

*Fluides quantiques de basse dimension  
et transition de Kosterlitz-Thouless*

Le point critique de la transition BKT

Jean Dalibard

Chaire *Atomes et rayonnement*

Année 2016-17



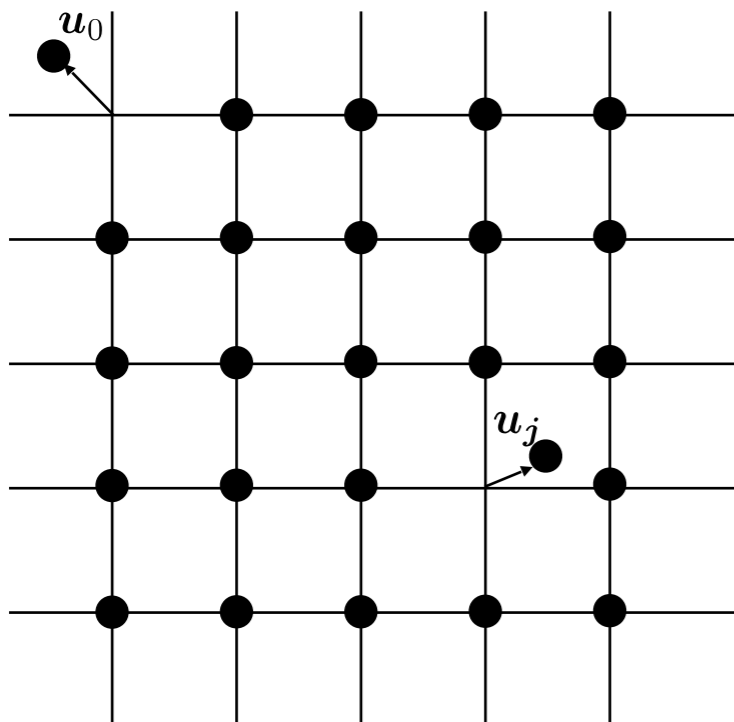
COLLÈGE  
DE FRANCE  
— 1530 —

# Bilan des cours précédents

Quel type d'ordre (cristallin, magnétique, superfluide,...) peut-on atteindre dans un système de basse dimension (2D ou 1D) ?

*Peierls, Mermin-Wagner-Hohenberg*

A température non nulle et pour des interactions entre proches voisins, pas d'ordre à longue portée, plus précisément pas de brisure d'une symétrie continue



Dans un réseau carré de particules, on trouve

$$\langle (u_j - u_0)^2 \rangle \propto T \log(R_j/a)$$

# Bilan (suite): le cas du gaz de Bose

Approche champ classique :  $\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \longrightarrow \psi(\mathbf{r}_1) \dots \psi(\mathbf{r}_N)$

$\psi(x, y)$  : champ complexe caractérisé par une amplitude et une phase

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})} e^{i\theta(\mathbf{r})}$$

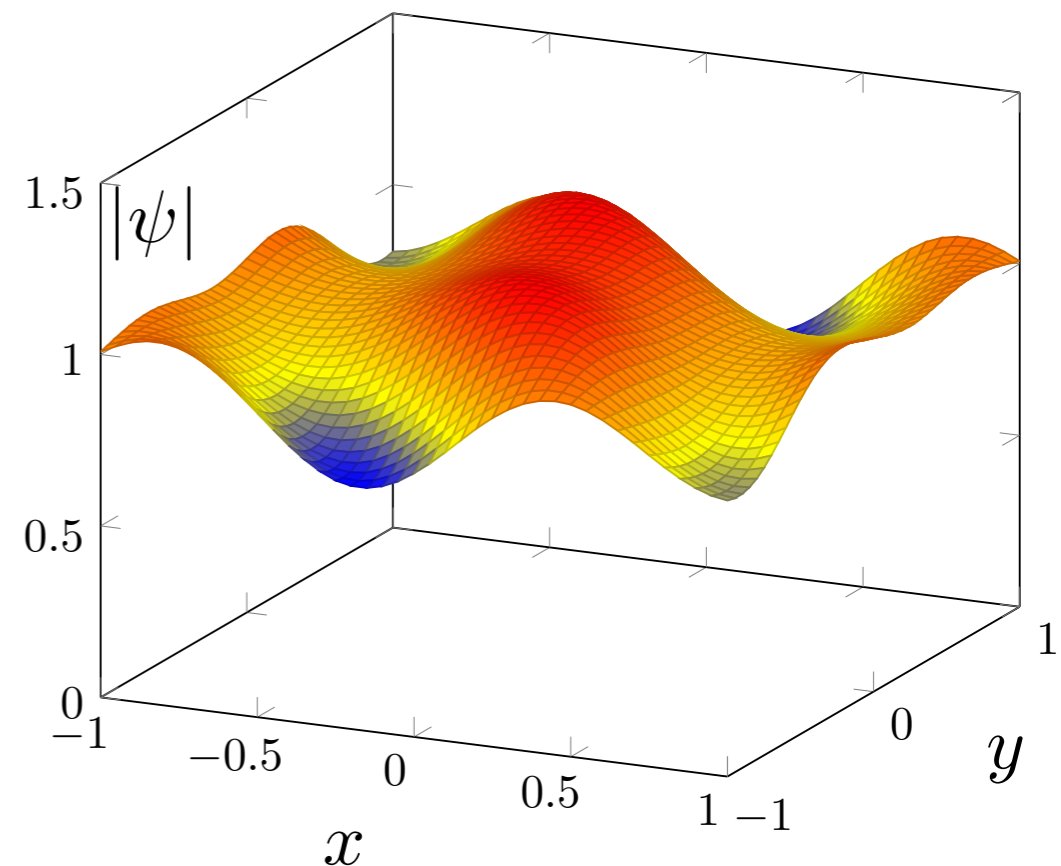
Pour un gaz en interaction répulsive à basse température, gel des fluctuations de densité pour les modes de grande longueur d'onde

$$\longrightarrow \rho = N/L^2$$

Développement de Fourier de la phase

$$\theta(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$$

$$\longrightarrow \langle [\theta(\mathbf{r}) - \theta(0)]^2 \rangle \propto T \ln(r/\lambda_T)$$



$$\lambda_T^2 = \frac{2\pi \hbar^2}{mk_B T}$$

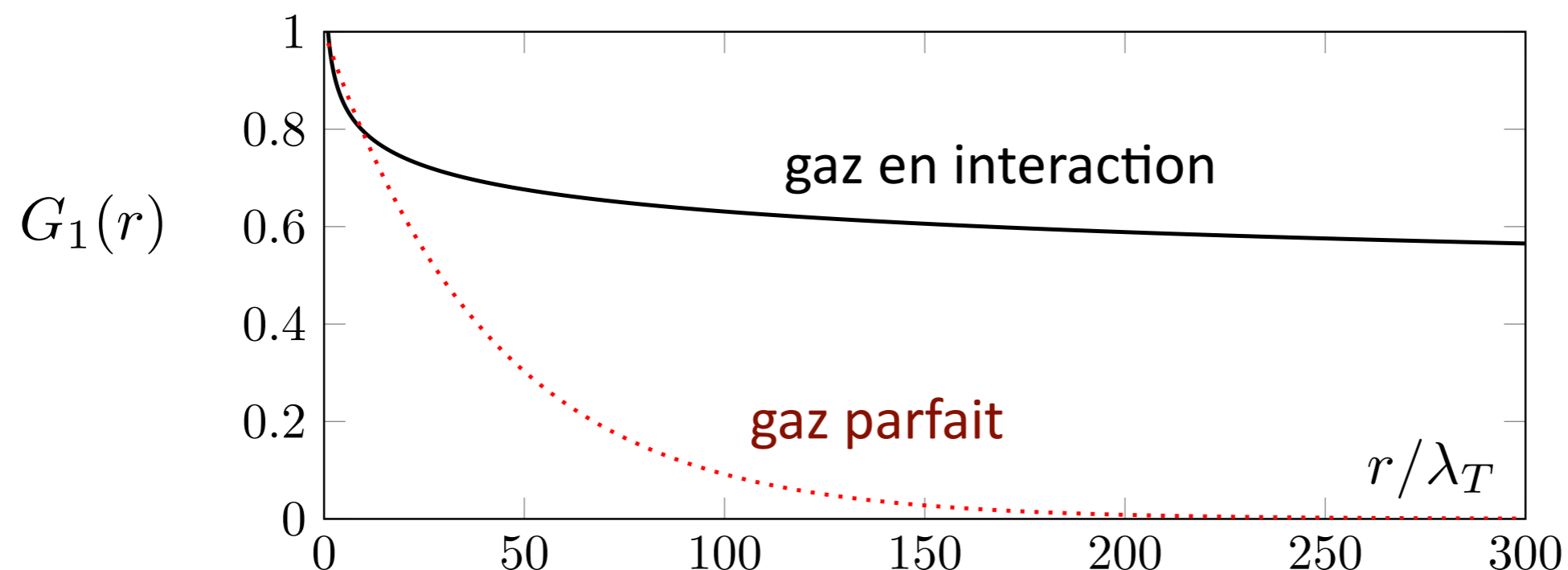
# Bilan (fin) : le quasi-ordre à longue portée

Connaissant  $\langle [\theta(\mathbf{r}) - \theta(0)]^2 \rangle$ , on déduit la valeur de la fonction  $G_1(r) = \langle \psi(\mathbf{r}) \psi^*(0) \rangle$

$$G_1(r) \approx \rho \left( \frac{\lambda_T}{r} \right)^\alpha \quad \alpha = \frac{1}{\rho \lambda_T^2} = \frac{1}{\mathcal{D}}$$

$\mathcal{D}$  : densité dans l'espace des phases

Résultat très différent de celui d'un gaz parfait :  $G_1(r) \approx \rho e^{-r/\ell}$



# But de ce cours

Le gel des fluctuations de densité qui conduit au quasi-ordre algébrique n'est effectif qu'à basse température

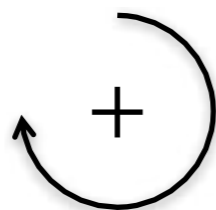
A haute température, les interactions doivent jouer un rôle mineur et on s'attend à retrouver le résultat du gaz parfait

**Comment s'effectue la transition :**

$$G_1(r) \approx \rho \left( \frac{\lambda_T}{r} \right)^\alpha \longrightarrow G_1(r) \approx \rho e^{-r/\ell} \quad ?$$

Les briques élémentaires de cette transition BKT sont les vortex

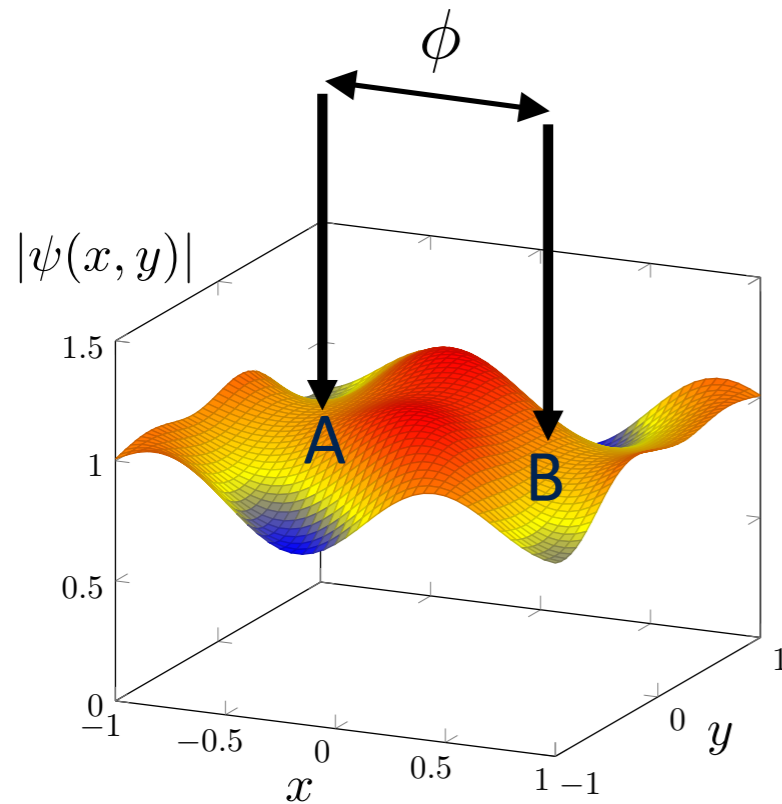
$\psi(x, y)$



Zéro de densité avec un enroulement de phase de  $n 2\pi$ , où  $n$  est un entier relatif

En pratique :  $\pm 2\pi$

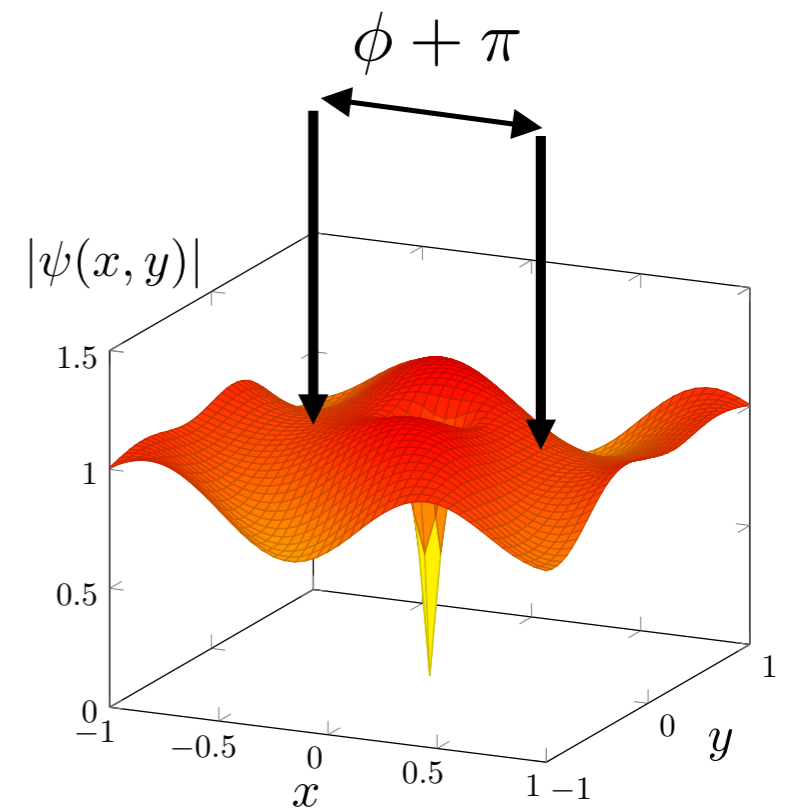
# Pourquoi les vortex font perdre le quasi-ordre en phase



On se donne deux points A et B entre lesquels il existe une cohérence de phase importante si on se limite à l'influence des phonons

Si un vortex isolé a une probabilité significative d'apparaître au voisinage du segment AB, la phase relative va fluctuer fortement :

$$\phi \rightarrow \phi + \pi$$



Si les vortex isolés peuvent être présents avec une densité  $\rho_v$ , on s'attend à perdre tout ordre en phase sur une distance  $\sim \rho_v^{-1/2}$

1.

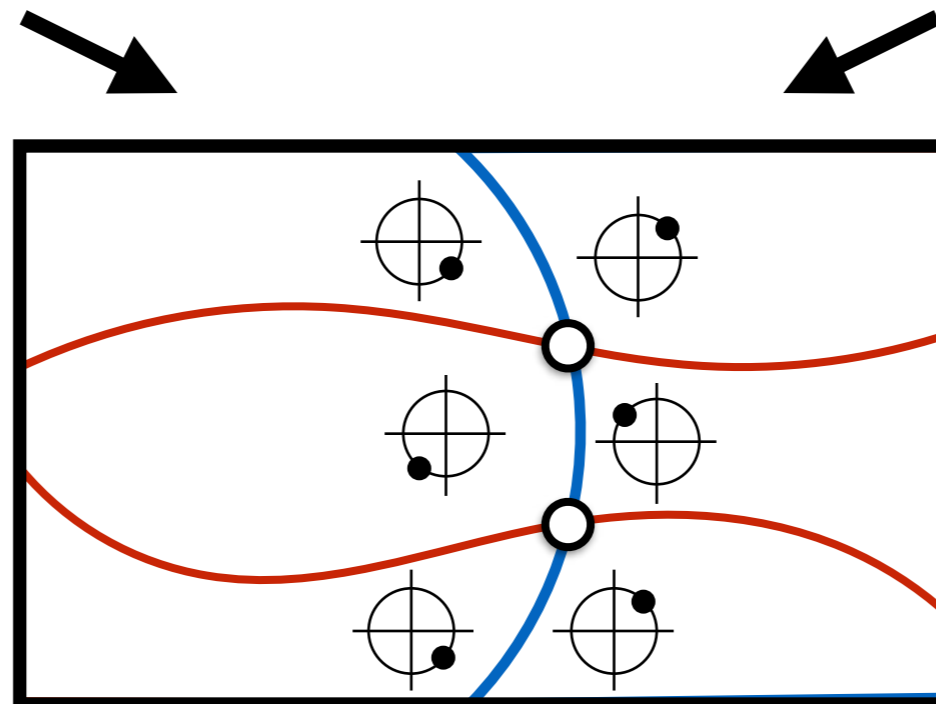
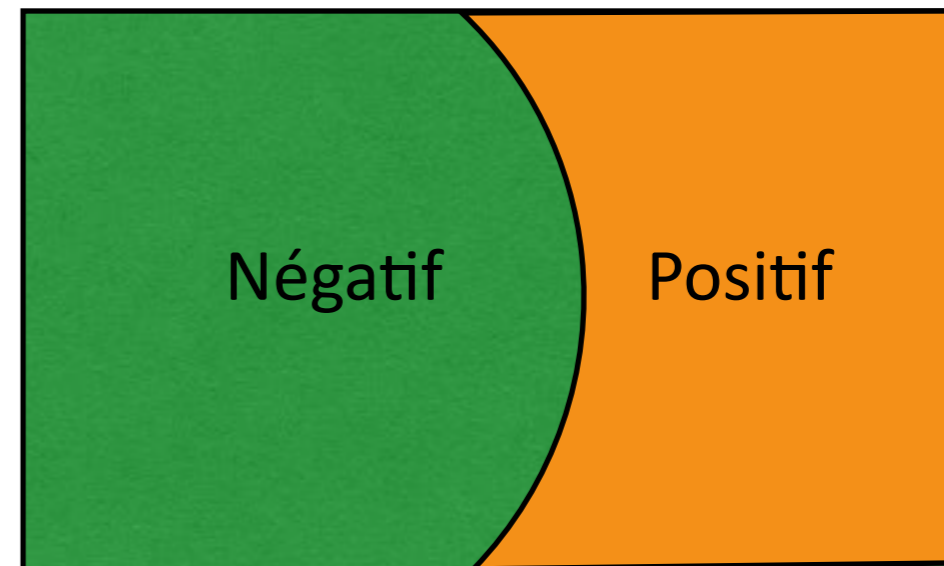
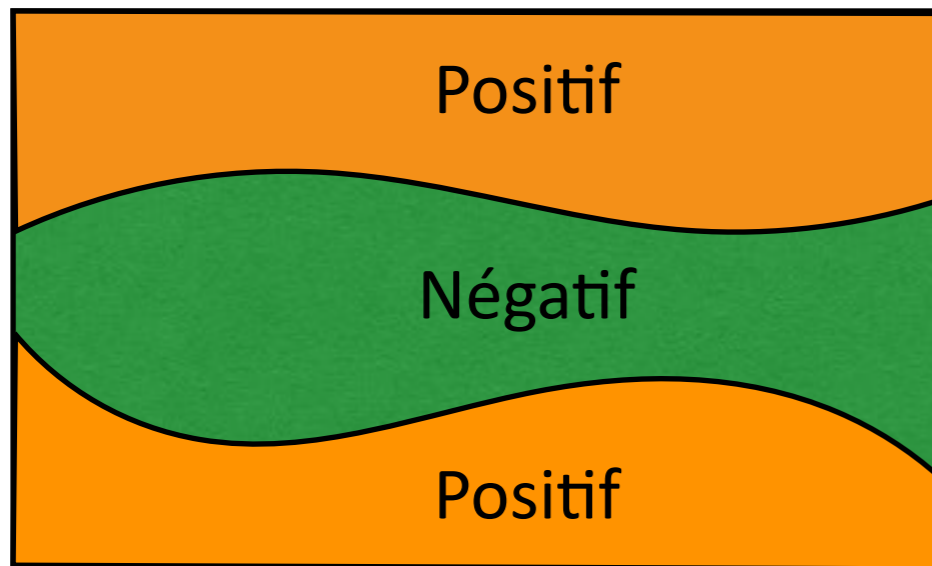
Seuil d'apparition d'un vortex isolé

# Les zéros du champ classique $\psi(x, y)$

On se donne à un instant  $t$  un champ classique fluctuant et on regarde sa partie réelle et sa partie imaginaire

$\text{Re} [\psi(x, y)]$

$\text{Im} [\psi(x, y)]$

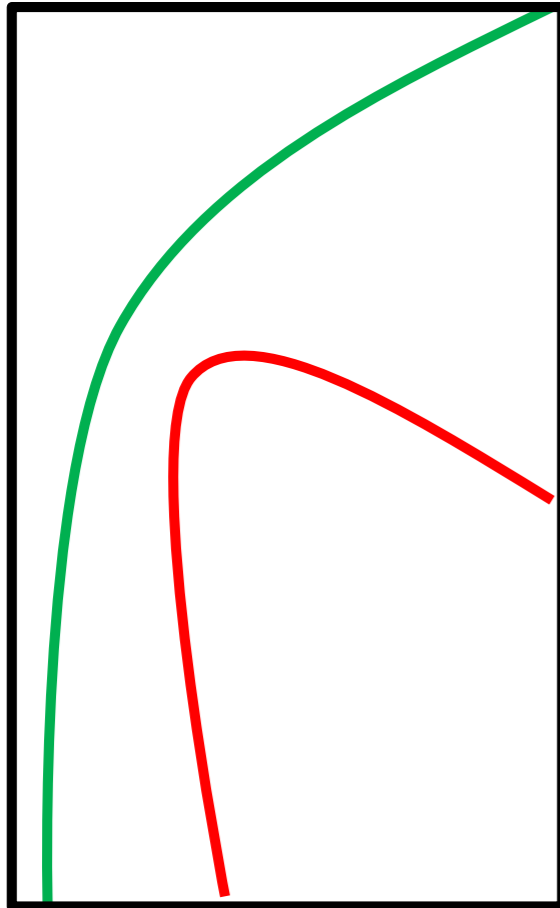


Deux vortex de circulations opposées

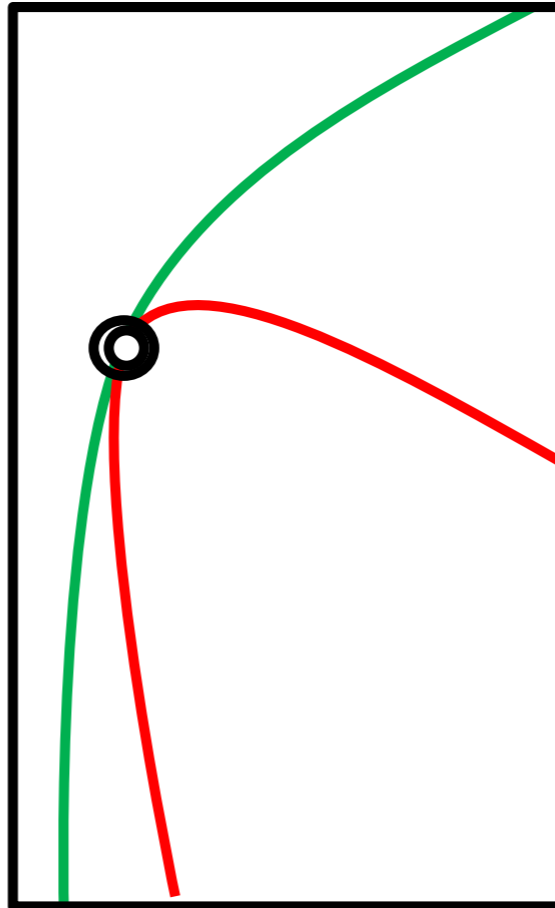


# Apparition et disparition des vortex

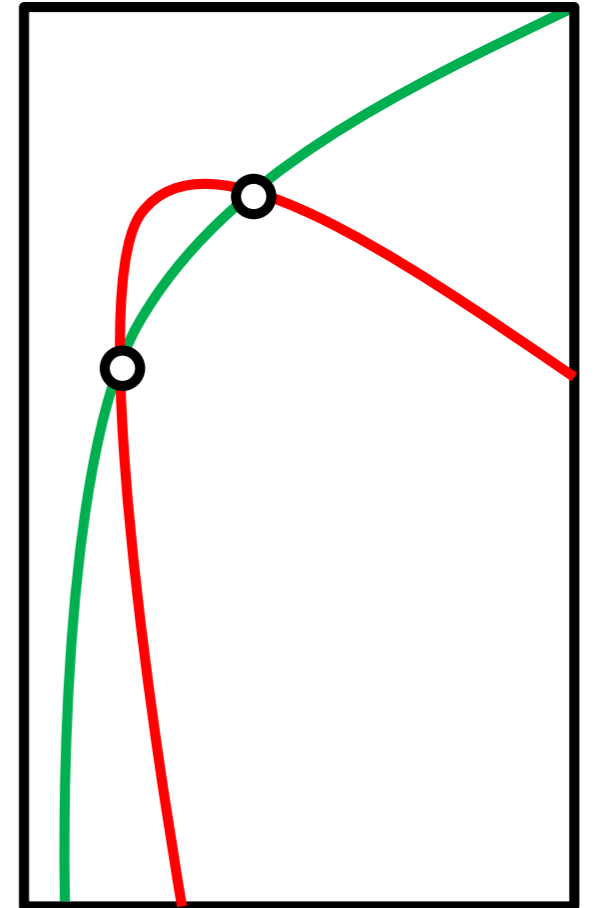
$$\text{Re} [\psi(x, y)] = 0 \quad \text{Im} [\psi(x, y)] = 0$$



Pas de vortex



Un zéro double :  
trou de densité  
sans enroulement  
de phase

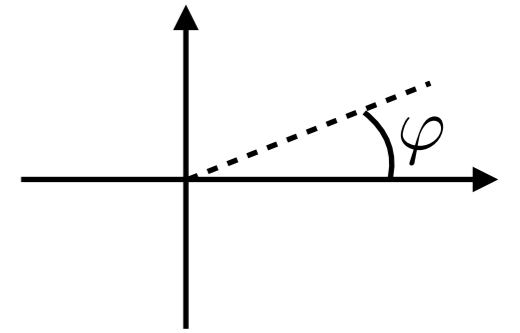


Deux zéros simples  
d'enroulements opposés :  
une paire vortex-antivortex

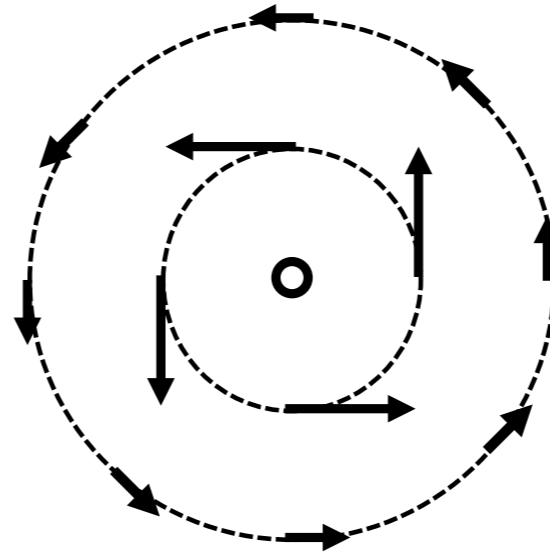
*Une paire de vortex peut apparaître lors d'une fluctuation de densité importante*

# Champ de vitesse d'un vortex

Exemple d'un vortex en  $\mathbf{r} = 0$  :  $\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(r)} e^{i\varphi}$      $\theta(\mathbf{r}) = \varphi$



$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta = \frac{\hbar}{mr} \mathbf{u}_\varphi$$



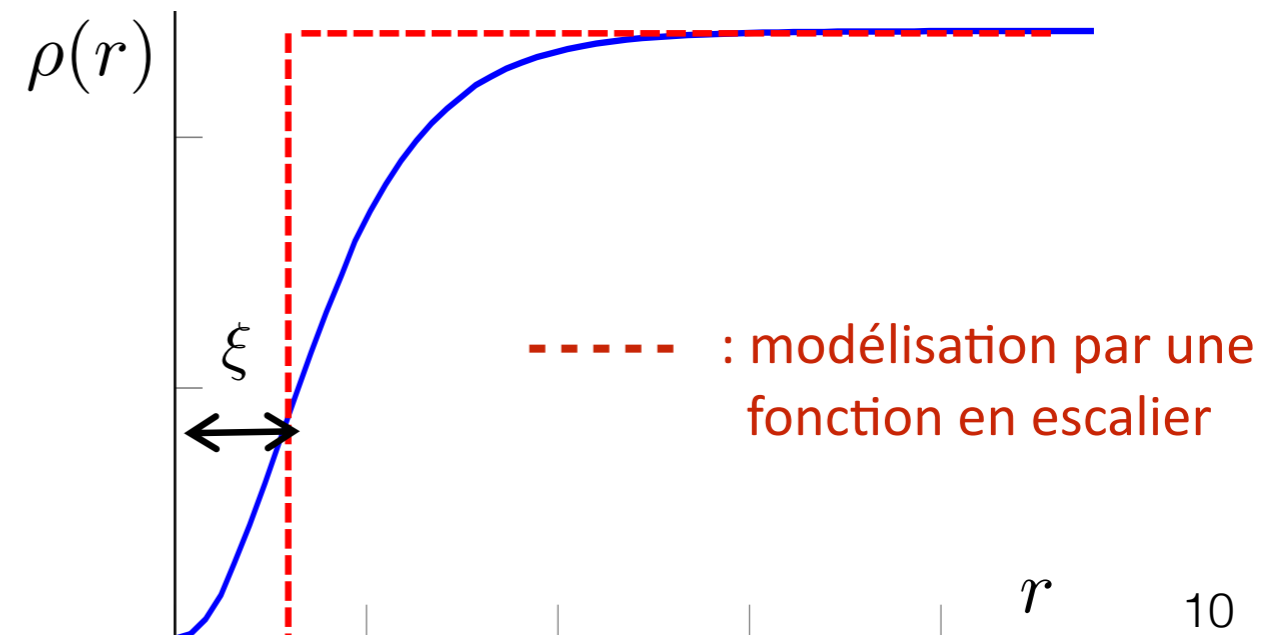
$$\oint \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 2\pi \frac{\hbar}{m}$$

Analogie magnéto-statique : champ magnétique créé par un fil rectiligne perpendiculaire au plan  $xy$

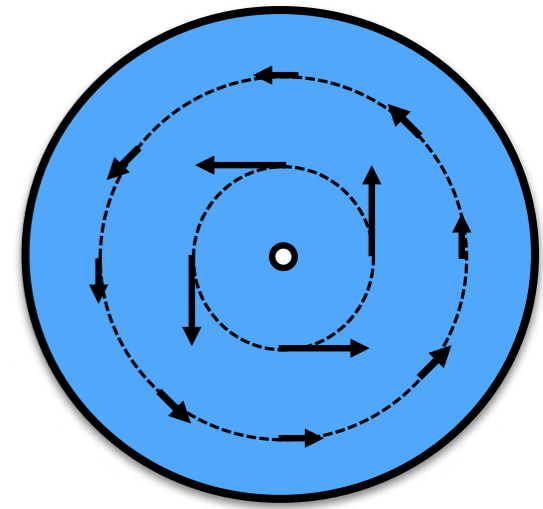
Profil de densité au voisinage du centre du vortex minimisant l'énergie :

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{g}\rho}}$$

*longueur de cicatrization*



# L'énergie d'un vortex



**Energie cinétique** (vortex au centre d'un disque de rayon  $R$ ):

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} m \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{v}^2(\mathbf{r}) d^2r \quad v(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{mr}$$

$$\approx \frac{1}{2} m \rho \frac{\hbar^2}{m^2} \int_{\xi}^R \frac{1}{r^2} 2\pi r dr$$

$$= \pi \frac{\hbar^2 \rho}{m} \ln(R/\xi)$$

**Préfacteur** : robuste

**Argument du log** : dépend de la modélisation du coeur

Diverge avec la taille du système !

**Energie d'interaction** : il faut créer un trou de taille  $\xi$  dans le fluide

$$\epsilon_0 \sim \frac{\hbar^2 \rho}{m} \ll E_{\text{cin}}$$

# Densité totale et densité superfluide

Discussion déjà abordée dans le cours précédent ; l'expression

$$E_{\text{cin}} = \frac{\hbar^2}{2m} \rho \int_{\xi}^R |\nabla\theta(\mathbf{r})|^2 d^2r \longrightarrow \pi \frac{\hbar^2 \rho}{m} \ln(R/\xi)$$

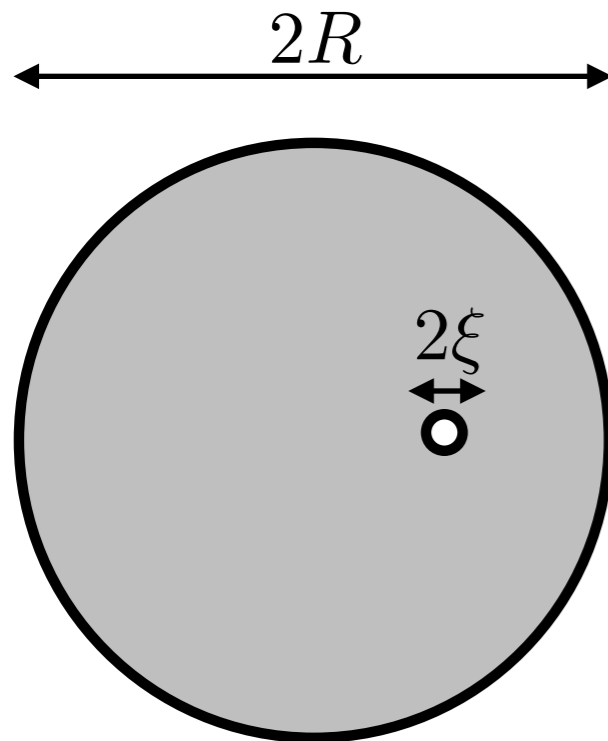
suppose que l'ensemble du fluide (de densité  $\rho$ ) possède une rigidité en phase et est donc superfluide

Mais cette expression résulte d'une approximation où l'on ne prend en compte que les modes de grande longueur d'onde (coupure à courte distance)

Un moyen simple de réincorporer la physique à courte distance consiste à faire la substitution  $\rho \longrightarrow \rho_s$

La densité superfluide  $\rho_s$  est à ce stade un paramètre phénoménologique

# L'émergence d'un vortex isolé est-elle probable ?



Nombre de « cases » indépendantes où l'on peut placer ce vortex :

$$W \approx \frac{R^2}{\xi^2}$$

Probabilité pour qu'un vortex existe dans une de ces cases :

$$p \approx e^{-E_{\text{cin}}/k_B T}$$

En utilisant l'expression de l'énergie cinétique :

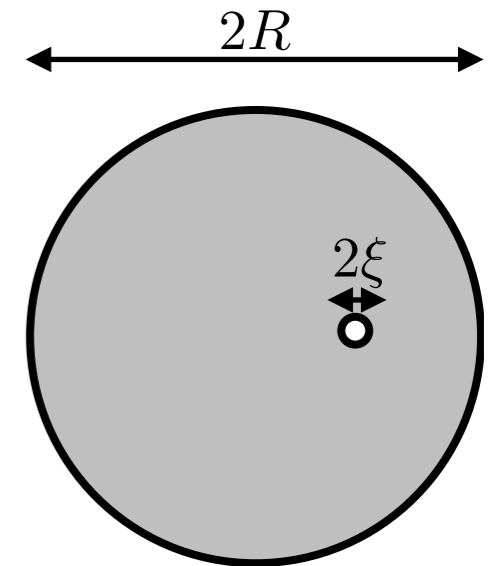
$$\frac{E_{\text{cin}}}{k_B T} = \frac{1}{k_B T} \frac{\pi \hbar^2 \rho_s}{m} \ln(R/\xi) = \frac{\mathcal{D}_s}{2} \ln(R/\xi)$$

Probabilité pour une « case » donnée :  $p \approx \exp \left[ -\frac{\mathcal{D}_s}{2} \log \left( \frac{R}{\xi} \right) \right] = \left( \frac{\xi}{R} \right)^{\mathcal{D}_s/2}$

Probabilité totale :  $\mathcal{P} = Wp \approx \left( \frac{\xi}{R} \right)^{-2 + \mathcal{D}_s/2}$

# L'émergence d'un vortex isolé est-elle probable (2) ?

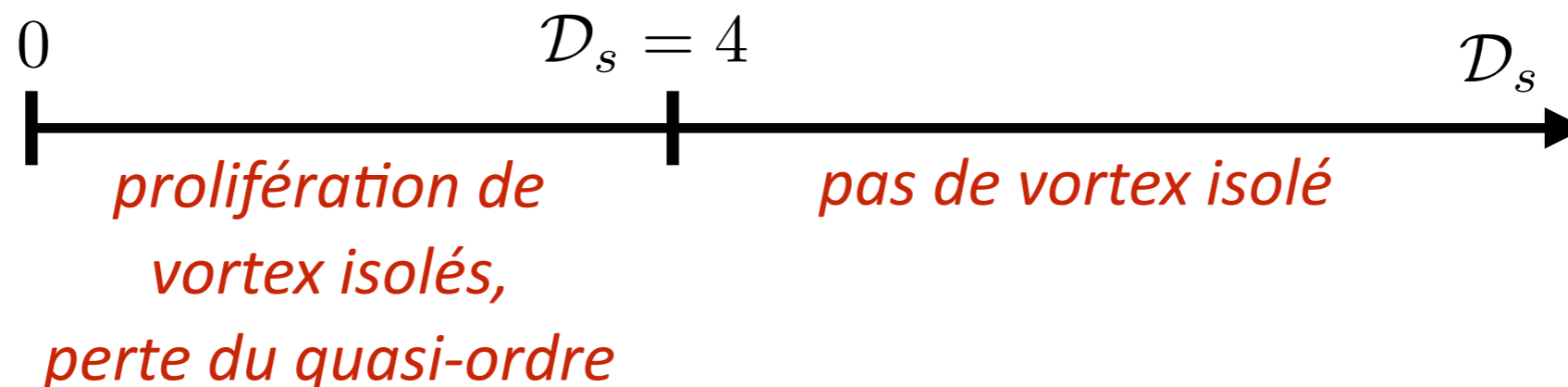
$$\mathcal{P} \approx \left( \frac{\xi}{R} \right)^{-2 + \mathcal{D}_s / 2}$$



- Si  $-2 + \frac{\mathcal{D}_s}{2} > 0$ , c'est-à-dire  $\mathcal{D}_s > 4$ , alors la probabilité  $\mathcal{P}$  tend vers 0 quand  $R \rightarrow \infty$

*Le coût énergétique est supérieur au gain entropique :  
pas de vortex isolé*

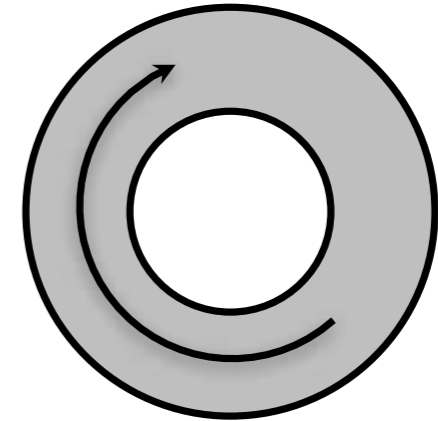
- Si  $\mathcal{D}_s < 4$ , alors  $\mathcal{P} > 1$  !!! Les vortex prolifèrent...



# Vortex isolés et perte de superfluidité

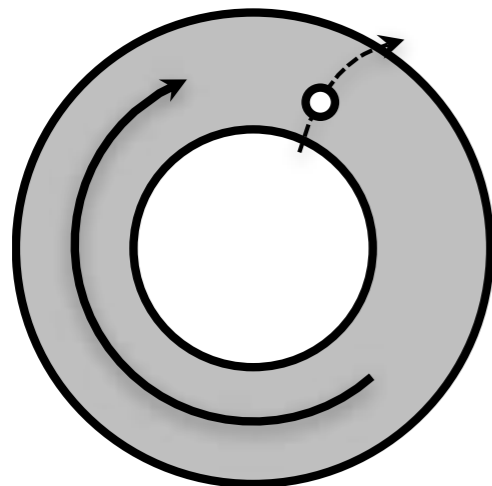
Anneau parcouru par un courant, correspondant à un enroulement de  $2\pi N$  de la phase du champ  $\psi(\mathbf{r})$

*Ce courant est-il métastable ?*



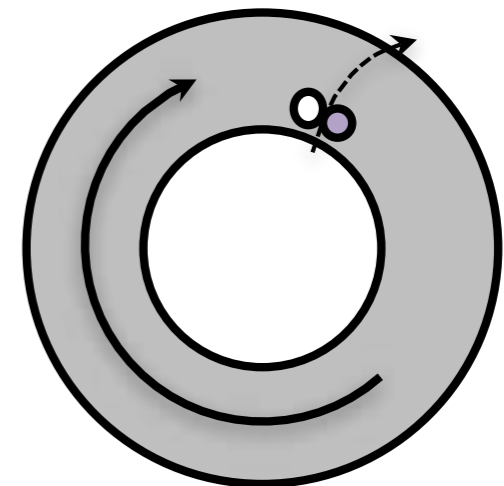
Si des vortex isolés existent dans l'anneau, ils peuvent traverser cet anneau :

Une paire de vx de charges opposées n'a pas d'effet sur le courant permanent



$$N \rightarrow N \pm 1$$

*Fluctuations du courant qui va s'amortir et tomber à 0*



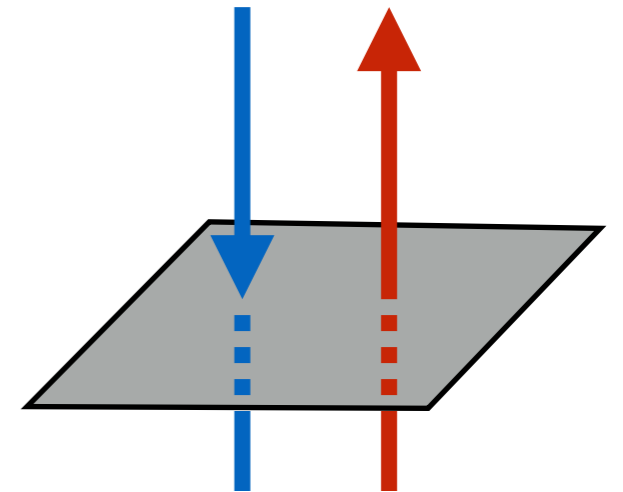
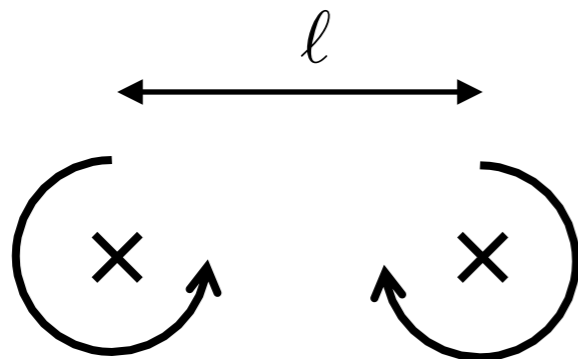
2.

Une paire vortex - antivortex



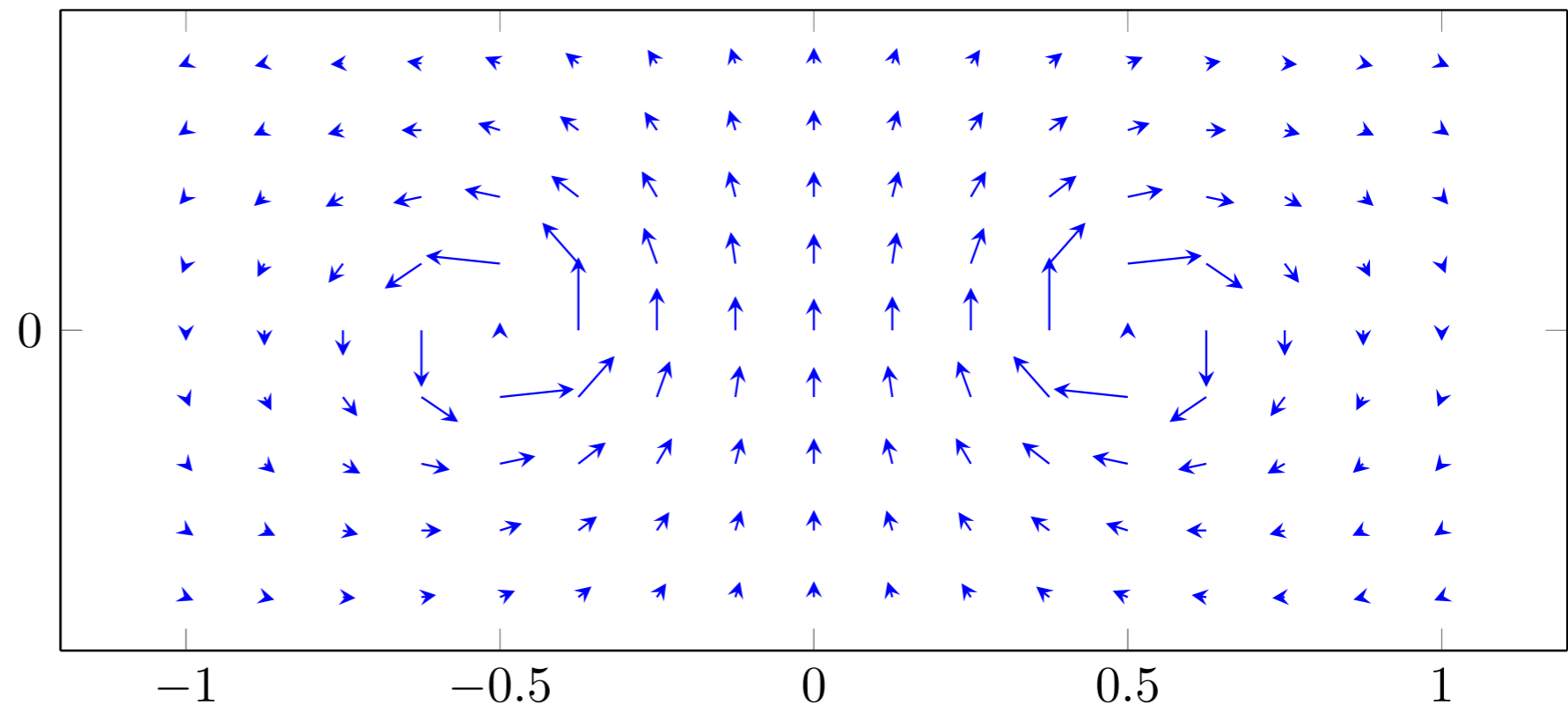
# Le champ de vitesse d'une paire de vortex

On superpose les champs de vitesse des deux vortex

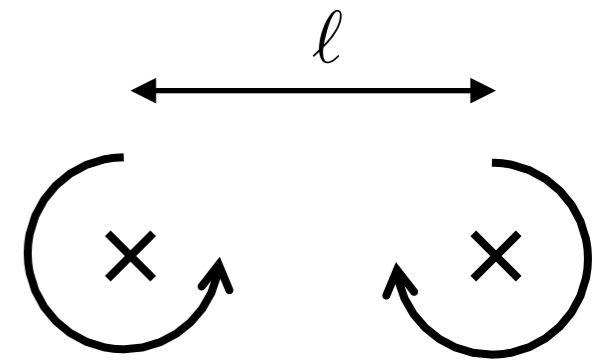


Analogie magnétique :  
champ créé par deux fils parallèles  
parcourus par des courants opposés

Champ de structure  
dipolaire : décroît  
comme  $1/r^2$  à l'infini  
au lieu de  $1/r$  pour  
un vortex isolé



## Energie d'un paire de vortex



L'énergie cinétique est maintenant donnée par une intégrale bien définie :

$$r \text{ grand : } \quad v \propto \frac{1}{r^2} \quad v^2 \propto \frac{1}{r^4} \quad \int v^2(\mathbf{r}) \, d^2r \quad \text{converge}$$

Le calcul de l'intégrale donne plus précisément

$$E_{\text{cin}}(\ell) \approx 2\pi \frac{\hbar^2 \rho_s}{m} \ln \left( \frac{\ell}{\xi} \right)$$

Le coût en énergie d'interaction correspond à la création de deux trous de taille  $\xi$

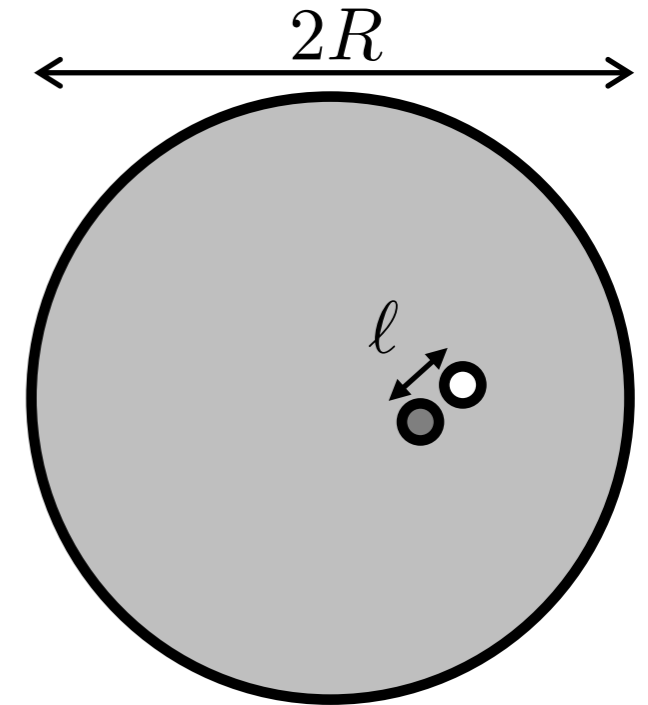
$$E_{\text{int}} = 2 \epsilon_0 \quad \text{avec} \quad \epsilon_0 \sim \frac{\hbar^2 \rho_s}{m}$$

*Energie cinétique et énergie d'interaction sont comparables si  $\ell \sim \xi$*

# Probabilité d'apparition d'une paire de vortex

Energie totale de la paire :  $2\epsilon_0 + E_{\text{cin}}(\ell)$

$$E_{\text{cin}}(\ell) \approx 2\pi \frac{\hbar^2 \rho_s}{m} \ln \left( \frac{\ell}{\xi} \right)$$



Poids de Boltzmann pour l'apparition de la paire

$$\mathcal{P}(\ell) = \exp \left\{ -\frac{2\epsilon_0 + E_{\text{cin}}(\ell)}{k_B T} \right\}$$

$$= y_0^2 \exp \left\{ -\frac{E_{\text{cin}}(\ell)}{k_B T} \right\} \quad y_0 \equiv \exp \left( -\frac{\epsilon_0}{k_B T} \right) : \textit{fugacité d'un vortex}$$

$$= y_0^2 \left( \frac{\xi}{\ell} \right)^{D_s} \quad \textit{valable si } \ell \gtrsim \xi$$

Si  $D_s$  n'est pas très grande devant 1, probabilité non négligeable au moins pour des élongations  $\ell$  comparables    $\xi$

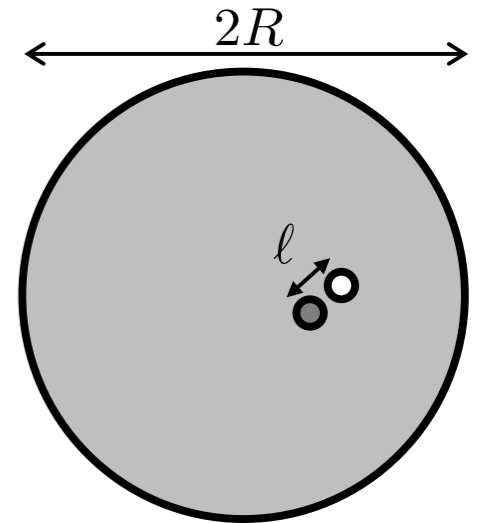
# Elongation moyenne d'une paire de vortex

Distribution de probabilité pour l'élongation  $l$

$$\mathcal{P}(l) \propto \left(\frac{\xi}{l}\right)^{\mathcal{D}_s}$$

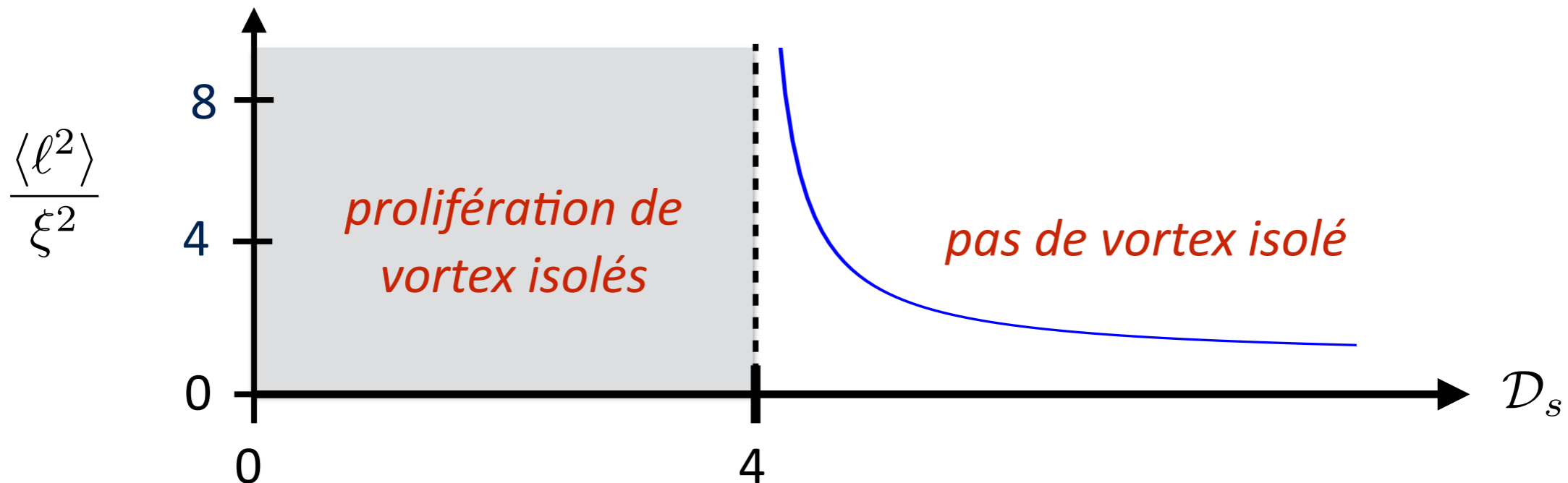
Moyenne :  $\langle \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b \rangle = 0$

Variance :  $\langle (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)^2 \rangle = ?$



$$\langle l^2 \rangle = \frac{\int_{\xi}^{+\infty} l^2 \mathcal{P}(l) 2\pi l \, dl}{\int_{\xi}^{+\infty} \mathcal{P}(l) 2\pi l \, dl} = \xi^2 \frac{\mathcal{D}_s - 2}{\mathcal{D}_s - 4}$$

diverge pour  $\mathcal{D}_s \rightarrow 4_+$



3.

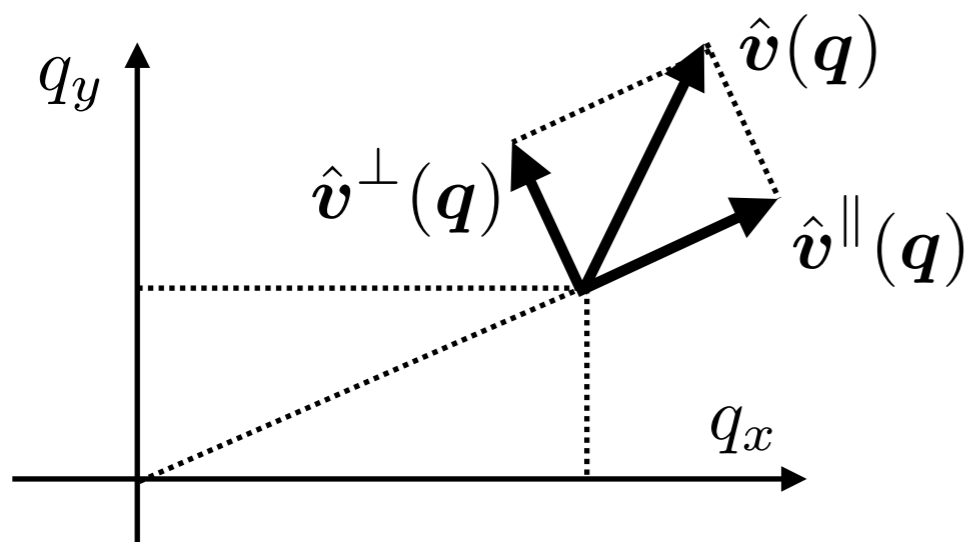
Champ de vitesses et énergie  
d'une assemblée de vortex

# Champs de vitesses longitudinaux et transverses

On se donne un champ de vitesses  $\mathbf{v}(x, y)$

Transformée de Fourier :  $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) d^2r$

On peut toujours décomposer  $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{q})$  sous la forme :  $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{v}}^{\parallel}(\mathbf{q}) + \hat{\mathbf{v}}^{\perp}(\mathbf{q})$



$$\hat{\mathbf{v}}^{\parallel}(\mathbf{q}) = \frac{1}{q^2} (\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{q})) \mathbf{q} \quad \nabla \times \mathbf{v}^{\parallel}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\hat{\mathbf{v}}^{\perp}(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) - \hat{\mathbf{v}}^{\parallel}(\mathbf{q}) \quad \nabla \cdot \mathbf{v}^{\perp}(\mathbf{r}) = 0$$

Le champ de vitesses étudié au cours précédent et lié aux phonons

$$\theta(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta(\mathbf{r})$$

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) \propto i \mathbf{q} c_{\mathbf{q}}$$

est purement longitudinal

# Champ de vitesses liés aux vortex

On se donne une assemblée de vortex caractérisée par  $\{Q_j, \mathbf{r}_j\}$

$$Q_j = \pm 1 \quad \sum_j Q_j = 0 \quad \text{Densité de vortex : } \rho_v(\mathbf{r}) = \sum_j Q_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$$

Minimisation de l'énergie cinétique compte tenu de cette contrainte :

$$E_{\text{cin}} = \frac{\hbar^2 \rho_s}{2m} \int [\nabla \theta(\mathbf{r})]^2 d^2r \quad \longrightarrow \quad \nabla^2 \theta = 0 \quad \text{équation de Laplace 2D}$$

Solution obtenue à partir de  $\nabla^2 [\ln(r)] = 2\pi \delta(\mathbf{r})$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar}{m} \nabla \times \left[ \mathbf{u}_z \int \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rho_v(\mathbf{r}') d^2r' \right]$$

- Somme des champs de vitesses générés par chaque vortex
- Champ de vitesses purement transverse :  $\longrightarrow \mathbf{v}^\perp(\mathbf{r})$

# Bilan concernant le champ de vitesses superfluide

Nous avons identifié deux composantes que nous traiterons comme découplées :

- Le champ de vitesses lié aux phonons, purement longitudinal et caractérisé par les coefficients de Fourier de la phase  $\theta(\mathbf{r})$

$$\theta(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \quad \mathbf{v}_s^{\parallel}(\mathbf{r}) = i \frac{\hbar}{m} \sum_{\mathbf{q}} \mathbf{q} c_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$$

- Le champ de vitesses lié aux vortex, purement transverse et caractérisé par la densité de vortex

$$\rho_v(\mathbf{r}) = \sum_j Q_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$$

Probabilité d'obtenir une configuration donnée pour cette composante superfluide :

$$\exp[-E(\{c_{\mathbf{q}}\}, \{Q_j, \mathbf{r}_j\}) / k_B T]$$



4.

## Transition superfluide dans un fluide 2D

**Les deux propriétés caractéristiques de la superfluidité :**

- Existence de courants permanents métastables
- Rigidité en phase, expérience du récipient tournant

# La rigidité en phase

Les conditions aux limites habituelles (périodiques) :

$$\psi(x + L, y) = \psi(x, y + L) = \psi(x, y)$$

On calcule alors l'énergie libre  $F(0)$

On « tord » maintenant la phase des conditions aux limites selon une direction:

$$\psi(x + L, y) = e^{i\Theta} \psi(x, y) \quad \psi(x, y + L) = \psi(x, y) \quad \Theta \ll 1$$

*Interprétation physique : passage dans un référentiel tournant*

Quel est le coût énergétique de cette torsion en phase ?  $F(\Theta) = F(0) + \alpha\Theta^2 + \dots$

Par définition :  $\rho_s = \frac{m}{\hbar^2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial \Theta^2} \right|_{\Theta=0}$  (énergie en  $\frac{\hbar^2}{2m} \rho_s \int |\nabla\theta(\mathbf{r})|^2 d^2r$ )

# Conditions aux limites tordues et énergie cinétique

Le champ de vitesse avec des conditions aux limites tordues :

$\psi(x + L, y) = e^{i\Theta} \psi(x, y)$  peut être réalisé par un gradient de phase uniforme  $\Theta/L$ , c'est-à-dire le champ de vitesse additionnel  $\mathbf{v}_\Theta = \frac{\hbar\Theta}{mL} \mathbf{u}_x$

Champ de vitesse total :  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\Theta + \mathbf{v}_s$        $\mathbf{v}_s$  : phonons + vortex

$$\begin{aligned} E_c[\Theta, \mathbf{v}_s] &= \frac{m\rho_s^{(0)}}{2} \int (\mathbf{v}_\Theta + \mathbf{v}_s)^2 d^2r \\ &= \frac{mL^2\rho_s^{(0)}}{2} v_\Theta^2 + \frac{m\rho_s^{(0)}}{2} \int \mathbf{v}_s^2 d^2r + m\rho_s^{(0)} \mathbf{v}_\Theta \cdot \int \mathbf{v}_s d^2r \end{aligned}$$

Choix d'une échelle de longueur  $a$  : les fluctuations de phase et de densité dont l'échelle de longueur est  $< a$  sont prises en compte par la substitution  $\rho \rightarrow \rho_s^{(0)}$

# Energie libre et corrélations en vitesses

Energie d'une configuration phonons + vortex :  $E[\Theta, \{c_q\}, \{Q_j, \mathbf{r}_j\}] = E[\Theta, \mathbf{v}_s]$

- Fonction de partition :  $\mathcal{Z}(\Theta) = \sum_{\{\mathbf{v}_s\}} \exp\left(-\frac{E[\Theta, \mathbf{v}_s]}{k_B T}\right)$

- Energie libre :  $F(\Theta) = -k_B T \ln[\mathcal{Z}(\Theta)]$

avec l'énergie cinétique sous la forme :  $[\dots]v_\Theta^2 + [\dots] \int \mathbf{v}_s^2 + [\dots] \mathbf{v}_\Theta \cdot \int \mathbf{v}_s$

Résultat du calcul à l'ordre 2 inclus en  $\Theta$  :

$$F(\Theta) \approx \frac{1}{2} m L^2 \rho_s^{(0)} v_\Theta^2 + F(0) + \text{terme croisé}$$

dont on déduit la densité superfluide prenant en compte les phonons+vortex :

$$\rho_s = \rho_s^{(0)} - \frac{m(\rho_s^{(0)})^2}{k_B T} \frac{1}{L^2} \iint \langle v_{s,x}(\mathbf{r}) v_{s,x}(\mathbf{r}') \rangle d^2 r d^2 r'$$

Réduction possible  $\rho_s^{(0)} \rightarrow \rho_s$  du fait des phonons et des vortex

# Densité superfluide et position des vortex

On part de 
$$\rho_s = \rho_s^{(0)} - \frac{m(\rho_s^{(0)})^2}{k_B T} \frac{1}{L^2} \iint \langle v_{s,x}(\mathbf{r}) v_{s,x}(\mathbf{r}') \rangle d^2r d^2r'$$

et on utilise la décomposition du champ de vitesses 
$$\mathbf{v}_s(\mathbf{r}) = \underbrace{\mathbf{v}_s^{\parallel}(\mathbf{r})}_{\text{phonons}} + \underbrace{\mathbf{v}_s^{\perp}(\mathbf{r})}_{\text{vortex}}$$

**Contribution des phonons :** 
$$\int \mathbf{v}^{\parallel}(\mathbf{r}) d^2r = \frac{\hbar}{m} \int \nabla \theta d^2r = 0$$

*Les phonons ne réduisent pas la densité superfluide !*

**Contribution des vortex :** on a relié au §3 leur champ de vitesse à leur densité  $\rho_v$

$$\rho_s = \rho_s^{(0)} + \frac{\pi^2 \hbar^2}{m k_B T} (\rho_s^{(0)})^2 \int r^2 \langle \rho_v(\mathbf{r}) \rho_v(0) \rangle d^2r$$

ou encore : 
$$\mathcal{D}_s = \mathcal{D}_s^{(0)} + \frac{\pi}{2} (\mathcal{D}_s^{(0)})^2 \int r^2 \langle \rho_v(\mathbf{r}) \rho_v(0) \rangle d^2r$$

# Calcul perturbatif

On va évaluer  $\mathcal{D}_s = \mathcal{D}_s^{(0)} + \frac{\pi}{2} (\mathcal{D}_s^{(0)})^2 \int r^2 \langle \rho_v(\mathbf{r}) \rho_v(0) \rangle d^2r$

à partir d'un développement en puissances de  $y_0 \equiv \exp\left(-\frac{\epsilon_0}{k_B T}\right)$  (fugacité d'un vx)

**Rappel** : loi de probabilité pour l'élongation d'une paire  $\mathcal{P}(r) \propto \left(\frac{1}{r}\right)^{\mathcal{D}_s^{(0)}}$

On en déduit :

$$\mathcal{D}_s = \mathcal{D}_s^{(0)} - 2\pi^2 (\mathcal{D}_s^{(0)})^2 y_0^2 \int_a^{+\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{\mathcal{D}_s^{(0)}-3} \frac{dr}{a}$$

où  $a$  représente l'échelle de la longueur en dessous de laquelle les fluctuations de phase et de densité sont prises en compte via  $\rho \rightarrow \rho_s^{(0)}$

**Le deuxième terme représente la réduction de la densité superfluide due à la présence de paires de vortex d'élongation supérieure à  $a$**

écriture équivalente :  $\frac{1}{\mathcal{D}_s} = \frac{1}{\mathcal{D}_s^{(0)}} + 2\pi^2 y_0^2 \int_a^{+\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{\mathcal{D}_s^{(0)}-3} \frac{dr}{a}$

# Le principe de la renormalisation

On passe de  $a$  à  $a(1+\varepsilon)$  pour intégrer un peu plus de fluctuations dans  $\mathcal{D}_s^{(0)}$

$$\frac{1}{\tilde{\mathcal{D}}_s^{(0)}} = \frac{1}{\mathcal{D}_s^{(0)}} + 2\pi^2 y_0^2 \int_a^{a(1+\varepsilon)} \left(\frac{a}{r}\right)^{\mathcal{D}_s^{(0)}-3} \frac{dr}{a}$$

puis on fait une transformation d'échelle pour ramener  $a(1+\varepsilon)$  sur  $a$

$$\tilde{y}_0 = y_0 (1 + \varepsilon)^{(4 - \mathcal{D}_s^{(0)})/2}$$

On obtient alors une évolution couplée de  $[\mathcal{D}_s^{(0)}, y_0]$  quand on répète cette procédure

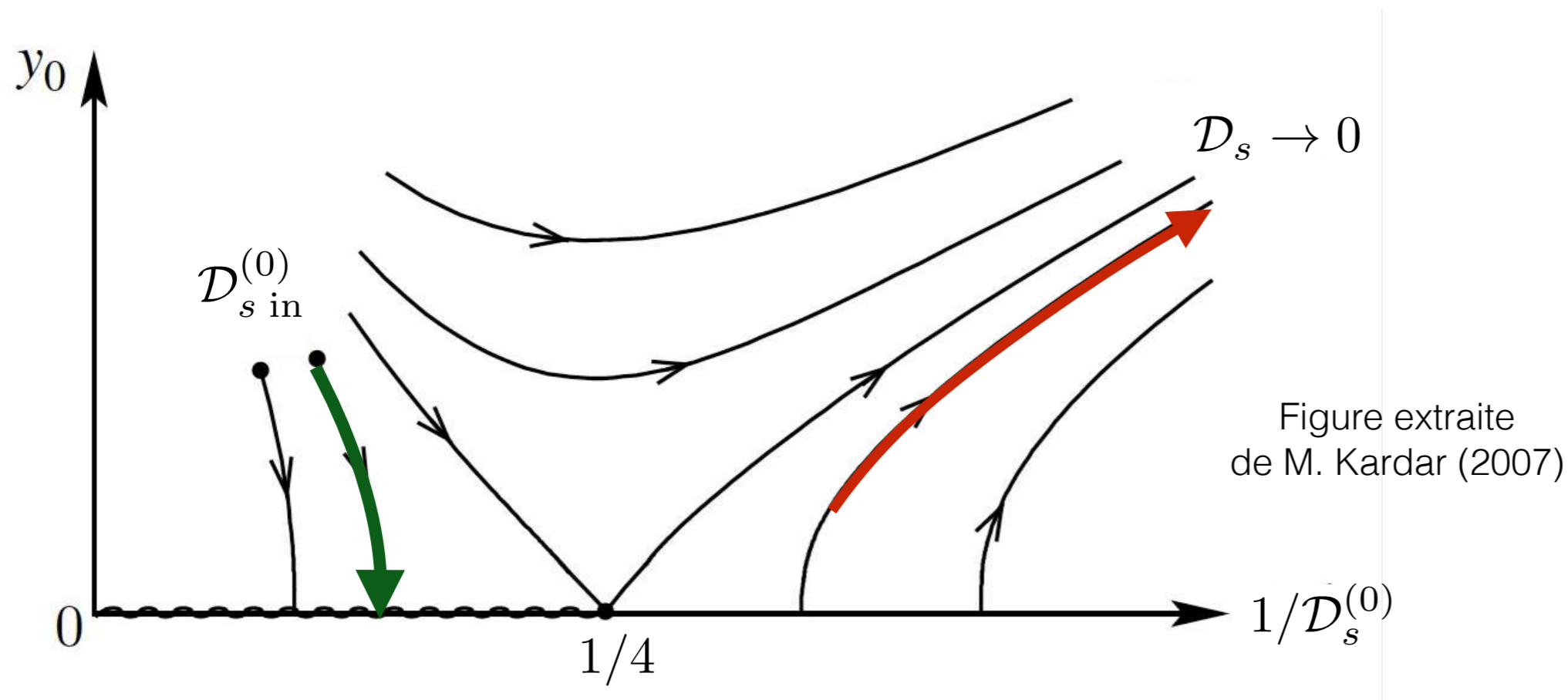
$$\frac{d[\mathcal{D}_s^{(0)}]^{-1}}{d\varepsilon} = 2\pi^2 y_0^2 \quad \frac{dy_0}{d\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(4 - \mathcal{D}_s^{(0)}\right) y_0$$

Vers quoi converge-t-on ?

# Le résultat de la renormalisation BKT

$$\frac{d[\mathcal{D}_s^{(0)}]^{-1}}{d\varepsilon} = 2\pi^2 y_0^2$$
$$\frac{dy_0}{d\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( 4 - \mathcal{D}_s^{(0)} \right) y_0$$

$$y_0 \equiv \exp \left( -\frac{\varepsilon_0}{k_B T} \right)$$



Confirme la valeur critique universelle  $\mathcal{D}_s = 4$

- Si on part de  $\mathcal{D}_s > 4$  avec une fugacité  $y_0$  assez petite (un trou de vortex coûte de l'énergie), on finit avec  $\mathcal{D}_s > 4$  et  $y_0 = 0$  : les vortex sont effacés.
- Si on part de  $\mathcal{D}_s < 4$ , alors on finit avec  $\mathcal{D}_s = 0$  : perte complète de superfluidité

**Les fonctions thermodynamiques usuelles sont continues au point de transition**



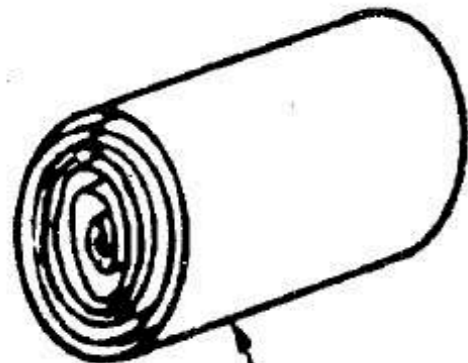
# Les premières études avec des fluides quantiques

Expériences menées à l'Université de Cornell, groupe de J. Reppy, 1977-89

Film d'hélium de 1 à 10 couches atomiques adsorbées sur une feuille de mylar de surface de l'ordre du  $m^2$

Détection de la fraction superfluide par une expérience de « récipient tournant »

## MYLAR COIL



Sheet of Mylar  
 $\frac{1}{4}$  mil x 1cm x 20meter  
Rolled into a Jelly Roll

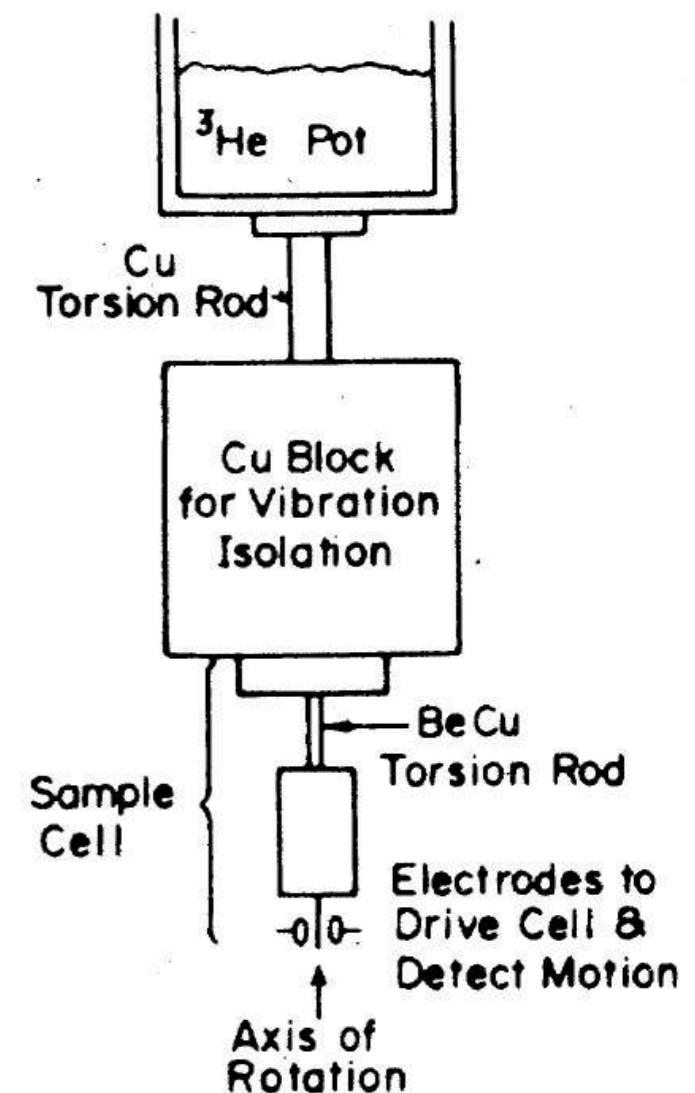
Fréquence d'oscillation

$\sim 2.6$  kHz

mesurée avec une précision relative de  $5 \cdot 10^{-9}$

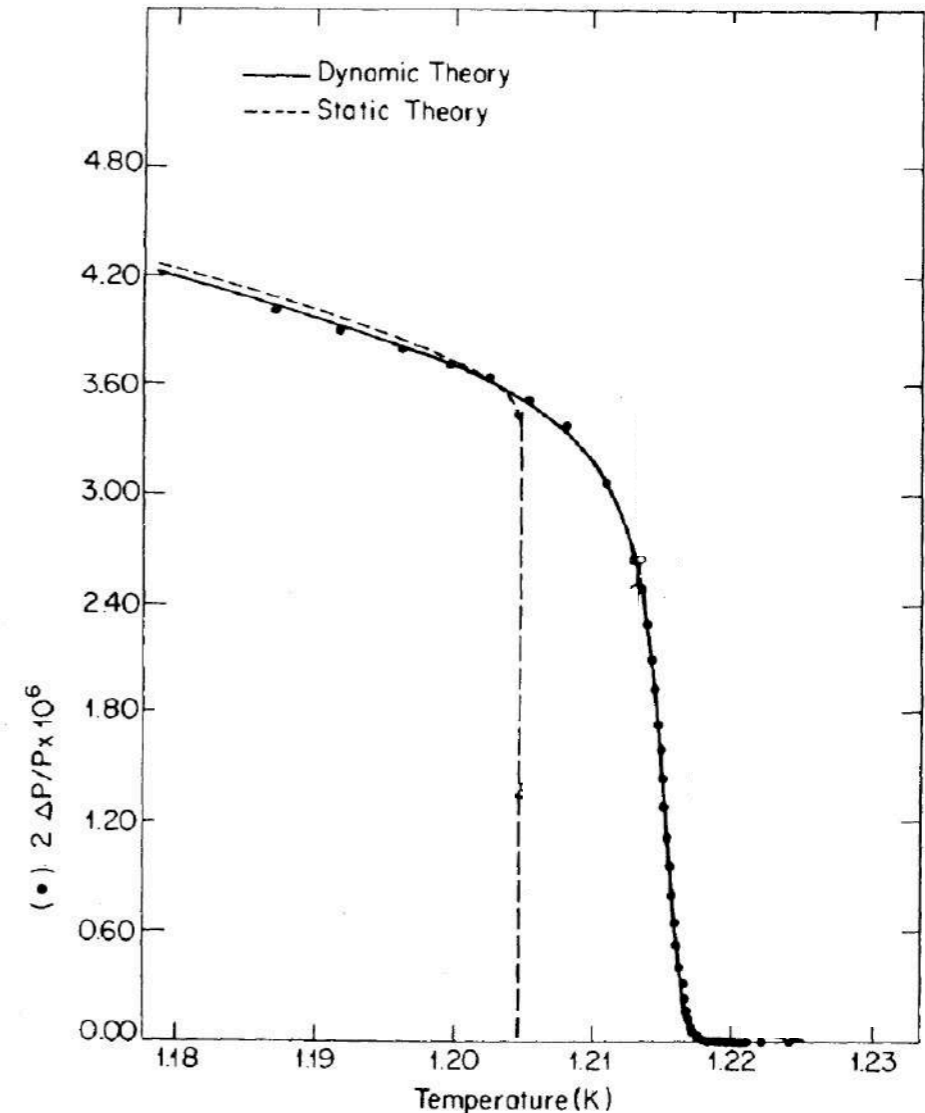
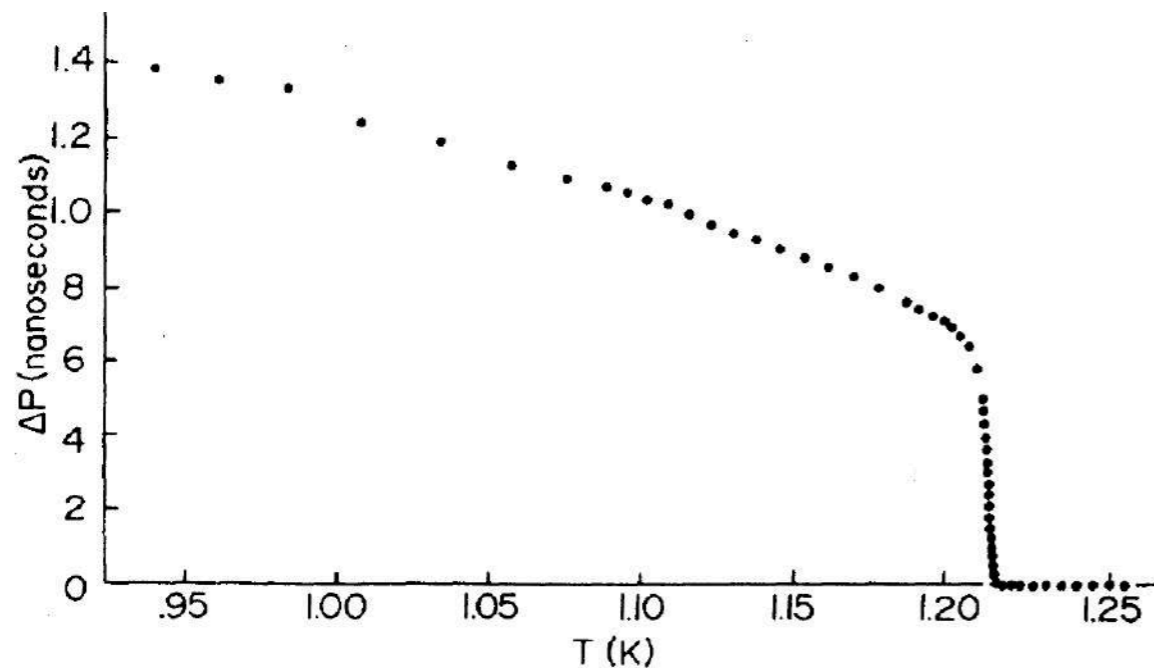
(2 pico secondes)

## SIDE VIEW OF EXPERIMENT



# La transition superfluide BKT avec un film d'hélium

Bishop & Reppy,  
 Phys. Rev. Lett. 40, 1727 (1978)  
 Phys. Rev. B 22, 5171 (1980)



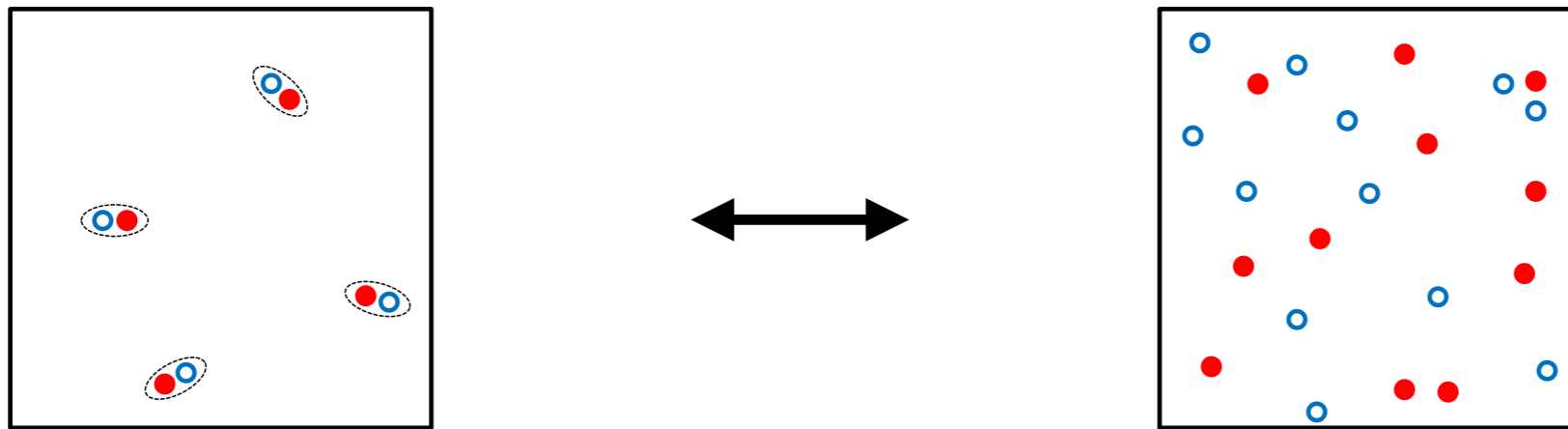
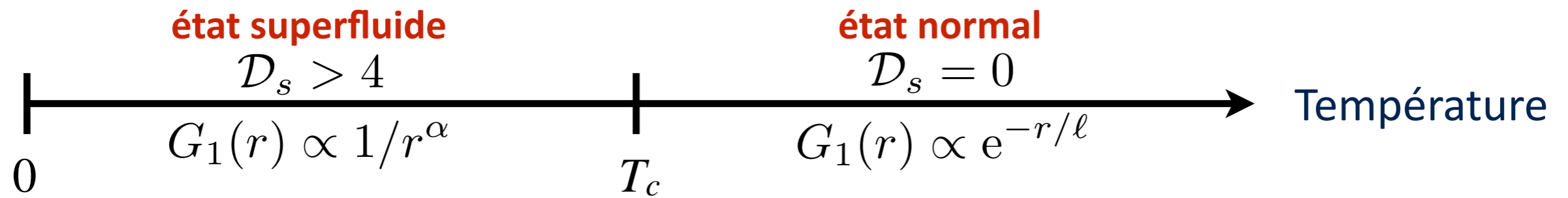
La prise en compte de l'aspect dynamique (fréquence de mesure 2.6 kHz)  
 conduit à un excellent accord théorie-expérience

$$\Delta \mathcal{D}_s = 4$$

Confirmation de la loi concernant le saut universel

# En résumé

La transition BKT se produit entre deux types d'états



Loi universelle sur la valeur de la densité superfluide :  $\mathcal{D}_s = \rho_s \lambda_T^2 \propto \frac{\rho_s}{T_c}$

A ce stade, nous n'avons pas d'information sur le lien entre  $T_c$  et la densité totale  $\rho$