

Cohérence et superfluidité dans les gaz atomiques

Cours 2

Du gaz de Bose à l'état superfluide

Jean Dalibard

Chaire *Atomes et rayonnement*

Année 2015-16



COLLÈGE
DE FRANCE
— 1530 —

But de ce cours

Aborder le lien entre condensation de Bose-Einstein et superfluidité

Condensation : valeur propre « macroscopique » $\Pi_0 \sim \mathcal{O}(N)$ quand $N \rightarrow \infty$
pour l'opérateur densité à un corps $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \mathbf{r}' | \hat{\rho}_1 | \mathbf{r} \rangle$

Nous allons étudier comment mesurer expérimentalement $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$

Superfluidité : phénomène plus complexe, faisant appel à
plusieurs notions différentes

Expériences sur l'hélium liquide : séminaire de Sébastien Balibar

Expériences avec des atomes froids dans un anneau tournant

Modèle à deux fluides, Tisza & Landau

1.

Comment caractériser l'ordre à longue portée

$$\begin{aligned} G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \langle \mathbf{r}' | \hat{\rho}_1 | \mathbf{r} \rangle \\ &= \text{Tr} \left(\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\rho} \right) \end{aligned}$$

Les trois situations rencontrées en pratique

Ordre à longue portée

$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ tend vers une limite finie non nulle à longue distance

Condensat + interactions \longrightarrow superfluidité

Quasi-ordre à longue portée (en dimension réduite)

$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ tend vers 0 « doucement » à grande distance : loi algébrique sans échelle caractéristique de distance. Si les interactions répulsives limitent en parallèle les fluctuations de densité, on parle de « quasi-condensat »

Quasi-condensat \longrightarrow superfluidité

Absence totale d'ordre à longue portée

$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ décroît rapidement vers 0 (exponentielle ou gaussienne), avec une échelle de longueur petite devant la taille de l'échantillon

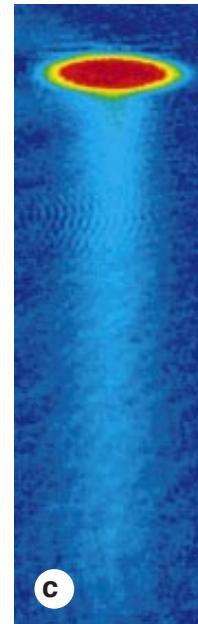
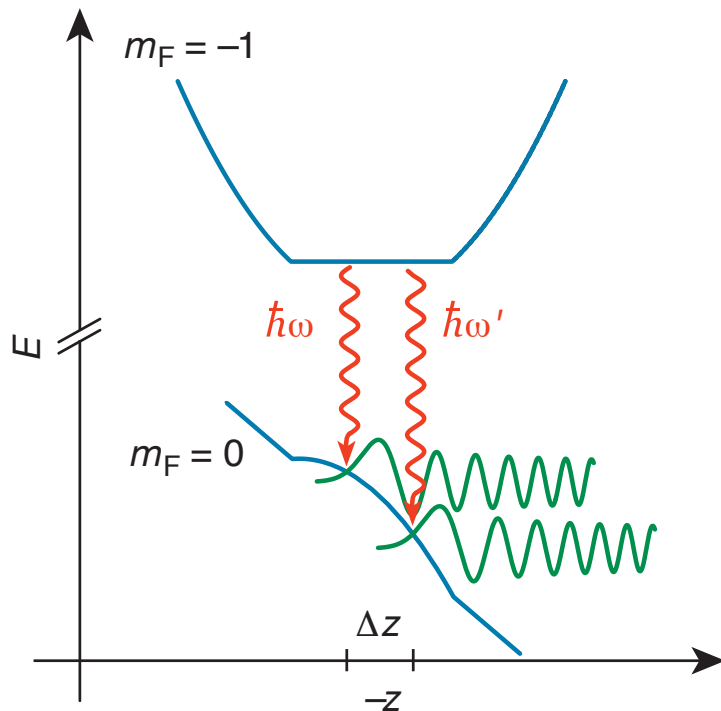
Fluide normal

Procédures pour accéder à $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \text{Tr} \left(\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\rho} \right)$

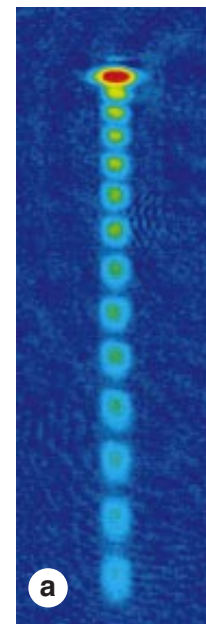
Mesure de la distribution en impulsion du gaz : $\mathcal{N}(\mathbf{p}) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$

Extraction sélective d'atomes en \mathbf{r} et en \mathbf{r}'

Munich, 2000



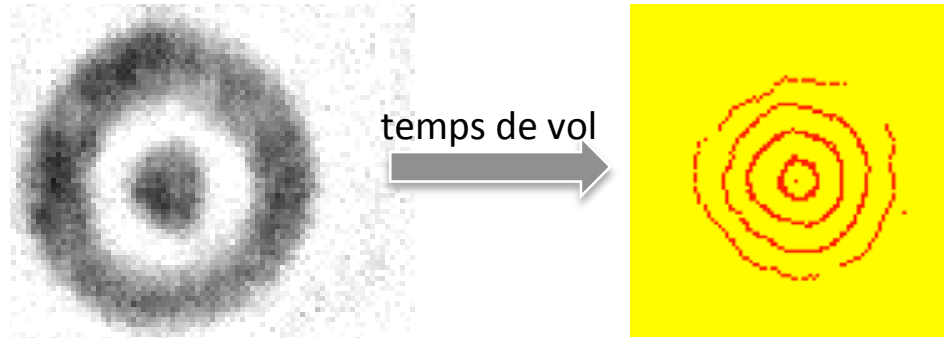
$T > T_c$



$T < T_c$

Procédures pour accéder à $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \text{Tr} \left(\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\rho} \right)$

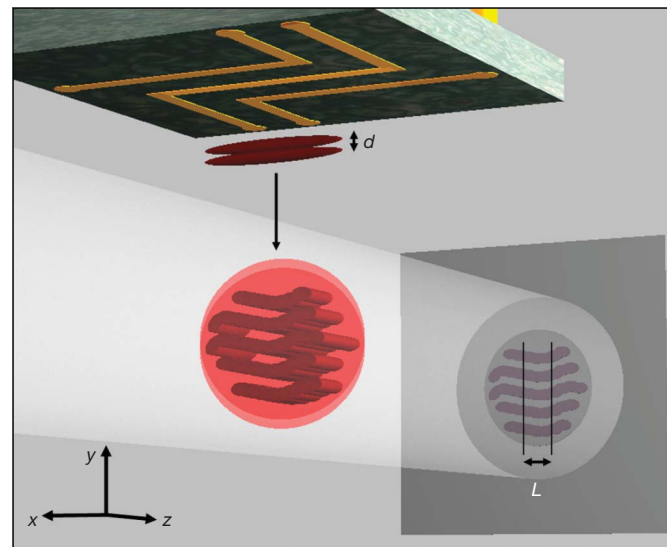
Interférence avec une référence de phase



ENS 2014

Préparation de deux gaz avec des propriétés similaires

Heidelberg 2007



La méthode de la self-interférence

NIST 1999, ... , Cambridge 2015

On fait interférer le gaz avec une copie de lui-même translaturée d'une longueur variable a

Si le gaz est décrit par la fonction d'onde macroscopique $\psi(\mathbf{r})$

$$\text{signal} \propto \int |\psi(\mathbf{r}) + e^{i\Phi} \psi(\mathbf{r} - \mathbf{a})|^2 d^3r$$

Dans le cas général, on moyenne sur les différents états propres $\psi_j(\mathbf{r})$ de l'opérateur densité à un corps

Terme d'interférence :

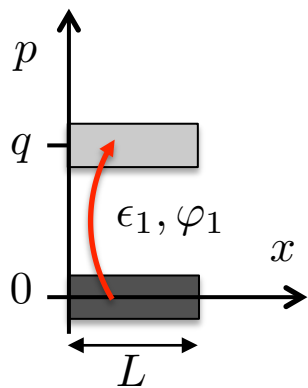
$$\begin{aligned} \langle \psi(\mathbf{r}) \psi^*(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \rangle &= \sum_j \frac{\Pi_j}{N} \psi_j(\mathbf{r}) \psi_j^*(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \\ &= \frac{1}{N} \langle \mathbf{r} | \hat{\rho}_1 | \mathbf{r} - \mathbf{a} \rangle = \frac{1}{N} G_1(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

La méthode de la self-interférence (2)

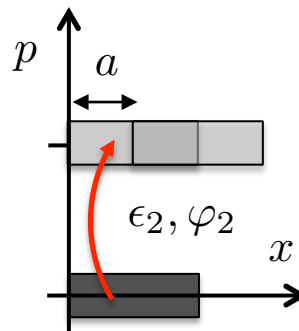
$$\text{signal} \propto \int |\psi(\mathbf{r}) + e^{i\Phi} \psi(\mathbf{r} - \mathbf{a})|^2 d^3r$$

On génère deux paquets d'atomes bougeant à vitesse v par deux excitations successives séparées d'une durée τ avec $a = \tau v$

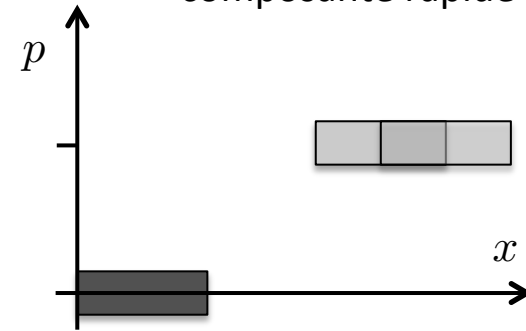
premier transfert
instant 0



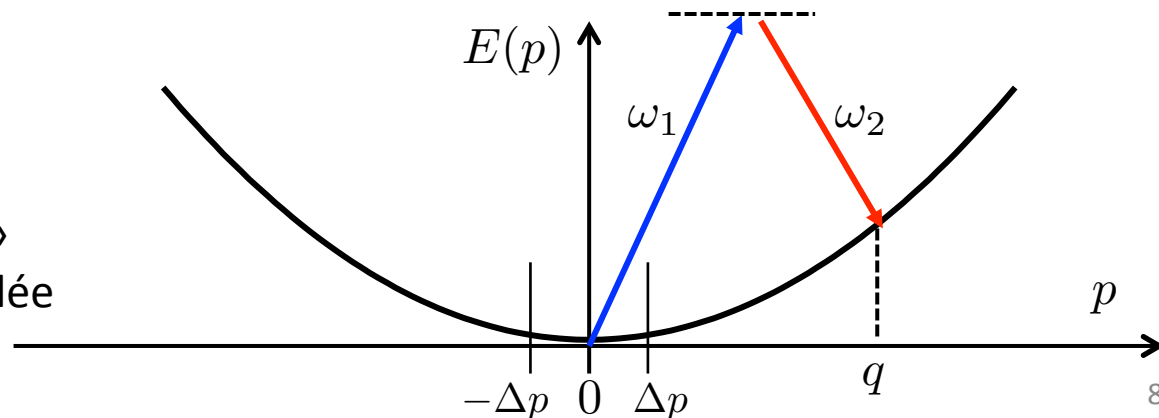
second transfert
instant τ



Détection de la
composante rapide

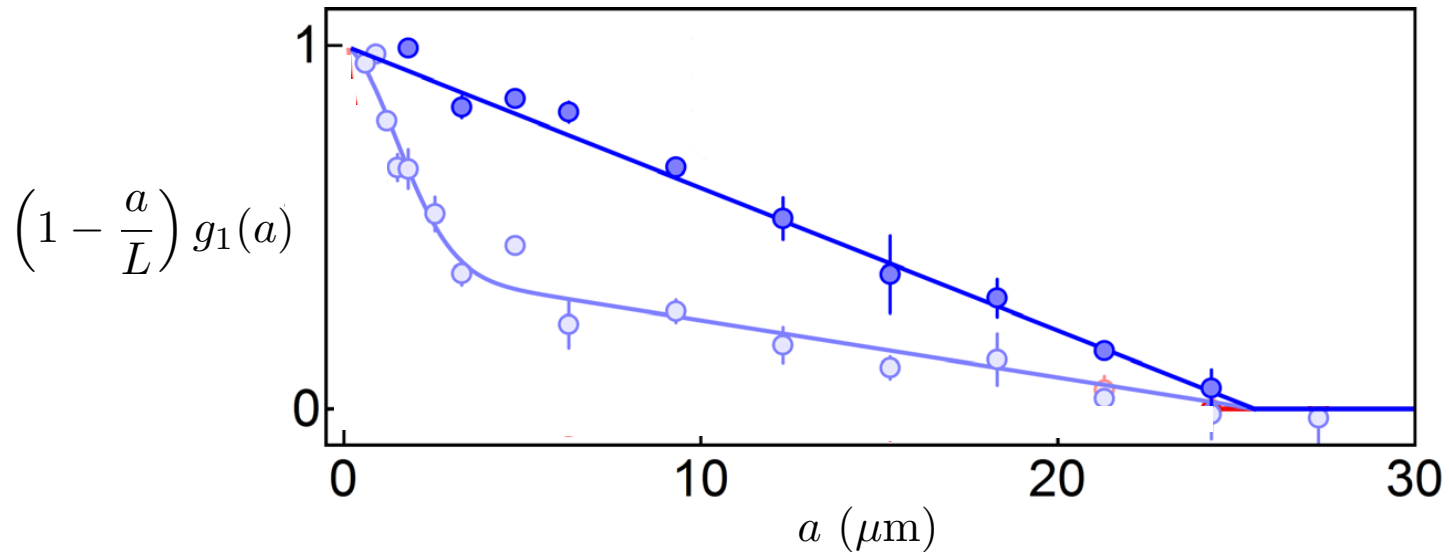
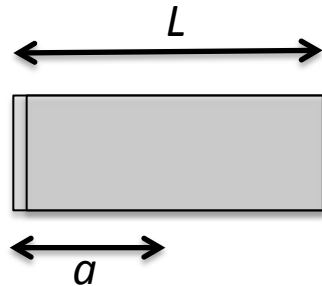


Principe de l'excitation :
un processus « de Bragg »
absorption –émission stimulée



La méthode de la self-interférence (3)

Cambridge 2015



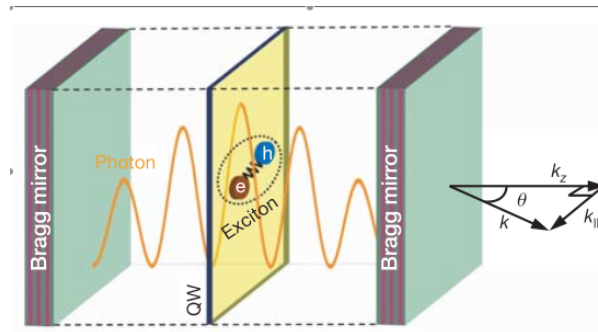
Signal pour un condensat pur : $1 + 1 + 2 \left(1 - \frac{a}{L}\right)$

Signal dans le cas général : $1 + 1 + 2 \left(1 - \frac{a}{L}\right) \frac{G_1(a)}{N/L^3}$

Condensats de lumière ou hybrides « lumière-matière »

Condensats de photons « purs » : séminaire de M. Weitz

Polaritons : objets hybrides entre un exciton (paire électron-trou) et un photon

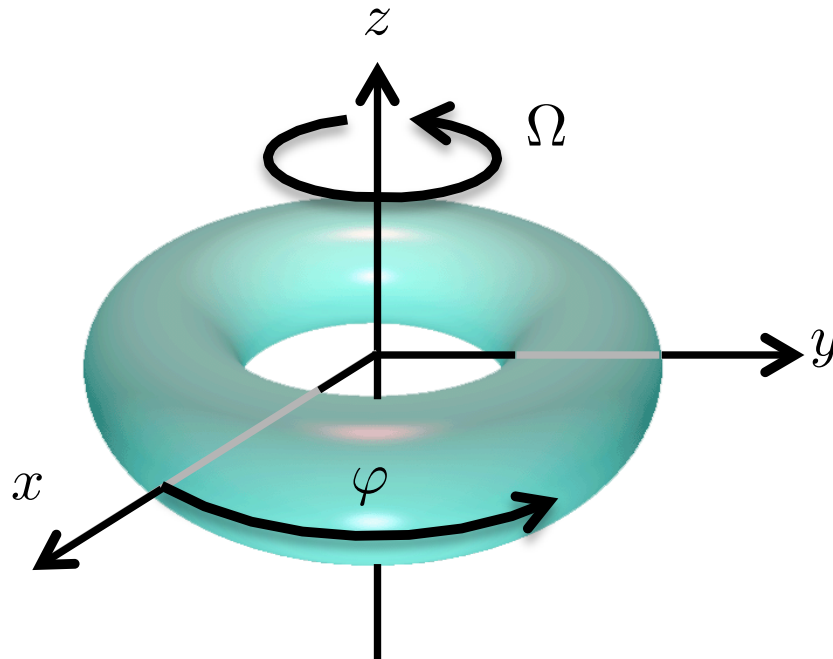


Lausanne
LPN Marcoussis
LKB Jussieu

- Comme les photons font partie du système condensé, la lumière qui sort de la cavité contient l'information sur la phase du condensat
- Propriétés superfluides mises en évidence en regardant l'écoulement autour d'un obstacle

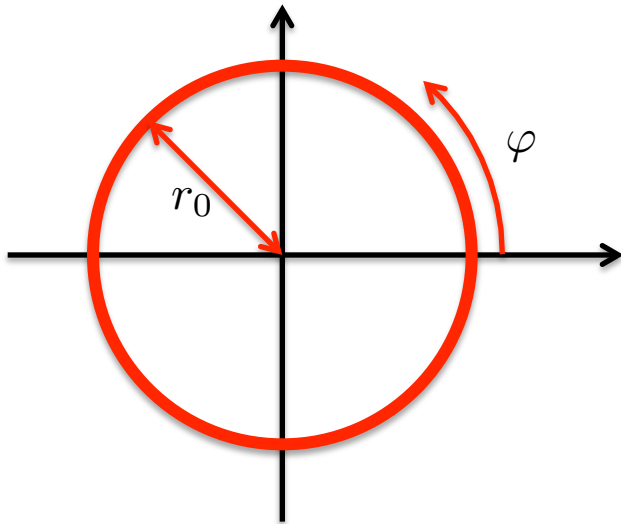
2.

Deux critères pour la superfluidité



Un atome unique sur un anneau

Limite d'un anneau fin : seul l'angle azimutal φ est pertinent



$$\psi(\mathbf{r}) \longrightarrow \psi(\varphi)$$

Fonction d'onde monovaluée :

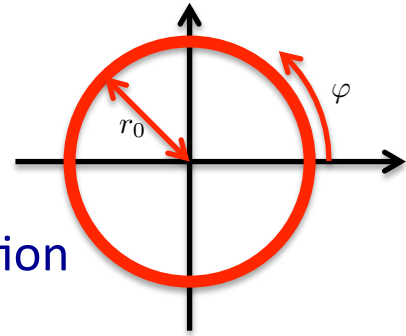
$$\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$$

conditions aux limites périodiques

Hamiltonien :
$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta = -\frac{\hbar^2}{2mr_0^2} \frac{d^2}{d\varphi^2}$$

Fonctions et énergies propres :
$$\psi_n(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\varphi} \quad E_n = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} n^2$$

Anneau en rotation



Référentiel du laboratoire,
supposé galiléen

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta = -\frac{\hbar^2}{2mr_0^2} \frac{d^2}{d\varphi^2}$$

+ potentiel créé par les parois rugueuses, qui dépend du temps si ces parois tournent

Référentiel en rotation
à la vitesse Ω

$$\hat{\hat{H}} = \hat{H} - \Omega \hat{L}_z$$

$$\hat{L}_z = -i \hbar \frac{d}{d\varphi}$$

Hamiltonien dans le référentiel en rotation :

$$\hat{\hat{H}} = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} \left(i \frac{d}{d\varphi} + \frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^2 + E_{\text{centrif.}}$$

$\Omega_c = \frac{\hbar}{mr_0^2}$: échelle de rotation caractéristique du point de vue quantique

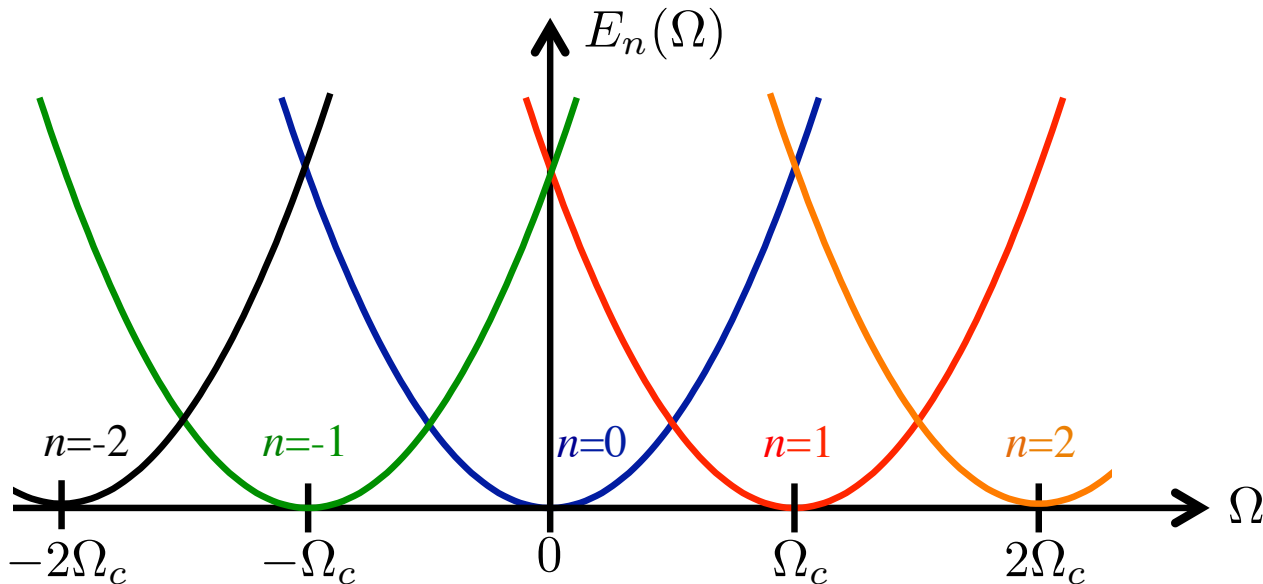
$E_{\text{centrif.}} = -\frac{1}{2}m\Omega^2r_0^2$: simple constante additive, omise dans la suite

Energie pour un anneau en rotation

Hamiltonien :
$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} \left(i \frac{d}{d\varphi} + \frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^2$$

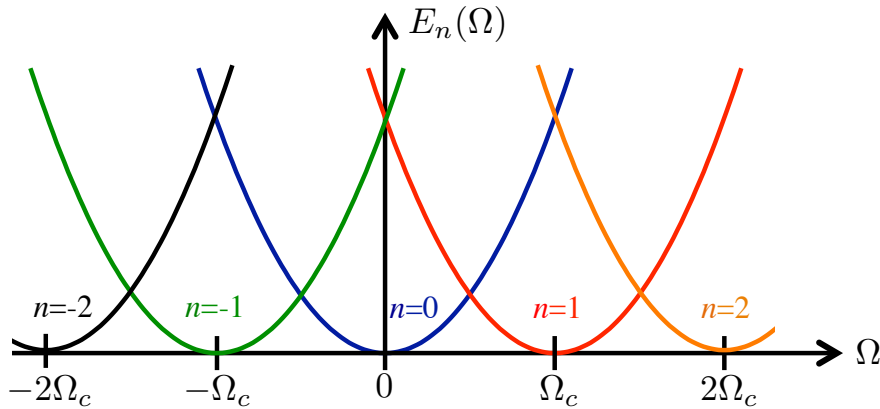
Les fonctions $\psi_n(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\varphi}$ sont toujours états propres avec l'énergie :

$$E_n(\Omega) = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} \left(n - \frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^2$$



L'état fondamental dépend de la valeur de Ω

Vitesse de l'anneau et vitesse de l'atome



A la fonction d'onde

$$\psi_n(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\varphi}$$

est associée la vitesse

$$\mathbf{v}_n = \frac{\hbar}{mr_0} n \mathbf{u}_\varphi$$

La vitesse de la paroi de l'anneau vaut : $\mathbf{v}_{\text{paroi}} = \Omega r_0 \mathbf{u}_\varphi$

Etat fondamental : entier n qui minimise la différence entre \mathbf{v}_n et $\mathbf{v}_{\text{paroi}}$

Compromis entre :

- une rotation de l'atome aussi proche que possible de celle de l'anneau
- une fonction d'onde satisfaisant $\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$

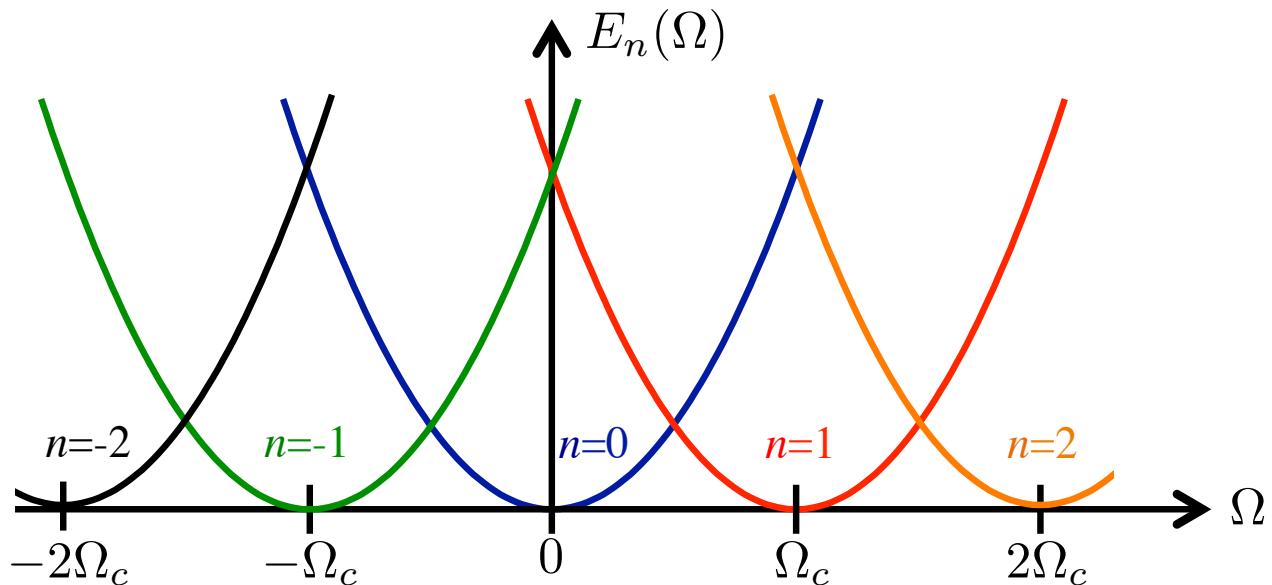
Pour $\Omega \ll \Omega_c$, l'état fondamental reste l'état au repos $\psi_0(\varphi) = \text{constante}$

Anneau en rotation lente et superfluidité

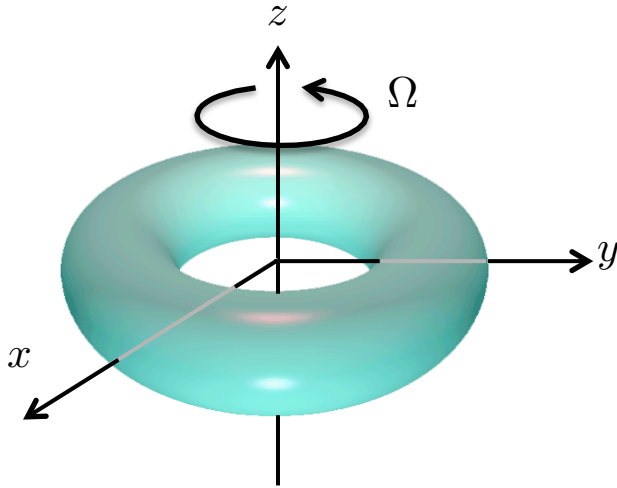
Ce premier critère traduit une « rigidité » de l'état superfluide

On cherche à mettre le superfluide en mouvement non inertiel (i.e., une rotation par rapport au référentiel galiléen du laboratoire) et on n'y arrive pas

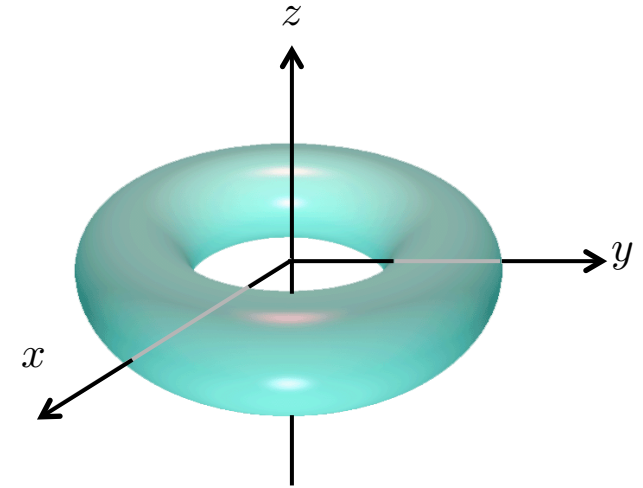
Remarque : l'atome unique et donc le gaz parfait vérifient ce premier critère



Deuxième critère : existence de courants permanents



On part de l'anneau en rotation
assez rapide $\Omega \gtrsim \Omega_c$
Le fluide tourne donc aussi



On arrête la rotation des
parois de l'anneau
Qu'arrive-t-il au fluide ?

Un courant superfluide correspond à un état métastable qui peut
perdurer même si l'état au repos a une énergie plus faible

*Le temps de métastabilité dépend de l'interaction
entre le fluide et les parois rugueuses de l'anneau*

Diagramme énergétique et métastabilité

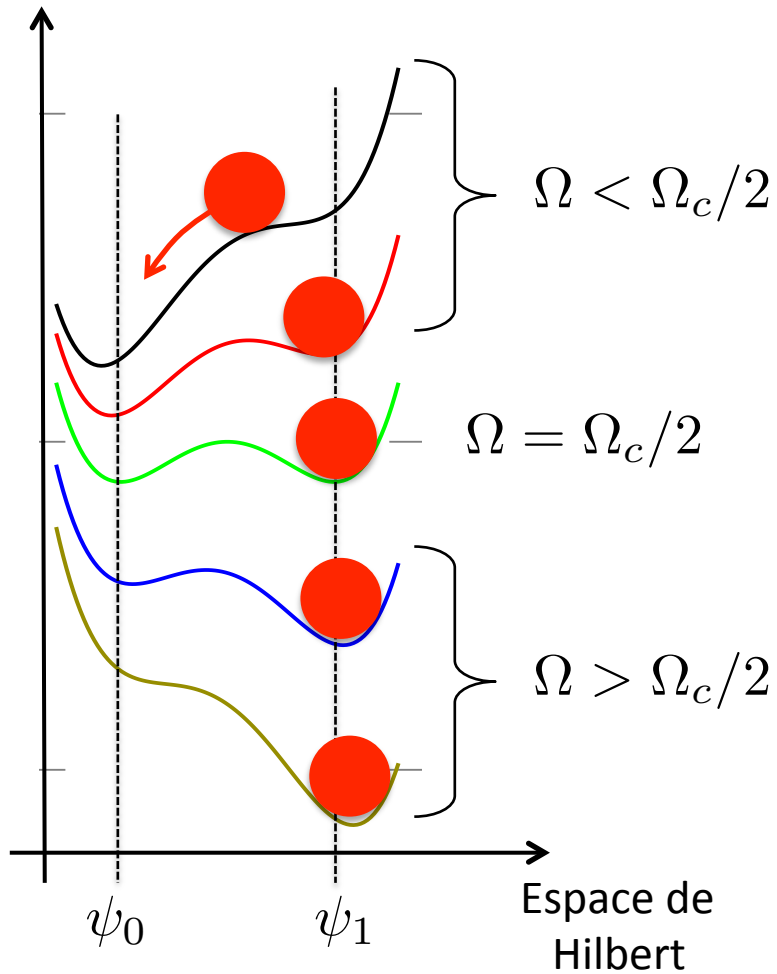
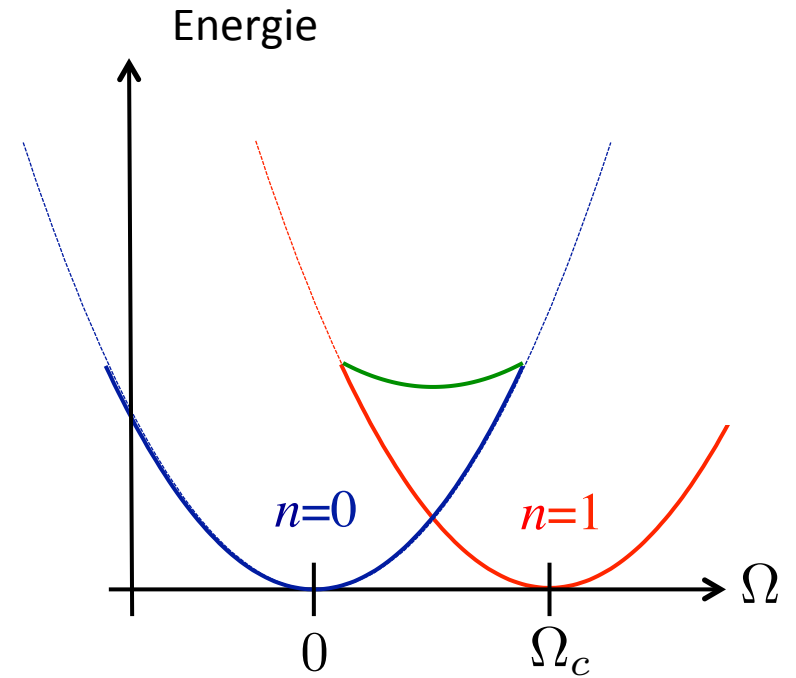
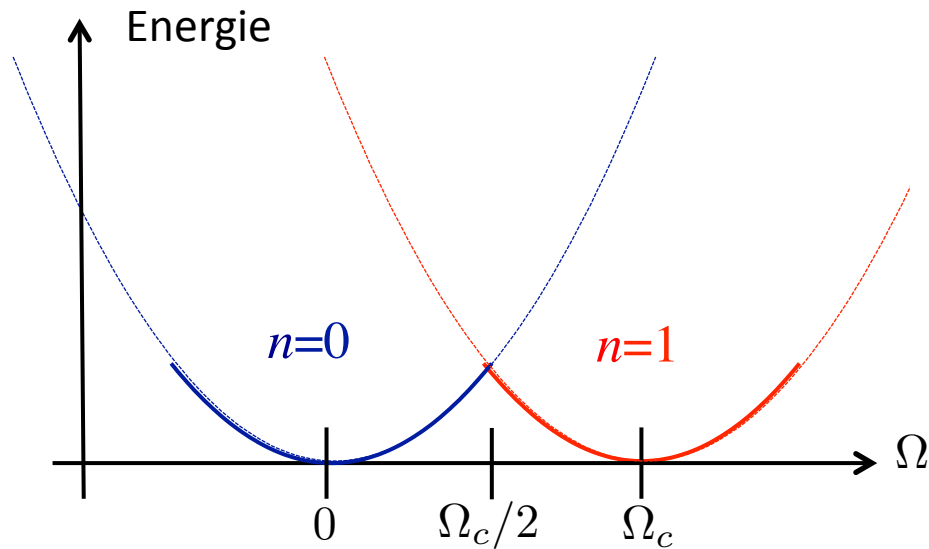


Schéma inspiré du résultat trouvé pour l'atome unique



Et le gaz parfait ?

Le gaz parfait, même condensé, ne satisfait pas ce deuxième critère de métastabilité



Au point $\Omega = \Omega_c/2$, tous les états

$$|N' : \psi_0 ; N - N' : \psi_1\rangle$$

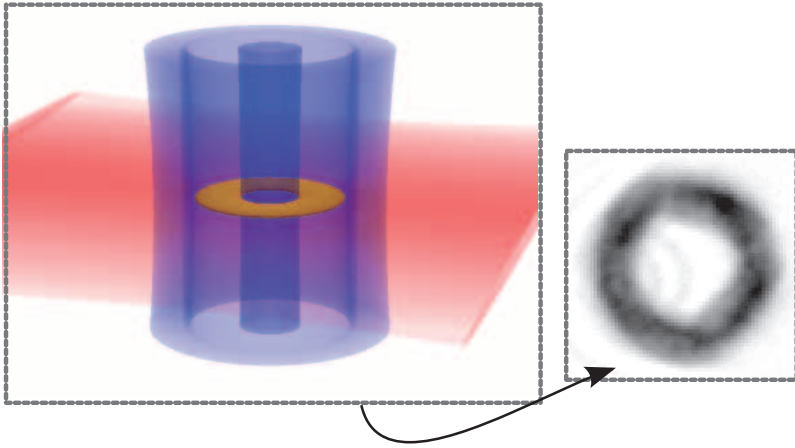
avec $N' = 0, 1, \dots, N$ ont la même énergie : condensat fragmenté

Quand on réduit la fréquence de rotation autour de $\Omega_c/2$, succession de transitions :

$$|N' : \psi_0 ; N - N' : \psi_1\rangle \longrightarrow |N' + 1 : \psi_0 ; N - N' - 1 : \psi_1\rangle$$

Les interactions vont bloquer ces transitions, car elles entraînent un coût supplémentaire en énergie pour un état fragmenté

Expérience du NIST (2014)



400 000 atomes de ^{23}Na
anneau de rayon 20 micromètres
confinement transverse harmonique
200 Hz x 500 Hz

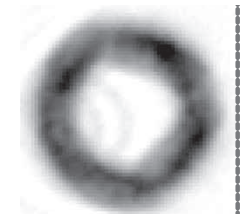
$$\Omega_c = \frac{\hbar}{mr_0^2} \sim 2\pi \times 1.2 \text{ Hz}$$

Très longue durée de vie des
courants permanents (> 1 minute)



Ajout d'une constriction
qui joue le rôle d'une paroi
relativement rugueuse

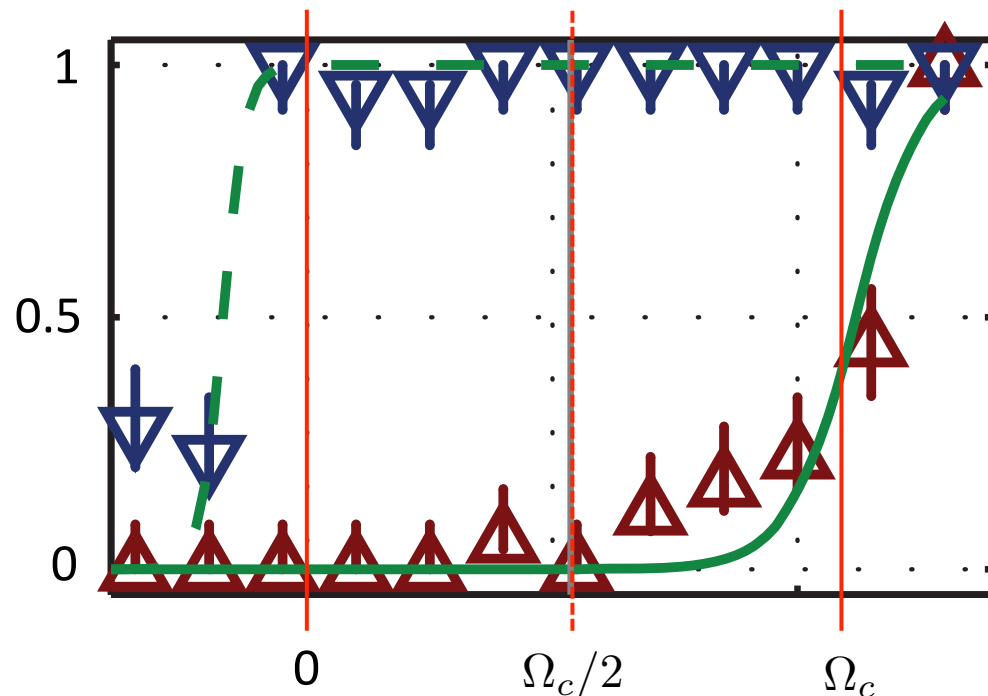
Expérience du NIST (2014), suite



On détecte le courant permanent par une expérience de temps de vol

- Pas de courant : le trou central se bouche lors de l'expansion balistique
- Avec un courant permanent : le trou central subsiste de fait de la barrière centrifuge $L^2/2mr^2$ associée au moment cinétique non nul

Moyenne de
l'enroulement
de phase n
mesuré
(20 réalisations/pt)



3.

Vitesse superfluide et vitesse normale

Le modèle à deux fluides

cf. séminaire de Sébastien Balibar le 18 mai

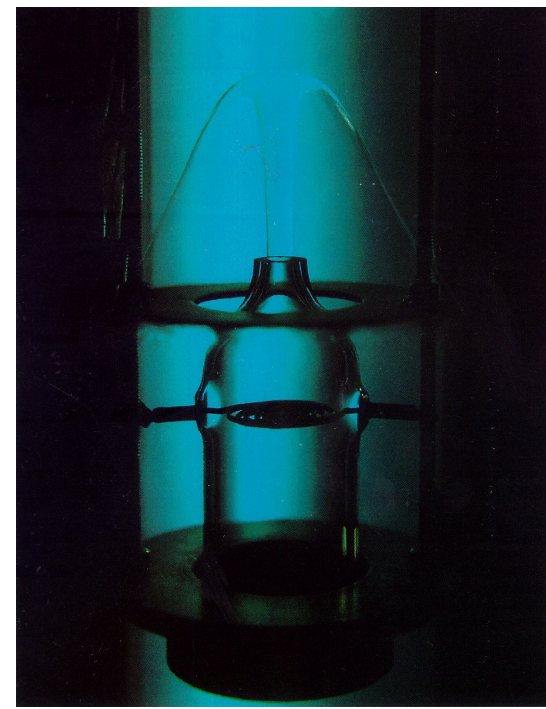
1924 : Einstein et le gaz parfait saturé

1937 : Kapitza, Allen & Misener :
découverte de la superfluidité de He liquide

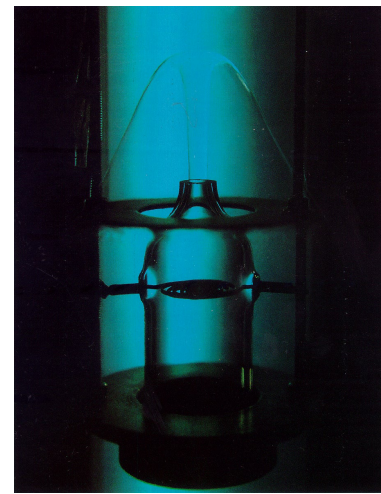
1938 : London (alors à l'IHP) : lien avec la statistique de Bose-Einstein

1938 : Tisza (alors au Collège de France) : deux courants séparés pour
les composantes normales et superfluides

1941 : Landau, mélange de deux liquides, l'un superfluide, i.e. sans viscosité,
et l'autre normal (mais refus d'une connexion avec la condensation
de Bose-Einstein)



Le modèle à deux fluides



L'ensemble du fluide peut être vu comme la superposition de deux composantes :

- Une partie superfluide d'entropie nulle

vitesse \mathbf{v}_s et densité volumique ρ_s

- Une partie normale (viscosité non nulle)

vitesse \mathbf{v}_n et densité volumique ρ_n

Densité volumique totale : $\rho = \rho_s + \rho_n$

Impulsion totale/unit.vol. : $m\rho_s\mathbf{v}_s + m\rho_n\mathbf{v}_n$

Energie cinétique totale/unit.vol. : $\frac{1}{2}m\rho_s\mathbf{v}_s^2 + \frac{1}{2}m\rho_n\mathbf{v}_n^2$

Condensat et vitesse superfluide

Fonction d'onde du condensat (au sens de Penrose & Onsager) :

$$\psi_0(\mathbf{r}) = |\psi_0(\mathbf{r})| e^{i\theta(\mathbf{r})}$$

Définition de la vitesse superfluide : $\mathbf{v}_s(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta$

- Relation profonde entre condensation et superfluidité
- Compatible avec un changement de repère galiléen

Passage de \mathcal{R} à \mathcal{R}' , avec une vitesse relative $-\mathbf{v}$:

$$\psi(\mathbf{r}, t) \longrightarrow \tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) = e^{im(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} - v^2 t/2)/\hbar} \psi(\mathbf{r} - \mathbf{v}t, t)$$

Un superfluide de vitesse uniforme \mathbf{v}_s dans \mathcal{R} aura la vitesse $\mathbf{v}_s + \mathbf{v}$ dans \mathcal{R}'

Irrotationalité du mouvement superfluide

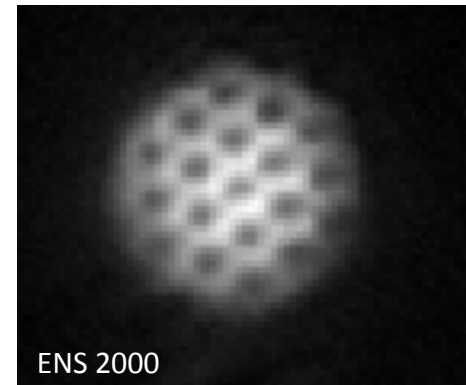
La définition $\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta$ (en tout point où la phase $\theta(\mathbf{r})$ est définie) entraîne

$$\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$$

ou encore :

$$\oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{r} = n \frac{2\pi\hbar}{m}, \quad n \in \mathbb{N}$$

La seule façon d'introduire une vorticité non nulle dans le superfluide est de générer un réseau de vortex (points ou ligne de singularité pour la phase).



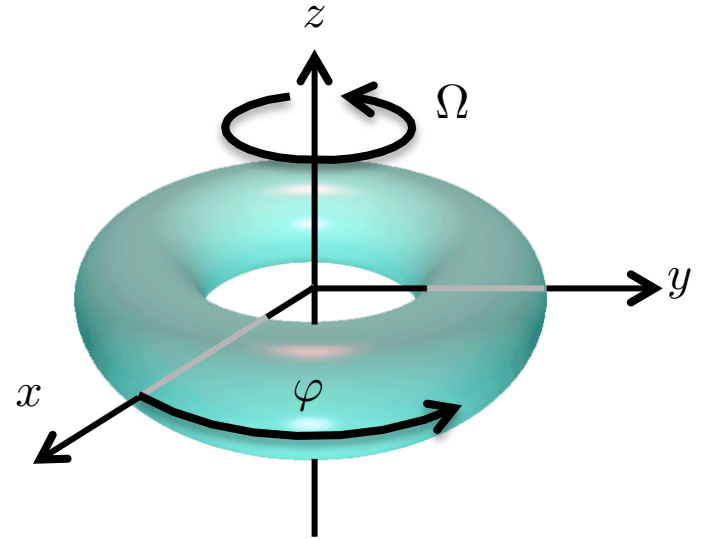
ENS 2000

Parois solides et vitesse de la composante normale

On pose que la vitesse de la composante normale est égale à la vitesse des parois

Pour l'anneau en rotation :

$$\mathbf{v}_n = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$



Pour un récipient au repos : $\mathbf{v}_n = 0$

Définition qui devient ambiguë pour des schémas plus compliqués, comme un écoulement de Couette

4.

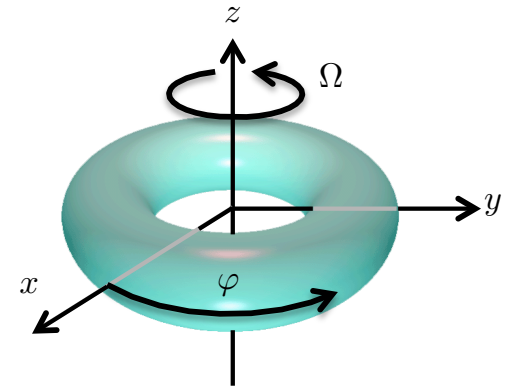
Densité superfluide et densité normale

$$\rho_n + \rho_s = \rho$$

Retour sur le fluide classique en rotation

Dans le référentiel du laboratoire,
le fluide classique dans l'anneau
en rotation a pour moment cinétique

$$\mathbf{L} = I_{\text{class}} \boldsymbol{\Omega}$$



Dans le référentiel tournant, où le potentiel créé par les parois est indépendant
du temps, le fluide classique apparaît stationnaire, donc de moment cinétique nul :

$$\mathcal{L} = 0$$

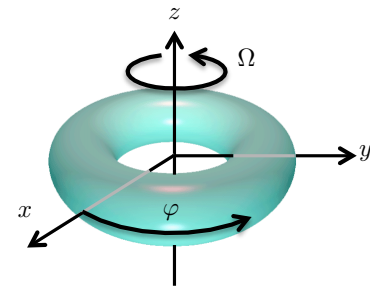
Démonstration

Passage dans le référentiel tournant = potentiel vecteur + énergie centrifuge

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} \longrightarrow \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{A})^2}{2m} - \frac{1}{2} m \Omega^2 r^2 \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = m \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

Lien impulsion – vitesse dans ce référentiel : $\mathbf{p} = m(\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$

Fluide classique en rotation (suite)



$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} \longrightarrow \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{A})^2}{2m} - \frac{1}{2}m\Omega^2 r^2 \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad \mathbf{p} = m(\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m}(\mathbf{p} - \mathbf{A})$$

Moment cinétique dans le référentiel tournant : $\mathcal{L}(\{\mathbf{r}_j\}, \{\mathbf{p}_j\}) = m \sum_j \mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j$

Gaz à l'équilibre : $\langle \mathcal{L} \rangle = \frac{N}{\mathcal{Z}} \int \underbrace{m(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1)}_{\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{p}_1 - \mathbf{A})} e^{-E(\{\mathbf{r}_j\}, \{\mathbf{p}_j\})/k_B T} d\tau$

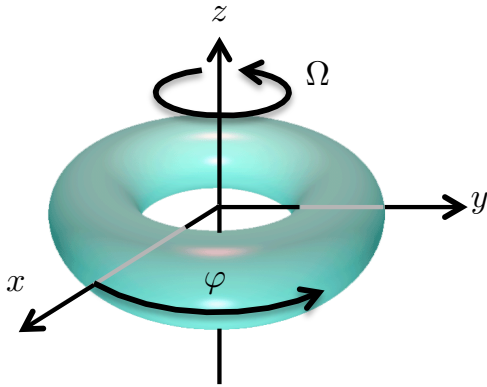
$$\mathcal{Z} = \int e^{-E(\{\mathbf{r}_j\}, \{\mathbf{p}_j\})/k_B T} d\tau \quad d\tau = d^3 r_1 \dots d^3 r_N d^3 p_1 \dots d^3 p_N$$

Changement de variable $\mathbf{p}'_j = \mathbf{p}_j - \mathbf{A}(\mathbf{r}_j)$ et le potentiel vecteur disparaît !

Le seul effet de la rotation est le terme centrifuge, qui ne crée aucun mouvement dans le référentiel en rotation $\longrightarrow \langle \mathcal{L} \rangle = 0$

Analogie exacte du théorème de Bohr – van Leuwen : dans un cadre thermodynamique classique, la magnétisation d'un système de particules chargées plongées dans un champ magnétique est toujours nulle

Fluide quantique et réduction du moment d'inertie



Rappel : le superfluide ne tourne pas (complètement) quand les parois de l'anneau sont mises en mouvement

On définit la densité superfluide à partir du moment cinétique dans le référentiel tournant :

$$\langle \mathcal{L}_z \rangle = -\frac{\rho_s}{\rho} I_{\text{class}} \Omega$$

Bilan énergétique dans le référentiel tournant pour $\Omega \ll \Omega_c$

Fonction de partition dans ce référentiel (le seul où l'hamiltonien est indépendant du temps)

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} \left(e^{-\hat{H}/k_B T} \right) \quad \hat{H} = \hat{H} - \Omega \hat{L}_z$$

Energie libre : $F = -k_B T \log \mathcal{Z}$ $\langle \mathcal{L}_z \rangle = -\frac{\rho_s}{\rho} I_{\text{class}} \Omega$

Un calcul simple, partant de $\langle \hat{L}_z \rangle = k_B T \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \Omega}$, permet de montrer :

$$\frac{\partial F}{\partial \Omega} = -I_{\text{class}} \Omega - \langle \hat{L}_z \rangle$$

$$F(\Omega) = F(0) - \underbrace{\frac{1}{2} I_{\text{class}} \Omega^2}_{\text{déconfinement centrifuge}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\rho_s}{\rho} I_{\text{class}} \Omega^2}_{\Delta F(\Omega)}$$

$\Delta F(\Omega)$: excès d'énergie libre à payer dans le référentiel tournant, associée à l'existence d'une fraction superfluide

Deux façons de comprendre (et généraliser) le passage dans le référentiel tournant

Il génère un champ de jauge

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} \longrightarrow \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{A})^2}{2m}$$

$$\text{avec } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

ou encore pour un anneau fin :

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{d\varphi^2} \longrightarrow \left(i\frac{d}{d\varphi} + \frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^2$$

$$\text{avec } \Omega_c = \hbar/mr_0^2$$

pour des fonctions d'onde avec la
condition aux limites $\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$

Il distord les conditions aux limites

On pose

$$\tilde{\psi}(\varphi) = \psi(\varphi) \exp\left(-i\frac{\Omega}{\Omega_c}\varphi\right)$$

On garde le même hamiltonien que
dans le référentiel du laboratoire

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{d\varphi^2}$$

mais la condition aux limites est modifiée

$$\tilde{\psi}(\varphi + 2\pi) = e^{-i\Theta} \tilde{\psi}(\varphi)$$

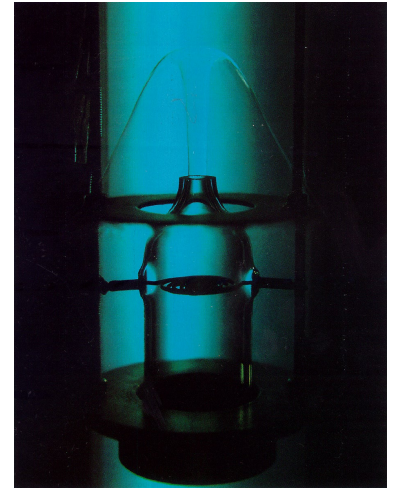
$$\text{avec } \Theta = 2\pi\Omega/\Omega_c$$

Quel que soit le point de vue adopté, l'état superfluide
entraîne un accroissement d'énergie libre $\Delta F \propto \Omega^2 \rho_s$

Densité superfluide et fraction condensée

Il n'y a pas de lien simple entre ρ_s/ρ et Π_0/N

Exemple de l'hélium liquide : à très basse température, le liquide est (aux incertitudes de mesure près) entièrement superfluide : $\rho_s \approx \rho$



En revanche, la fraction condensée (mesurée par diffraction de neutrons) reste faible : $\Pi_0/N < 0.1$

En effet, du fait des interactions dans le liquide, l'état de chaque atome est fortement intriqué avec celui de ses voisins ; l'opérateur densité à un corps $\hat{\rho}_1$ est alors un mélange statistique de beaucoup d'états.

En résumé

Le comportement superfluide est caractérisé par

- Une rigidité de phase qui entraîne un coût énergétique en présence d'un champ de jauge ou de conditions aux limites distordues
- L'existence de courants permanents, états métastables « protégés » du retour vers le vrai équilibre par une barrière énergétique due aux interactions

Le modèle à deux fluides fournit un cadre théorique pour rendre compte des principaux phénomènes observés

Impulsion totale/unit.vol. : $m\rho_s \mathbf{v}_s + m\rho_n \mathbf{v}_n$

Energie cinétique totale/unit.vol. : $\frac{1}{2}m\rho_s \mathbf{v}_s^2 + \frac{1}{2}m\rho_n \mathbf{v}_n^2$

Le cours 3 sera consacré à la description explicite de ce rôle des interactions