en phase et en amplitude pour ajuster l'énergie *E*

On mesure la distribution spatiale en sortie du cristal : est-elle « thermalisée », i.e.,

$$N(k_{\perp}) \propto \frac{k_{\rm B}T}{E} \propto k_{\perp}^{-2}$$
 ?



3.

Fluctuations de phase et quasi-ordre

Comportement de la fonction de corrélation

 $G_1(\boldsymbol{r}) = \langle \psi(\boldsymbol{r}) \; \psi^*(0)
angle$ à basse température ?

La suppression des fluctuations de densité

Etat fondamental : $\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho_0}$ avec $\rho_0 = \frac{N}{L^2}$ $E_{\text{int}} = \frac{\hbar^2}{2m} \tilde{g} \rho_0 N$

A température non nulle, fluctuations de phase et de densité

Pour un gaz fortement dégénéré, c'est-à-dire une densité dans l'espace des phases

$$\mathcal{D} \gg 1$$
 $\mathcal{D} = \rho_0 \lambda_T^2$

les fluctuations de densité importantes ont un coût prohibitif

$$\frac{E_{\rm int}/N}{k_{\rm B}T} = \frac{\tilde{g}}{4\pi} \ \mathcal{D} \gg 1$$

Nous allons nous concentrer dans un premier temps sur les fluctuations de phase



Energie liée aux fluctuations de phase

Energie d'interaction gelée :
$$E_{\text{int}} = \frac{\hbar^2}{2m} \tilde{g} \int \rho^2(\boldsymbol{r}) \, \mathrm{d}^2 r = \frac{\hbar^2}{2m} \tilde{g} L^2 \rho^2$$

Energie cinétique :
$$E_{cin} = \frac{\hbar^2}{2m} \int |\nabla \psi|^2 d^2 r$$

avec $\nabla \psi = \nabla \left(\sqrt{\rho(\mathbf{r})} e^{i\theta(\mathbf{r})} \right) \approx \sqrt{\rho} (i \nabla \theta) e^{i\theta(\mathbf{r})}$

ce qui donne
$$E_{\rm cin} \approx \frac{\hbar^2}{2m} \rho \int (\boldsymbol{\nabla}\theta)^2 \, \mathrm{d}^2 r$$

Expression typique d'un superfluide (cours 2015-16) Mesure le prix énergétique à payer pour tordre la phase

Expérience du récipient tournant : cette énergie exprime le fait qu'il peut être énergétiquement favorable pour le fluide de rester au repos dans le référentiel galiléen du laboratoire plutôt que tourner avec le récipient (ref. non galiléen).



Hamiltonien effectif à basse énergie

L'expression

$$E_{\rm cin} \approx \frac{\hbar^2}{2m} \rho \int \left(\boldsymbol{\nabla} \theta \right)^2 \, \mathrm{d}^2 r$$

signifie implicitement que l'ensemble du fluide (densité ρ) est superfluide.

Mais l'approche champ classique, couplée à l'hypothèse de gel des fluctuations de densité, n'est valable que pour des échelles de longueur assez grandes (> λ_T).

Un moyen heuristique pour prendre en compte la physique aux plus courtes échelles de longueur est de remplacer la densité totale ρ par une densité « superfluide » ρ_s

$$E_{\rm cin} \approx \frac{\hbar^2}{2m} \rho_s \int \left(\boldsymbol{\nabla} \theta \right)^2 \, \mathrm{d}^2 r$$

Permet de se concentrer simplement sur la physique à longue distance, en absorbant dans ρ_s les aspects non essentiels de la physique à courte distance.

Analyse de Fourier des fluctuations de phase

On souhaite calculer la fonction de corrélation

$$G_1(\boldsymbol{r}) = \langle \psi(\boldsymbol{r}) \ \psi^*(0) \rangle = \rho \ \langle e^{i[\theta(\boldsymbol{r}) - \theta(0)]} \rangle$$

Développement de la phase en série de Fourier $\ \theta({m r}) = \sum_{{m q}} c_{{m q}} \, e^{i {m q} \cdot {m r}}$

N.B. Avec ce développement, on se limite à des variations « douces » de la phase. Il ne convient pas pour un vortex avec un enroulement de 2π sur une distance très courte.

Energie en fonction des coefficients de Fourier :

$$E_{\rm cin} = \frac{\hbar^2}{2m} \rho_s \int \left(\boldsymbol{\nabla}\theta\right)^2 \, \mathrm{d}^2 r = \rho_s L^2 \sum_{\boldsymbol{q}} \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \, |c_{\boldsymbol{q}}|^2$$

Quelle valeur à l'équilibre thermique ?

Equipartition de l'énergie et fluctuations de phase

Energie cinétique liée aux fluctuations de phase :

$$E_{\rm cin} = \sum_{\substack{\boldsymbol{q} \\ q_x > 0}} \epsilon_{\boldsymbol{q}} |c_{\boldsymbol{q}}|^2 \qquad \text{avec} \qquad \epsilon_{\boldsymbol{q}} = \rho_s L^2 \; \frac{\hbar^2 q^2}{m} \quad \longrightarrow \quad \langle |c_{\boldsymbol{q}}|^2 \rangle = \frac{k_{\rm B} T}{\epsilon_{\boldsymbol{q}}}$$

Différence de phase entre deux points : $\theta(\mathbf{r}) - \theta(0) = \sum_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}} \left(e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} - 1 \right)$

$$\rightarrow \langle \theta(\boldsymbol{r}) - \theta(0) \rangle = 0$$

$$\rightarrow \langle [\theta(\boldsymbol{r}) - \theta(0)]^2 \rangle = 4 \sum_{\boldsymbol{q}} \langle |c_{\boldsymbol{q}}|^2 \rangle \sin^2(\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{r}/2)$$

expression formellement identique à celle trouvée lors de notre étude d'un possible ordre cristallin à deux dimensions (Peierls)

$$\langle \left[\theta(\boldsymbol{r}) - \theta(0)\right]^2 \rangle \approx \frac{2}{\rho_s \lambda_T^2} \ln(r/\lambda_T)$$

Croissance logarithmique avec la distance : pas d'ordre en phase

Le quasi-ordre à longue portée

On revient au champ $\psi(x,y)$ lui-même

$$G_1(r) = \langle \psi(\mathbf{r}) \ \psi^*(0) \rangle \approx \rho \ \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\theta(\mathbf{r}) - \theta(0)]} \rangle$$

et on utilise la relation pour une variable aléatoire gaussienne $\langle {
m e}^{{
m i} u}
angle = {
m e}^{-\langle u^2
angle/2}$

$$G_1(r) \approx \rho \,\mathrm{e}^{-rac{1}{
ho_s \lambda_T^2} \ln(r/\lambda_T)} = \rho \left(rac{\lambda_T}{r}
ight)^{lpha} \qquad \mathrm{avec} \qquad lpha = rac{1}{
ho_s \lambda_T^2}$$

Décroissance algébrique de la corrélation dans ce régime de basse température

Décroissance beaucoup plus lente que pour le gaz parfait (exponentielle)

Un exemple concret pour $G_1(r) = \langle \hat{\Psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r}) \hat{\Psi}(0) \rangle$

Gaz de Bose avec une densité dans l'espace des phases $\mathcal{D} = \rho \lambda_T^2 = 10$

• Gaz parfait : décroissance exponentielle

$$G_1(r) \propto e^{-r/\ell}$$
 avec $\ell \approx \frac{\lambda_T}{\sqrt{4\pi}} e^{\mathcal{D}/2} \longrightarrow \ell \approx 40 \lambda_T$

Gaz en interaction : décroissance algébrique

$$G_1(r) \propto 1/r^{lpha}$$
 avec $lpha = 1/\mathcal{D} = 1/10$



Pour perdre le quasi-ordre, il faut aller très très loin :

$$G_1(r) = 0.01$$

pour

$$r = \frac{\lambda_T}{(0.01)^{1/\alpha}} = 10^{20} \lambda_T$$

4.

L'approche de Bogoliubov

Aller au delà de l'approximation du gel des fluctuations de densité

Adapter à 2D le formalisme connu à 3D

On ne peut pas faire simplement un développement $\psi \approx \psi_0 + \delta \psi$ car on n'a pas de ψ_0 autour duquel on pourrait développer

Equations couplées amplitude - phase

Dans le cadre de l'approche champ classique, on pose :

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = \sqrt{\rho_0 + \delta\rho(\boldsymbol{r},t)} e^{i\theta(\boldsymbol{r},t)} \qquad |\delta\rho| \ll \rho_0$$

et on fait un développement en série de Fourier (les vortex sont donc toujours exclus)

$$\rho(\mathbf{r},t) = \rho_0 \left[1 + 2\eta(\mathbf{r},t)\right] \qquad \eta(\mathbf{r},t) = \sum_{\mathbf{q}} d_{\mathbf{q}}(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$$
$$\theta(\mathbf{r},t) = \sum_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}}(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$$

L'équation de Gross-Pitaevskii s'écrit en fonction des coefficients de Fourier :

$$\begin{pmatrix} \frac{2m}{\hbar} \end{pmatrix} \dot{c}_{\boldsymbol{q}} = -\left(q^2 + 4\,\tilde{g}\rho_0\right) \,d_{\boldsymbol{q}} \qquad \qquad \ddot{c}_{\boldsymbol{q}} + \omega_q^2 c_{\boldsymbol{q}} = 0 \\ \begin{pmatrix} \frac{2m}{\hbar} \end{pmatrix} \,\dot{d}_{\boldsymbol{q}} = q^2 \,c_{\boldsymbol{q}} \qquad \qquad \qquad \ddot{d}_{\boldsymbol{q}} + \omega_q^2 d_{\boldsymbol{q}} = 0$$

avec la relation de dispersion de Bogoliubov :

$$\omega_q = \frac{\hbar}{2m} \left[q^2 \left(q^2 + 4 \,\tilde{g}\rho_0 \right) \right]^{1/2} \tag{31}$$

Le spectre de Bogoliubov



L'existence de cette branche linéaire assure la superfluidité du gaz selon le critère de Landau : une impureté bougeant à une vitesse $v < c_0$ ne peut pas être freinée

• Partie de grand vecteur d'onde $q^2 \gg 4 \, \tilde{g} \rho_0$

$$\hbar \omega_q = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \quad \text{à une constante additive près}$$

Régime de particules libres

4

Production d'un gaz d'atomes à 2D

Gel de la direction verticale en piégeant les atomes dans un noeud d'une onde lumineuse stationnaire Confinement dans le plan horizontal grâce à des murs lumineux dont le dessin est imprimé sur une matrice de micro-miroirs



Jean-Loup Ville, Raphaël Saint-Jalm, Monika Aidelsburger, Sylvain Nascimbene, Jérôme Beugnon

Propagation d'un paquet d'ondes dans un gaz 2D (CdF 2017)



Jean-Loup Ville, Raphaël Saint-Jalm, Monika Aidelsburger, Sylvain Nascimbene, Jérôme Beugnon
Fluctuations de phase vs. densité

Dans le cadre de l'approche de Bogoliubov, nous avons décomposé les fluctuations en

$$\rho(\mathbf{r},t) = \rho_0 \left[1 + 2\eta(\mathbf{r},t)\right] \qquad \eta(\mathbf{r},t) = \sum_{\mathbf{q}} d_{\mathbf{q}}(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$$
$$\theta(\mathbf{r},t) = \sum_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}}(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$$

Les équations coulées entre les amplitudes c_q et d_q donnent les amplitudes relatives

$$\frac{d_q}{\bar{c}_q} = \frac{q}{\sqrt{q^2 + 4\,\tilde{g}\rho_0}}$$

Pour $q^2 \ll 4 \, \tilde{g} \rho_0$, les fluctuations relatives de densité sont plus petites que les fluctuations de phase : justifie l'approche élémentaire basée sur l'énergie

$$E_{\rm cin} \approx \frac{\hbar^2}{2m} \rho_s \int \left(\boldsymbol{\nabla} \theta \right)^2 \, \mathrm{d}^2 r$$

qui a conduit à la notion de quasi-ordre à longue portée.

Bilan de ce cours

Partant d'une modélisation du fluide en termes de champ classique, nous avons analysé la dynamique et l'équilibre thermique par les modes propres densité-phase

- Approche valable si la phase est décomposable en série de Fourier
 Exclut les vortex
- Conduit à un quasi-ordre à longue portée

$$G_1(r) = \langle \psi(\mathbf{r}) \ \psi^*(0) \rangle \propto 1/r^{\alpha} \qquad \alpha = 1/\mathcal{D}_s$$

Radicalement différent du gaz parfait

Questions ouvertes :

Que se passe-t-il en présence de fluctuations de phase plus fortes ?

Comment connecter ce résultat au domaine « haute température », où on s'attend à retrouver une décroissance exponentielle de G_1 ?

Fluides quantiques de basse dimension et transition de Kosterlitz-Thouless

Le point critique de la transition BKT

Jean Dalibard

Chaire Atomes et rayonnement

Année 2016-17



Bilan des cours précédents

Quel type d'ordre (cristallin, magnétique, superfluide,...) peut-on atteindre dans un système de basse dimension (2D ou 1D) ?

Peierls, Mermin-Wagner-Hohenberg

A température non nulle et pour des interactions entre proches voisins, pas d'ordre à longue portée, plus précisément pas de brisure d'une symétrie continue



Dans un réseau carré de particules, on trouve

$$\langle (\boldsymbol{u_j} - \boldsymbol{u}_0)^2 \rangle \propto T \log(R_j/a)$$

Bilan (suite): le cas du gaz de Bose

Approche champ classique : $\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \longrightarrow \psi(\mathbf{r}_1) \dots \psi(\mathbf{r}_N)$

 $\psi(x,y)$: champ complexe caractérisé par une amplitude et une phase

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\rho(\boldsymbol{r})} e^{i\theta(\boldsymbol{r})}$$

Pour un gaz en interaction répulsive à basse température, gel des fluctuations de densité pour les modes de grande longueur d'onde

$$\rightarrow \rho = N/L^2$$

Développement de Fourier de la phase

$$\theta(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$$
$$\longrightarrow \langle \left[\theta(\mathbf{r}) - \theta(0)\right]^2 \rangle \propto T \ln(r/\lambda_T)$$



$$\lambda_T^2 = \frac{2\pi\,\hbar^2}{mk_{\rm B}T} \tag{3}$$

Bilan (fin) : le quasi-ordre à longue portée

Connaissant $\langle [\theta(\mathbf{r}) - \theta(0)]^2 \rangle$, on déduit la valeur de la fonction $G_1(r) = \langle \psi(\mathbf{r}) | \psi^*(0) \rangle$

$$G_1(r) \approx \rho \left(\frac{\lambda_T}{r}\right)^{\alpha}$$
 $\alpha = \frac{1}{\rho \lambda_T^2} = \frac{1}{D}$ D : densité dans l'espace des phases

Résultat très différent de celui d'un gaz parfait : $G_1(r) \approx \rho e^{-r/\ell}$



But de ce cours

Le gel des fluctuations de densité qui conduit au quasi-ordre algébrique n'est effectif qu'à basse température

A haute température, les interactions doivent jouer un rôle mineur et on s'attend à retrouver le résultat du gaz parfait

Comment s'effectue la transition :

$$G_1(r) \approx \rho \left(\frac{\lambda_T}{r}\right)^{\alpha} \longrightarrow G_1(r) \approx \rho e^{-r/\ell}$$
 ?

Les briques élémentaires de cette transition BKT sont les vortex



Zéro de densité avec un enroulement de phase de $n 2\pi$, où n est un entier relatif

En pratique : $\pm 2\pi$

Pourquoi les vortex font perdre le quasi-ordre en phase



On se donne deux points A et B entre lesquels il existe une cohérence de phase importante si on se limite à l'influence des phonons



Si un vortex isolé a une probabilité significative d'apparaître au voisinage du segment AB, la phase relative va fluctuer fortement :

$$\phi \rightarrow \phi + \pi$$

Si les vortex isolés peuvent être présents avec une densité ρ_v , on s'attend à perdre tout ordre en phase sur une distance $\sim \rho_v^{-1/2}$

1.

Seuil d'apparition d'un vortex isolé

Les zéros du champ classique $\psi(x,y)$

On se donne à un instant t un champ classique fluctuant et on regarde sa partie réelle et sa partie imaginaire



Apparition et disparition des vortex

 $\operatorname{Re}\left[\psi(x,y)\right] = 0 \qquad \operatorname{Im}\left[\psi(x,y)\right] = 0$



Une paire de vortex peut apparaître lors d'une fluctuation de densité importante 9

Champ de vitesse d'un vortex

Exemple d'un vortex en
$$\mathbf{r} = 0$$
: $\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})} e^{i\varphi}$ $\theta(\mathbf{r}) = \varphi$
 $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta = \frac{\hbar}{mr} \mathbf{u}_{\varphi}$
 $\oint \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 2\pi \frac{\hbar}{m}$

Analogie magnéto-statique : champ magnétique créé par un fil rectiligne perpendiculaire au plan xy

Profil de densité au voisinage du centre du vortex minimisant l'énergie :

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{g}\rho}}$$

longueur de cicatrisation



L'énergie d'un vortex

Energie cinétique (vortex au centre d'un disque de rayon R):

e la modélisation du coeur

Diverge avec la taille du système !

Energie d'interaction : il faut créer un trou de taille ξ dans le fluide

$$\epsilon_0 \sim \frac{\hbar^2 \rho}{m} \ll E_{\rm cin}$$



Densité totale et densité superfluide

Discussion déjà abordée dans le cours précédent ; l'expression

$$E_{\rm cin} = \frac{\hbar^2}{2m} \rho \int_{\xi}^{R} |\nabla \theta(\boldsymbol{r})|^2 \, \mathrm{d}^2 r \quad \longrightarrow \quad \pi \, \frac{\hbar^2 \rho}{m} \ln(R/\xi)$$

suppose que l'ensemble du fluide (de densité ρ) possède une rigidité en phase et est donc superfluide

Mais cette expression résulte d'une approximation où l'on ne prend en compte que les modes de grande longueur d'onde (coupure à courte distance)

Un moyen simple de réincorporer la physique à courte distance consiste à faire la substitution $\rho \longrightarrow \rho_s$

La densité superfluide $\rho_{\rm s}$ est à ce stade un paramètre phénoménologique

L'émergence d'un vortex isolé est-elle probable ?



Nombre de « cases » indépendantes où l'on peut placer ce vortex :

$$W \approx \frac{R^2}{\xi^2}$$

Probabilité pour qu'un vortex existe dans une de ces cases :

 $p \approx \mathrm{e}^{-E_{\mathrm{cin}}/k_{\mathrm{B}}T}$

En utilisant l'expression de l'énergie cinétique :

$$\frac{E_{\rm cin}}{k_{\rm B}T} = \frac{1}{k_{\rm B}T} \frac{\pi\hbar^2 \rho_s}{m} \ln(R/\xi) = \frac{\mathcal{D}_s}{2} \ln(R/\xi)$$

Probabilité pour une « case » donnée : p

e:
$$p \approx \exp\left[-\frac{\mathcal{D}_s}{2}\log\left(\frac{R}{\xi}\right)\right] = \left(\frac{\xi}{R}\right)^{\mathcal{D}_s/2}$$

Probabilité totale :
$$\mathcal{P} = Wp \approx \left(\frac{\xi}{R}\right)^{-2 + \mathcal{D}_s/2}$$

L'émergence d'un vortex isolé est-elle probable (2) ?

$$\mathcal{P} \approx \left(\frac{\xi}{R}\right)^{-2 + \mathcal{D}_s/2}$$

• Si
$$-2 + \frac{\mathcal{D}_s}{2} > 0$$
, c'est-à-dire $\mathcal{D}_s > 4$, alors la probabilité \mathcal{P} tend vers 0 quand $R \to \infty$



Le coût énergétique est supérieur au gain entropique : pas de vortex isolé

- Si $\mathcal{D}_s < 4$, alors $\mathcal{P} > 1$!!! Les vortex prolifèrent...

Vortex isolés et perte de superfluidité

Anneau parcouru par un courant, correspondant à un enroulement de $2\pi N$ de la phase du champ $\psi({m r})$

Ce courant est-il métastable ?



Si des vortex isolés existent dans l'anneau, ils peuvent traverser cet anneau :



 $N \to N \pm 1$

Fluctuations du courant qui va s'amortir et tomber à 0

Une paire de vx de charges opposées n'a pas d'effet sur le courant permanent



2.

Une paire vortex - antivortex

Le champ de vitesse d'une paire de vortex

On superpose les champs de vitesse des deux vortex





Analogie magnétique : champ créé par deux fils parallèles parcourus par des courants opposés

Champ de structure dipolaire : décroît comme $1/r^2$ à l'infini au lieu de 1/r pour un vortex isolé



Energie d'un paire de vortex

L'énergie cinétique est maintenant donnée par une intégrale bien définie :

$$r \, {
m grand}: \quad v \propto rac{1}{r^2} \qquad v^2 \propto rac{1}{r^4} \qquad \int v^2({m r}) \, {
m d}^2 r \quad {
m converge}$$

Le calcul de l'intégrale donne plus précisément

$$E_{\rm cin}(\ell) \approx 2\pi \; \frac{\hbar^2 \, \rho_s}{m} \; \ln\left(\frac{\ell}{\xi}\right)$$

Le coût en énergie d'interaction correspond à la création de deux trous de taille ξ

$$E_{\rm int} = 2 \epsilon_0$$
 avec $\epsilon_0 \sim \frac{\hbar^2 \rho_s}{m}$

Energie cinétique et énergie d'interaction sont comparables si $\ell \sim \xi$

Probabilité d'apparition d'une paire de vortex

Energie totale de la paire : $2\epsilon_0 + E_{cin}(\ell)$

$$E_{\rm cin}(\ell) \approx 2\pi \; \frac{\hbar^2 \, \rho_s}{m} \; \ln\left(\frac{\ell}{\xi}\right)$$



Poids de Boltzmann pour l'apparition de la paire

$$\begin{split} \mathcal{P}(\ell) &= \exp\left\{-\frac{2\epsilon_0 + E_{\rm cin}(\ell)}{k_{\rm B}T}\right\} \\ &= y_0^2 \ \exp\left\{-\frac{E_{\rm cin}(\ell)}{k_{\rm B}T}\right\} \qquad y_0 \equiv \exp\left(-\frac{\epsilon_0}{k_{\rm B}T}\right) : \textit{fugacité d'un vortex} \\ &= y_0^2 \ \left(\frac{\xi}{\ell}\right)^{\mathcal{D}_s} \qquad \text{valable si} \ \ell \gtrsim \xi \end{split}$$

Si \mathcal{D}_s n'est pas très grande devant 1, probabilité non négligeable au moins pour des élongations ℓ comparables à ξ

Elongation moyenne d'une paire de vortex

Distribution de probabilité pour l'élongation ℓ

 $\mathcal{P}(\ell) \propto \left(\frac{\xi}{\ell}\right)^{D_s}$ Moyenne: $\langle \boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b \rangle = 0$

Variance : $\langle (\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b)^2 \rangle = ?$





3.

Champ de vitesses et énergie d'une assemblée de vortex

Champs de vitesses longitudinaux et transverses

On se donne un champ de vitesses $\boldsymbol{v}(x,y)$ Transformée de Fourier : $\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) d^2r$

On peut toujours décomposer $\hat{\bm{v}}(\bm{q})$ sous la forme : $\hat{\bm{v}}(\bm{q}) = \hat{\bm{v}}^{\parallel}(\bm{q}) + \hat{\bm{v}}^{\perp}(\bm{q})$



Le champ de vitesses étudié au cours précédent et lié aux phonons

$$\theta(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$$
 $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta(\mathbf{r})$ $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) \propto i \mathbf{q} c_{\mathbf{q}}$

est purement longitudinal

Champ de vitesses liés aux vortex

On se donne une assemblée de vortex caractérisée par $\{Q_j, \boldsymbol{r}_j\}$

$$Q_j = \pm 1$$
 $\sum_j Q_j = 0$ Densité de vortex : $\rho_v(\mathbf{r}) = \sum_j Q_j \, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$

Minimisation de l'énergie cinétique compte tenu de cette contrainte :

$$E_{\rm cin} = \frac{\hbar^2 \rho_s}{2m} \int \left[\nabla \theta(\mathbf{r}) \right]^2 \, \mathrm{d}^2 \mathbf{r} \quad \longrightarrow \quad \nabla^2 \theta = 0 \qquad \text{équation de Laplace 2D}$$

Solution obtenue à partir de $\nabla^2 \left[\ln(r) \right] = 2\pi \, \delta(\mathbf{r})$

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\hbar}{m} \, \boldsymbol{\nabla} \times \left[\boldsymbol{u}_z \, \int \ln |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| \, \rho_v(\boldsymbol{r}') \, \mathrm{d}^2 r' \right]$$

- Somme des champs de vitesses générés par chaque vortex
- Champ de vitesses purement transverse : $\longrightarrow v^{\perp}(r)$

Bilan concernant le champ de vitesses superfluide

Nous avons identifié deux composantes que nous traiterons comme découplées :

- Le champ de vitesses lié aux phonons, purement longitudinal et caractérisé par les coefficients de Fourier de la phase $\theta(r)$

$$\theta(\boldsymbol{r}) = \sum_{\boldsymbol{q}} c_{\boldsymbol{q}} e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \qquad \boldsymbol{v}_{s}^{\parallel}(\boldsymbol{r}) = i\frac{h}{m}\sum_{\boldsymbol{q}} \boldsymbol{q} c_{\boldsymbol{q}} e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}$$

1

 Le champ de vitesses lié aux vortex, purement transverse et caractérisé par la densité de vortex

$$\rho_v(\boldsymbol{r}) = \sum_j Q_j \,\,\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j)$$

Probabilité d'obtenir une configuration donnée pour cette composante superfluide : $\exp\left[-E\left(\{c_{\bm{q}}\},\{Q_j,\bm{r}_j\}\right)/k_{\rm B}T\right]$

4.

Transition superfluide dans un fluide 2D

Les deux propriétés caractéristiques de la superfluidité :

- Existence de courants permanents métastables
- Rigidité en phase, expérience du récipient tournant

La rigidité en phase

Les conditions aux limites habituelles (périodiques) :

$$\psi(x+L,y) = \psi(x,y+L) = \psi(x,y)$$

On calcule alors l'énergie libre F(0)

On « tord » maintenant la phase des conditions aux limites selon une direction:

$$\psi(x+L,y) = e^{i\Theta} \psi(x,y) \qquad \qquad \psi(x,y+L) = \psi(x,y) \qquad \qquad \Theta \ll 1$$

Interprétation physique : passage dans un référentiel tournant

Quel est le coût énergétique de cette torsion en phase ? $F(\Theta) = F(0) + \alpha \Theta^2 + \dots$

Par définition :
$$\rho_s = \frac{m}{\hbar^2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial \Theta^2} \right|_{\Theta=0}$$
 (énergie en $\frac{\hbar^2}{2m} \rho_s \int |\nabla \theta(\mathbf{r})|^2 d^2 r$)

trois étapes...

Conditions aux limites tordues et énergie cinétique

Le champ de vitesse avec des conditions aux limites tordues :

 $\psi(x + L, y) = e^{i\Theta} \psi(x, y)$ peut être réalisé par un gradient de phase uniforme Θ/L , c'est-à-dire le champ de vitesse additionnel $v_{\Theta} = \frac{\hbar\Theta}{mL}u_x$

Champ de vitesse total : $v = v_{\Theta} + v_s$ v_s : phonons + vortex

$$\begin{split} E_{c}[\Theta, \boldsymbol{v}_{s}] &= \frac{m\rho_{s}^{(0)}}{2} \int (\boldsymbol{v}_{\Theta} + \boldsymbol{v}_{s})^{2} \, \mathrm{d}^{2}r \\ &= \frac{mL^{2}\rho_{s}^{(0)}}{2}v_{\Theta}^{2} \, + \, \frac{m\rho_{s}^{(0)}}{2} \int \boldsymbol{v}_{s}^{2} \, \mathrm{d}^{2}r + m\rho_{s}^{(0)}\boldsymbol{v}_{\Theta} \cdot \int \boldsymbol{v}_{s} \, \mathrm{d}^{2}r \end{split}$$

Choix d'une échelle de longueur a: les fluctuations de phase et de densité dont l'échelle de longueur est < a sont prises en compte par la substitution $\rho \to \rho_s^{(0)}$

Energie libre et corrélations en vitesses

Energie d'une configuration phonons + vortex : $E[\Theta, \{c_q\}, \{Q_j, r_j\}] = E[\Theta, v_s]$

- Fonction de partition : $\mathcal{Z}(\Theta) = \sum_{\{v_s\}} \exp\left(-\frac{E[\Theta, v_s]}{k_B T}\right)$
- Energie libre : $F(\Theta) = -k_{\rm B}T\ln[\mathcal{Z}(\Theta)]$

avec l'énergie cinétique sous la forme : $[\ldots]v_\Theta^2 \ + \ [\ldots]\int v_S^2 \ + [\ldots] \ v_\Theta\cdot\int v_s$

Résultat du calcul à l'ordre 2 inclus en Θ :

$$F(\Theta) \approx \frac{1}{2} m L^2 \rho_s^{(0)} v_{\Theta}^2 + F(0) + \text{ terme croisé}$$

dont on déduit la densité superfluide prenant en compte les phonons+vortex :

$$\rho_s = \rho_s^{(0)} - \frac{m(\rho_s^{(0)})^2}{k_{\rm B}T} \frac{1}{L^2} \iint \langle v_{s,x}(\mathbf{r}) v_{s,x}(\mathbf{r}') \rangle \, \mathrm{d}^2 r \, \mathrm{d}^2 r'$$

Réduction possible $ho_s^{(0)}
ightarrow
ho_s$ du fait des phonons et des vortex

Densité superfluide et position des vortex

On part de
$$\rho_s = \rho_s^{(0)} - \frac{m(\rho_s^{(0)})^2}{k_{\rm B}T} \frac{1}{L^2} \iint \langle v_{s,x}(\mathbf{r}) v_{s,x}(\mathbf{r}') \rangle \, \mathrm{d}^2 r \, \mathrm{d}^2 r'$$

et on utilise la décomposition du champ de vitesses $m{v}_s(m{r}) = m{v}_s^{\parallel}(m{r}) + m{v}_s^{\perp}(m{r})$ phonons vortex

Contribution des phonons :
$$\int \boldsymbol{v}^{\parallel}(\boldsymbol{r}) \, \mathrm{d}^2 r = \frac{\hbar}{m} \int \boldsymbol{\nabla} \theta \, \mathrm{d}^2 r = 0$$

Les phonons ne réduisent pas la densité superfluide !

Contribution des vortex : on a relié au §3 leur champ de vitesse à leur densité ρ_{v}

$$\rho_s = \rho_s^{(0)} + \frac{\pi^2 \hbar^2}{m k_{\rm B} T} (\rho_s^{(0)})^2 \int r^2 \langle \rho_v(\boldsymbol{r}) \rho_v(0) \rangle \, \mathrm{d}^2 r$$

ou encore : $\mathcal{D}_s = \mathcal{D}_s^{(0)} + \frac{\pi}{2} (\mathcal{D}_s^{(0)})^2 \int r^2 \langle \rho_v(\boldsymbol{r}) \rho_v(0) \rangle d^2 r$

Calcul perturbatif

On va évaluer $\mathcal{D}_s = \mathcal{D}_s^{(0)} + \frac{\pi}{2} (\mathcal{D}_s^{(0)})^2 \int r^2 \langle \rho_v(r) \rho_v(0) \rangle d^2 r$ à partir d'un développement en puissances de $y_0 \equiv \exp\left(-\frac{\epsilon_0}{k_{\rm B}T}\right)$ (fugacité d'un vx) **Rappel** : loi de probabilité pour l'élongation d'une paire $\mathcal{P}(r) \propto \left(\frac{1}{r}\right)^{\mathcal{D}_s^{(0)}}$ On en déduit :

$$\mathcal{D}_s = \mathcal{D}_s^{(0)} - 2\pi^2 (\mathcal{D}_s^{(0)})^2 y_0^2 \int_a^{+\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{\mathcal{D}_s^{(0)} - 3} \frac{\mathrm{d}r}{a}$$

où *a* représente l'échelle de la longueur en dessous de laquelle les fluctuations de phase et de densité sont prises en compte via $ho o
ho_s^{(0)}$

Le deuxième terme représente la réduction de la densité superfluide due à la présence de paires de vortex d'élongation supérieure à *a*

Ecriture équivalente :
$$\frac{1}{\mathcal{D}_s} = \frac{1}{\mathcal{D}_s^{(0)}} + 2\pi^2 y_0^2 \int_a^{+\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{\mathcal{D}_s^{(0)} - 3} \frac{\mathrm{d}r}{a}$$

30

Le principe de la renormalisation

On passe de $a \ a \ (1+\varepsilon)$ pour intégrer un peu plus de fluctuations dans $\mathcal{D}_s^{(0)}$

$$\frac{1}{\tilde{\mathcal{D}}_{s}^{(0)}} = \frac{1}{\mathcal{D}_{s}^{(0)}} + 2\pi^{2}y_{0}^{2} \int_{a}^{a(1+\varepsilon)} \left(\frac{a}{r}\right)^{\mathcal{D}_{s}^{(0)}-3} \frac{\mathrm{d}r}{a}$$

puis on fait une transformation d'échelle pour ramener a (1+ ε) sur a

$$\tilde{y}_0 = y_0 \ (1+\varepsilon)^{(4-\mathcal{D}_s^{(0)})/2}$$

On obtient alors une évolution couplée de $\left[\mathcal{D}_{s}^{(0)}, y_{0}\right]$ quand on répète cette procédure

$$\frac{\mathrm{d}[\mathcal{D}_s^{(0)}]^{-1}}{\mathrm{d}\varepsilon} = 2\pi^2 y_0^2 \qquad \qquad \frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(4 - \mathcal{D}_s^{(0)}\right) y_0$$

Vers quoi converge-t-on ?



Confirme la valeur critique universelle $\mathcal{D}_s = 4$

- Si on part de D_s > 4 avec une fugacité y₀ assez petite (un trou de vortex coûte de l'énergie), on finit avec D_s > 4 et y₀ = 0 : les vortex sont effacés.
- Si on part de $\mathcal{D}_s < 4$, alors on finit avec $\mathcal{D}_s = 0$: perte complète de superfluidité

Les fonctions thermodynamiques usuelles sont continues au point de transition

Les premières études avec des fluides quantiques

Expériences menées à l'Université de Cornell, groupe de J. Reppy, 1977-89

Film d'hélium de 1 à 10 couches atomiques adsorbées sur une feuille de mylar de surface de l'ordre du m²

Détection de la fraction superfluide par une expérience de « récipient tournant »





Sheet of Mylor 1/4 mil x1cm x 20 meter Rolled into a Jelly Roll Fréquence d'oscillation $\sim 2.6 \, \rm kHz$ mesurée avec une précision relative de 5 10^{-9}

(2 pico secondes)

La transition superfluide BKT avec un film d'hélium



La prise en compte de l'aspect dynamique (fréquence de mesure 2.6 kHz) conduit à un excellent accord théorie-expérience $\Delta D_s = 4$

Confirmation de la loi concernant le saut universel
En résumé

La transition BKT se produit entre deux types d'états



Loi universelle sur la valeur de la densité superfluide : $\mathcal{D}_s = \rho_s \lambda_T^2 \propto \frac{\rho_s}{T_c}$

A ce stade, nous n'avons pas d'information sur le lien entre T_c et la densité totale ρ

Fluides quantiques de basse dimension et transition de Kosterlitz-Thouless

La transition BKT explorée avec des gaz d'atomes ou de polaritons

Jean Dalibard

Chaire Atomes et rayonnement

Année 2016-17



Bilan des cours précédents

Fluide 2D de particules de Bose en interaction à courte portée

$$V(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) = \frac{\hbar^2}{m} \ \tilde{g} \ \delta(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)$$

 \tilde{g} : paramètre sans dimension caractérisant la force des interactions



Système uniforme : pas de condensation de Bose-Einstein à la limite thermodynamique Théorème général de Mermin-Wagner-Hohenberg

Mais il y a malgré tout une transition superfluide non conventionnelle ! Berezinskii - Kosterlitz - Thouless

Bilan (suite): la transition superfluide BKT



Transition induite par l'appariement des vortex en paires de circulations opposées



Au point de transition, saut « universel » de la densité superfluide

Bilan (fin) : le quasi-ordre à longue portée



 $G_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \langle \boldsymbol{r} | \hat{\rho} | \boldsymbol{r}' \rangle = \langle \hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r}) \ \hat{\psi}(\boldsymbol{r}') \rangle$ ne dépend que de $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ dans un système uniforme

Le quasi-ordre (algébrique) attendu à basse température est compatible avec le théorème de Mermin-Wagner-Hohenberg puisqu'on a toujours

$$G_1(r) \to 0$$
 quand $r \to \infty$

La caractérisation du point de transition par $D_s = 4$ est implicite :

$$\rho_s(T_c) \ \lambda_{T_c}^2 = 4$$

Quelle est la densité totale en ce point ?

Buts de ce cours

Caractériser la position du point critique en fonction des variables thermodynamiques usuelles :

> température *T*, potentiel chimique μ , densité ρ *Résultat qui va dépendre de la force des interactions*

Contraste avec le résultat 3D pour la condensation de Bose-Einstein:

$$\rho \lambda_T^3 = 2.612$$

 Décrire les études expérimentales faites jusqu'à maintenant avec des gaz d'atomes, de molécules, ou des systèmes hybrides lumière-matière (polaritons de cavité)

1.

Lois d'échelle au point critique BKT

Déterminer la valeur de la densité totale et du potentiel chimique au point critique, pour un paramètre d'interaction \tilde{g} donné

Champ classique et modes de Bogoliubov

On modélise l'état du système, $\Phi(m{r}_1,\ldots,m{r}_N)$, par l'état factorisé $\psi(m{r}_1)\ldots\psi(m{r}_N)$

Energie (fonctionnelle de Gross-Pitaevskii) :

$$E[\psi] = \frac{\hbar^2}{2m} \int \left[|\nabla \psi|^2 + \tilde{g} |\psi(\mathbf{r})|^4 \right] d^2r$$
$$N = \int |\psi(\mathbf{r})|^2 d^2r$$



7

Description de ce système à l'approximation de Bogoliubov, avec l'hypothèse de fluctuations de densité relativement faibles, ce qui exclut les vortex

- Etat fondamental correspondant à ψ uniforme $\psi = \sqrt{\frac{N}{L^2}} \qquad E_0 = \frac{\hbar^2}{2mL^2} \tilde{g}N^2$
- Modes propres indépendants caractérisés par leur vecteur d'onde q et leur fréquence ω_q \hbar

$$\omega_q = \frac{\hbar}{2m} \left[q^2 \left(q^2 + 4\tilde{g}\rho \right) \right]^{1/2} \qquad \rho = \frac{N}{L^2}$$

Coupure ultra-violette

$$\omega_q = \frac{\hbar}{2m} \left[q^2 \left(q^2 + 4\tilde{g}\rho \right) \right]^{1/2}$$



Cours 3 : l'approche champ classique n'est valable que si les modes sont significativement peuplés par les fluctuations thermiques :

$$n_{\omega} \gtrsim 1 \longrightarrow \hbar \omega \lesssim k_{\rm B} T$$
$$\frac{\hbar^2 q_{\rm max}^2}{2m} \sim k_{\rm B} T$$

Les modes $q > q_{max}$ seront supposés non peuplés : coupure « ultra-violette » sur toutes les intégrales Thermodynamique du gaz de Bose à l'approx. de Bogoliubov

Fonction de partition
$$\mathcal{Z} = \sum_{\text{config}} e^{-E_{\text{config}}/k_{\text{B}}T}$$

Energie libre : $F = -k_{\rm B}T\ln \mathcal{Z}$

 \rightarrow Fonctions thermodynamiques, par exemple : $\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,L^2}$

Bogoliubov : on décrit le gaz comme une collection d'oscillateurs indépendants

Fonction de partition d'un oscillateur (quantique ou classique) de pulsation ω

$$\mathcal{Z} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\epsilon_n/k_B T} \qquad \mathcal{Z} = \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{-\epsilon(x,p)/k_B T} dx dp$$
$$\operatorname{avec} \ \epsilon_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \qquad \operatorname{avec} \ \epsilon(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Dans les deux cas, pour les modes de basse énergie $\hbar\omega \lesssim k_{\rm B}T$: $\mathcal{Z} \approx \frac{k_{\rm B}T}{\hbar\omega}$

9

Thermodynamique à l'approximation de Bogoliubov (2)

Pour un oscillateur :
$$\mathcal{Z} = \frac{k_{\rm B}T}{\hbar\omega} \longrightarrow F = -k_{\rm B}T\ln\mathcal{Z} = -k_{\rm B}T\ln\left(\frac{k_{\rm B}T}{\hbar\omega}\right)$$

Energie libre : on somme la contribution des tous les modes indépendants

$$F(T, N, L) = E_0 - k_{\rm B}T \sum_{\boldsymbol{q}} \ln\left(\frac{k_{\rm B}T}{\hbar\omega_q}\right) \qquad \qquad \omega_q = \frac{\hbar}{2m} \left[q^2 \left(q^2 + 4\tilde{g}\rho\right)\right]^{1/2}$$

Passage d'une somme discrète à une intégrale :

ou encore

$$\sum_{\boldsymbol{q}} [\dots] \quad \rightarrow \quad \frac{L^2}{4\pi^2} \int [\dots] \, \mathrm{d}^2 q$$

A partir de cette expression de l'énergie libre, on peut calculer les autres fonctions thermodynamiques, par exemple :

$$\frac{\mu}{k_{\rm B}T} \approx \frac{\tilde{g}}{2\pi} \left[\mathcal{D} + \int_{0}^{q_{\rm max}} \frac{2q}{q^2 + 4\tilde{g}\rho} \,\mathrm{d}q \right]$$

:
$$\frac{\mu}{k_{\rm B}T} \approx \frac{\tilde{g}}{2\pi} \left[\mathcal{D} + \ln\left(\frac{\pi}{\tilde{g}\mathcal{D}}\right) \right] \qquad \text{validit}\acute{e}: \mathcal{D} > \ln\left(\frac{\pi}{\tilde{g}\mathcal{D}}\right)$$

invariance d'échelle

10

Densité totale et densité superfluide

On calcule la densité superfluide en utilisant la formule de Landau (cours 2015-16) qui décrit la réponse du fluide quand on met en mouvement son récipient :

$$\rho_s = \rho + \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\hbar^2}{2m} \int \frac{\mathrm{d}\mathcal{N}}{\mathrm{d}\epsilon} \ q^2 \ \mathrm{d}^2 q \qquad \qquad \text{(version 2D)}$$

 $\mathcal{N}(\epsilon)$: occupation d'un mode d'énergie ε (ici les modes de Bogoliubov)

On arrive à :
$$\mathcal{D}_s \approx \mathcal{D} - \ln\left(\frac{k_{\rm B}T}{2\mu}\right)$$

avec au point critique $\mathcal{D}_s = 4$ (résultat lié aux vortex, en dehors de Bogoliubov)

Le résultat au point critique $\mathcal{D} \approx 4 + \ln\left(\frac{k_{\rm B}T}{2\mu}\right)$, couplé à l'équation d'état $\frac{\mu}{k_{\rm B}T} \approx \frac{\tilde{g}}{2\pi} \left[\mathcal{D} + \ln\left(\frac{\pi}{\tilde{g}\mathcal{D}}\right)\right]$

permet de caractériser ce point critique, en particulier ses lois d'échelle

Lois d'échelle au point critique

Combinaison de l'équation d'état et de $\mathcal{D}_s = 4$

Densité dans l'espace des phases totale au point critique : $\mathcal{D}|_{\text{crit.}} \approx \ln\left(\frac{C_{\mathcal{D}}}{\tilde{q}}\right)$

 $C_{\mathcal{D}}$: constante numérique

Potentiel chimique au point critique :

$$\frac{\mu}{k_{\rm B}T}\Big|_{\rm crit.} \approx \frac{\tilde{g}}{\pi} \ln\left(\frac{\mathcal{C}_{\mu}}{\tilde{g}}\right)$$

 C_{μ} : constante numérique

Pour déterminer le plus précisément possible les constantes $C_{\mathcal{D}}$ et C_{μ} , il faut affiner le traitement des modes peu peuplés et aller au delà de l'approx de Bogoliubov

Prokofev & Svistunov (méthode Monte Carlo avec un champ classique) : $C_{\mathcal{D}} \approx 380 \qquad C_{\mu} \approx 13.2$ Validité de ce résultat obtenu par l'approche « champ classique »

Au point critique :

$$\mathcal{D} \approx \ln\left(\frac{360}{\tilde{g}}\right)$$

(280)

densité totale

densité superfluide

 $\mathcal{D}_s = 4$

Une condition nécessaire pour la validité de ce traitement est bien sûr :

$$\mathcal{D} > \mathcal{D}_s \longrightarrow \tilde{g} < 7$$

En pratique pour des gaz atomiques : $\tilde{g} \sim 0.01$ à 1 pour les polaritons de cavité : $\tilde{g} \sim 0.01$ à 0.05

Pour aller au delà, approches Monte Carlo quantiques : Holzmann & Krauth, Rançon & Dupuis, Pilati, Giorgini & Prokofev

2.

Le point critique dans un gaz atomique piégé

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^{2}r^{2} \qquad r^{2} = x^{2} + y^{2}$$

Condensation dans un piège harmonique 2D

Cours 2 : pour un gaz parfait dans un piège harmonique, la saturation des états excités se produit pour

$$N > N_{\rm c,ideal}$$
 $N_{\rm c,ideal} = \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{k_{\rm B}T}{\hbar\omega}\right)^2$

A la limite thermodynamique $N \to \infty$ $\omega \to 0$ $N\omega^2 = \text{constant}$ ce point est atteint pour la densité centrale $\rho(0) = \infty$

Impossible à réaliser pour un gaz en interaction

L'approximation de densité locale

Gaz à l'équilibre dans un piège, de température T et de potentiel chimique μ

On relie la densité en un point du piège et celle d'un gaz homogène caractérisé par

 $T_{\text{hom.}} = T$ $\mu_{\text{hom.}} = \mu - V(\boldsymbol{r})$



Le point critique BKT dans un piège

Quel nombre d'atomes faut-il mettre dans un piège pour que le gaz au centre de ce piège devienne superfluide ?

Approximation de densité locale :
$$\rho(0)\lambda_T^2 = \mathcal{D}_c = \ln\left(\frac{380}{\tilde{g}}\right)$$

Quantité finie, contrairement au seuil de la condensation de Bose-Einstein

En utilisant l'équation d'état trouvée plus haut, on trouve (Holzmann et al.) :

$$\frac{N_{\rm c,BKT}}{N_{\rm c,ideal}} \approx 1 + \frac{3\,\tilde{g}}{\pi^3}\ln^2\left(\frac{\tilde{g}}{16}\right) + \frac{3\,\tilde{g}}{8\pi^2}\left[15 + \ln\left(\frac{\tilde{g}}{16}\right)\right]$$

Quand le paramètre des interactions $\tilde{g} \to 0$, on trouve $\frac{N_{c,BKT}}{N_{c,ideal}} \to 1$

La condensation d'un gaz parfait 2D dans un piège harmonique peut être vu comme le cas limite de la transition plus générale de type BKT.

Expérience de Cambridge (groupe de Z. Hadzibabic)

Détection de la composante superfluide centrale via la distribution en impulsion





en impulsion

Expérience faite avec 39 K : une résonance de Feschbach permet de varier la longueur de diffusion 3D, et donc \tilde{g}

Expérience de Cambridge (suite)



Fletcher et al. Phys. Rev. Lett. **114** 255302 (2015)

Données expérimentales en excellent accord avec la loi :

$$\frac{N_{\rm c,BKT}}{N_{\rm c,ideal}} \approx 1 + \frac{3\,\tilde{g}}{\pi^3}\ln^2\left(\frac{\tilde{g}}{16}\right) + \frac{3\,\tilde{g}}{8\pi^2}\left[15 + \ln\left(\frac{\tilde{g}}{16}\right)\right]$$

Confirme l'idée que la condensation à 2D d'un gaz idéal est la limite (singulière) de la transition BKT pour un gaz en interaction.

3.

Quasi-ordre en phase et superfluidité dans un gaz atomique

La fonction $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r'})$ dans un piège

Pour un gaz 2D uniforme dans le régime superfluide, on sait que

$$G_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \langle \hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r}) \ \hat{\psi}(\boldsymbol{r}') \rangle \quad \propto \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{\eta}} \qquad \qquad \eta = \frac{1}{\mathcal{D}_s} = \frac{1}{\rho_s \lambda_T^2}$$

Dans un piège, la variation spatiale de la densité totale et de la densité superfluide vient compliquer l'analyse

Petrov, Holzmann, Shlyapnikov (2000)

On doit se contenter la plupart du temps d'une analyse semi-quantitative...

Mesure de $G_1(r, r')$ par interférométrie atomique

On utilise deux plans parallèles, de mêmes paramètres thermodynamiques T et μ , mais indépendants : pas de relation de phase prédéfinie entre eux

ENS 2006





Signal d'interférence entre ondes de matières issues des deux plans :

$$\rho(\mathbf{r}) \propto |\psi_a|^2 + |\psi_b|^2 + \left(\psi_a \psi_b^* e^{i2\pi z/D_z} + c.c.\right) \qquad D_z = \frac{ht}{md_z}$$

Contraste local : $C(x,y) = \psi_a(x,y) \ \psi_b^*(x,y)$

Moyenne nulle : $\langle \psi_a(x,y) \rangle = \langle \psi_b(x,y) \rangle = 0$, mais quelle variance ?

Mesure de $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r'})$ par interférométrie atomique (2)



Contraste local

 $C(x,y) = \psi_a(x,y) \ \psi_b^*(x,y)$

Fonction de corrélation :
$$\langle C(\boldsymbol{r}) \ C^*(\boldsymbol{r}') \rangle = \langle \psi_a(\boldsymbol{r}) \ \psi_b^*(\boldsymbol{r}) \ \psi_a^*(\boldsymbol{r}') \ \psi_b(\boldsymbol{r}') \ \rangle$$

$$= \langle \psi_a(\boldsymbol{r}) \ \psi_a^*(\boldsymbol{r}') \ \rangle \ \langle \psi_b^*(\boldsymbol{r}) \ \psi_b(\boldsymbol{r}') \ \rangle$$
$$= |G_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')|^2$$

- Permet de détecter la variation rapide du comportement de G₁ au voisinage du point de transition
- Permet de détecter l'apparition des vortex à la transition



2013, Séoul, groupe de Y-I Chin : vortex « thermiques » observés en imagerie selon z

Fonction de corrélation G_1 et distribution en impulsion

Partant de la fonction de corrélation $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r'})$ dans un fluide non homogène, on définit la fonction de corrélation moyenne

$$\bar{G}_1(\boldsymbol{r}) = \int G_1\left(\boldsymbol{R} + \frac{\boldsymbol{r}}{2} , \boldsymbol{R} - \frac{\boldsymbol{r}}{2}\right) \, \mathrm{d}^2 R$$

On trouve alors (quelle que soit la force des interactions) : $\bar{G}_1(\mathbf{r}) \stackrel{\text{T.Fourier}}{\longleftrightarrow} N(\mathbf{p})$

Heidelberg 2015 : mesure de la distribution en impulsion d'un gaz piégé d'atomes de ⁶Li (fermions) au voisinage d'une résonance de Feshbach : gaz de molécules bosoniques de ⁶Li₂



Fonction de corrélation G_1 et distribution en impulsion

Transformée de Fourier de la distribution en impulsion



Qualité de l'ajustement:

- par une loi de puissance
- par une exponentielle



Murthy et al. Phys. Rev. Lett. 115 010401 (2015)

Les données à basse température semblent privilégier un comportement algébrique en $r^{-\eta}$, mais....

... l'exposant η que l'on déduit des ajustements peut atteindre 1.5, alors que la théorie BKT prédit $\eta = 1/D_s < 1/4$???

Boettcher & Holzmann 2016 : contribution importante de la zone périphérique du piège, dans laquelle le gaz n'est pas superfluide, même si le centre l'est.

Mouvement d'une impureté

Sonde locale de la superfluidité, avec une impureté formée par un « trou de potentiel » créé par un faisceau laser

- ENS 2012 pour des atomes de rubidium
- Hambourg 2015 (groupe de H. Moritz) pour des molécules ⁶Li₂ en interaction forte



Excellent accord avec la prédiction théorique $\frac{\mu_{\text{loc}}}{k_{\text{B}}T} \approx \frac{\tilde{g}}{\pi} \ln$

$$\ln\left(\frac{1}{\tilde{g}}\right)$$

Un mode collectif particulier : le mode « ciseaux »

Idée issue de la physique nucléaire : Pour tester la superfluidité des noyaux lourds, on cherche un mode d'oscillation particulier des protons et des neutrons

Adapté au cas des gaz atomiques piégés par Guery-Odelin & Stringari (1999)

Piège harmonique non isotrope : $\omega_x > \omega_y$ On étudie l'oscillation de $\langle xy \rangle$





- Pour un gaz thermique, ce mouvement fait intervenir deux fréquences, par exemple $|\omega_x \pm \omega_y|$ pour un gaz quasi-idéal
- Pour un gaz superfluide, mouvement non amorti et monofréquence $(\omega_x^2+\omega_y^2)^{1/2}$

Mode ciseaux localisé

Paris-Nord Villetaneuse (2016), groupe de Hélène Perrin

Analyse de la moyenne locale de $\langle xy \rangle$



Bon accord avec l'approximation de densité locale

$$\frac{\mu_{\rm loc}}{k_{\rm B}T} \approx \frac{\tilde{g}}{\pi} \ln\left(\frac{\mathcal{C}_{\mu}}{\tilde{g}}\right)$$

4.

Les polaritons de cavité

Les deux composantes en présence

• Lumière dans une cavité de faible épaisseur à l'approximation paraxiale (cf. cours 2)

Relation de dispersion :

$$\begin{split} \hbar \omega_{\rm ph}(\boldsymbol{k}_{\perp}) &\approx \hbar \omega_{0,\,\rm ph} + \frac{\hbar^2 \boldsymbol{k}_{\perp}^2}{2m_{\rm ph}} \\ m_{\rm ph} &\sim \text{quelques } 10^{-5} \, m_e \end{split}$$

Cavité de facteur de qualité 10⁴



-> durée de vie d'un photon dans la cavité : quelques dizaines de picosecondes

 Matière : paires liées électron-trou (excitons) dans un puits quantique d'épaisseur < 10 nm : gel du mouvement selon la direction z

$$\hbar\omega_{\rm ex}(\boldsymbol{k}_{\perp}) = \hbar\omega_{0,\,{\rm ex}} + \frac{\hbar^2 \boldsymbol{k}_{\perp}^2}{2m_{\rm ex}} \qquad \qquad m_{\rm ex} = m_e + m_h$$

considéré ici comme une particule bosonique

L'hybridation lumière - matière



Le couplage conserve l'impulsion : système à deux états pour chaque $\,k_{\perp}$

$$\hat{H}(\boldsymbol{k}_{\perp}) = \hbar \begin{pmatrix} \omega_{\rm ph}(\boldsymbol{k}_{\perp}) & \Omega \\ \Omega & \omega_{\rm ex}(\boldsymbol{k}_{\perp}) \end{pmatrix} \qquad \text{couplage fort}$$

Au voisinage du minimum de la branche basse :

- masse effective $~\sim 2\,m_{
 m ph}$
- interaction non négligeable du fait de la contribution excitonique

 $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\text{lum.}\rangle + |\text{mat.}\rangle \right)$

 $\lambda_T^2 = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_{\rm P}T}$

Le fluide de polaritons

Régime « forcé » :

- Irradiation laser qui crée en permanence des paires électron trou
- Les photons s'échappent de la cavité après quelques dizaines de picosecondes



Kasprzak et al., Nature **443** 409 (2006)

Atteinte d'un régime stationnaire bien décrit par une équation de Gross-Pitaevskii généralisée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m_{\text{eff}}} \nabla^2 \psi + \frac{\hbar^2 \tilde{g}}{m_{\text{eff}}} |\psi|^2 \psi - i\frac{\gamma}{2} \psi + \Gamma_{\text{pump}} \\ \tilde{g} &= 0.01 \ - \ 0.05 \end{aligned}$$

Le terme de pompage peut décrire un processus cohérent ou incohérent

Le quasi-ordre à longue portée avec des polaritons

- 2010, Marcoussis (groupe de J. Bloch) : cohérence dans un système 1D
- 2012 2014, Stanford & Tokyo (groupe de Y. Yamamoto) : étude de gaz 2D

Roumpos et al, PNAS **109** 6467 (2012)



33

Le quasi-ordre à longue portée avec des polaritons (2)

B

 $^{2.4 \times \mathsf{P}_{\mathsf{th}}} \mathrm{R} - \mathcal{A}_{2\pi}$ 2012 : ordre algébrique mais avec un (mщ) ү exposant beaucoup trop grand x (μm) $G_1({m r},-{m r}) \propto rac{1}{r^\eta} \hspace{0.5cm} ext{avec} \hspace{0.5cm} \eta=1.2$ Roumpos et al, PNAS 109 6467 (2012) dépasse la borne trouvée pour la théorie BKT : $\eta = \frac{1}{D_{e}} < \frac{1}{4}$ Explication proposée : cette borne ne s'applique pas aux systèmes ouverts 2014 par le même groupe, avec une modification de la forme du faisceau de pompe produisant les excitons :

$$\eta_{
m max} \lesssim 0.25$$

Quelle limite thermodynamique pour les fluides de polaritons ?

Altman et al (2015) :

Le fait que le système soit ouvert change radicalement la nature du problème BKT

Equation d'évolution pour la phase :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D\nabla^2 \theta + \frac{\lambda}{2} \left(\boldsymbol{\nabla} \theta \right)^2 + \zeta(\boldsymbol{r}, t) \qquad \qquad \boldsymbol{\zeta}: \text{ bruit } \boldsymbol{\ast} \text{ blanc } \boldsymbol{\ast}$$

- Si λ =0, on obtient une équation de diffusion ordinaire et la théorie BKT s'applique
- Si λ n'est pas nul (ce qui est généralement le cas), équation KPZ (Kardar-Parisi-Zhang)

Lors du passage par le groupe de renormalisation, le terme non linéaire en λ finit toujours par dominer : destruction du quasi-ordre à longue portée

On attend alors une décroissance exponentielle de $G_1(r)$ à longue distance
Polaritons autour d'un obstacle

2009 : LKB-UPMC (groupe de A. Bramati et E. Giacobino)

Création du fluide de polariton avec une vitesse non nulle (pompage cohérent avec un angle d'incidence non nul)

vitesse : $6 \ 10^5 \ m/s$

Ecoulement autour d'un défaut statique apparu lors de la croissance de l'échantillon



basse densité : 1 μm⁻¹



haute densité : 40 μ m⁻¹

Absence de sillage à haute densité, signe d'un écoulement superfluide.

vitesse du son : 2 10⁶ m/s

En résumé

Les fluides quantiques à base d'atomes, de molécules ou de polaritons permettent d'étudier quantitativement plusieurs caractéristiques importantes de la physique 2D

- La position du point critique
- La démonstration d'un comportement superfluide
 - mouvement d'une impureté
 mode collectif (ciseaux)
- La visualisation des vortex



Prolongements importants :

- Influence d'un potentiel désordonné (cf. texte écrit du cours 5)
- Equation d'état du fluide (cf. cours 6)

Invariance d'échelle, « anomalies quantiques »



Fluides quantiques de basse dimension et transition de Kosterlitz-Thouless

Invariance d'échelle classique, anomalies quantiques

Jean Dalibard

Chaire Atomes et rayonnement

Année 2016-17



Bilan des cours précédents

Fluide 2D de particules de Bose en interaction à courte portée

Description du fluide en termes de champ classique

$$\Phi(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_N) \longrightarrow \psi(\boldsymbol{r}_1)\ldots\psi(\boldsymbol{r}_N)$$

Une transition superfluide peut se produire dans ce milieu, en dépit du théorème de Mermin-Wagner-Hohenberg.

Transition pilotée par les défauts topologiques : appariement des vortex







Bilan (suite) : le point de transition



$$\mathcal{D}_{\rm crit} \approx \ln\left(\frac{380}{\tilde{g}}\right)$$

 \tilde{g} : paramètre sans dimension caractérisant la force des interactions à 2D

$$\frac{\mu}{k_{\rm B}T}\Big|_{\rm crit.} \approx \frac{\tilde{g}}{\pi} \ln\left(\frac{13.2}{\tilde{g}}\right)$$

La caractérisation du point de transition se fait uniquement en fonction du paramètre sans dimension $\,\mu/k_{
m B}T$

Bilan (fin) : l'équation d'état

Equation d'état du fluide de Bose à 2D établie dans deux régimes limites

• Régime très dilué, interactions négligeables

$$\mathcal{D} = -\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-\mu/k_{\mathrm{B}}T}\right)$$

• Régime dense, approximation de Bogoliubov

$$\mathcal{D} = \frac{2\pi}{\tilde{g}} \frac{\mu}{k_{\rm B}T} - \ln\left(\frac{k_{\rm B}T}{\mu}\right) + \dots$$

Dans les deux régimes, \mathcal{D} est fonction de $\mu/k_{\rm B}T$ seulement, et pas de μ et T séparément comme c'est le cas à 1D et 3D.

Hasard ? Non, conséquence d'une invariance d'échelle !

But de ce cours

Comprendre l'origine de cette invariance d'échelle

Valable pour une catégorie de potentiels d'interaction

$$V(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \propto rac{1}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|^2} \qquad V(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \propto \delta^{(2)}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)$$

- Potentiel δ à deux dimensions et mécanique quantique ?

Nécessité d'une régularisation, anomalie quantique

Aspect dynamique de l'invariance d'échelle : le mode de respiration d'un gaz piégé

1.

Invariance d'échelle à l'équilibre thermodynamique

Les potentiels thermodynamiques



Variables thermodynamiques pertinentes : T, N, V

Potentiel thermodynamique correspondant : énergie libre de Helmoltz

F(T, N, V) différentielle : $dF = -S dT + \mu dN - P dV$

Exemple : définition de la pression

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N}$$

Les potentiels thermodynamiques



Variables thermodynamiques pertinentes : T, μ , V

Potentiel thermodynamique correspondant : énergie libre de Landau

 $\Omega(T, \mu, V) = F(T, N, V) - \mu N$ Transformation de Legendre

différentielle : $d\Omega = -S dT - N d\mu - P dV$

Exemple : définition de la pression $P = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial V}\right)_{T,\mu}$

Equation d'état d'un système thermodynamique

Exprime une grandeur physique (par exemple la pression) en fonction des variables thermodynamiques d'un des ensembles (canonique, grand-canonique, etc.)

Exemple : gaz parfait dans l'ensemble canonique (T, N, V)

$$P = \frac{Nk_BT}{V}$$

Connaissant une grandeur, on en déduit les autres en utilisant les dérivées croisées (relations de Maxwell) :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} \qquad dF = -S \, dT + \mu \, dN - P \, dV$$
$$\longrightarrow \quad \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{N,V} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,N} \qquad \text{dont on déduit l'entropie...}$$

Loi d'échelle homogène

Une première invariance d'échelle...

Fluide homogène 1D, 2D, 3D,... avec des interactions à courte portée Description dans l'ensemble grand-canonique, de variables T, μ , V



L'énergie libre de Landau Ω doit être proportionnelle au volume, à T et μ fixés

$$\lambda \Omega(T, \mu, V) = \Omega(T, \mu, \lambda V) \longrightarrow \Omega = V \frac{\partial \Omega}{\partial V}$$
$$\longrightarrow \Omega(T, \mu, V) = -V P(T, \mu) \qquad 10$$

Invariance d'échelle en $\mu / k_{\rm B}T$: le cas du gaz parfait

La densité dans l'espace des phases du gaz parfait ne dépend que du rapport $\mu / k_{\rm B}T$ Invariant dans le changement : $T \longrightarrow \frac{1}{\lambda^2}T \qquad \mu \longrightarrow \frac{1}{\lambda^2}\mu$

Explication au niveau de la fonction de partition grand-canonique (classique) :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\rm GC} &= \sum_{N} \frac{1}{N!} \int \prod_{j} \frac{\mathrm{d}^2 r_j \mathrm{d}^2 p_j}{(2\pi\hbar)^2} &\exp\left[-\frac{E(\{\boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{p}_j\}) - \mu N}{k_{\rm B}T}\right] \\ \text{avec pour le gaz parfait : } & E(\{\boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{p}_j\}) = \sum_{j} \frac{\boldsymbol{p}_j^2}{2m} \end{aligned}$$

Si l'on fait le changement d'échelle sur les positions et les impulsions

$$\boldsymbol{r}_j \longrightarrow \lambda \boldsymbol{r}_j \qquad \boldsymbol{p}_j \longrightarrow \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{p}_j \qquad \text{alors} \quad E(\{\boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{p}_j\}) \longrightarrow \frac{1}{\lambda^2} E(\{\boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{p}_j\})$$

et chaque terme de la somme sur N est inchangé dans $\mathcal{Z}_{
m GC}$

Invariance d'échelle en $\mu / k_{\rm B}T$: le cas du fluide en interaction

Extension du raisonnement précédent en présence d'interactions binaires :

$$E = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(r_i - r_j) = E_{\text{cin}} + E_{\text{int}}$$

Comment se comporte le terme d'interaction dans la loi d'échelle position - impulsion



On conservera l'invariance d'échelle trouvée pour le gaz parfait si et seulement si :

$$E_{\rm int} \longrightarrow \frac{1}{\lambda^2} E_{\rm int}$$
 c'est-à-dire $V(\lambda \boldsymbol{r}) = \frac{1}{\lambda^2} V(\boldsymbol{r})$

Quels sont les fluides invariants d'échelle ?

On veut que $E_{\rm int} \longrightarrow \frac{1}{\lambda^2} E_{\rm int}$, qui s'obtient en prenant $V(\lambda \boldsymbol{r}) = \frac{1}{\lambda^2} V(\boldsymbol{r})$

- Le gaz parfait, à 1D, 2D, 3D,...
- Un fluide avec des interactions en $\frac{1}{r^2}$

Lien avec les modèles de Calogero - Sutherland - Moser

Interaction de contact à deux dimensions

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{\hbar^2}{m} \tilde{g} \,\delta^{(2)}(\boldsymbol{r}) \qquad \qquad \delta^{(2)}(\lambda \,\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\lambda^2} \,\delta^{(2)}(\boldsymbol{r})$$

Dans tous ces cas, l'invariance de la fonction de partition entraîne l'invariance de la densité dans l'espace des phases :

$$T \longrightarrow \frac{1}{\lambda^2} T$$
 et $\mu \longrightarrow \frac{1}{\lambda^2} \mu$ entraîne $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ i.e., $\mathcal{D} = f\left(\frac{\mu}{k_{\rm B}T}\right)$

Gaz 2D : invariance d'échelle et analyse dimensionnelle

Dans un gaz 3D, l'interaction de contact est caractérisée par la longueur de diffusion a

$$V(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = \frac{4\pi\hbar^2}{m} \ a \ \delta^{(3)}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \qquad \text{Echelle d'énergie}: \ \epsilon = \frac{\hbar^2}{ma^2}$$

La densité dans l'espace des phases peut alors s'écrire comme :

$$\mathcal{D}(T,\mu) = \mathcal{F}\left(\frac{k_{\rm B}T}{\epsilon},\frac{\mu}{\epsilon}\right)$$

A 2D, l'interaction de contact est caractérisée par le nombre sans dimension \tilde{g}

$$V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{\hbar^2}{m} \tilde{g} \, \delta^{(2)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \qquad \text{pas d'échelle d'énergie associée}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{D}(T, \mu) = \mathcal{F}\left(\frac{k_{\rm B}T}{\mu}, \tilde{g}\right)$$

L'invariance d'échelle est liée à l'absence de longueur intrinsèque dans le problème

Un autre exemple d'invariance d'échelle

Gaz 3D de fermions de spin 1/2 avec des interactions binaires $V(r_i - r_j)$ au voisinage d'une résonance de Feshbach

Amplitude de diffusion : $f(k) = \frac{-a}{1 + ika}$

Situation « normale » : a est finie et on prend la limite $\lim_{k \to 0} f(k) = -a$

Mais une résonance de diffusion peut conduire à $|a| = +\infty$

 $f(k) = \frac{i}{k}$: limite unitaire

Perte de l'échelle de longueur associée aux interactions : invariance d'échelle

Attention : cela ne marche pas pour les bosons car le problème bosonique à trois corps vient réintroduire une échelle de longueur via les états d'Efimov

2.

Mesures de l'équation d'état

L'approximation de densité locale



Grâce aux ailes de la distribution, on détermine T et μ en les ajustant par la loi

$$\rho(\mathbf{r}) = -\lambda_T^{-2} \ln\left(1 - e^{-\mu_{\text{loc}}(r)/k_{\text{B}}T}\right) \qquad \qquad \lambda_T^{-2} \propto T$$
$$\mu_{\text{loc}}(r) = \mu - V(r)$$

Vérification de l'invariance d'échelle

Chicago & ENS, 2011-2014



Tous les profils de densité mesurés pour différents couples (T, μ) se superposent quand on trace la densité dans l'espace des phases en fonction de $\mu_{loc}/k_{\rm B}T$

Excellent accord avec la prédiction de champ classique

Le cas des interactions fortes

Expérience de Heidelberg (2016) avec des molécules ⁶Li₂



- Déviation significative des résultats expérimentaux par rapport à la théorie de champ classique
- Bon accord avec les simulations Monte Carlo quantiques

Universalité autour du point critique



Relie entre eux les résultats obtenus pour différentes forces d'interaction \tilde{g}

20

3.

Le potentiel de contact $\,\delta\,$ à deux dimensions

L'invariance d'échelle est liée à l'absence d'échelle de longueur de la distribution de Dirac

Mais est-ce correct dans le cadre de la mécanique quantique ?

Non : anomalie quantique

Diffusion par un potentiel δ

Collision à deux corps avec $V(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$



Diffusion de la particule relative par le potentiel $V({m r})$

Equation de Schrödinger indépendante du temps :

$$\hat{H} \ \psi(\mathbf{r}) = E \ \psi(\mathbf{r}) \qquad \begin{cases} E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r} & m_r = m/2 \\ V(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{m} \tilde{g} \ \delta^{(2D)}(\mathbf{r}) \end{cases}$$

Cette équation différentielle s'écrit : $\left(\nabla^2 + k^2 \right) \psi(\mathbf{r}) = \tilde{g} \, \delta(\mathbf{r}) \, \psi(\mathbf{r})$

Passage dans l'espace de Fourier : $\psi(\mathbf{r}) \xleftarrow{\mathsf{TF}} \phi(\mathbf{q})$

$$(q^2 - k^2) \phi(\boldsymbol{q}) = -\tilde{g} \psi(0)$$

22

Amplitude de diffusion à 2D pour le potentiel de contact

Equation de Schrödinger en point de vue de Fourier : $(q^2 - k^2) \phi(q) = -\tilde{g} \psi(0)$

Pour une onde plane initiale, cette équation se résout en :

$$\phi(\boldsymbol{q}) = (2\pi)^2 \, \delta(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{k}) - \frac{\tilde{g} \, \psi(0)}{q^2 - k^2 - i\varepsilon}$$

onde incidente $e^{i \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}}$ onde cylindrique sortante : $-i\varepsilon$

amplitude de diffusion : $f(k) = \tilde{g} \psi(0)$

Equation d'autocohérence sur $\psi(0)$:

Transformée de Fourier inverse : $\psi(0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \phi(q) d^2q$ et $\phi(q)$ s'exprime elle-même en fonction de $\psi(0)$:

$$\psi(0) = 1 - \frac{\tilde{g}\,\psi(0)}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{q^2 - k^2 - i\varepsilon} \,d^2q$$

Pourquoi il faut régulariser la distribution de Dirac à 2D

Equation d'autocohérence :
$$\psi(0) = 1 - \frac{\tilde{g}\psi(0)}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{q^2 - k^2 - i\varepsilon} d^2q$$

A deux ou trois dimensions, cette intégrale diverge aux grandes valeurs de q

On met donc une coupure « ultraviolette » à la valeur Q

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{q^2 - k^2 - i\varepsilon} \, d^2 q \quad \approx \quad \frac{1}{2\pi} \ln(Q/k) \; + \; \frac{i}{4}$$

On peut alors calculer $\psi(0)$ et l'amplitude de diffusion $f(k) = \tilde{g} \ \psi(0)$

$$f(k) = \frac{1}{\frac{1}{2\pi}\ln(1/ka_2) + \frac{i}{4}} \qquad a_2 = \frac{e^{-2\pi/\tilde{g}}}{Q}$$

Introduction d'une échelle de longueur a_2 liée aux interactions

Brise l'invariance d'échelle

Exemple (simple) d'une « anomalie quantique »

Phénomène bien connu en théorie quantique des champs

On part d'un système qui possède une symétrie exacte au niveau classique

Ici, l'invariance d'échelle pour un gaz avec l'interaction $~ ilde{g}\int |\psi(m{r})|^4~\mathrm{d}^2r$

- On quantifie le problème
- Cette quantification nécessite une régularisation pour éliminer certaines divergences Ici, la régularisation de l'interaction de contact $\tilde{g} \, \delta(\mathbf{r})$
- Dans la version régularisée, la symétrie initiale est perdue

Equation d'état du gaz 2D à température nulle

Dans le cadre de la théorie de champ classique :

$$\mathcal{D} = f\left(\frac{\mu}{k_{\rm B}T}\right) \qquad \longrightarrow \qquad \rho \propto T \ f\left(\frac{\mu}{k_{\rm B}T}\right)$$

limite $T \rightarrow 0$: $\rho \propto \mu$ loi de Thomas-Fermi

Au delà de l'approximation de champ classique, développement en fonction du paramètre

$$\epsilon = rac{1}{\ln(E_2/\mu)}$$
 $E_2 = rac{\hbar^2}{ma_2^2}$ a_2 : longueur de diffusion 2D

valable dans la limite $\ \epsilon \ll 1$, c'est-à-dire $\ \mu \ll E_2$

$$\rho = \frac{m\mu}{4\pi\hbar^2} \ln\left(\frac{E_2}{\mu}\right)$$

(voir par exemple Mora-Castin 2009)

Correction mesurée à Chicago (2013)

4.

Le mode de respiration d'un gaz piégé



$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

Pitaevskii & Rosch (1997)

Le point de vue « ondulatoire »

On part d'une solution statique de l'équation de Gross-Pitaevskii

$$\begin{split} \mu \,\psi_0(\boldsymbol{r}) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_0 \; + \; \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \,\psi_0(\boldsymbol{r}) \; + \; \frac{\hbar^2}{m} \,\tilde{g} \,|\psi_0(\boldsymbol{r})|^2 \,\psi_0(\boldsymbol{r}) \\ \rho_0(\boldsymbol{r}) &= |\psi_0(\boldsymbol{r})|^2 \end{split}$$

On peut alors fabriquer une famille infinie de solutions exactes de l'équation dépendant du temps, ces solutions vérifiant

$$\rho(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\lambda^2(t)} \ \rho_0\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda(t)}\right) \qquad \qquad \ddot{\lambda}(t) = \omega^2 \left[\frac{1}{\lambda^3(t)} - \lambda(t)\right]$$

- Pas d'amortissement
- valable quelle que soit l'amplitude de $\,\lambda\,$

Spécifique du cas 2D : comportement identique de E_{cin} et E_{int} dans le changement d'échelle

Le point de vue « algébrique »

Les trois énergies en présence

$$\hat{H}_{\text{cin}} = \sum_{j} \frac{\hat{\boldsymbol{p}}_{j}^{2}}{2m} \qquad \hat{H}_{\text{int}} = \sum_{i < j} U\left(\hat{\boldsymbol{r}}_{i} - \hat{\boldsymbol{r}}_{j}\right) \qquad \hat{H}_{\text{trap}} = \sum_{j} \frac{1}{2}m\omega^{2}\hat{\boldsymbol{r}}_{j}^{2}$$

On construit les trois opérateurs :

$$\hat{L}_{1} = \frac{1}{2\omega} \left(\hat{H}_{cin} + \hat{H}_{int} - \hat{H}_{trap} \right)$$

$$\hat{L}_{2} = \frac{1}{4} \sum_{j} \left(\hat{r}_{j} \cdot \hat{p}_{j} + \hat{p}_{j} \cdot \hat{r}_{j} \right)$$

$$\hat{L}_{3} = \frac{1}{2\omega} \left(\hat{H}_{cin} + \hat{H}_{int} + \hat{H}_{trap} \right) \longrightarrow \frac{1}{2\omega} \hat{H}_{tot}$$

On a alors une algèbre particulièrement simple si $U(\lambda \boldsymbol{r}) = \frac{1}{\lambda^2} U(\boldsymbol{r})$

$$[\hat{L}_1, \hat{L}_2] = -i\hbar \hat{L}_3$$
 $[\hat{L}_2, \hat{L}_3] = i\hbar \hat{L}_1$ $[\hat{L}_3, \hat{L}_1] = i\hbar \hat{L}_2$

« Presque » un moment cinétique : SO(3) → SO(2,1)

Le point de vue « algébrique » (suite)

Partant de $[\hat{L}_1, \hat{L}_2] = -i\hbar \hat{L}_3$ $[\hat{L}_2, \hat{L}_3] = i\hbar \hat{L}_1$ $[\hat{L}_3, \hat{L}_1] = i\hbar \hat{L}_2$ on adopte une technique similaire à celle utilisée pour le moment cinétique

$$\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_1 \pm i\hat{L}_2$$
 $[\hat{L}_3, \hat{L}_{\pm}] = \pm\hbar \hat{L}_{\pm}$

Partant d'un état propre de $\hat{L}_3 = \hat{H}_{tot}/2\omega$, c'est-à-dire $\hat{L}_3 |\psi\rangle = \frac{E}{2\omega} |\psi\rangle$,

on construit par action répétée de $\,\hat{L}_{+}$ une « tour » d'états d'énergie $\,E+n\,2\hbar\omega$

$$\hat{L}_{3}\left(\hat{L}_{+}|\psi\rangle\right) = \hat{L}_{+}\left(\hat{L}_{3}|\psi\rangle\right) + \hbar\hat{L}_{+}|\psi\rangle$$
$$= \left(\frac{E}{2\omega} + \hbar\right)\left(\hat{L}_{+}|\psi\rangle\right)$$

Cet ensemble d'états indépendants correspond au mode monopolaire avec une amplitude arbitraire

L'anomalie quantique

La régularisation du potentiel en $\delta(\mathbf{r})$ entraîne que l'algèbre des trois opérateurs \hat{L}_1 , \hat{L}_2 , \hat{L}_3 n'est plus fermée

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] \neq \pm i\hbar \hat{L}_k$$
 si $U(\lambda \mathbf{r}) \neq \frac{1}{\lambda^2} U(\mathbf{r})$

- Le mode monopolaire ne se produit plus à la pulsation 2ω

Olshanii *et al.*, 2010:
$$\frac{\delta \omega_{\text{monop.}}}{2\omega} = \frac{\tilde{g}}{8\pi\sqrt{2}}$$
 pour $\tilde{g} \ll 1$

L'oscillation de ce mode monopolaire est amortie

Recherche expérimentale de cette anomalie

ENS (2001): expériences sur un cigare allongé

interactions faibles : pas de trace d'anomalie



 $\omega_{\text{monop.}} = 2\omega$ et très grand facteur de qualité (> 2000)



Taylor & Randeria (2012) : compensation « fortuite » de deux contributions différentes à l'effet de l'anomalie quantique sur ce mode monopolaire

Bilan global pour cette série de cours

De Peierls à Berezinskii - Kosterlitz - Thouless



Peierls suivi de Mermin - Wagner -Hohenberg : absence de brisure d'une symétrie continue dans un système de basse dimension à $T \neq 0$ (inter. à courte portée)

Pas de cristal, pas de condensat de Bose-Einstein,...

BKT : il y a malgré tout possibilité d'une transition de phase non conventionnelle en présence d'interactions

Ordre orientationnel, gaz de Bose 2D superfluide

La transition BKT dans un fluide de bosons

Etude faite dans le cadre d'une approximation de champ classique

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})} e^{i\theta(\mathbf{r})}$$
 champ de vitesse : $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta(\mathbf{r})$

Modélisation des interactions entre particules par un potentiel de contact

$$V(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = \frac{\hbar^2}{m} \tilde{g} \,\delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$$

En dépit de l'utilisation d'un méthode de champ classique, il reste une quantification dans cette étude :

$$\oint \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\hbar}{m} 2\pi n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Notion de « défaut topologique » (vortex) sur laquelle la théorie BKT se construit
L'appariement des défauts topologiques



Au point de transition, saut « universel » de la densité superfluide

Caractérisation du point critique à partir de l'équation d'état du gaz :

$$\mathcal{D}_{\text{crit}} \approx \ln\left(\frac{380}{\tilde{g}}\right) \qquad \frac{\mu}{k_{\text{B}}T}\Big|_{\text{crit.}} \approx \frac{\tilde{g}}{\pi} \ln\left(\frac{13.2}{\tilde{g}}\right)$$

Bon accord avec les expériences

Plus généralement, cette équation d'état présente une invariance d'échelle :

$$\mathcal{D}(T,\mu) = \mathcal{F}\left(\frac{k_{\rm B}T}{\mu}\right)$$

Bon accord avec les expériences

Au delà de l'approche champ classique

Nécessaire quand le paramètre \tilde{g} devient de l'ordre de 1

Il faut alors régulariser le potentiel de contact Introduction d'une échelle de longueur qui vient briser l'invariance d'échelle

La transition BKT est toujours présente, mais sa description théorique précise passe alors par des méthodes de simulations Monte Carlo quantiques

Existence d'une manifestation dynamique simple de l'invariance d'échelle : le mode de respiration d'un gaz piégé

A priori un bon candidat pour détecter l'anomalie quantique, mais reste pour l'instant en deçà des précisions de mesure...

Et la suite ? Cours 2017-18

La matière topologique et son exploration avec les gaz quantiques

Deuxième volet du prix Nobel 2016

Comment fabriquer l'équivalent de l'effet Hall quantique, d'isolants topologiques, de supraconducteurs topologiques et les fermions de Majorana associés avec des gaz d'atomes ou de photons