

# Chapitre 2

## Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme : les niveaux de Landau

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Le mouvement cyclotron classique . . . . .</b>	<b>2</b>
1-1	Mouvement circulaire uniforme . . . . .	2
1-2	Le courant de Hall . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Le spectre d'énergie en physique quantique . . . . .</b>	<b>3</b>
2-1	Le spectre obtenu par la méthode algébrique . . .	3
2-2	États et énergies propres en jauge symétrique . .	4
2-3	Le niveau de Landau fondamental (LLL) . . . . .	6
2-4	Dégénérescence du LLL. . . . .	8
<b>3</b>	<b>Jauge de Landau et courant de probabilité . . . . .</b>	<b>8</b>
3-1	Séparation de l'hamiltonien en jauge de Landau .	8
3-2	Le spectre de Landau retrouvé . . . . .	9
3-3	Courant de probabilité dans un état de Landau .	10
3-4	L'originalité de la structure en niveaux de Landau	10
<b>4</b>	<b>États de bord et applications . . . . .</b>	<b>11</b>
4-1	Modélisation d'un échantillon de taille finie . . .	11
4-2	Les états de bord . . . . .	12
4-3	Le courant de bord pour des fermions à $T = 0$ . .	13
4-4	Circuiterie à effet Hall . . . . .	15
4-5	Un interféromètre de Mach-Zender électronique	16

4-6	États de bords avec des atomes froids? . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Références . . . . .</b>	<b>18</b>

---

Ce chapitre est consacré à un problème essentiel dans l'étude du magnétisme, le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme. Après avoir rappelé brièvement les résultats obtenus en physique classique (dynamique newtonienne), nous passerons au cas quantique, que nous traiterons de plusieurs manières correspondant à différents choix de jauge. Nous dégagerons en particulier la notion de niveaux de Landau pour les sous-espaces propres de l'hamiltonien ; nous verrons que ces niveaux ont une dégénérescence macroscopique, qui croît linéairement avec l'aire de l'échantillon. Nous nous intéresserons tout particulièrement au niveau de Landau fondamental (LLL pour *Lowest Landau Level*), pour lequel nous donnerons deux expressions explicites pour une base d'états propres.

La dernière partie du chapitre sera consacrée à quelques effets physiques particulièrement importants qui apparaîtront comme une conséquence directe de cette quantification en niveaux de Landau. Nous dégagerons en particulier la notion d'état de bord, qui joue un rôle central dans la physique de l'effet Hall quantique. Nous illustrerons cette notion en décrivant une expérience d'interférométrie entre deux circuits électroniques

menée par Ji et al. (2003). Enfin, nous présenterons une proposition d'expérience permettant de mettre en évidence ces états de bord pour des atomes froids confinés dans un réseau optique (Goldman et al. 2013).

## 1 Le mouvement cyclotron classique

### 1-1 Mouvement circulaire uniforme

Quand une particule de masse  $M$  et de charge  $q$ , décrite par la physique newtonienne, est plongée dans un champ magnétique, son mouvement s'analyse en résolvant l'équation fondamentale de la dynamique  $M\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_L$  où  $\mathbf{F}_L$  est la force de Lorentz [voir par exemple Jackson (1998), chapitre 12] :

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (2.1)$$

Prenons le champ  $\mathbf{B}$  aligné avec l'axe  $z$ ,  $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_z$ . Le mouvement selon l'axe  $z$  est alors un mouvement de translation uniforme  $\ddot{z} = 0$  et nous pouvons restreindre notre analyse au mouvement projeté dans le plan  $xy$ . Dans ce plan, l'équation du mouvement s'écrit :

$$M\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} : \quad \ddot{x} = \omega_c \dot{y}, \quad \ddot{y} = -\omega_c \dot{x}, \quad (2.2)$$

où on a introduit la *pulsation cyclotron*

$$\omega_c = \frac{qB}{M}. \quad (2.3)$$

Le système différentiel à deux équations (2.2) se résout simplement en

$$x(t) = X_0 - \frac{v_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t), \quad y(t) = Y_0 + \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t), \quad (2.4)$$

ce qui correspond à un mouvement circulaire uniforme de pulsation  $\omega_c$ , parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre si  $\omega_c > 0$ . Dans (2.4), l'origine des temps a été choisie à un instant où le vecteur vitesse est parallèle à l'axe  $y$ . Le centre  $(X_0, Y_0)$  de ce cercle est quelconque, et son rayon vaut

$$r_0 = v_0/\omega_c. \quad (2.5)$$

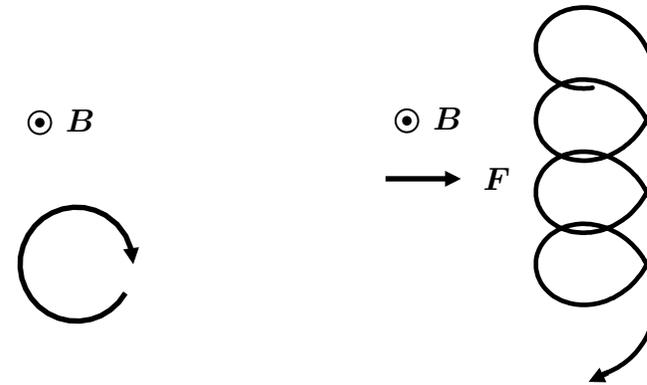


FIGURE 2.1. Gauche : orbite cyclotron dans un champ magnétique uniforme. Droite : mouvement de dérive le long de  $y$  en présence d'une force extérieure  $\mathbf{F}$  parallèle à l'axe  $x$ .

Cette relation se retrouve en égalant force de Lorentz et force centrifuge :  $qv_0B = Mv_0^2/r_0$ .

L'invariance par translation du problème est manifeste sur le résultat général (2.4) : pour une vitesse initiale donnée, les paramètres de la trajectoire circulaire (rayon et pulsation) seront les mêmes quelle que soit la position initiale dans le plan. On peut donc considérer que le fait d'appliquer un champ magnétique sur la particule revient à la localiser dans l'espace des phases associé au mouvement dans le plan  $xy$ , sa position et sa vitesse étant confinées dans une région centrée en  $(X_0, Y_0)$  et d'extension

$$[\Delta r \times \Delta p]^2 \sim [r_0 \times (Mv_0)]^2 \quad \text{avec} \quad r_0 = v_0/\omega_c. \quad (2.6)$$

Pour une vitesse initiale  $v_0$  donnée, cette région est d'autant plus faible que le champ magnétique  $B$  est grand. La mécanique quantique, avec sa contrainte liée à l'inégalité de Heisenberg  $\Delta r_i \Delta p_i \geq \hbar/2$  ( $i = x, y$ ), va venir modifier ce résultat simple.

## 1-2 Le courant de Hall

Supposons maintenant qu'une force uniforme  $\mathbf{F}$ , indépendante de la position et de la vitesse, vient s'ajouter à la force de Lorentz  $\mathbf{F}_L$ . Cette force peut par exemple être créée par un champ électrique uniforme. Pour simplifier les notations, prenons cette force parallèle à l'axe  $x$  :  $\mathbf{F} = F \mathbf{u}_x$ . Cette force ne change pas le caractère uniforme du mouvement selon  $z$  et l'équation du mouvement projetée sur le plan  $xy$  devient

$$M\ddot{x} = qB\dot{y} + F, \quad M\ddot{y} = -qB\dot{x}. \quad (2.7)$$

En absence de champ magnétique, l'effet de la force est bien sûr d'accélérer la particule le long de l'axe  $x$ . En présence de champ magnétique, la nature du mouvement change radicalement. La solution générale de l'équation du mouvement (2.7) est

$$x(t) = X_0 - \frac{v_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t), \quad y(t) = Y_0 + \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t) - \frac{F}{qB} t. \quad (2.8)$$

Cette solution représentée en figure 2.1 correspond à la composition

- du mouvement circulaire uniforme correspondant au mouvement cyclotron trouvé en l'absence de force  $\mathbf{F}$ ,
- du mouvement de translation uniforme (mouvement de dérive) à vitesse  $-F/(qB)$ , dans la direction  $y$  *perpendiculaire* à la force  $\mathbf{F}$ .

Quand la force  $F$  est due à un champ électrique extérieur ( $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ ), ce mouvement de dérive est appelé *courant de Hall*.

## 2 Le spectre d'énergie en physique quantique

Avant de passer à la description quantitative du mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique, on peut utiliser les résultats classiques précédents en les associant à l'inégalité de Heisenberg pour prévoir les échelles de position et de vitesse du problème. Partons de la relation entre position et vitesse indiquée en (2.5),  $\omega_c r_0 = v_0$ ; en utilisant le fait que dans un état fondamental du mouvement quantique, on a en général

$$M \Delta x \Delta v \sim \hbar, \quad (2.9)$$

on en déduit les échelles de longueur et de vitesse pertinentes pour une orbite cyclotron en physique quantique :

$$\ell = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega_c}} = \sqrt{\frac{\hbar}{qB}}, \quad v_m = \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{M}}. \quad (2.10)$$

La longueur  $\ell$  est appelée *longueur magnétique*. Pour un électron libre<sup>1</sup> dans un champ magnétique de 1 Tesla, on trouve  $\omega_c/2\pi = 28$  GHz,  $\ell \approx 26$  nm et  $v_m \approx 4000$  m/s.

Il existe de multiples chemins pour passer au stade quantitatif et trouver les énergies et les états propres de l'hamiltonien d'une particule dans un champ  $\mathbf{B}$  uniforme :

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}))^2}{2M}, \quad \text{avec } \nabla \times \mathbf{A} = B\mathbf{u}_z. \quad (2.11)$$

Une des raisons de cette grande variété de techniques réside dans l'invariance de jauge : des potentiels vecteurs  $\mathbf{A}$  *a priori* très différents (jauge de Landau ou jauge symétrique par exemple) peuvent donner lieu à des calculs eux aussi éloignés, même si ils conduisent au final au même spectre d'énergie et aux mêmes sous-espaces propres. Dans la mesure où nous aurons besoin de ces techniques pour décrire des situations plus complexes dans la suite du cours (en présence d'un potentiel extérieur par exemple), nous allons maintenant les passer en revue.

### 2-1 Le spectre obtenu par la méthode algébrique

Cette méthode permet de trouver le spectre de l'hamiltonien sans faire de choix de jauge particulier. Considérons pour commencer l'opérateur hermitien *quantité de mouvement* :

$$\hat{\Pi}_j = \hat{p}_j - qA_j(\hat{\mathbf{r}}), \quad j = x, y, \quad \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla, \quad (2.12)$$

avec lequel on peut réécrire l'hamiltonien

$$\hat{H} = \frac{1}{2M} \left( \hat{\Pi}_x^2 + \hat{\Pi}_y^2 \right) \quad (2.13)$$

1. Pour un électron dans la bande de conduction de GaAs, la masse  $M$  et donc la pulsation cyclotron  $\omega_c$  sont considérablement modifiées :  $M_b \approx 0.07 M$ . Pour une discussion détaillée, incluant les effets magnétiques de spin, voir par exemple Eisenstein (2005).

Contrairement à ce qui se passe pour les deux composantes  $x, y$  de l'opérateur position  $\hat{\mathbf{r}}$  ou de l'impulsion  $\hat{\mathbf{p}}$ , les deux composantes de l'opérateur  $\hat{\Pi}$  ne commutent pas :

$$[\hat{\Pi}_x, \hat{\Pi}_y] = i \hbar q B. \quad (2.14)$$

La recherche des états propres de  $(\hat{\Pi}_x^2 + \hat{\Pi}_y^2)/2M$ , sachant que le commutateur de ces deux opérateurs hermitiens est une constante, est un problème très similaire à celui de la diagonalisation de l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique  $(\hat{P}^2 + \hat{X}^2)/2$  avec  $[\hat{X}, \hat{P}] = i$ . Nous allons donc utiliser une méthode similaire à celle développée par Dirac pour résoudre le problème de l'oscillateur harmonique.

Introduisons les deux opérateurs annihilation et création

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar q B}} (\hat{\Pi}_x + i \hat{\Pi}_y), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar q B}} (\hat{\Pi}_x - i \hat{\Pi}_y). \quad (2.15)$$

La relation de commutation

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (2.16)$$

et l'expression de l'hamiltonien

$$\hat{H} = \hbar \omega_c \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.17)$$

sont identiques à celles obtenues pour les opérateurs d'un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_c$ . On en déduit que les valeurs propres de  $\hat{H}$  sont nécessairement de la forme

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c, \quad \text{avec } n \text{ entier positif ou nul.} \quad (2.18)$$

Ces niveaux d'énergie, régulièrement espacés de la quantité  $\hbar \omega_c$ , sont appelés *niveaux de Landau*.

Pour rechercher la forme des états propres, il faut choisir une jauge pour exprimer le potentiel vecteur, ce que nous ferons dans les paragraphes suivants. Notons d'ores et déjà que puisque nous étudions ici un problème bi-dimensionnel et qu'on trouve que les énergies sont repérées par un seul nombre quantique  $n$ , on peut s'attendre à ce que les niveaux d'énergies

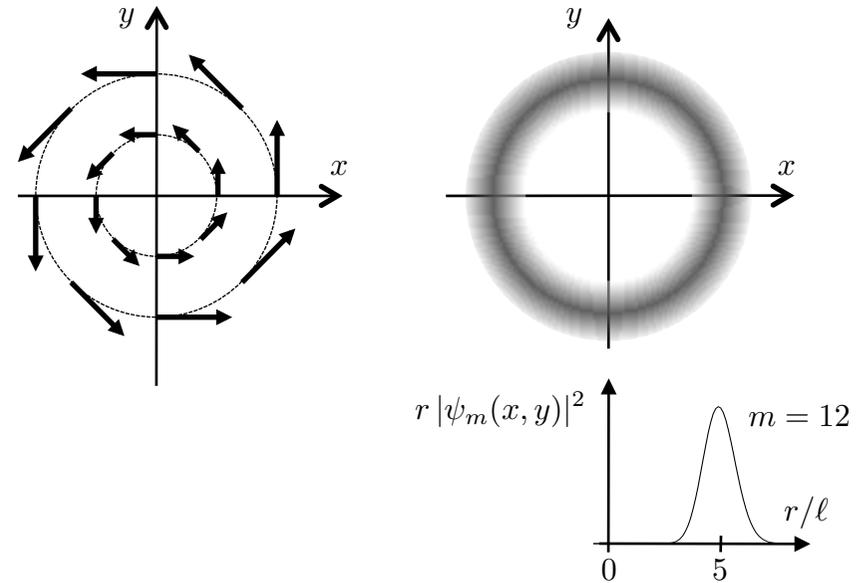


FIGURE 2.2. Gauche : représentation du potentiel vecteur en jauge symétrique. Droite : densité de probabilité pour une fonction propre de l'hamiltonien en jauge symétrique appartenant au LLL. La densité de probabilité  $r|\psi_m(x, y)|^2$  est maximale pour  $r_m = \sqrt{2m+1}\ell$ ; on a tracé ici cette densité de probabilité pour  $m = 12$ .

soient dégénérés. Nous verrons que c'est effectivement le cas, la dégénérescence étant en fait macroscopique pour chaque niveau  $E_n$  : le nombre d'états propres croît proportionnellement à la surface accessible à la particule dans le plan  $xy$ .

## 2-2 États et énergies propres en jauge symétrique

Nous prenons dans ce paragraphe la jauge symétrique (cf. figure 2.2)

$$A_x(\mathbf{r}) = -By/2, \quad A_y(\mathbf{r}) = Bx/2, \quad A_z(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.19)$$

Notons que ce choix de jauge brise l'invariance par translation du problème, mais respecte l'invariance par rotation autour du centre. L'hamiltonien  $\hat{H}$  se développe alors pour donner :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2M} + \frac{1}{8}M\omega_c^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) - \frac{\omega_c}{2}(\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x). \quad (2.20)$$

ce qui peut encore se mettre sous la forme

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \frac{\omega_c}{2}\hat{L}_z, \quad \text{avec} \quad \hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \frac{1}{8}M\omega_c^2 r^2, \quad \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x. \quad (2.21)$$

Discutons d'abord séparément les deux composante de  $\hat{H}$ , c'est-à-dire  $\hat{H}_0$  et  $\hat{L}_z$ . L'hamiltonien  $\hat{H}_0$  décrit un oscillateur harmonique isotrope à deux dimensions, de pulsation  $\omega_c/2$ . On peut chercher une base d'états propres de  $\hat{H}_0$  en écrivant  $\hat{H}_0 = \hat{H}_{0,x} + \hat{H}_{0,y}$ , où  $\hat{H}_{0,j}$  est l'hamiltonien d'un oscillateur à une dimension selon la direction  $j = x, y$ . Une base d'états propres est alors obtenue en considérant les états  $|n_x, n_y\rangle$ , où on a déposé  $n_j$  quanta d'excitation selon la direction  $j$ , l'énergie associée étant :

$$\left(n_x + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar\omega_c}{2} + \left(n_y + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar\omega_c}{2} = (n_0 + 1) \frac{\hbar\omega_c}{2}, \quad n_0 = n_x + n_y. \quad (2.22)$$

En particulier :

- l'état fondamental  $|0, 0\rangle$  d'énergie  $\hbar\omega_c/2$  est non dégénéré ;
- le premier niveau excité d'énergie  $3\hbar\omega_c/2$  est de dégénérescence 2 et engendré par les deux états  $|1, 0\rangle$  et  $|0, 1\rangle$  ;
- le deuxième niveau excité d'énergie  $5\hbar\omega_c/2$  est de dégénérescence 3 et engendré par les trois états  $|2, 0\rangle$ ,  $|1, 1\rangle$  et  $|0, 2\rangle$ , etc.

Plus généralement, la dégénérescence du niveau  $n_0$  est  $n_0 + 1$  (voir figure 2.3, cadre du haut). La fonction d'onde associée à un état  $|n_x, n_y\rangle$  est  $P_{n_x}(x)e^{-x^2/4\ell^2} P_{n_y}(y)e^{-y^2/4\ell^2}$ , où les  $P_n$  sont les polynômes de Hermite (de degré  $n$ ).

L'opérateur  $\hat{L}_z$  est la composante selon  $z$  du moment cinétique orbital. Son expression en coordonnées polaires est simple

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (2.23)$$

et ses fonctions propres sont donc du type  $F(r) e^{im\varphi}$  où  $m$  est un entier relatif et  $F$  une fonction quelconque de la variable radiale. Notons que l'état fondamental de  $\hat{H}_0$ , de fonction d'onde  $e^{-r^2/4\ell^2}$  est bien de cette forme avec  $m = 0$ .

Cherchons maintenant une base propre commune à  $\hat{H}_0$  et  $\hat{L}_z$ , qui constituera donc également une base propre de  $\hat{H}$ . On peut travailler par sous-espace propre de  $\hat{H}_0$  :

- Nous venons de noter que l'état fondamental  $e^{-r^2/4\ell^2}$  est un état propre commun à  $\hat{H}_0$  et  $\hat{L}_z$ .
- Dans le premier niveau excité de  $\hat{H}_0$ , les états  $|n_x = 1, n_y = 0\rangle$  et  $|n_x = 0, n_y = 1\rangle$  ont pour fonctions d'onde respectives  $x e^{-r^2/4\ell^2}$  et  $y e^{-r^2/4\ell^2}$  ; ils ne sont donc pas séparément des états propres de  $\hat{L}_z$ , mais il est facile de trouver deux combinaisons linéaires qui conviennent :

$$(x-iy) e^{-r^2/4\ell^2} = r e^{-i\varphi} e^{-r^2/4\ell^2} \quad \text{et} \quad (x+iy) e^{-r^2/4\ell^2} = r e^{+i\varphi} e^{-r^2/4\ell^2}, \quad (2.24)$$

associées respectivement à  $m = -1$  et  $m = +1$ .

- Plus généralement, dans un sous-espace propre donné de  $\hat{H}_0$  associé au nombre quantique  $n_0 = n_x + n_y$ , on peut identifier  $n_0 + 1$  états propres indépendants de  $\hat{L}_z$  associés aux nombres quantique azimutaux

$$m = -n_0, -n_0 + 2, \dots, n_0 - 2, n_0. \quad (2.25)$$

L'écriture générale de ces états est assez compliquée, sauf pour les deux états extrêmes  $m = \pm n_0$  qui ont pour fonctions d'onde :

$$m = \pm n_0 : \quad (x \pm iy)^m e^{-r^2/4\ell^2} = r^m e^{\pm im\varphi} e^{-r^2/4\ell^2} \quad (2.26)$$

Maintenant que nous disposons d'une base commune à  $\hat{H}_0$  et  $\hat{L}_z$ , le problème de la diagonalisation de  $\hat{H}$  est résolu. Un état propre commun à  $\hat{H}_0$  et  $\hat{L}_z$ , de valeur propres  $(n_0 + 1)\hbar\omega_c/2$  et  $m\hbar$ , sera également état propre de  $\hat{H}$  avec la valeur propre

$$E_{n_0, m} = (n_0 + 1) \frac{\hbar\omega_c}{2} - m \frac{\hbar\omega_c}{2}, \quad \text{avec} \quad m = -n_0, -n_0 + 2, \dots, n_0 - 2, n_0. \quad (2.27)$$

ce qui s'écrit encore

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_c, \quad \text{avec } n = \frac{n_0 - m}{2} \text{ entier positif ou nul.} \quad (2.28)$$

On retrouve donc la structure de l'hamiltonien en niveaux de Landau régulièrement espacés (voir aussi la figure 2.3, cadre du bas). On note de plus que chaque niveau de Landau est *infiniment dégénéré*, au moins si la particule peut explorer tout le plan  $xy$ . Il existe en effet une infinité de façon d'atteindre tout entier  $n$  à partir de couples  $(n_0, m)$  si on ne restreint pas les valeurs de  $n_0$  et  $m$  réalisables.

### 2-3 Le niveau de Landau fondamental (LLL)

Cette procédure fournit un moyen systématique pour trouver une base d'états propres de  $\hat{H}$ . Intéressons nous ici au niveau de Landau fondamental  $n = 0$  (*Lowest Landau Level, LLL* en anglais), obtenu en prenant systématiquement  $n_0 = m$  dans (2.28). Nous avons donné en (2.26) la forme des fonctions d'onde correspondantes, que nous reproduisons ici :

$$\psi_{n_0=m, m}(x, y) \propto (x + iy)^m e^{-r^2/4\ell^2} = r^m e^{im\varphi} e^{-r^2/4\ell^2}. \quad (2.29)$$

Nous avons tracé sur la figure 2.2 la densité de probabilité radiale  $r|\psi_m|^2$ , associée à un état  $\psi_m$  du LLL (oublions l'indice  $n_0$  puisqu'il est de toute façon égal à  $m$  pour le LLL). Cette densité de probabilité est invariante par rotation autour de l'axe  $z$  et elle est maximale sur un cercle de rayon

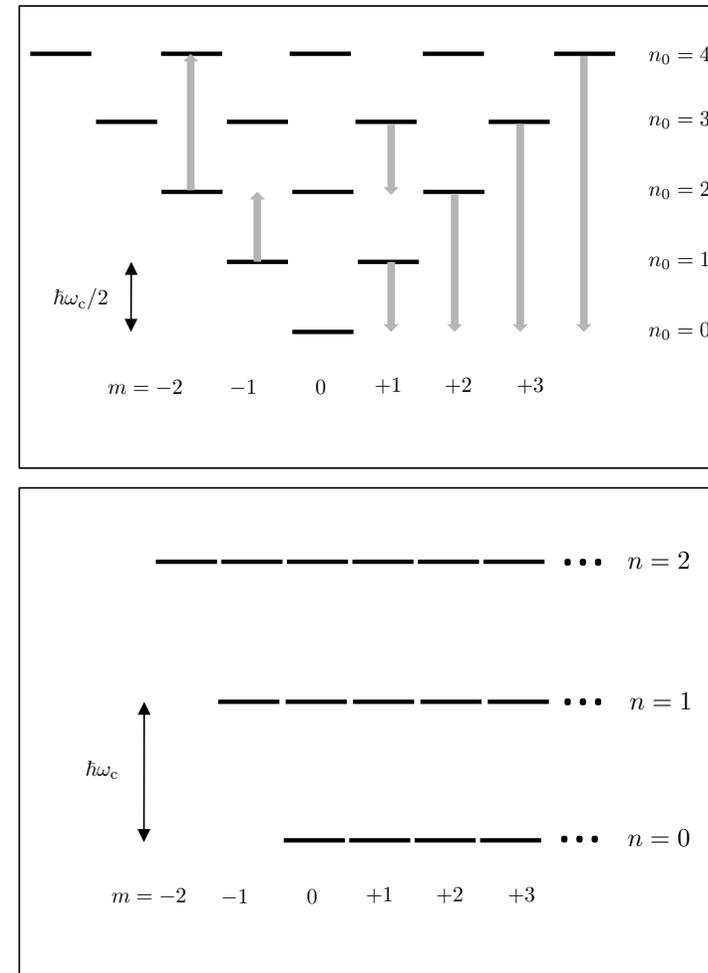
$$r_m = \sqrt{2m + 1} \ell. \quad (2.30)$$

Sa largeur à mi-hauteur est indépendante de  $m$  et d'ordre

$$\Delta r \sim \ell. \quad (2.31)$$

Une particule préparée dans un état  $\psi_m$  donné est donc localisée sur un anneau étroit, la réunion de tous ces anneaux recouvrant le plan. On trouve par ailleurs

$$\langle \psi_m | r^2 | \psi_m \rangle = (2m + 2)\ell^2. \quad (2.32)$$



**FIGURE 2.3.** Haut : structure des niveaux d'énergie de l'hamiltonien  $\hat{H}_0$  décrivant un oscillateur harmonique 2D, avec des niveaux  $(n_0 + 1)\hbar\omega_c/2$ ,  $n_0$  entier positif ou nul. La dégénérescence d'un niveau est  $n_0 + 1$ , et les états propres peuvent être repérés par les deux nombres quantiques,  $n_0$  et  $m$ , où  $m\hbar$  est la valeur de la composante selon  $z$  du moment cinétique  $\hat{L}_z$ . Les flèches grises indiquent l'action de  $-\omega_c \hat{L}_z / 2$  sur certains niveaux. Bas : structure des niveaux d'énergie de l'hamiltonien  $\hat{H}$  décrivant une particule dans un champ magnétique uniforme. Cette structure se déduit de celle du haut en déplaçant un niveau  $(n_0, m)$  de l'énergie  $-\hbar\omega_c m / 2$ .

L'orthogonalité<sup>2</sup> des différents  $\psi_m$  est assurée par leur dépendance différente vis à vis de l'angle polaire  $\varphi$  :

$$\int \psi_m^*(\mathbf{r})\psi_{m'}(\mathbf{r}) d^2r \propto \int e^{-im\varphi} e^{im'\varphi} d\varphi = 2\pi\delta_{m,m'}. \quad (2.33)$$

Introduisons maintenant la variable

$$u = x + iy. \quad (2.34)$$

On déduit de (2.29) que l'on peut écrire un état quelconque du niveau de Landau fondamental sous la forme

$$\psi(x, y) = \sum_m C_m \psi_m(x, y) = F(u) e^{-r^2/4\ell^2} \quad (2.35)$$

où

$$F(u) = \sum_m C_m u^m \quad (2.36)$$

est un polynôme (ou une fonction analytique) quelconque de la variable  $u$ . La restriction au niveau de Landau fondamental correspond donc à un passage effectif d'un espace à deux dimensions vers un espace à une seule dimension. Avant restriction au LLL, les états possibles sont des fonctions d'onde des deux variables indépendantes  $x$  et  $y$ , ou de manière équivalente, des fonctions des deux variables complexe  $u = x + iy$  et  $\bar{u} = x - iy$ . Après restriction au LLL, les états sont décrits par des fonctions de la seule variable  $u = x + iy$  et ne dépendent plus de  $\bar{u}$  (sauf en ce qui concerne la gaussienne  $e^{-r^2/4\ell^2} = e^{-u\bar{u}/4\ell^2}$ ).

**Quel moment cinétique orbital pour un état du LLL?** Le fait que les états de base (2.29) soient états propres du moment cinétique canonique  $\hat{L}_z$  avec des valeurs propres  $m\hbar$  toutes différentes pourrait laisser supposer qu'ils n'ont pas tous le même moment cinétique « physique » moyen. Ce n'est pas le cas ; tout comme l'impulsion  $\hat{\mathbf{p}}$  n'est pas égale à la *quantité de mouvement*  $M\hat{\mathbf{v}}$ , l'opérateur  $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$  ne décrit pas la *quantité physique moment cinétique orbital*<sup>3</sup>  $M\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{\Pi}}$ .

2. Les  $\psi_m$  normalisés ont pour expression  $\psi_m(\mathbf{r}) = N_m r^m e^{im\varphi} e^{-r^2/4\ell^2}$  avec  $N_m = [n! \pi (2\ell)^{n+1}]^{1/2}$ .

3. En anglais, on appelle  $\mathbf{L}$  *canonical angular momentum* et  $\mathbf{r} \times \mathbf{\Pi}$  *kinetic angular momentum*.

Calculons la valeur moyenne de la composante selon  $z$  de cette quantité physique. Partant de

$$\mathbf{r} \times \mathbf{\Pi} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} - q\mathbf{r} \times \mathbf{A} = \mathbf{L} - \frac{q}{2}(x^2 + y^2)\mathbf{B} \quad (2.37)$$

et en utilisant (2.32), on trouve

$$\langle \psi_m | (\mathbf{r} \times \mathbf{\Pi})_z | \psi_m \rangle = m\hbar - (m+1)\hbar = -\hbar, \quad (2.38)$$

ce qui donne un moment cinétique orbital moyen égal à  $-\hbar$  pour tous les états du LLL.

**Retour sur la méthode algébrique.** La forme  $\hat{H} = (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2)\hbar\omega_c$  de l'hamiltonien obtenu par la méthode algébrique (cf. (2.17)) permet de retrouver simplement la structure des états du LLL. Pour le choix de jauge symétrique, le niveau fondamental correspond aux états  $|\psi\rangle$  tels que

$$\hat{a}|\psi\rangle = 0, \quad \text{avec} \quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar qB}} \left( \hat{p}_x + i\hat{p}_y + \frac{qB}{2}(\hat{y} - i\hat{x}) \right). \quad (2.39)$$

Ré-exprimons cet opérateur en termes des variables  $u$  et  $\bar{u}$ , considérées comme indépendantes, et de leur dérivées :

$$u = x + iy, \quad \bar{u} = x - iy \quad \Rightarrow \quad \partial_u = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \quad \partial_{\bar{u}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y). \quad (2.40)$$

On a

$$\hat{a} = -i\sqrt{\frac{2\hbar}{qB}} \left( \partial_{\bar{u}} + \frac{u}{4\ell^2} \right) \quad (2.41)$$

et les fonctions  $\psi(x, y) \equiv \psi(u, \bar{u})$  solutions de (2.39) sont telles que

$$\hat{a}\psi(u, \bar{u}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi(u, \bar{u}) = F(u) e^{-u\bar{u}/4\ell^2} \quad (2.42)$$

ce qui redonne bien (2.35).

Notons pour terminer qu'il est alors possible de construire les états du premier niveau de Landau excité (puis les autres niveaux de Landau) en faisant agir l'opérateur  $\hat{a}^\dagger$  sur les états du LLL que nous venons de trouver.

## 2-4 Dégénérescence du LLL.

Supposons que le mouvement dans le plan  $xy$  de la particule soit restreint à un domaine de surface  $S$ . On supposera bien sûr que  $S \gg \ell^2$  pour qu'on puisse y placer plusieurs orbites cyclotrons. La question liée à la dégénérescence est donc : combien d'orbites indépendantes peut-on y loger, ou encore quelle est la dégénérescence du LLL en fonction de  $S$ ? La réponse rigoureuse à cette question n'est pas simple. Il faut passer du plan vers une sphère ou un tore et prendre les conditions aux limites appropriées [voir par exemple Cooper (2008)].

Nous nous contenterons ici d'un raisonnement approché en prenant un domaine en forme de disque de rayon  $R$ , avec  $S = \pi R^2$ . Nous utilisons comme précédemment la jauge symétrique, en prenant pour origine  $\mathbf{r} = 0$  le centre du disque. La densité de probabilité radiale  $r|\psi(x, y)|^2$  pour une fonction de base (2.29) est maximale au rayon  $r = \sqrt{2m + 1} \ell$  et décroît rapidement (sur une distance  $\sim \ell$ ) de part et d'autre de ce rayon. Pour que cette fonction de base intervienne de manière significative dans le développement d'un état physique de la particule, il faut que la région où elle prend une valeur significative soit à l'intérieur du disque, ce qui impose :

$$n < \frac{R^2}{2\ell^2}. \quad (2.43)$$

La dégénérescence  $\mathcal{D}$  du LLL est donc donnée par ce nombre

$$\mathcal{D} \approx \frac{R^2}{2\ell^2} = \frac{S}{2\pi\ell^2} = \frac{S}{2\pi\hbar/qB} = \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad (2.44)$$

où  $\Phi = BS$  est le flux du champ à travers la surface  $S$  et  $\Phi_0$  le *quantum de flux* :

$$\Phi_0 = \frac{h}{q}. \quad (2.45)$$

En d'autres termes, on peut considérer que la surface occupée par une orbite cyclotron est  $2\pi\ell^2 = h/qB$  et que  $\mathcal{D}$  représente le nombre d'orbites indépendantes logeables dans la surface  $S$ .

Nous avons donné plus haut la valeur  $\ell = 26 \text{ nm}$  pour un électron dans un champ magnétique de 1 T. Pour un échantillon typique de  $100 \mu\text{m}^2$ , ceci correspond à une dégénérescence  $\mathcal{D} = 24\,000$ .

## 3 Jauge de Landau et courant de probabilité

### 3-1 Séparation de l'hamiltonien en jauge de Landau

Pour la suite de ce cours, il sera utile de considérer le problème aux valeurs propres de l'hamiltonien pour une autre jauge couramment utilisée, la *jauge de Landau*, définie par (voir la figure 2.4)

$$\mathbf{A} = Bx \mathbf{u}_y. \quad (2.46)$$

L'hamiltonien de la particule plongée dans le champ magnétique  $\mathbf{B}$  s'écrit alors

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2M} + \frac{(\hat{p}_y - qB\hat{x})^2}{2M}. \quad (2.47)$$

**Mouvement selon l'axe  $y$ .** Puisque l'hamiltonien (2.47) ne dépend pas de l'opérateur position  $\hat{y}$ , mais seulement de l'opérateur impulsion  $\hat{p}_y$ , nous pouvons chercher ses états propres sous forme d'ondes planes  $e^{iky}$ , multipliées par une fonction  $\psi_k$  à ce stade inconnue de la variable  $x$  :

$$\hat{H}\Psi_k = E\Psi_k \quad \text{avec} \quad \Psi_k(\mathbf{r}) = \psi_k(x) e^{iky}. \quad (2.48)$$

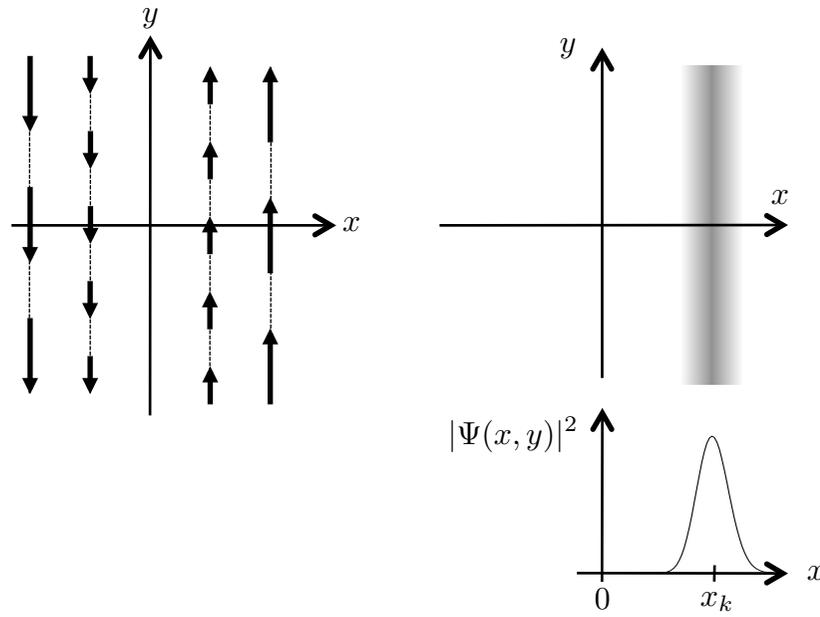
Il est commode de supposer que l'échantillon a une taille finie  $L_y$  le long de l'axe  $y$  et de prendre des conditions aux limites périodiques le long de cet axe<sup>4</sup>. Dans ce cas, le nombre d'onde  $k$  décrivant le mouvement selon  $y$  est quantifié

$$k = \frac{2\pi}{L_y} n_y, \quad \text{avec} \quad n_y \in \mathbb{Z}. \quad (2.49)$$

**Mouvement selon l'axe  $x$ .** La fonction  $\psi_k(x)$  introduite en (2.48) décrivant le mouvement selon l'axe  $x$  est solution de

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \psi_k''(x) + \frac{(\hbar k - qBx)^2}{2M} \psi_k(x) = E \psi_k(x) \quad (2.50)$$

4. Ceci revient formellement à considérer une surface cylindrique percée par un champ magnétique radial plutôt qu'une surface plane.



**FIGURE 2.4.** Gauche : représentation du potentiel vecteur en jauge de Landau. Droite : densité de probabilité pour une fonction propre de l'hamiltonien en jauge de Landau appartenant au LLL,  $\Psi(\mathbf{t}) = \psi_k(x) e^{iky}$ , où  $\psi(x)$  est une gaussienne de largeur  $\ell$  et centrée en  $x_k = \hbar k / (qB) = k\ell^2$ .

ce qui peut se mettre sous une forme plus parlante :

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \psi_k''(x) + \frac{1}{2} M \omega_c^2 (x - x_k)^2 \psi_k(x) = E \psi_k(x) \quad (2.51)$$

avec

$$x_k = \frac{\hbar k}{qB} = k\ell^2. \quad (2.52)$$

On reconnaît l'équation aux valeurs propres d'un oscillateur harmonique, de pulsation  $\omega_c$  et centré au point  $x_k$ .

### 3-2 Le spectre de Landau retrouvé

Puisqu'on a ramené l'hamiltonien à celui d'un oscillateur harmonique à une dimension, on connaît bien sûr son spectre :

$$E_{k,n} = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c. \quad (2.53)$$

On retrouve bien le résultat obtenu par la méthode algébrique (cf. (2.18)). Plusieurs remarques sont à faire sur ce résultat :

- Bien que le nombre d'onde  $k$  associé au mouvement selon  $y$  soit généralement non nul, il n'y a pas d'énergie cinétique  $\hbar^2 k^2 / 2M$  associée à ce nombre d'onde ! La présence du champ magnétique fait que la « seule » influence de ce nombre d'onde est de décentrer l'oscillateur selon la direction  $x$ . Nous allons revenir sur ce point plus loin, en évaluant la vitesse moyenne selon  $y$  pour une particule dans l'état  $\Psi_k$ .
- Le LLL est obtenu en prenant les fonctions d'onde des différents oscillateurs associés aux nombres d'onde  $k$  dans leur état fondamental ; chacune de ces fonctions d'onde est une gaussienne centrée en  $x_k$  et de largeur  $\ell$ . La base de fonctions du LLL que l'on obtient ainsi est donc de la forme

$$\Psi_k(\mathbf{r}) \propto e^{-(x-x_k)^2/2\ell^2} e^{iky}. \quad (2.54)$$

- L'orthogonalité des différentes fonctions  $\Psi_k$  ainsi trouvées provient de leur dépendance différente vis à vis de la variable  $y$  :

$$\int \Psi_k^*(\mathbf{r}) \Psi_{k'}(\mathbf{r}) d^2r \propto \int e^{-iky} e^{ik'y} dy = L_y \delta_{n_y, n'_y}, \quad (2.55)$$

où  $n_y$  et  $n'_y$  sont les deux entiers caractérisant la quantification des nombres d'onde  $k$  et  $k'$ , selon la loi donnée en (2.49).

- Deux valeurs consécutives de  $k$ , séparées de  $2\pi/L_y$ , conduisent à des centres d'oscillateurs très voisins :

$$x_k - x_{k'} = 2\pi \frac{\ell^2}{L_y} \quad \text{si} \quad k - k' = \frac{2\pi}{L_y}, \quad (2.56)$$

ce qui est très petit devant  $\ell$  si la taille  $L_y$  de l'échantillon est elle-même grande devant  $\ell$ .

**Dégénérescence des valeurs propres.** On peut finalement retrouver la dégénérescence d'un niveau de Landau donné, par exemple le LLL. Plaçons la particule dans une boîte rectangulaire de taille  $L_x \times L_y$ . Pour que la fonction  $\Psi(x, y)$  soit pertinente, il faut que le centre  $x_k$  de l'oscillateur soit situé à l'intérieur de cette boîte, ce qui impose une contrainte entre le nombre d'onde  $k$  et la taille  $L_x$

$$0 \leq x_k \leq L_x \quad \Rightarrow \quad 0 \leq k \leq \frac{L_x}{\ell^2}. \quad (2.57)$$

Par ailleurs, nous avons vu que la valeur finie de la taille  $L_y$  impose que  $k$  ne peut prendre que des valeurs discrètes, espacées de  $2\pi/L_y$  [cf. (2.49)]. Ceci donne un nombre total de valeurs possibles compte-tenu de (2.57) :

$$\mathcal{D} \approx \frac{L_x}{\ell^2} \frac{L_y}{2\pi} = \frac{S}{2\pi\ell^2} \quad (2.58)$$

où  $S = L_x L_y$  représente l'aire du rectangle. À chacune de ces valeurs de  $k$  est associé un oscillateur harmonique pertinent, dont l'état fondamental fait partir du LLL. On retrouve ainsi la dégénérescence obtenue pour la jauge symétrique en (2.44).

### 3-3 Courant de probabilité dans un état de Landau

Pour comprendre pourquoi il n'y a pas de terme d'énergie cinétique  $\hbar^2 k^2 / (2M)$  qui apparaît dans l'énergie totale d'un état  $\Psi_k$ , nous allons évaluer la quantité de mouvement moyenne d'une particule préparée dans cet état. Rappelons que l'opérateur décrivant la quantité physique « quantité de mouvement », c'est-à-dire  $Mv$ , s'écrit

$$\hat{\Pi} = \hat{p} - q\mathbf{A}(\hat{r}) \quad \text{avec} \quad \hat{p} = -i\nabla. \quad (2.59)$$

Considérons un état donné du LLL de la forme donnée en (2.54) :

$$\Psi_k(\mathbf{r}) = \psi_k(x) e^{iky} \propto e^{-(x-x_k)^2/2\ell^2} e^{iky} \quad (2.60)$$

et intéressons-nous à la quantité de mouvement moyenne

$$M\langle \hat{v} \rangle = \int \Psi_k^*(\mathbf{r}) (-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}(\mathbf{r})) \Psi_k(\mathbf{r}) d^2r. \quad (2.61)$$

La composante selon  $x$  de cette quantité de mouvement est nulle. En effet  $A_x = 0$  et la valeur moyenne de l'impulsion  $p_x$  dans l'état fondamental de l'hamiltonien réduit selon  $x$ , donné en (2.50), est également nulle.

Le raisonnement selon l'axe  $y$  est plus subtil. L'action de  $\hat{p}_y$  sur  $\Psi_k(\mathbf{r})$  fait apparaître  $\hbar k$  de sorte que

$$Mv_y(k) = \int \Psi_k^*(\mathbf{r}) (\hbar k - qA_y) \Psi_k(\mathbf{r}) d^2r. \quad (2.62)$$

Cette quantité peut se calculer explicitement pour donner après intégration selon  $y$

$$v_y(k) = -\omega_c \int |\psi_k(x)|^2 (x - x_k) dx. \quad (2.63)$$

Pour l'état fondamental  $\psi_k(x)$  de l'oscillateur harmonique centré en  $x_k$ , cette intégrale est nulle, car l'état fondamental est symétrique par rapport au point  $x_k$ . On constate donc que malgré la présence du terme en  $e^{iky}$  dans l'expression de l'état propre, la vitesse moyenne – ou la quantité de mouvement moyenne – associée à cet état est nulle : la contribution de l'opérateur impulsion est exactement compensée par celle du potentiel vecteur.

### 3-4 L'originalité de la structure en niveaux de Landau

Nous avons donc à ce stade complètement caractérisé le spectre d'une particule quantique chargée, en mouvement dans un plan  $xy$  perpendiculaire à un champ magnétique. Nous avons trouvé un spectre en énergie composé de niveaux discrets, équidistants, avec une séparation  $\hbar\omega_c$ . Chaque niveau est macroscopiquement dégénéré. Plus précisément, le nombre d'états indépendants composant chaque niveau, c'est-à-dire la dimension du sous-espace propre, croît linéairement avec la surface de l'échantillon.

Ce résultat est à première vue très similaire à celui obtenu pour une particule placée dans un réseau périodique, dans la limite des liaisons fortes (figure 2.5). Assimilons chaque site du réseau à un puits harmonique de pulsation  $\omega$  ; en l'absence d'effet tunnel, le spectre en énergie de la particule est composé d'états discrets séparés par l'énergie  $\hbar\omega$ . La juxtaposition de tous ces spectres pour les différents sites du réseau donne un résultat formellement identique à celui du spectre en niveaux de Landau, avec une

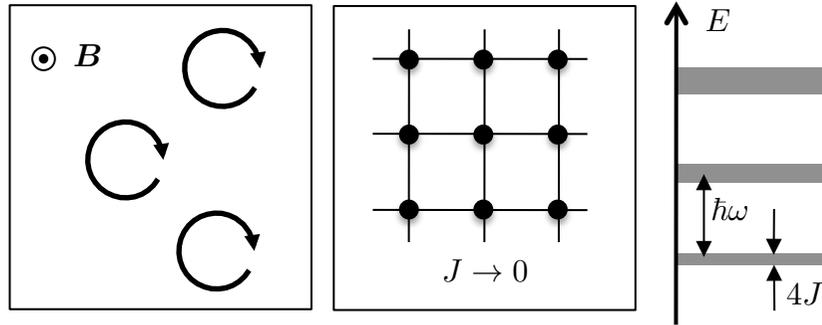


FIGURE 2.5. Deux systèmes physiques conduisant au même spectre. À gauche, une particule dans un champ magnétique uniforme. À droite, une particule dans un réseau périodique dans la limite d'un couplage tunnel  $J$  entre sites voisins qui tend vers 0. Le spectre est alors formé de bandes étroites séparées de  $\hbar\omega$ , où  $\omega$  est la pulsation de l'oscillation en chaque site du réseau.

dégénérescence de chaque énergie qui croît linéairement avec l'aire (ou le nombre de sites) du système. En présence d'effet tunnel, les bandes d'énergie du réseau acquièrent une certaine largeur, mais celle-ci reste faible tant que l'élément de matrice tunnel est petit devant  $\hbar\omega$ .

Nous arrivons donc à la question importante suivante :

*Y a-t-il une différence entre le problème d'une particule mobile dans un plan orthogonal à  $\mathbf{B}$  et celui d'une particule évoluant dans un réseau 2D de grande profondeur ?*

La réponse est positive : les propriétés d'un système ne se résument pas au spectre de son hamiltonien, et la structure des sous-espace propres joue un rôle essentiel. Même si on se restreint au cas d'une particule individuelle, les niveaux de Landau ne sont pas des bandes ordinaires. Elles ont une propriété topologique non triviale, caractérisée par un nombre de Chern non nul. La manifestation la plus simple de cette propriété est obtenue pour un système de taille finie, dans lequel des états de bord, de chiralité déterminée, sont nécessairement présents. Nous allons illustrer ce point dans le paragraphe qui suit.

## 4 États de bord et applications

Notre but dans ce paragraphe est de montrer une caractéristique essentielle du magnétisme orbital quantique, la présence d'états de bord susceptibles de transporter un courant dans un échantillon. Une conséquence très importante de l'existence de ces états est la présence de plateaux dans l'effet Hall quantique entier, que nous allons très brièvement évoquer. Nous allons suivre ici une approche inspirée de Girvin (2000), Yoshioka (2002) et Goerbig (2009).

### 4-1 Modélisation d'un échantillon de taille finie

Nous allons considérer un échantillon de taille finie, en forme de rectangle. Nous allons utiliser la jauge de Landau introduite au paragraphe précédent :

$$\mathbf{A} = Bx \mathbf{u}_y, \quad (2.64)$$

qui fait jouer des rôles différents aux directions  $x$  et  $y$ . Selon l'axe  $y$ , le domaine accessible a une longueur  $y$  et nous prendrons comme précédemment des conditions aux limites périodiques selon cet axe. Selon l'axe  $x$ , nous supposons que les particules sont soumises à un potentiel  $V(x)$ , confinant la particule dans la zone comprise entre  $-L_x/2$  et  $L_x/2$ . La forme exacte du potentiel n'a pas beaucoup d'importance et la seule condition que nous mettrons est que la distance sur laquelle  $V(x)$  remonte est petite devant  $L_x$  (voir figure 2.6).

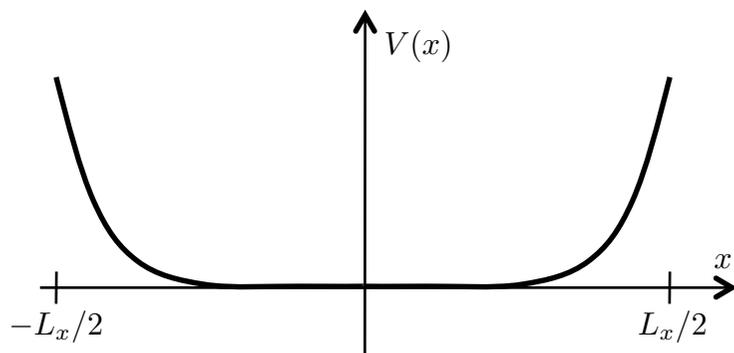
Le traitement que nous avons développé précédemment pour trouver le spectre de l'hamiltonien et une base d'états propres reste valable. On peut toujours chercher les états propres sous la forme

$$\Psi_k(\mathbf{r}) = \psi_k(x) e^{ik_y y}, \quad k = \frac{2\pi}{L_y} n_y, \quad n_y \in \mathbb{Z}, \quad (2.65)$$

où la fonction d'onde  $\psi_k(x)$  est désormais solution de

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \psi_k''(x) + \left[ \frac{1}{2} M \omega_c^2 (x - x_k)^2 + V(x) \right] \psi_k(x) = E \psi_k(x) \quad (2.66)$$

avec  $x_k = k\ell^2$ .


 FIGURE 2.6. Potentiel  $V(x)$  confinant les particules selon la direction  $x$ .

## 4-2 Les états de bord

Pour simplifier notre traitement mathématique, nous supposons<sup>5</sup> ici que le potentiel  $V(x)$  varie doucement sur l'échelle de longueur  $\ell$  qui caractérise l'extension de l'état fondamental du potentiel harmonique  $M\omega_c^2 x^2/2$ . On peut alors, à  $k$  fixé, linéariser le potentiel  $V(x)$  au voisinage de  $x_k$  :

$$V(x) \approx V(x_k) + (x - x_k)V'(x_k) \quad (2.67)$$

ce qui permet de réécrire l'équation aux valeurs propres (2.66) sous la forme

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\psi_k''(x) + \left[ \frac{1}{2}M\omega_c^2(x - x_k - \delta x_k)^2 + \epsilon_k \right] \psi_k(x) = E \psi_k(x) \quad (2.68)$$

où on a introduit le décalage du centre de l'oscillateur harmonique induit par la force dérivant du potentiel  $V(x)$

$$\delta x_k = -\frac{V'(x_k)}{M\omega_c^2} \quad (2.69)$$

et le déplacement en énergie

$$\epsilon_k = V(x_k) - \frac{1}{2}M\omega_c^2(\delta x_k)^2 \approx V(x_k). \quad (2.70)$$

5. Cette hypothèse n'est pas essentielle, comme expliqué par exemple dans Yoshioka (2002).

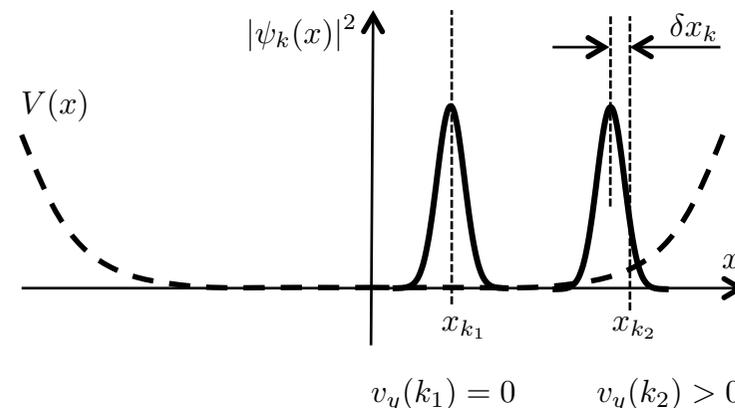


FIGURE 2.7. Densité de probabilité des fonctions propres en jauge de Landau, en présence d'un potentiel  $V(x)$ . Les centres des fonctions d'onde sont déplacés de  $\delta x_k$  [cf. (2.69)] dans les régions où le potentiel varie ( $V'(x) \neq 0$ ). À ce déplacement du centre est associée une vitesse moyenne non nulle le long de la direction  $y$ .

La dernière approximation est valable si on se limite à des potentiels à bords suffisamment mous pour que  $\delta x_k \ll \ell$ .

Intéressons-nous maintenant à la vitesse moyenne associée aux états propres  $\psi_k$ , compte tenu de la présence du potentiel  $V(x)$ . Si le potentiel  $V(x)$  est choisi à fond plat, la force  $-V'(x)$  est nulle sur toute l'étendue de ce fond et il en va de même pour le décalage  $\delta x_k$ .

- Pour les états dont le centre  $x_k$  est situé dans cette partie plate du potentiel, l'argument développé au paragraphe précédent reste valable : la vitesse moyenne, donnée par

$$v_y(k) = -\omega_c \int |\psi_k(x)|^2 (x - x_k) dx. \quad (2.71)$$

est nulle car la densité de probabilité de  $|\psi_k(x)|^2$  est symétrique par rapport à  $x_k$ .

- En revanche, pour les états dont le centre  $x_k$  est situé sur les bords de

l'échantillon,

$$x_k \approx \pm L_x/2, \quad (2.72)$$

la force  $-V'(x_k)$  et donc le décalage  $\delta x_k$  sont non nuls. Plus précisément, l'intégrale (2.71) donne en utilisant le fait que  $\psi_k$  est normée :

$$v_y(k) = -\omega_c (\langle x \rangle - x_k) = -\omega_c \delta x_k = \frac{V'(x_k)}{M\omega_c}. \quad (2.73)$$

Il y a donc une vitesse  $v_y$  non nulle associée aux états situés sur les bords de l'échantillon. Pour  $\omega_c = qB/M > 0$ , cette vitesse est négative pour les états au voisinage du bord  $x = -L_x/2$  et positive sur l'autre bord  $x = L_x/2$ . Ceci correspond donc à une rotation de la particule sur les bords de l'échantillon dans le sens direct (inverse des aiguilles d'une montre), alors que le mouvement cyclotron se fait pour les mêmes conditions dans le sens horaire. L'existence de ces états de bords chiraux, dont la vitesse a un signe déterminé par l'orientation du champ magnétique, constitue une différence essentielle entre la dynamique sur un réseau « usuel » et celle obtenue pour les niveaux de Landau. Elle s'interprète classiquement en terme « d'orbites sautantes », ou en « festons » (*skipping orbits* en anglais). Il s'agit de trajectoires cyclotrons interrompues par un choc sur le bord de l'échantillon (figure 2.8).

On notera que la direction et la valeur de cette vitesse des états de bord sont en relation directe avec l'analyse que nous avons faite pour le courant de Hall dans le cas classique. Le potentiel de confinement crée une force  $F = -V'$  selon la direction  $x$  et les particules acquièrent une vitesse de dérive  $-F/(M\omega_c) = -F/(qB)$  dans la direction  $y$  [cf. (2.8)].

Indiquons un autre moyen pour retrouver la vitesse associée à un état de bord. L'énergie de l'état  $\psi_k$  solution de l'équation différentielle (2.68) vaut

$$E(k) = (n + 1/2)\hbar\omega_c + \epsilon_k \approx (n + 1/2)\hbar\omega_c + V(x_k). \quad (2.74)$$

Cette relation peut être vue comme une relation de dispersion : la vitesse de groupe qui lui est associée est dirigée selon  $y$  et vaut

$$v_{g,y}(k) = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} \approx \frac{1}{\hbar} \frac{dV(x_k)}{dk} = \frac{1}{\hbar} \left( \frac{dV}{dx} \right)_{x=x_k} \frac{dx_k}{dk} \quad (2.75)$$

soit

$$v_{g,y}(k) = \frac{1}{qB} \left( \frac{dV}{dx} \right)_{x=x_k} \quad (2.76)$$

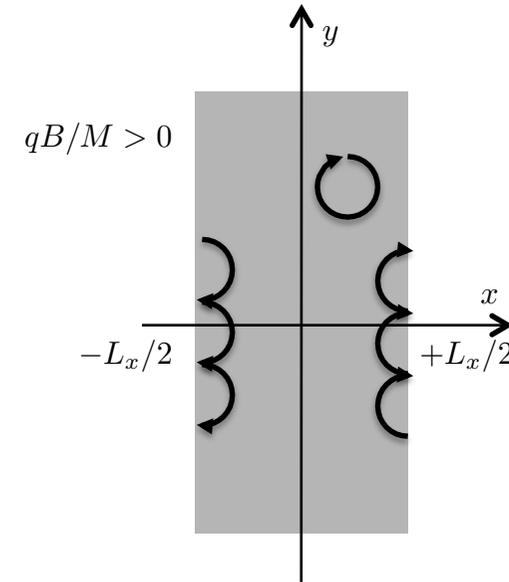


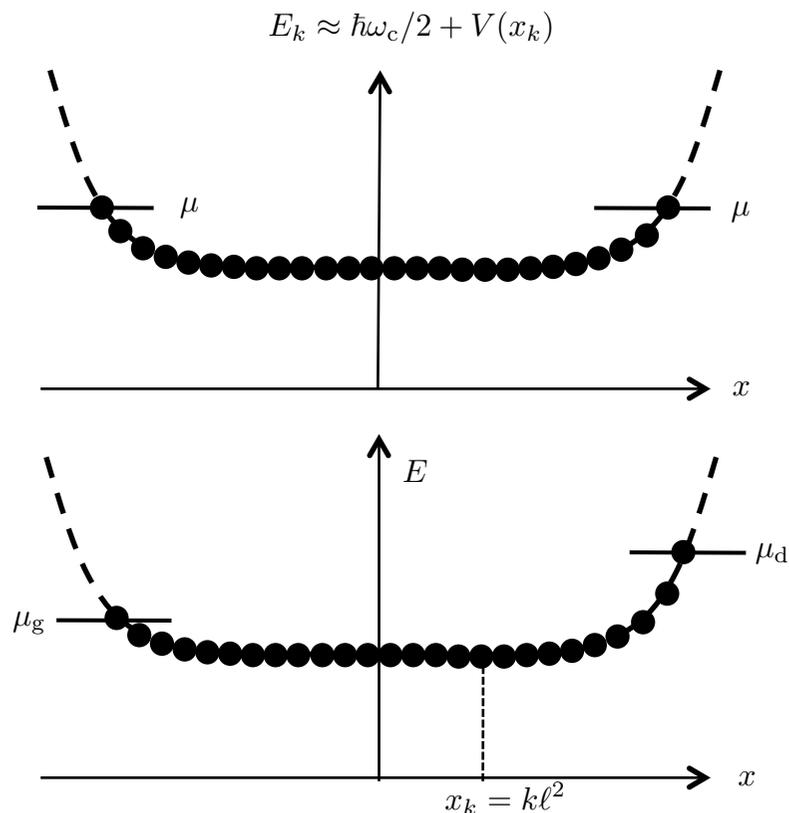
FIGURE 2.8. Orbites classiques correspondant aux états de bords quantiques.

ce qui est bien identique à (2.73) puisque  $\omega_c = qB/M$ .

### 4-3 Le courant de bord pour des fermions à $T = 0$

Supposons maintenant que l'on dispose d'un gaz de fermions sans interaction et sans spin, et que ce gaz soit à température nulle (état fondamental). Cet état fondamental est obtenu en remplissant tous les niveaux à une particule jusqu'à l'énergie de Fermi correspondant au potentiel chimique  $\mu$ . Intéressons nous au cas où l'énergie de Fermi est située entre deux niveaux de Landau, par exemple entre le LLL, d'énergie  $\hbar\omega_c/2$ , et le premier niveau de Landau excité, d'énergie  $3\hbar\omega_c/2$ .

On va donc remplir sur les deux bords de l'échantillon des états de bords dont l'énergie varie entre  $\hbar\omega_c/2$  et  $\mu$ . Cherchons à évaluer le courant total circulant sur le bord de l'échantillon. Chaque état occupé  $\Psi_k$  contribue



**FIGURE 2.9.** Remplissage à température nulle des états du LLL en absence (haut) et en présence (bas) d'une différence de potentiel chimique entre la gauche et la droite de l'échantillon. Chaque point représente un état peuplé  $\Psi_k$ , repéré ici par son centre  $x_k$ . On a supposé  $\mu < 3\hbar\omega_c/2$  pour pouvoir négliger les autres niveaux de Landau.

au courant de particules<sup>6</sup> par la quantité  $v_y(k)/L_y$ , puisque la particule est délocalisée tout le long de l'axe  $y$ . Le courant est obtenu en sommant la contribution de tous les états de bord concernés, par exemple pour le bord de droite autour de  $x = L_x/2$  :

$$J_{y,d} = \frac{1}{L_y} \sum_k v_y(k), \quad (2.77)$$

où la somme porte sur tous les états  $k$  dont le centre  $x_k$  est situé dans la région montante de  $V(x)$ . On peut remplacer la somme discrète sur  $k$  par une intégrale

$$\sum_k [\dots] \rightarrow \frac{L_y}{2\pi} \int [\dots] dk \quad (2.78)$$

ce qui conduit à

$$J_{y,d} = \frac{1}{L_y} \frac{L_y}{2\pi} \frac{1}{M\omega_c} \int V'(x_k) dk = \frac{1}{h} \int V'(x) dx \quad (2.79)$$

soit finalement

$$J_{y,d} = \Delta E/h, \quad (2.80)$$

où  $\Delta E = \mu - \hbar\omega_c/2$  représente la différence d'énergie entre l'énergie de Fermi et l'énergie du LLL dans la partie plate du potentiel. On trouve la même valeur du courant, avec un signe opposé, pour l'autre bord de l'échantillon, en  $x = -L_x/2$ . Les deux courants se compensent donc exactement, cette compensation se produisant même si la forme ou la raideur des bords n'est pas la même à gauche ou à droite.

Ce résultat remarquable indique que le bord de l'échantillon se comporte comme un conducteur calibré, parcouru par un courant indépendant de sa taille et de la valeur du champ magnétique, pourvu que  $B$  soit assez grand pour la longueur  $\ell$  soit microscopique et que la notion d'états de bords qui conditionne le traitement précédent soit valable<sup>7</sup>. Nous nous sommes restreints ici à un échantillon rectangulaire, avec des conditions aux limites particulières, mais on peut généraliser ce résultat à un échantillon de forme quelconque, la valeur (2.80) étant universelle.

6. Nous parlons ici de courant de particules, et pas de courant électrique. Ce dernier se déduit de  $J_y$  en le multipliant par la charge (négative) de l'électron.

7. Merci à M.-O. Goerbig pour une discussion éclairante sur ce sujet !

#### 4-4 Circuiterie à effet Hall

Conservons la géométrie précédente et supposons que l'on insère le gaz électronique bidimensionnel entre deux électrodes composées d'un métal tri-dimensionnel conventionnel, situées en haut et en bas du rectangle. On injecte un courant de particules  $J_y$  dans l'électrode inférieure (1) et on récupère ce courant dans l'électrode supérieure (2). Les niveaux de Fermi dans les électrodes sont donc différents, avec  $\mu_1 > \mu_2$ . En supposant les contacts électrode-gaz d'électrons parfaits<sup>8</sup>, les états de bord situés à droite de l'échantillon vont se remplir jusqu'au niveau  $\mu_d = \mu_1$ , et ceux sur la gauche de l'échantillon vont se remplir jusqu'à  $\mu_g = \mu_2$ .

Pour simplifier l'analyse, nous supposons toujours que seul le LLL joue un rôle dans ce qui suit. Le calcul du paragraphe précédent continue à s'appliquer avec désormais des courants de bords différents à gauche et à droite de l'échantillon, ce qui correspond à l'apparition d'un courant résultant non nul :

$$\begin{aligned} J_y &= J_{y,d} - J_{y,g} \\ &= \frac{1}{h} (\mu_d - \hbar\omega_c/2) - \frac{1}{h} (\mu_g - \hbar\omega_c/2) \\ &= (\mu_d - \mu_g)/h. \end{aligned} \quad (2.81)$$

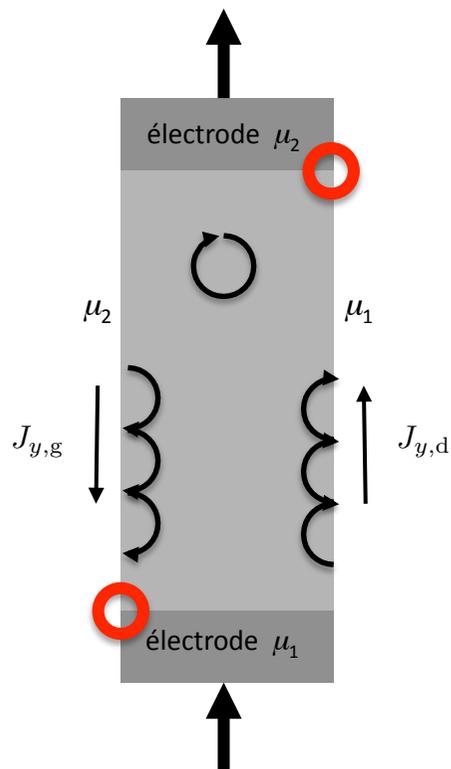
Si l'on revient au courant électrique  $I_y = qJ_y$  et la différence de potentiel  $V_x = (\mu_d - \mu_g)/q$ , on obtient la relation

$$I_y = \sigma_{xy} V_x \quad \text{avec} \quad \sigma_{xy} = q^2/h. \quad (2.82)$$

correspondant à une *résistance de Hall*

$$R_H = h/q^2 = 25\,812.807557(18) \, \Omega. \quad (2.83)$$

8. La double hypothèse sous-jacente est (i) que des électrons jusqu'à l'énergie  $\mu_1$  sont fournis au bord droit autant qu'il est nécessaire par l'électrode 1, et (ii) que tout électron d'énergie supérieure à  $\mu_2$  sur le bord gauche est immédiatement transporté jusqu'à l'électrode 1 qui l'absorbe. L'irréversibilité associée à cette double hypothèse se traduit par une dissipation d'énergie aux deux zones marquées par un cercle rouge : en bas à gauche où des électrons d'énergie  $\sim \mu_1$  entrent dans des états de bords qui ne contiennent que des électrons d'énergie  $\leq \mu_2$ , et en haut à droite où des électrons d'énergie allant jusqu'à  $\mu_1$  rentrent dans l'électrode au potentiel chimique  $\mu_2$ . Pour une étude allant au delà de ce modèle « d'électrodes parfaites », voir par exemple Yoshioka (2002).



**FIGURE 2.10.** Schéma idéalisé d'une expérience de mesure de conductivité de Hall. Deux électrodes « idéales » imposent des potentiels chimiques différents sur les bords gauche et droit de l'échantillon. Ceci vient rompre l'équilibre entre les courants de bords correspondants ( $J_{y,d} \neq J_{y,g}$ ) et un courant  $J_y$  arrive et repart des électrodes. Les zones encadrées sont celles où un processus dissipatif se produit pour maintenir le système dans un régime d'équilibre.

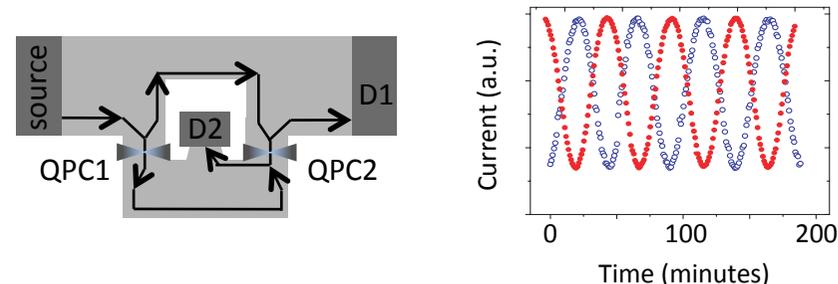
Cette formule se généralise simplement au cas où plusieurs niveaux de Landau sont remplis et participent à la conduction : on trouve que la conductivité  $\sigma_{xy}$  est simplement multipliée par le nombre de niveaux de Landau en jeu. Cette valeur du « quantum de conductivité » égale à  $e^2/h$  est identique au résultat prédit pour un conducteur uni-dimensionnel reliant deux électrodes tri-dimensionnelles (formule de Landauer–Büttiker, voir par exemple Akkermans & Montambaux (2004) et Imry (1997)). On peut donc considérer le bord d'un gaz bidimensionnel d'électrons dans le LLL comme un conducteur uni-dimensionnel.

**Remarque.** Ce résultat reste valable si on modifie légèrement le champ magnétique autour de la valeur correspondant à la figure 2.9. Supposons par exemple que l'on augmente légèrement  $B$ . La distance entre deux centres adjacents  $x_k$  va diminuer, et le nombre d'états  $\mathcal{N}$  disponibles dans la surface  $L_x \times L_y$  va donc augmenter

$$\mathcal{N} = \frac{qL_xL_y}{h} B \quad \longrightarrow \quad \mathcal{N} + \delta\mathcal{N} = \frac{qL_xL_y}{h} B + \frac{qL_xL_y}{h} \delta B \quad (2.84)$$

Si ce changement  $\delta\mathcal{N}$  est inférieur au nombre d'états situés dans la zone de transition où le potentiel  $V(x)$  varie, la figure 2.9 reste valable et le résultat (2.83) également. On s'attend donc à trouver un plateau où la résistance de Hall garde cette valeur quand  $B$  varie.

En pratique, la largeur du plateau que l'on déduit à partir de ce raisonnement est beaucoup plus faible que les plateaux effectivement observés. La raison en est que ces derniers sont considérablement élargis par le désordre présent dans les échantillons. La présence de désordre dans le potentiel ressenti par les particules au cœur du matériau permet de produire une densité relativement importante d'états localisés dans le gap entre deux niveaux de Landau, par exemple  $[\hbar\omega_c/2, 3\hbar\omega_c/2]$ . Ce désordre ne détruit pas la relation de quantification (2.82) tant qu'il reste suffisamment faible pour ne pas créer de connexion entre les deux bords de l'échantillon (voir par exemple la discussion détaillée de Girvin (2000)).



**FIGURE 2.11.** Gauche : Interféromètre de Mach–Zender électronique de Ji et al. (2003). L'échantillon est plongé dans un champ magnétique de 5.5 T perpendiculaire au plan de la figure. Droite : en bleu, signal observé en fonction du temps lié à la variation de la phase Aharonov–Bohm quand le champ magnétique appliqué décroît (variation relative sur 3 heures :  $7 \cdot 10^{-5}$ ). Le signal en rouge est obtenu en modifiant les trajectoires des états de bord grâce à des électrodes auxiliaires. L'aire de l'interféromètre est environ  $60 \mu\text{m}^2$ .

#### 4-5 Un interféromètre de Mach–Zender électronique

Une belle application de ce conducteur monocanal fourni par les états de bord d'un gaz 2D d'électrons sous champ magnétique a été démontrée par Ji et al. (2003). Il s'agit d'un interféromètre à deux voies de type Mach-Zender pour les électrons émis par une électrode source (figure 2.11). Après leur parcours dans l'échantillon, ces électrons sont détectés sur une des deux électrodes  $D1$  et  $D2$ . Pour aller de la source vers les détecteurs, deux chemins sont possibles pour les électrons, avec des séparateurs de faisceaux formés par des contacts ponctuels quantiques (*Quantum Point Contact* en anglais, QPC) qui peuvent transmettre ou réfléchir les électrons de manière cohérente avec une probabilité ajustable.

Du fait de la présence du champ magnétique perpendiculaire à l'échantillon ( $B = 5.5 \text{ T}$ ), il y a une différence de phase entre les deux chemins liée à l'effet Aharonov–Bohm vu au cours précédent. Cette différence de phase est proportionnelle au flux du champ à travers le circuit dessiné par les états de bord, et est de l'ordre de  $60\,000 \times 2\pi$ .

La figure 2.11 (droite) montre un exemple de signal d'interférence ; on a tracé le courant dans le détecteur  $D1$  en fonction du temps. La modulation du signal avec le temps provient du fait que le champ magnétique auquel est soumis l'échantillon décroît lentement (0.12 mT par heure). Il s'agit d'un changement très faible en valeur relative sur la durée de l'expérience ( $7 \cdot 10^{-5}$  environ), mais qui change la phase entre les deux bras de

$$7 \cdot 10^{-5} \times 60\,000 \times (2\pi) \approx 4 \times (2\pi), \quad (2.85)$$

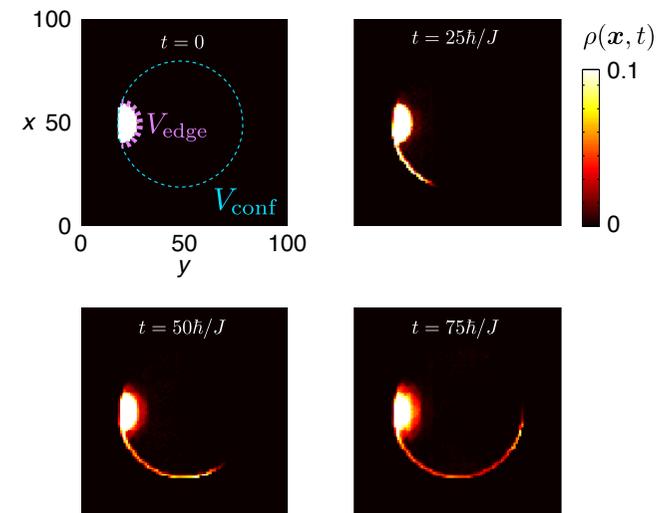
ce qui correspond à 4 oscillations complètes du signal. On trouvera dans l'article de Ji et al. (2003) une description détaillée des mécanismes possibles de décohérence dans ce type d'interféromètre.

#### 4-6 États de bords avec des atomes froids ?

Nous terminons ce chapitre par une brève discussion des possibilités offertes par les expériences d'atomes froids pour mettre en évidence de manière directe ces états de bord. Nous allons supposer possible la réalisation d'un hamiltonien de type  $(\hat{p} - q\mathbf{A}(\hat{r}))^2/2M$  pour des atomes neutres, où  $\mathbf{A}$  correspond à un champ magnétique uniforme (cette réalisation sera décrite dans les chapitres suivants). On peut alors mettre en évidence les états de bord en changeant brutalement le confinement du gaz et en regardant la trajectoire ultérieure des atomes.

Un exemple tiré de l'article de Goldman et al. (2013) est montré sur la figure 2.12. On part d'atomes fermioniques qui remplissent les états du LLL dans une certaine zone de l'espace, en l'occurrence un petit disque situé sur la gauche de l'échantillon. À l'instant  $t = 0$ , on relâche brutalement une partie du confinement et les atomes sont alors libres d'occuper un deuxième disque beaucoup plus grand que le premier, ces deux disques étant tangents. On résout l'équation de Schrödinger pour déterminer la densité de probabilité aux instants ultérieurs.

Les résultats de la figure 2.12 confirment l'intuition que l'on a des états de bord : les particules se propagent de manière chirale le long du bord du grand disque, alors que la migration directe vers le centre de ce grand disque est quasiment inexistante sur l'échelle de temps regardée. Cette non-migration est une conséquence du fait que le LLL est plat, et qu'il n'y



**FIGURE 2.12.** Proposition de mise en évidence d'états de bord dans une expérience d'atomes froids. Des atomes fermioniques sont initialement confinés dans un petit disque situé à gauche. Après suppression d'une partie du confinement, les atomes peuvent s'étendre librement et occuper un disque beaucoup plus grand. Ces calculs sont faits pour des atomes bougeant sur un réseau carré de pas  $a$  dans l'approximation des liaisons fortes, avec un flux de  $2\pi/5$  par cellule unité. Les atomes sont préparés dans la sous-bande fondamentale, qui est une bonne approximation du LLL (de largeur presque nulle comparée au coefficient tunnel  $J$ ). On a pris  $\mu = -1.5 J$  et le rayon du grand disque est  $32 a$ .

a donc pas de mouvement quantique associé à une superposition impliquant seulement ces états. L'évolution montrée en figure 2.12 révèle donc simultanément deux caractéristiques essentielles du LLL : un spectre plat pour les états localisés dans le cœur de l'échantillon, et une vitesse chirale pour les états de bord.

## 5 Références

- Akkermans, E. & G. Montambaux (2004), *Physique mésoscopique des électrons et des photons*, CNRS Editions.
- Cooper, N. R. (2008), « Rapidly rotating atomic gases », in *Advances in Physics* 57.6, pp. 539–616.
- Eisenstein, J.P. (2005), « Novel phenomena in double layer two-dimensional electron systems », in *Nanophysics : coherence and transport*, ed. by H. Bouchiat, Y. Gefen, S. Guéron, G. Montambaux & J. Dalibard, vol. Ecole des Houches 2004, session LXXXI, Elsevier, , pp. 129–175.
- Girvin, Steven M. (2000), « The Quantum Hall Effect : Novel Excitations and Broken Symmetries », in *Topological Aspects of Low Dimensional Systems*, ed. by A. Comtet, T. Jolicoeur, S. Ouvry & F. David, vol. Les Houches, July 1998, Springer-Verlag.
- Goerbig, M. O. (2009), « Quantum Hall Effects », in *lecture notes for the Singapore session "Ultracold Gases and Quantum Information" of Les Houches Summer School*, vol. arXiv :0909.1998.
- Goldman, N., J. Dalibard, A. Dauphin, F. Gerbier, M. Lewenstein, P. Zoller & I. B. Spielman (2013), « Direct imaging of topological edge states in cold-atom systems », in *PNAS* 110.17, p. 6736.
- Imry, Yoseph (1997), *Introduction to Mesoscopic Physics*, Oxford University Press.
- Jackson, J. D. (1998), *Classical Electrodynamics*, New York: John Wiley.
- Ji, Yang, Yunchul Chung, D. Sprinzak, M. Heiblum, D. Mahalu & Hadas Shtrikman (2003), « An electronic Mach-Zehnder interferometer », in *Nature* 422, p. 415.
- Yoshioka, Daijiro (2002), *The Quantum Hall Effect*, Springer-Verlag.