

# La matière topologique et son exploration avec les gaz quantiques

## Bandes topologiques et états de bord

[http://www.phys.ens.fr/~dalibard/2018\\_CdF.html](http://www.phys.ens.fr/~dalibard/2018_CdF.html)

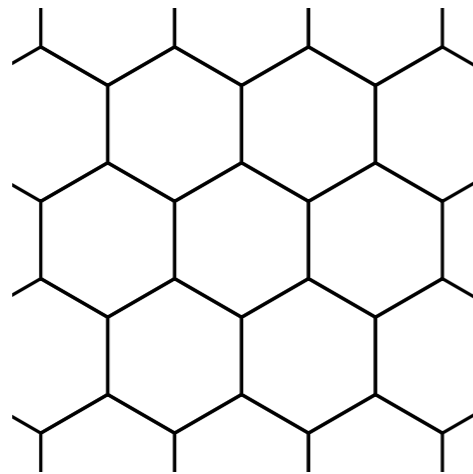
Jean Dalibard  
Chaire *Atomes et rayonnement*  
Année 2017-18



COLLÈGE  
DE FRANCE  
— 1530 —

# Bilan des cours précédents

Réseaux périodiques à deux dimensions



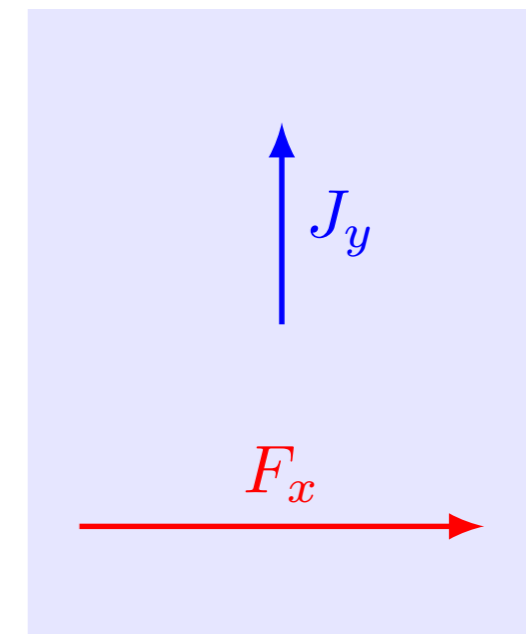
*Lien entre la topologie d'une bande d'énergie et la conductivité de Hall*

Exemple d'une bande fondamentale pleine, toutes les autres étant vides

Force extérieure appliquée selon l'axe  $x$

Courant de particules selon l'axe  $y$

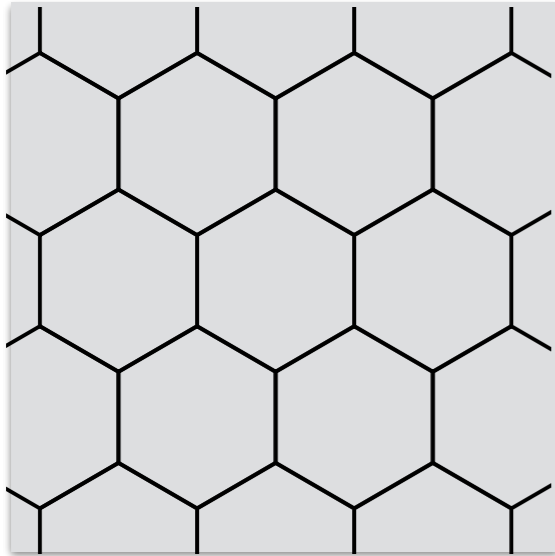
$$J_y = \sigma_{yx} F_x \quad \text{avec} \quad \sigma_{yx} = \frac{\mathcal{C}}{2\pi\hbar}$$



$\mathcal{C}$  : nombre de Chern (entier) associé à la bande fondamentale

# Bilan des cours précédents (suite)

## Topologie et courbure de Berry



Réseaux périodiques : théorème de Bloch

Etats propres de l'hamiltonien :  $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})$

$u_{\mathbf{q}}$  : **périodique**

Le moment de Bloch  $\mathbf{q}$  est choisi dans la zone de Brillouin

Connexion de Berry :  $\mathcal{A}_{\mathbf{q}} = i \langle u_{\mathbf{q}} | \nabla_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{q}} \rangle$  vecteur réel du plan  $(q_x, q_y)$

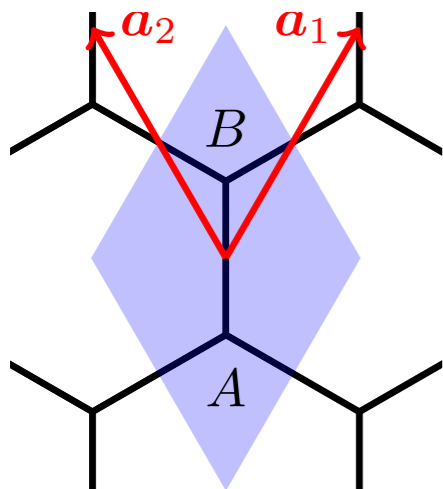
Courbure de Berry :  $\Omega_{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{q}} \times \mathcal{A}_{\mathbf{q}}$  orientée selon  $z$

Le nombre de Chern s'écrit :  $\mathcal{C} = \frac{1}{2\pi} \iint_{\text{ZB}} \Omega_{\mathbf{q}} d^2q$

Comment obtenir  $\Omega_{\mathbf{q}} \neq 0$  ou (encore mieux)  $\mathcal{C} \neq 0$  ?

# Bilan des cours précédents (suite)

## Régime des liaisons fortes et sphère de Bloch (réseau bi-partite)



Exemple du réseau graphène, avec deux sites/ cellule unité

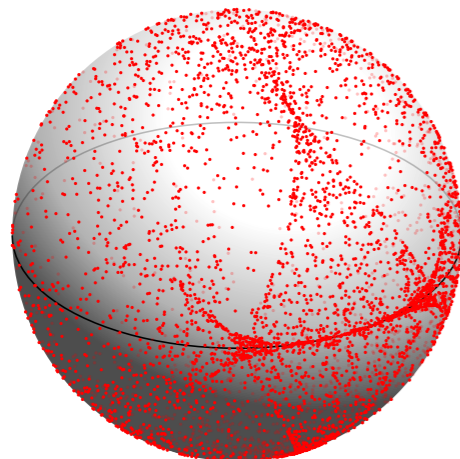
Fonction périodique sur le réseau

$$|u_{\mathbf{q}}\rangle = \alpha_{\mathbf{q}} \left( \sum_j |A_j\rangle \right) + \beta_{\mathbf{q}} \left( \sum_j |B_j\rangle \right) = \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{q}} \\ \beta_{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \quad \text{pseudospin } 1/2$$

Hamiltonien « périodique » pour  $|u_{\mathbf{q}}\rangle$ : matrice 2 x 2

$$\hat{H}_{\mathbf{q}} = E_0(\mathbf{q})\hat{1} - \mathbf{h}(\mathbf{q}) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$$

- énergies :  $E_0 \pm |\mathbf{h}|$
- états propres déterminés par  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|}$

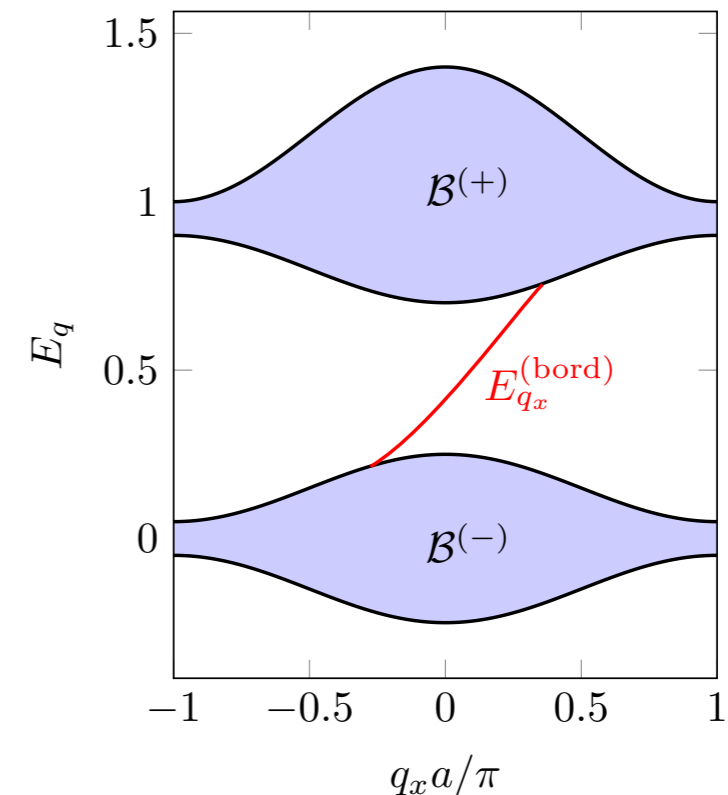


$$\mathcal{C} = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\text{ZB}} \mathbf{n} \cdot [(\partial_{q_x} \mathbf{n}) \times (\partial_{q_y} \mathbf{n})] dq_x dq_y$$

*nombre d'enveloppements de la sphère*

# Buts de ce cours

- Présenter un modèle de réseau topologique Haldane 1988  
*Liaisons fortes, cellule unité à deux sites : graphène « enrichi »*
- Implémentation du modèle de Haldane avec une modulation temporelle  
*Hamiltonien effectif pour une modulation rapide*  
*Expérience de Zurich (atomes froids)*
- Lien entre topologie et canaux de bord  
*Systèmes de taille finie*  
*Expérience du Technion (photonique)*



1.

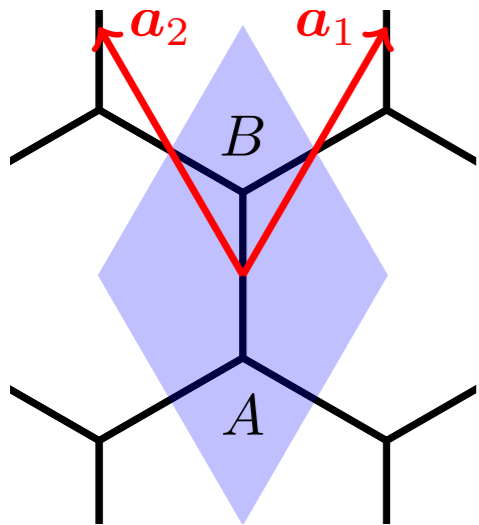
# Le modèle de Haldane

F. D. M. Haldane

Phys. Rev. Lett. 61, 2015 (1988)

Model for a Quantum Hall Effect without Landau Levels :  
Condensed-Matter Realization of the "Parity Anomaly"

# Rappel sur le réseau graphène



Même énergie pour A et B :  $E_A = E_B = 0$

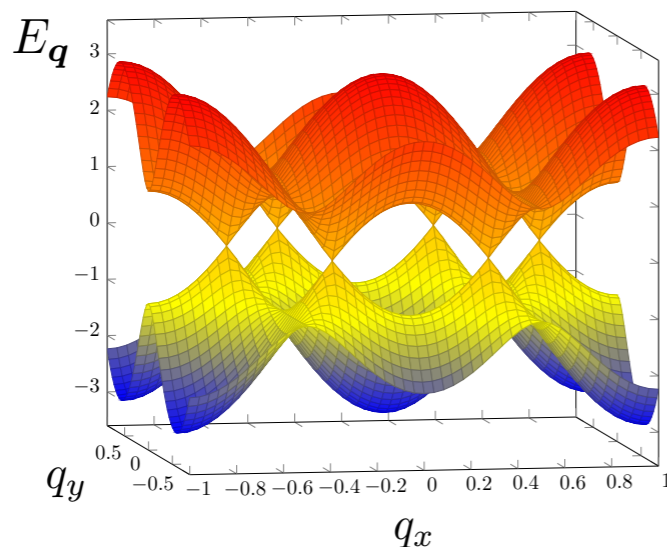
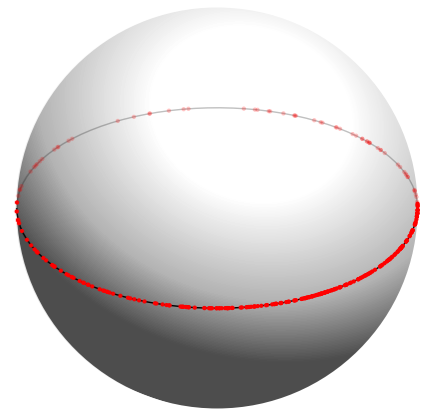
Couplages entre proches voisins uniquement

Un site A est couplé à trois sites B

Un site B est couplé à trois sites A

$$\hat{H}_{\mathbf{q}} = -J \begin{pmatrix} 0 & 1 + e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_1} + e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_2} \\ 1 + e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_1} + e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_2} & 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{h}(\mathbf{q}) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$$

avec : 
$$\mathbf{h}(\mathbf{q}) = J \begin{pmatrix} 1 + \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_1) + \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_2) \\ \sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_1) + \sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$



Singularité aux points de Dirac  
tels que  $1 + e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_1} + e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_2} = 0$

# Comment « enrichir » le réseau graphène ?

On recherche un hamiltonien  $\hat{H}_{\mathbf{q}} = E_0(\mathbf{q})\hat{1} - \mathbf{h}(\mathbf{q}) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$  où  $\mathbf{h}(\mathbf{q})$  recouvre l'ensemble de la sphère de Bloch

## Première piste :

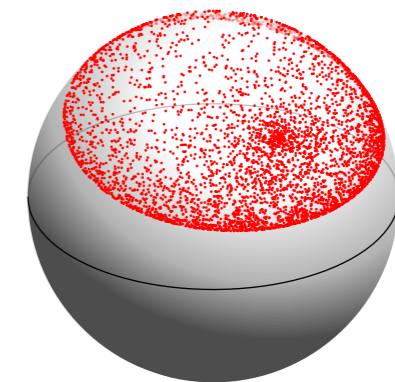
dissymétriser les sites A et B en leur donnant une énergie différente

$$E_A = -\Delta$$

$$E_B = +\Delta$$

$$\hat{H}_{\mathbf{q}} = - \begin{pmatrix} \Delta & h_x(\mathbf{q}) - ih_y(\mathbf{q}) \\ h_x(\mathbf{q}) + ih_y(\mathbf{q}) & -\Delta \end{pmatrix} \quad h_z(\mathbf{q}) = \Delta$$

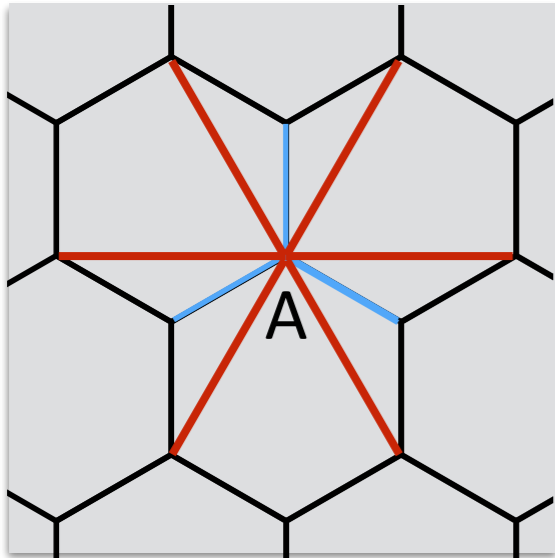
Le signe de  $h_z(\mathbf{q})$  est constant sur toute la zone de Brillouin : on ne couvre au plus qu'un hémisphère de la sphère de Bloch



Il faut que  $[\hat{H}(\mathbf{q})]_{AA}$  et  $[\hat{H}(\mathbf{q})]_{BB}$  dépendent de  $\mathbf{q}$  : sauts entre seconds voisins



# Couplage aux seconds voisins pour le graphène



Six seconds voisins pour un site  $A$  : couplages  $A \rightarrow A$

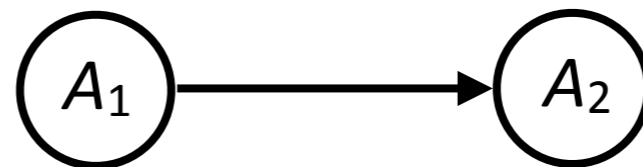
Idem pour  $B$

On sait par ailleurs qu'il faut briser l'invariance par renversement du temps

$$\text{Sinon : } \Omega_{\mathbf{q}} = -\Omega_{-\mathbf{q}} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{C} = \frac{1}{2\pi} \iint_{\text{ZB}} \Omega_{\mathbf{q}} d^2q = 0$$

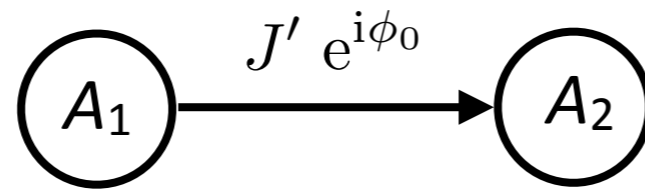
Couplages tunnel  $A \rightarrow A$  et  $B \rightarrow B$  avec un élément de matrice complexe

représentation graphique :



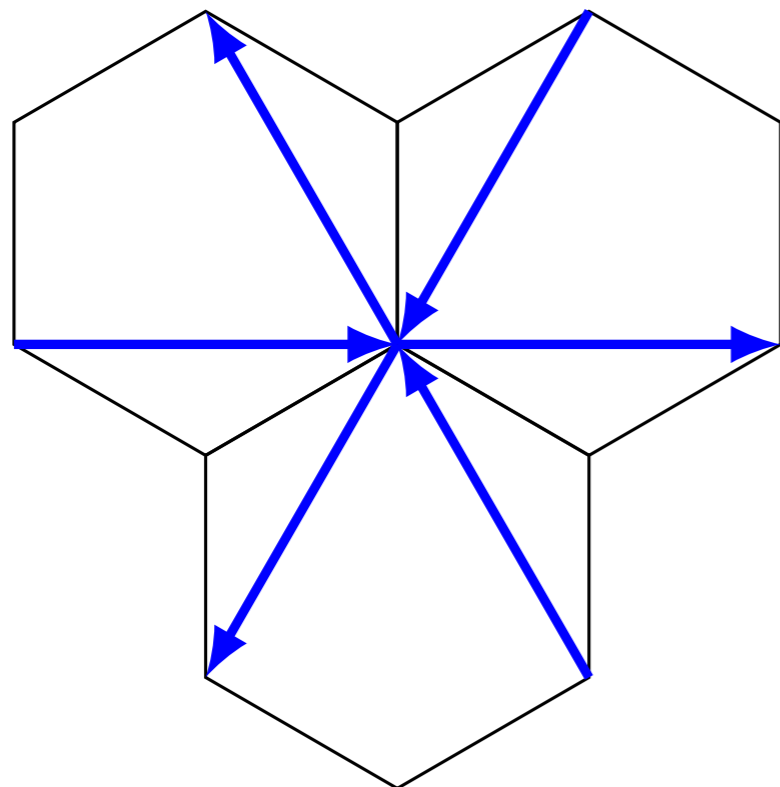
$$-J' (e^{+i\phi_0} |A_2\rangle\langle A_1| + e^{-i\phi_0} |A_1\rangle\langle A_2|)$$

# Choix des couplages aux seconds voisins

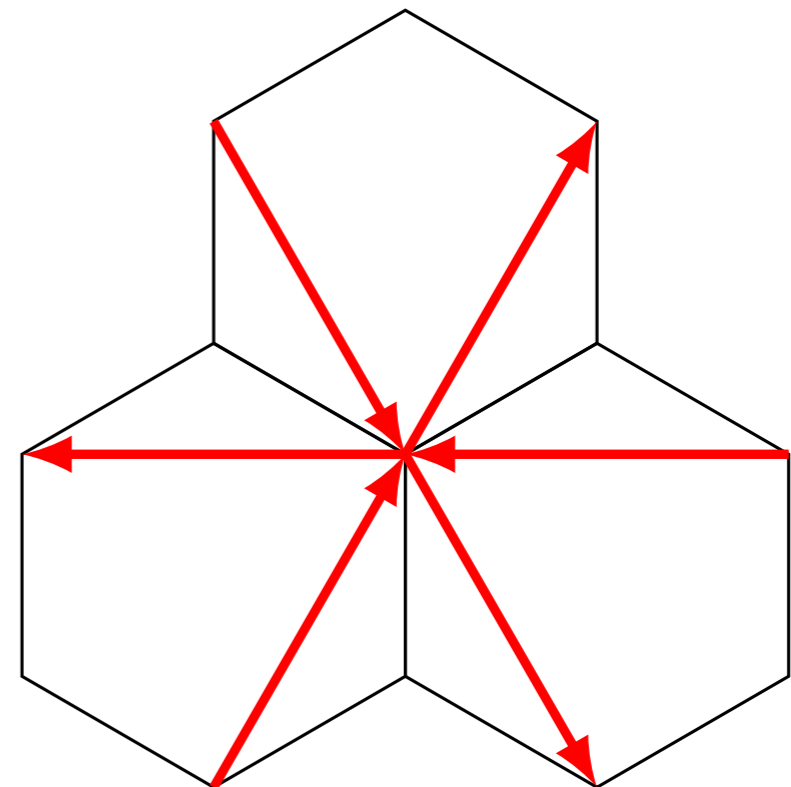


$$-J' (e^{+i\phi_0} |A_2\rangle\langle A_1| + e^{-i\phi_0} |A_1\rangle\langle A_2|)$$

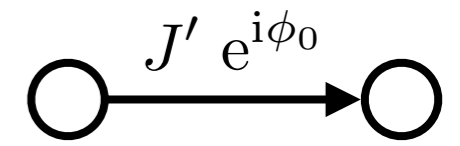
Couplage d'un site  $A$  à ses six seconds voisins :  
alternance de  $e^{\pm i\phi_0}$



Couplage d'un site  $B$  à ses six seconds voisins :  
alternance de  $e^{\pm i\phi_0}$



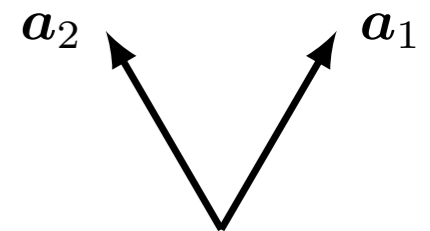
# L'hamiltonien de Haldane



- Les énergies sur site  $\hat{H}_{0,\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$

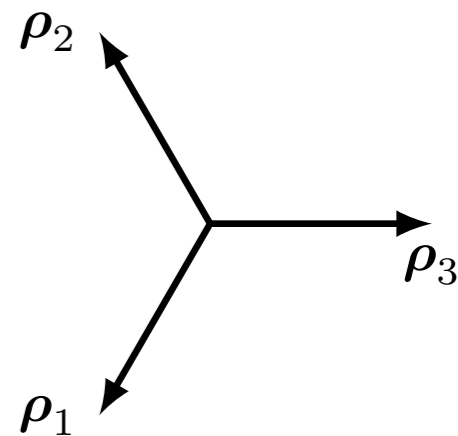
- Les trois couplages entre premiers voisins du graphène

$$\hat{H}_{1,\mathbf{q}} = -J \begin{pmatrix} 0 & 1 + e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_1} + e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_2} \\ 1 + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_1} + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_2} & 0 \end{pmatrix}$$

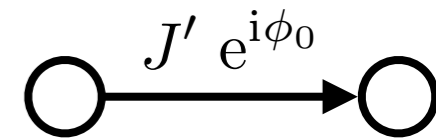


- Les six couplages additionnels entre seconds voisins  $J' e^{\pm i\phi_0}$

$$\hat{H}_{2,\mathbf{q}} = -J' \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^3 2 \cos(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}_\alpha - \phi_0) & 0 \\ 0 & \sum_{\alpha=1}^3 2 \cos(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}_\alpha + \phi_0) \end{pmatrix}$$



# Hamiltonien de Haldane et sphère de Bloch



L'hamiltonien s'écrit sous la forme canonique pour un (pseudo-) spin 1/2:

$$\hat{H}_{\mathbf{q}} = E_0(\mathbf{q}) \hat{1} - \mathbf{h}(\mathbf{q}) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} h_x(\mathbf{q}) &= J [1 + \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_1) + \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_2)] \\ h_y(\mathbf{q}) &= J [\sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_1) + \sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_2)] \end{aligned} \right\} \text{inchangés par rapport au graphène}$$

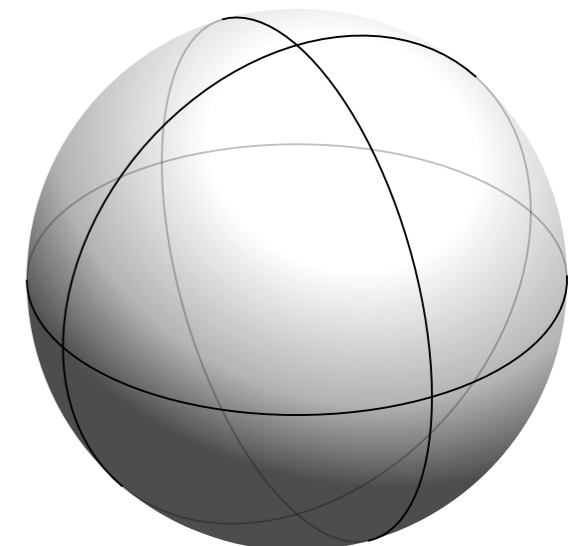
$$h_z(\mathbf{q}) = \Delta + 2J' \sin \phi_0 \mathcal{S}_{\mathbf{q}} \quad \text{avec} \quad \mathcal{S}_{\mathbf{q}} = \sum_{\alpha=1}^3 \sin(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}_{\alpha})$$

Condition nécessaire pour couvrir la sphère de Bloch :  
il faut atteindre les pôles

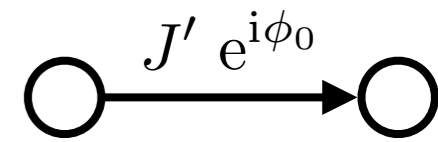
$$h_x(\mathbf{q}) = h_y(\mathbf{q}) = 0 \quad : \text{emplacement des points de Dirac}$$

$$h_z(\mathbf{q}) > 0 \quad : \text{pôle nord}$$

$$h_z(\mathbf{q}) < 0 \quad : \text{pôle sud}$$



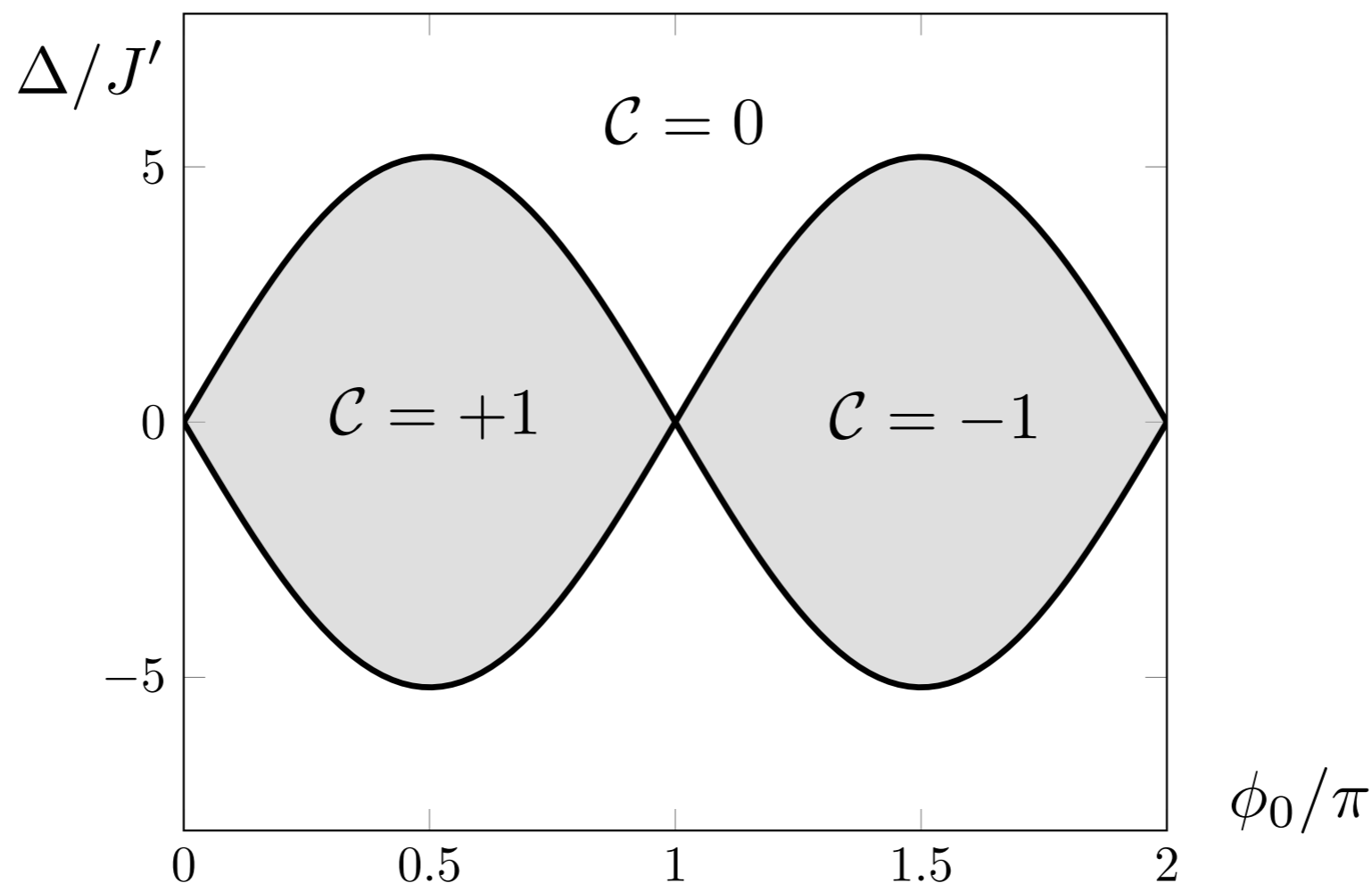
# Diagramme de phase pour le modèle de Haldane



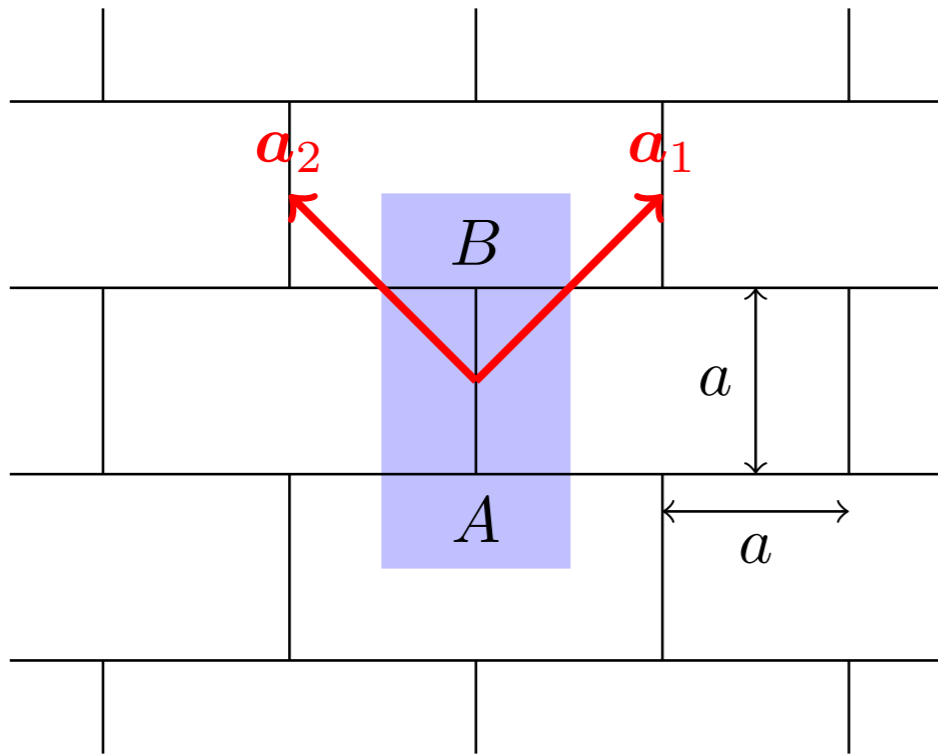
La condition d'atteinte des pôles est en fait suffisante pour assurer le recouvrement entier de la sphère de Bloch

$$h_z(\mathbf{q}) = \Delta + 2J' \sin \phi_0 \mathcal{S}_q \quad \text{avec aux points de Dirac} \quad \mathcal{S}_q = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Il suffit donc que  $\Delta \pm 3\sqrt{3}J' \sin \phi_0$  soient de signe opposé



# Un clone du réseau graphène : le réseau « mur de briques »

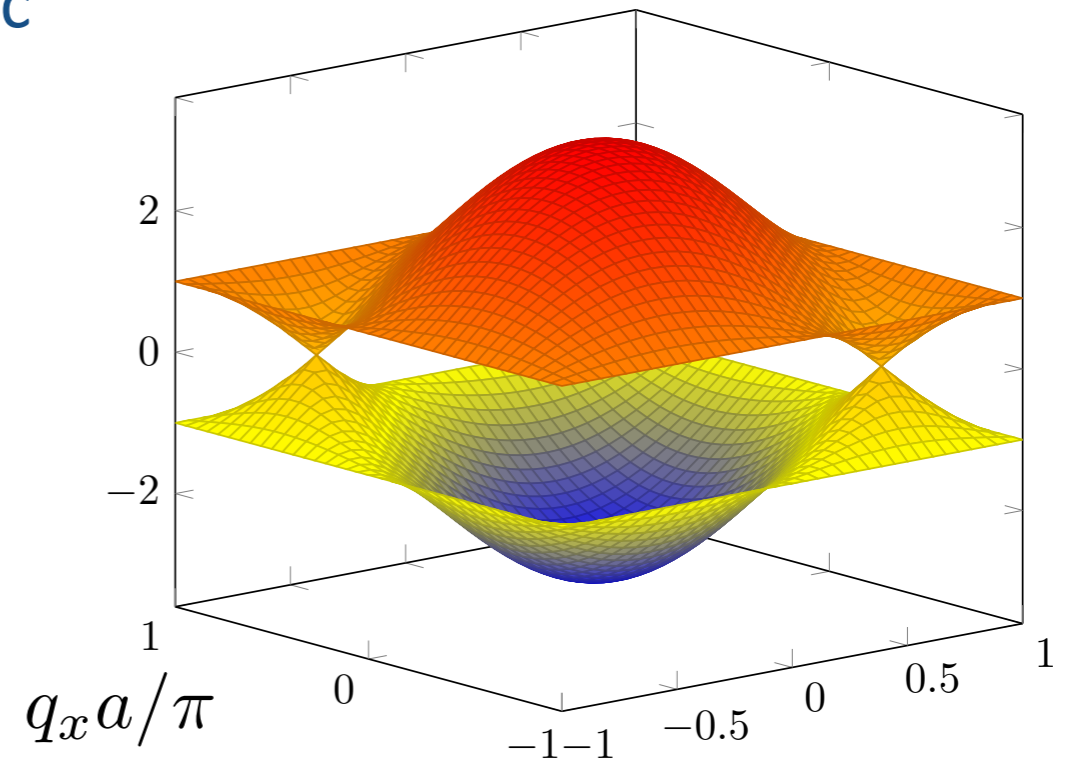
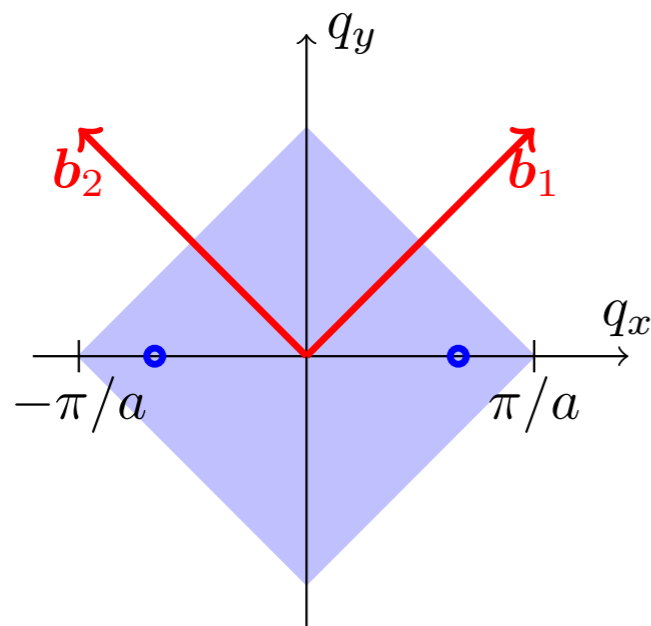


Calculs plus simples

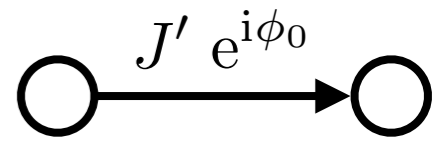
Réalisable expérimentalement avec des ondes lumineuses stationnaires orthogonales

Zurich, 2012

Zone de Brillouin carrée avec deux points de Dirac comme pour le graphène

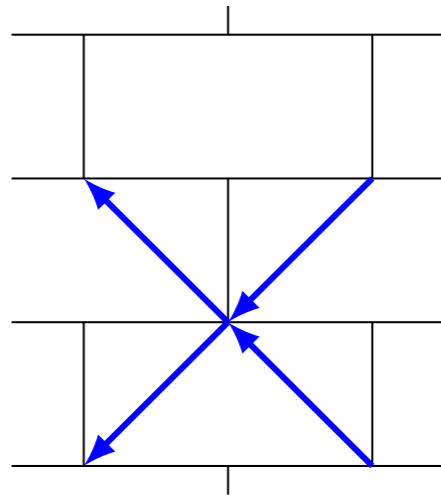


# Diagramme de phase du « mur de briques »

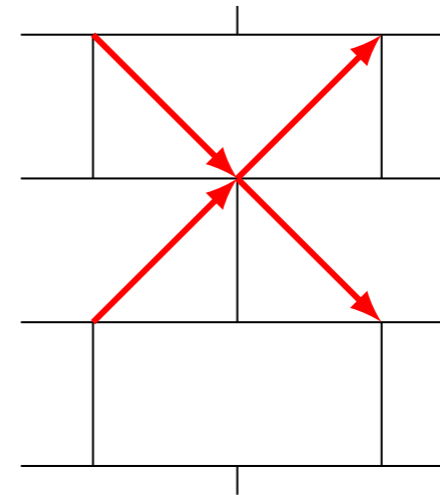


Même structure que pour le modèle de Haldane, avec 4 seconds voisins au lieu de 6

site A :



site B :



exemple  
non topologique

$$\phi_0 = 0$$

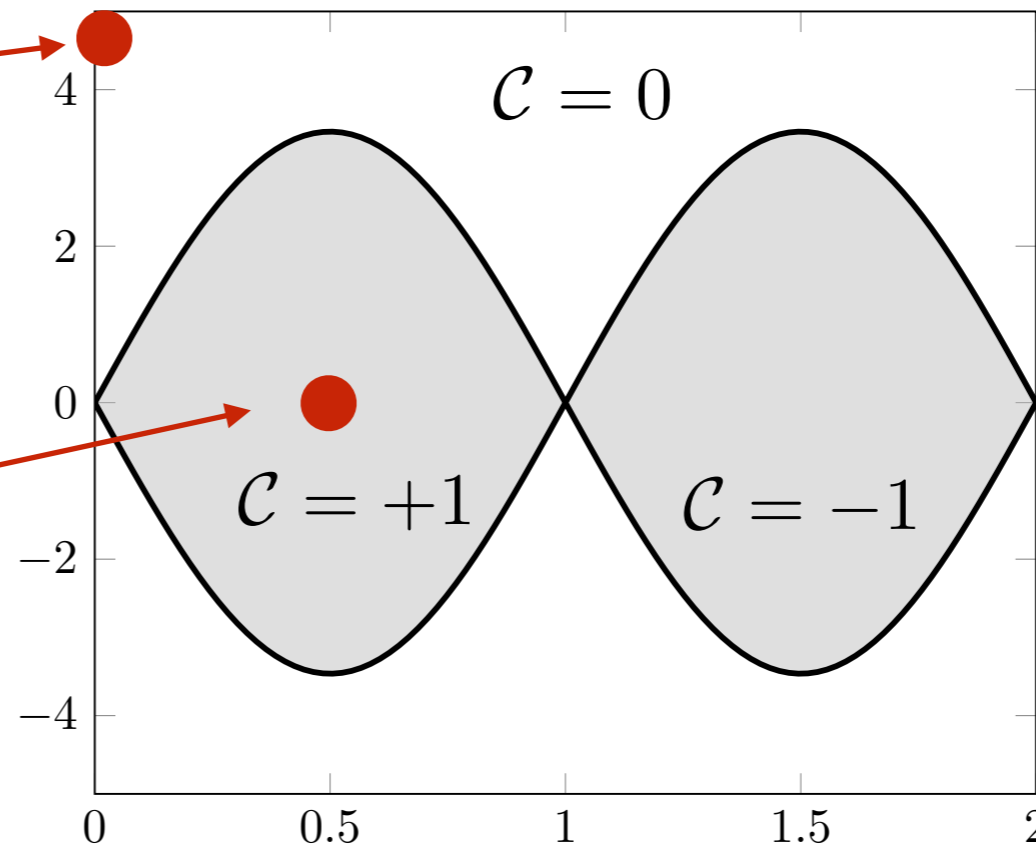
$$\Delta \gg J'$$

exemple  
topologique

$$\phi_0 = \pi/2$$

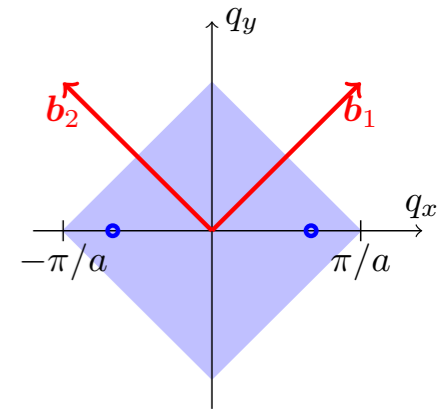
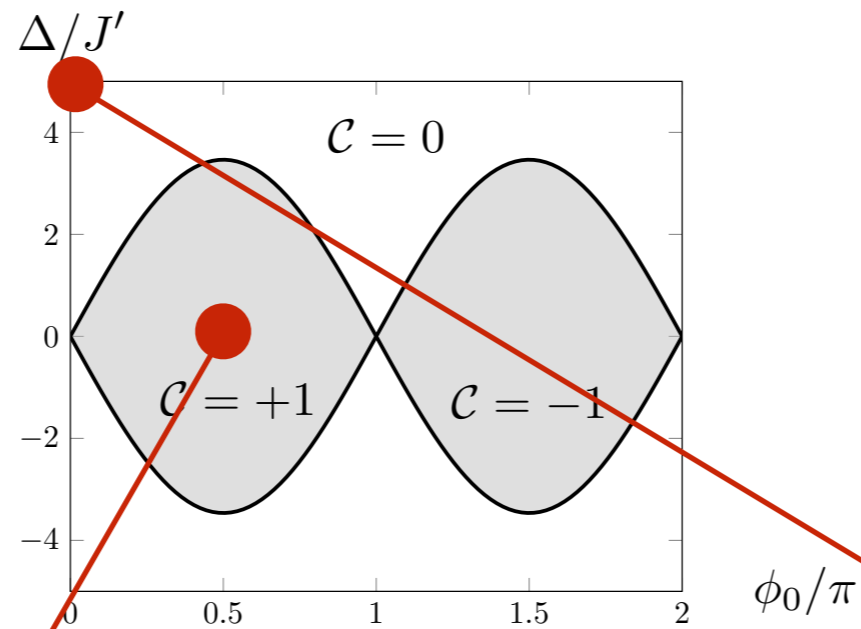
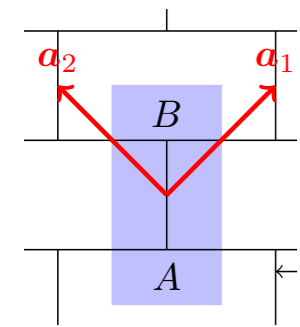
$$\Delta = 0$$

$\Delta/J'$

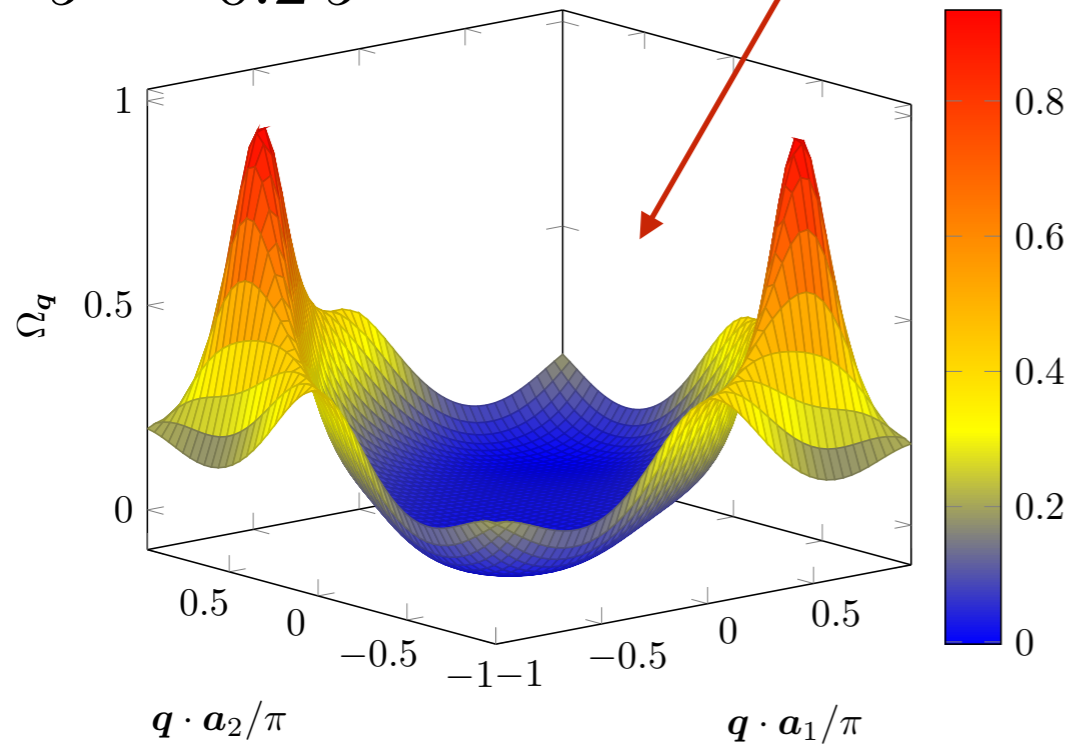


$\phi_0/\pi$

# Courbure de Berry du réseau « mur de briques »

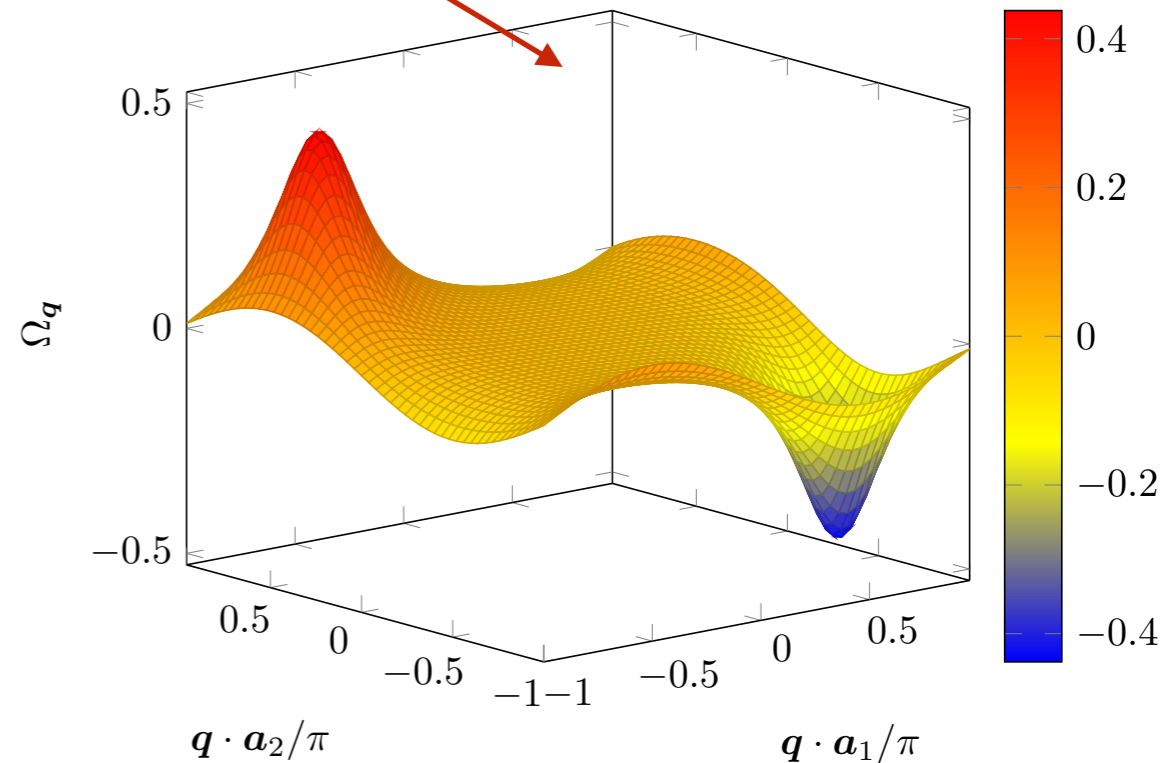


$J' = 0.2 J$



$$\mathcal{C} = \frac{1}{2\pi} \iint_{\text{ZB}} \Omega_{\mathbf{q}} d^2q = 1$$

$\Delta = J, J' = 0$



$$\mathcal{C} = 0$$



# Courbure de Berry à l'approximation des liaisons fortes

Dans l'approximation des liaisons fortes, on a une cellule unité à  $n$  sites

- On trouve  $n$  bandes d'énergie  $E_{\mathbf{q}}^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, n$
- On calcule la courbure de Berry pour chaque bande  $\Omega_{\mathbf{q}}^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, n$

On peut alors montrer :

$$\sum_{j=1}^n \Omega_{\mathbf{q}}^{(j)} = 0 \quad \text{pour tout } \mathbf{q} \text{ et donc :} \quad \sum_{j=1}^n \mathcal{C}^{(j)} = 0$$

$$\text{Pour une cellule unité à deux sites : } \mathcal{C}^{(+)} = -\mathcal{C}^{(-)}$$

Un conseil pour la démonstration :

$$\text{Utiliser : } \Omega_{\mathbf{q}}^{(j)} = i \sum_{j' \neq j} \frac{\langle u_{\mathbf{q}}^{(j)} | \nabla_{\mathbf{q}} \hat{H}_{\mathbf{q}} | u_{\mathbf{q}}^{(j')} \rangle \times \langle u_{\mathbf{q}}^{(j')} | \nabla_{\mathbf{q}} \hat{H}_{\mathbf{q}} | u_{\mathbf{q}}^{(j)} \rangle}{\left( E_{\mathbf{q}}^{(j)} - E_{\mathbf{q}}^{(j')} \right)^2}$$

## 2.

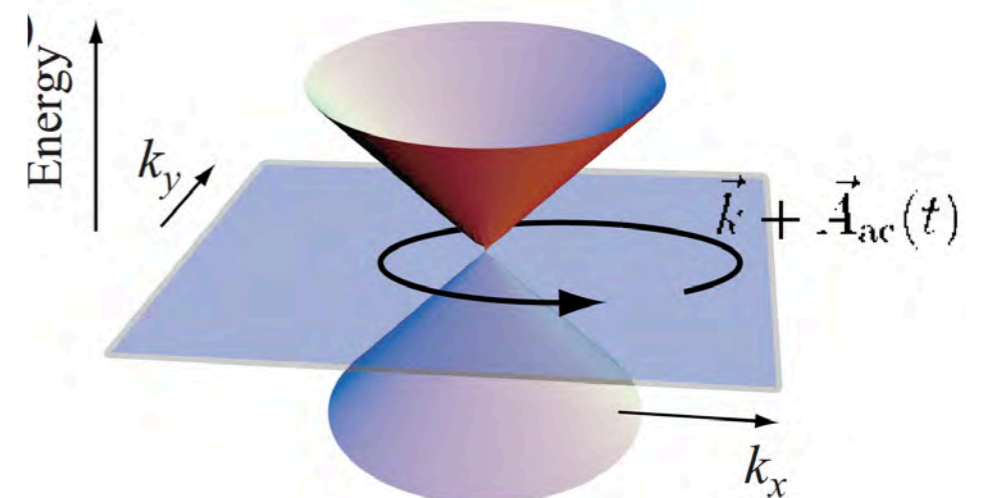
# Modulation temporelle et topologie

T. Oka & H. Aoki

Phys. Rev. B 79, 081406 (2009)

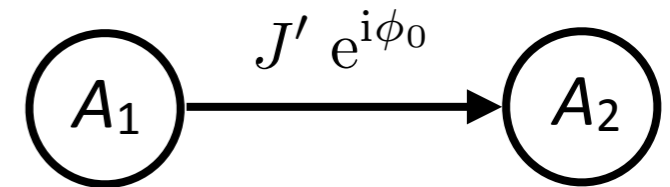
Photovoltaic Hall effect in graphene

*Ouverture d'un gap dans une feuille de graphène grâce à une lumière circulaire*



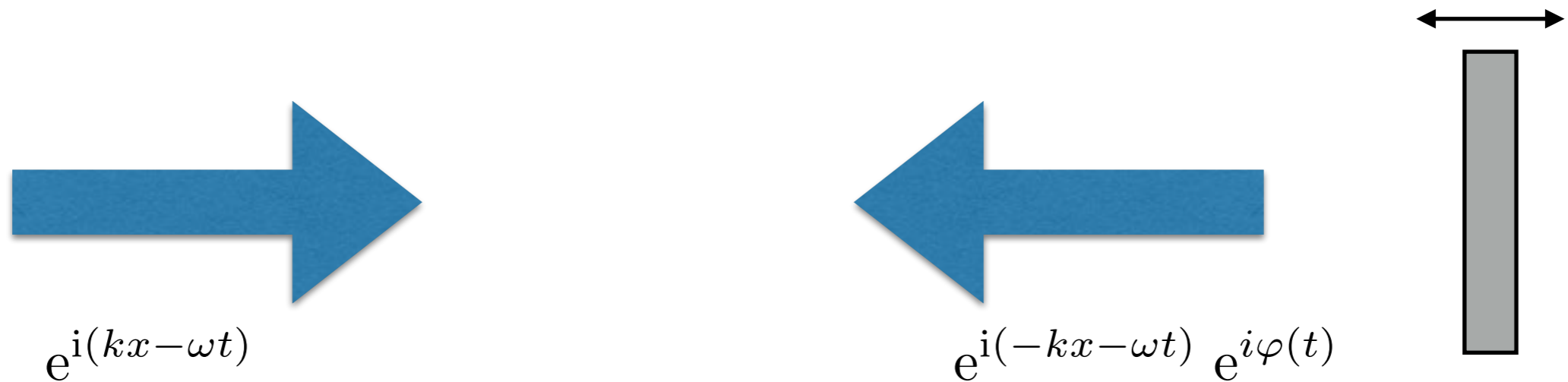
# Les réseaux secoués

Comment créer un couplage tunnel complexe du type



*Une réponse possible : moduler le réseau de manière chirale*

Pour des atomes froids, cela est possible en modulant la phase des ondes stationnaires formant le réseau



ventres du réseau en  $kx_j(t) = j\pi + \varphi(t)$

# Force d'inertie dans un réseau secoué

En l'absence de modulation :  $\hat{H}_{\text{immobile}} = \sum_{\alpha} E_{\alpha} \hat{P}_{\alpha} - \sum_{\alpha, \beta} J_{\alpha, \beta}^{(0)} |\mathbf{r}_{\alpha}\rangle \langle \mathbf{r}_{\beta}|$

$$\hat{P}_{\alpha} = |\mathbf{r}_{\alpha}\rangle \langle \mathbf{r}_{\alpha}| \quad J_{\alpha, \beta}^{(0)} : \text{réel positif}$$

Si le réseau bouge « en bloc » avec la trajectoire  $\boldsymbol{\rho}_t$ , on se place dans le référentiel en mouvement : force d'inertie sur les particules  $\mathbf{F}_t = -m\ddot{\boldsymbol{\rho}}_t$

Hamiltonien dans ce référentiel :  $\hat{H}_t = \hat{H}_{\text{immobile}} - \mathbf{F}_t \cdot \hat{\mathbf{r}}$

$$\text{avec : } \hat{\mathbf{r}} = \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \hat{P}_{\alpha}$$

Transformation unitaire (identique au cours précédent) :

$$\hat{U}_t = \exp[-i \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}_t] \quad \mathbf{A}_t = \frac{1}{\hbar} \int^t \mathbf{F}_{t'} dt' = -\frac{m}{\hbar} \dot{\boldsymbol{\rho}}_t$$

## Force d'inertie dans un réseau secoué (2)

Hamiltonien après la transformation unitaire  $\hat{U}_t = \exp[-i \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}_t]$  avec  $\mathbf{A}_t = -\frac{m}{\hbar} \dot{\boldsymbol{\rho}}_t$

$$\hat{H}_{\text{immobile}} = \sum_{\alpha} E_{\alpha} |\mathbf{r}_{\alpha}\rangle \langle \mathbf{r}_{\alpha}| - \sum_{\alpha, \beta} J_{\alpha, \beta}^{(0)} |\mathbf{r}_{\alpha}\rangle \langle \mathbf{r}_{\beta}|$$

$$\longrightarrow \hat{\tilde{H}}_t = \sum_{\alpha} E_{\alpha} |\mathbf{r}_{\alpha}\rangle \langle \mathbf{r}_{\alpha}| - \sum_{\alpha, \beta} J_{\alpha, \beta}(t) |\mathbf{r}_{\alpha}\rangle \langle \mathbf{r}_{\beta}|$$

Coefficients tunnel effectifs modulés dans le temps :  $J_{\alpha, \beta}(t) = J_{\alpha, \beta}^{(0)} e^{im(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}) \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}} / \hbar}$

**Modulation d'un lien  $\longleftrightarrow$  Vibration du réseau le long de ce lien**

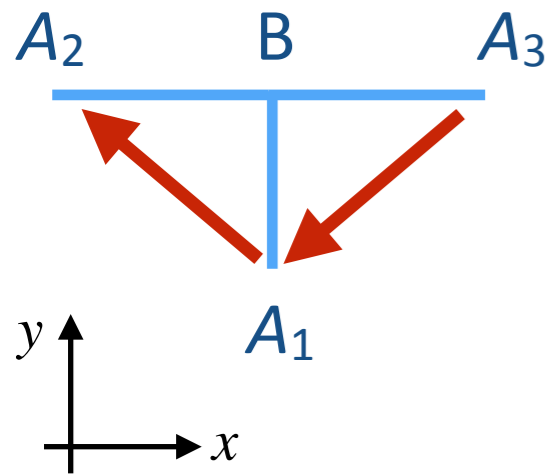
**Limite d'une modulation à haute fréquence  $\omega$  (comparée aux fréquences de Bohr)**

On développe  $\hat{\tilde{H}}_t$  en série de Fourier :  $\hat{\tilde{H}}_t = \hat{H}^{(0)} + \sum_{n>0} \left( \hat{H}^{(n)} e^{in\omega t} + \hat{H}^{(-n)} e^{-in\omega t} \right)$

et on conserve les termes d'ordre 0 et 1 dans un développement en puissances de  $1/\omega$

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H}^{(0)} + \frac{1}{\hbar\omega} \sum_{n>0} \frac{1}{n} \left[ \hat{H}^{(n)}, \hat{H}^{(-n)} \right] + \mathcal{O}(1/\omega^2)$$

# Emergence d'un couplage aux seconds voisins



Couplages dans le réseau immobile :  $-J \sum_{\alpha=1,2,3} |A_\alpha\rangle\langle B| + \text{H.c.}$

Couplage vers  $A_\alpha$  avec modulation:  $-J e^{-i\kappa \sin(\omega t + \varphi_\alpha)} |A_\alpha\rangle\langle B| + \text{H.c.}$

Premier terme en  $1/\hbar\omega$  de l'hamiltonien effectif :  $\frac{1}{\hbar\omega} [\hat{H}^{(1)}, \hat{H}^{(-1)}]$

avec (entre autres) :  $\hat{H}^{(1)} = e^{i\phi_y} |A_1\rangle\langle B| + \dots$

$\hat{H}^{(-1)} = e^{-i\phi_x} |B\rangle\langle A_3| + \dots$

qui contribue au commutateur comme :  $e^{i(\phi_y - \phi_x)} |A_1\rangle\langle A_3| + \dots$  **Gagné !**

Choix optimal  $\phi_y - \phi_x = \pi/2$  (modulation circulaire) conduisant à :

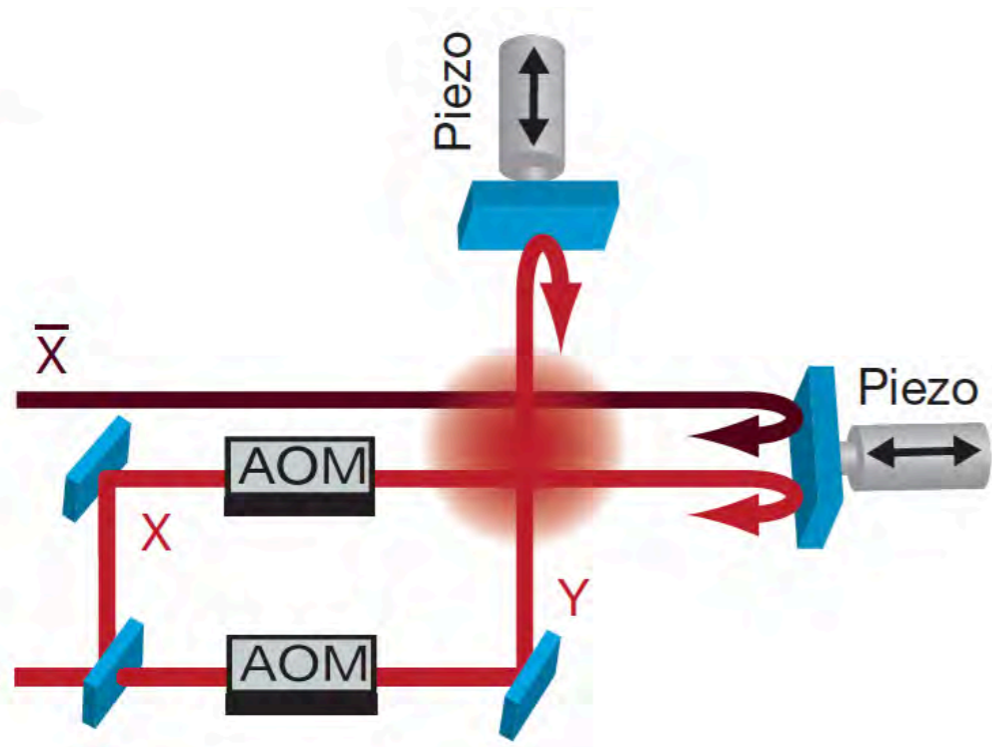
$$- \bar{J}' \left( e^{+i\pi/2} |A_2\rangle\langle A_1| + e^{+i\pi/2} |A_1\rangle\langle A_3| \right) + \text{H.c.}$$

$$\bar{J}' = 2 \frac{J^2}{\hbar\omega} \mathcal{J}_1^2(\kappa)$$

idem pour les sites  $B$

$$\kappa = ma\dot{\rho}_0/\hbar$$

# L'expérience de Zurich

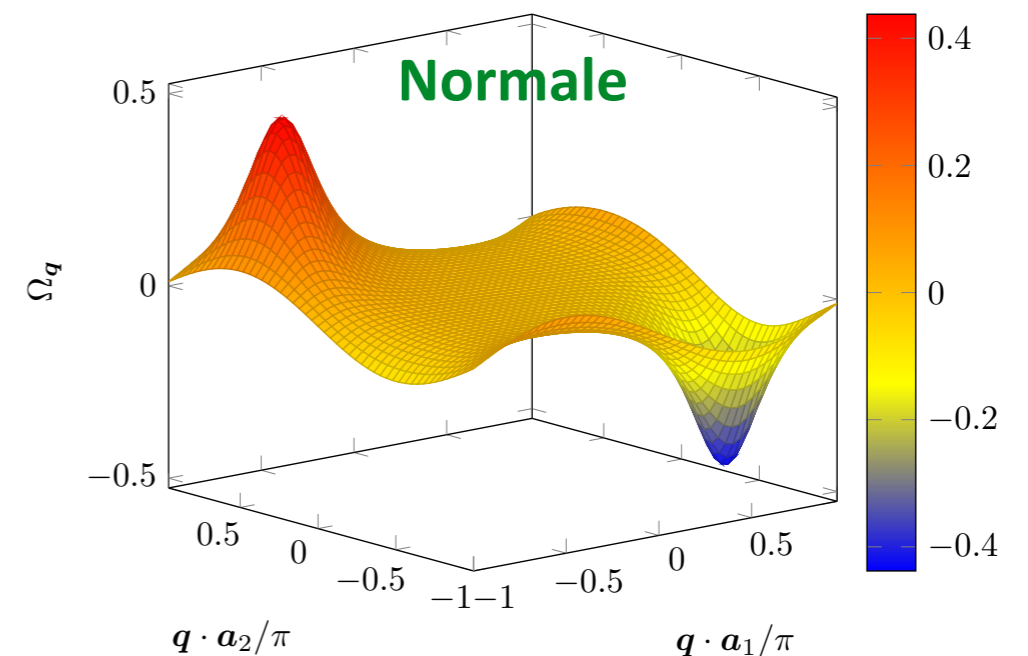
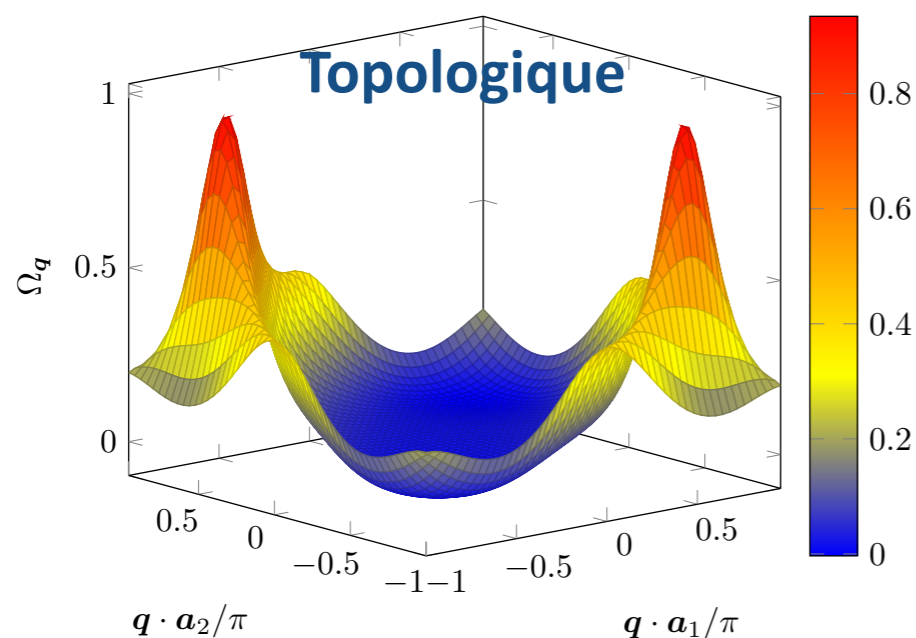


G. Jotzu et al., Nature 515, 237 (2014)

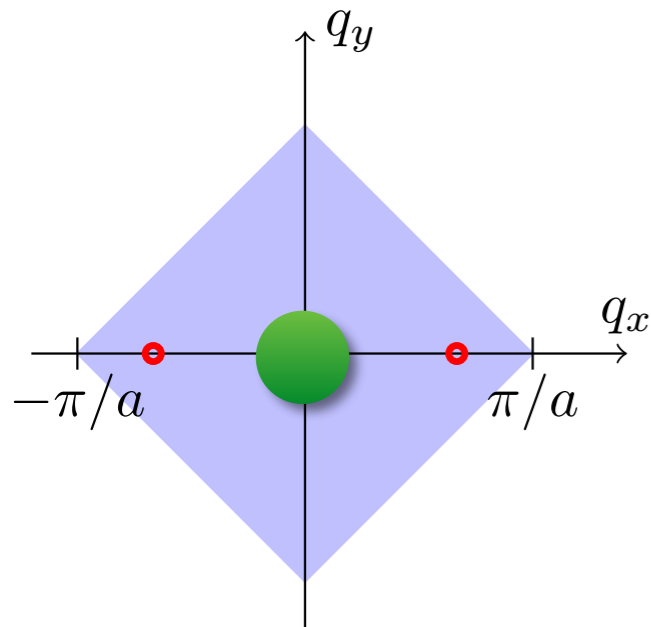
Réseau « mur de briques » oscillant dans lequel on contrôle l'énergie sur site  $\pm\Delta$

Atomes de  $^{40}\text{K}$  (fermions) préparés un paquet d'ondes au centre de la zone de Brillouin dans la bande fondamentale

Principe : sonder la topologie par la réponse du paquet d'ondes à une force extérieure



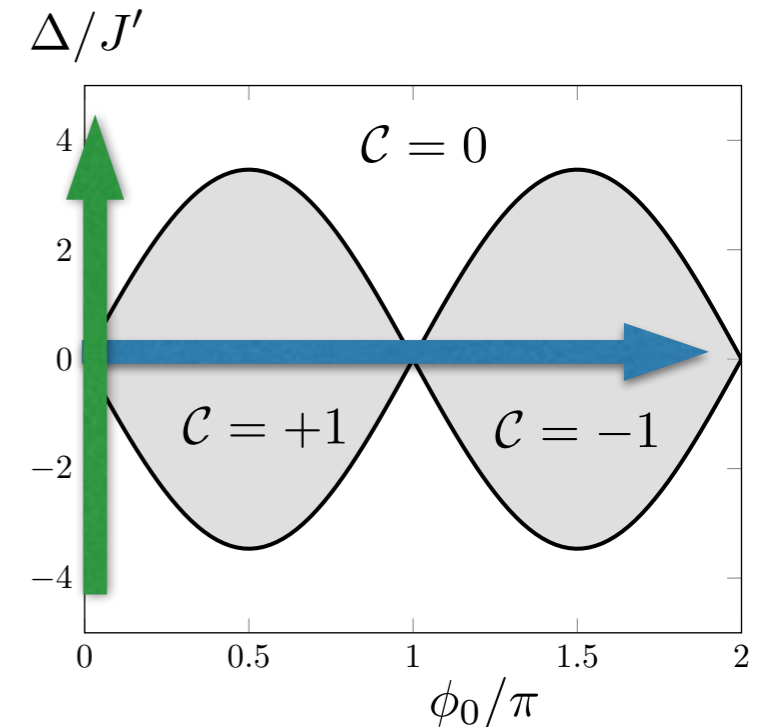
# L'expérience de Zurich (suite)



$$\hbar \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{F}$$

$$\hbar \mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{q}} E_{\mathbf{q}}^{(0)} + \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{q}} \times \mathbf{F}$$

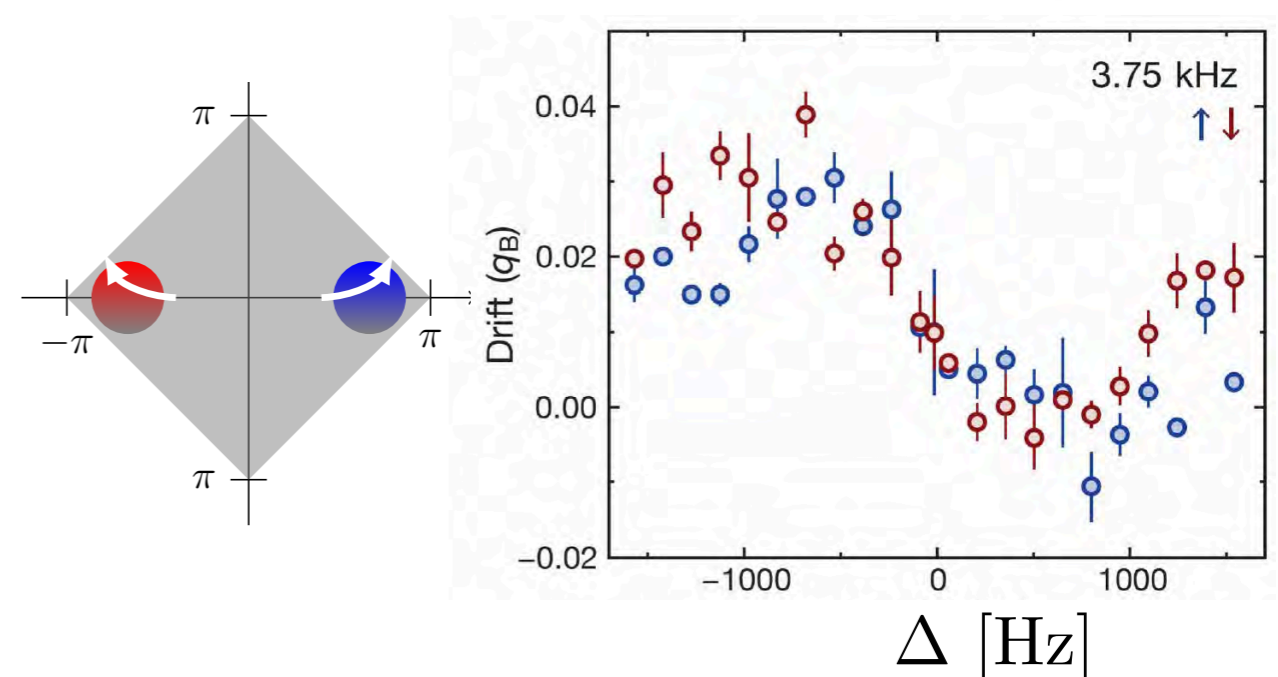
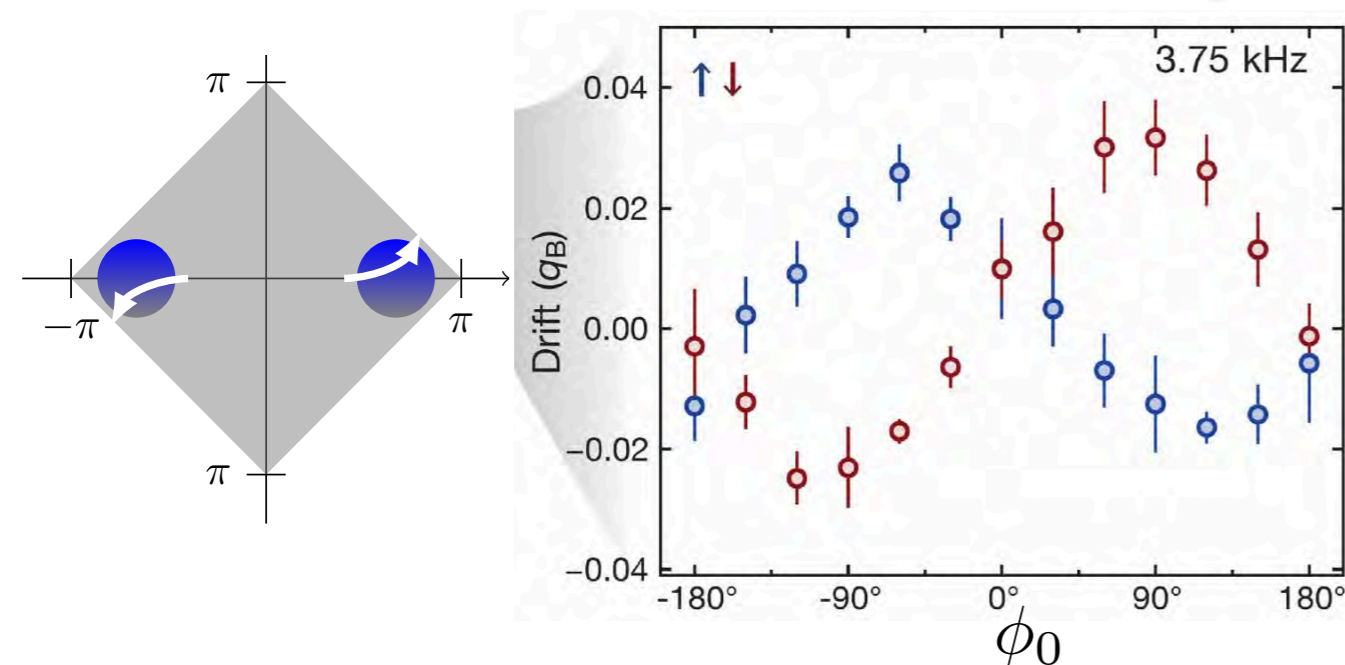
*vitesse de groupe*
*« anormale » ou « anormale »*



Gradient de champ magnétique créant une force  $\pm F_x$  ; quelle dérive selon  $y$  ?

**Topologique**

**Normale**



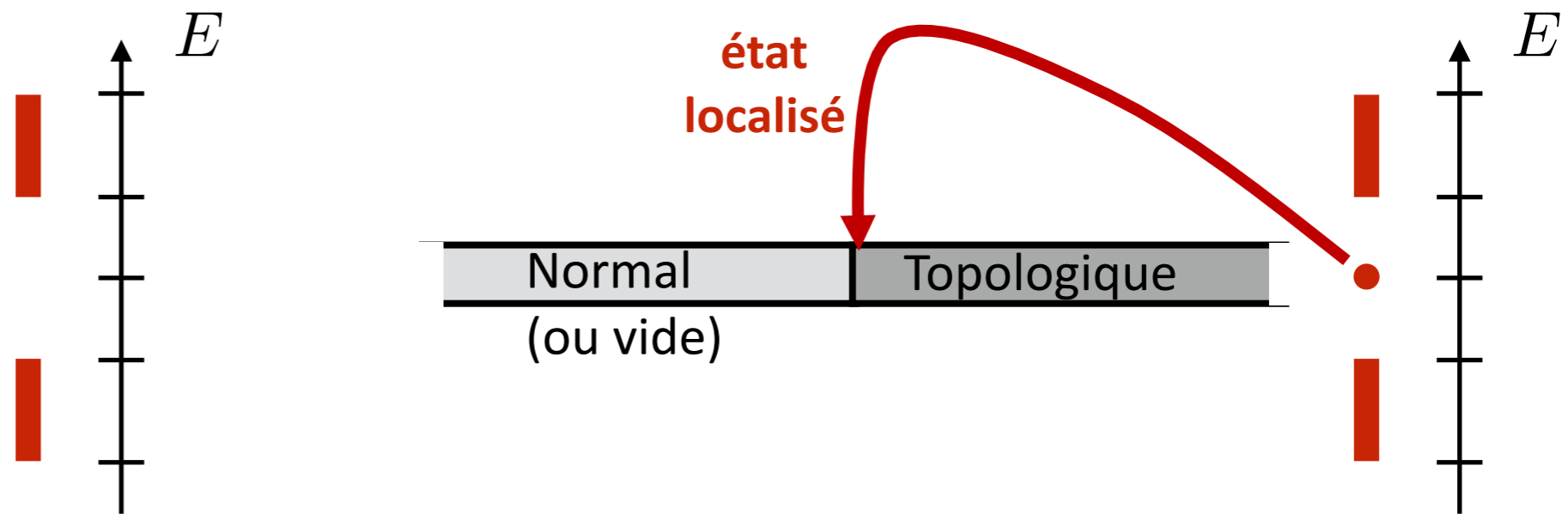


3.

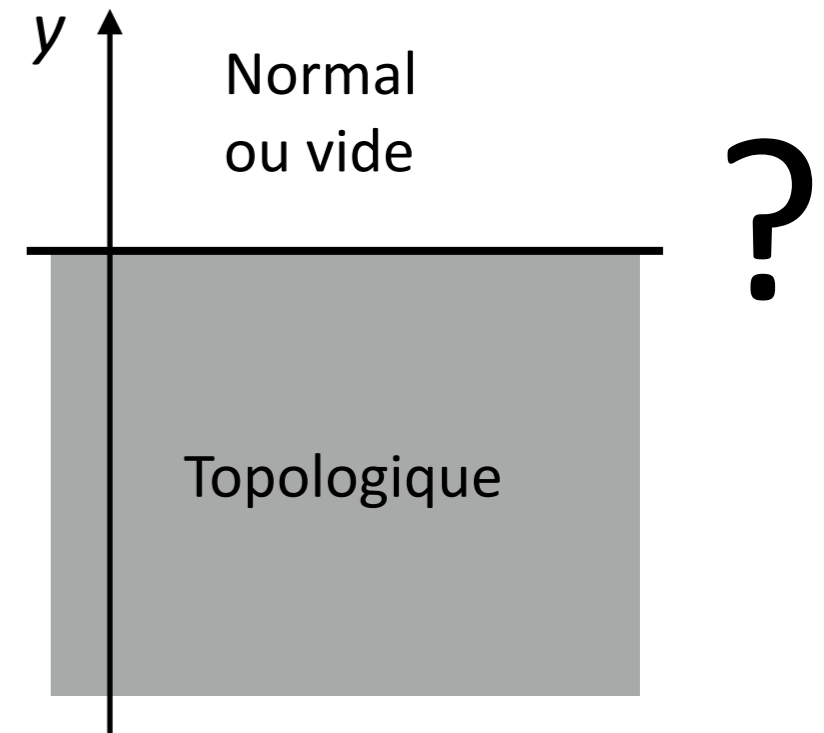
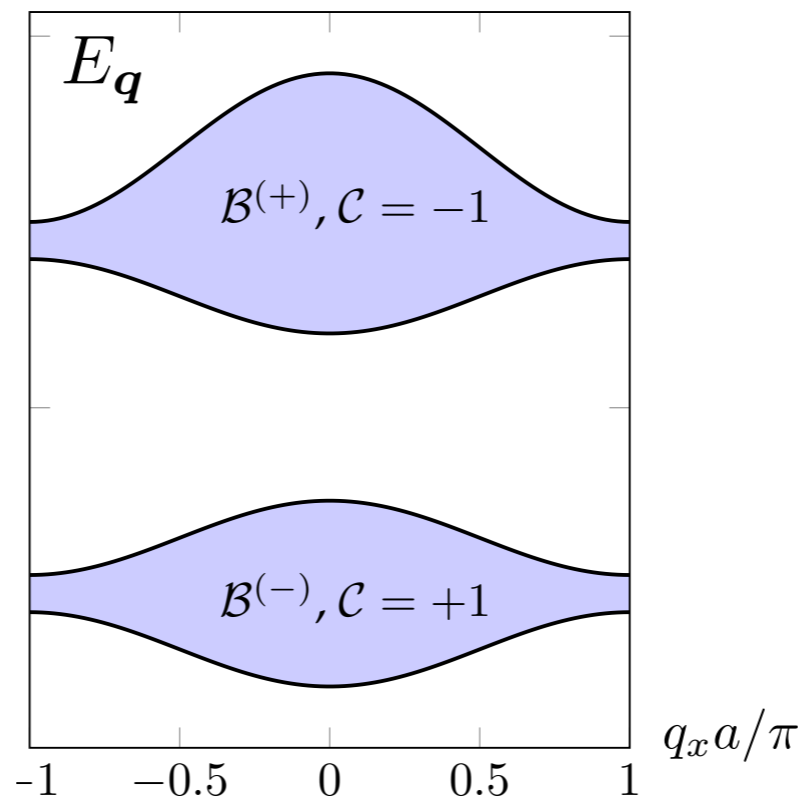
Les canaux de bord

# Etats de bord : 1D vs. 2D

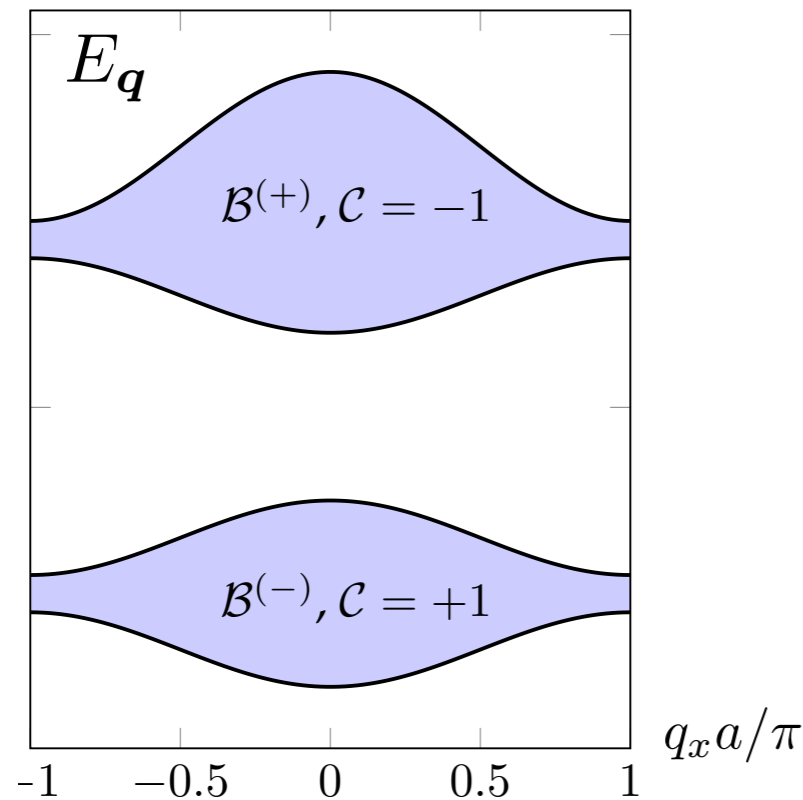
Rappel sur le cas 1D  
(par exemple SSH)



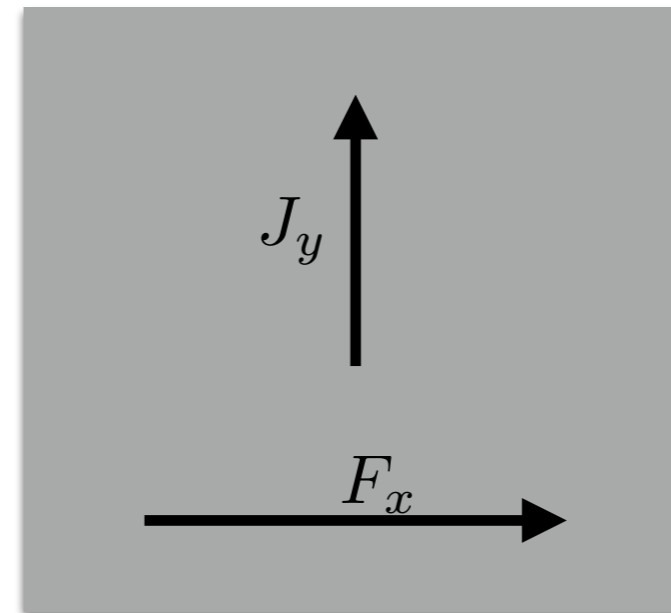
On passe à 2D et on suppose que la bande fondamentale est topologique  
(par exemple Haldane)



# Pourquoi un canal de bord doit exister

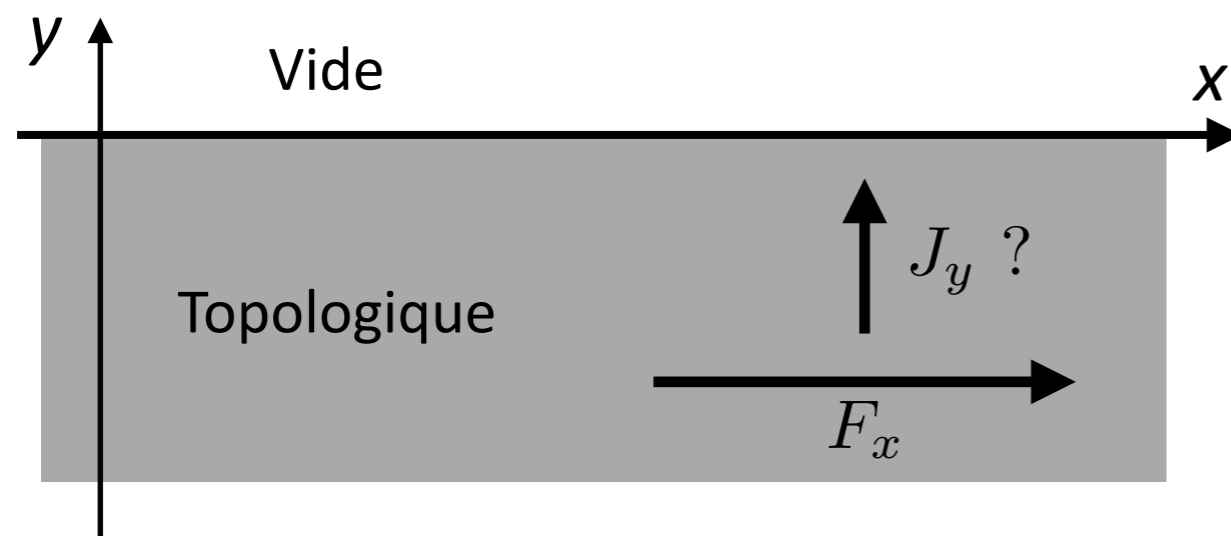


Pour un plan infini et une bande pleine



$$\dot{q}_x = \frac{1}{\hbar} F_x$$

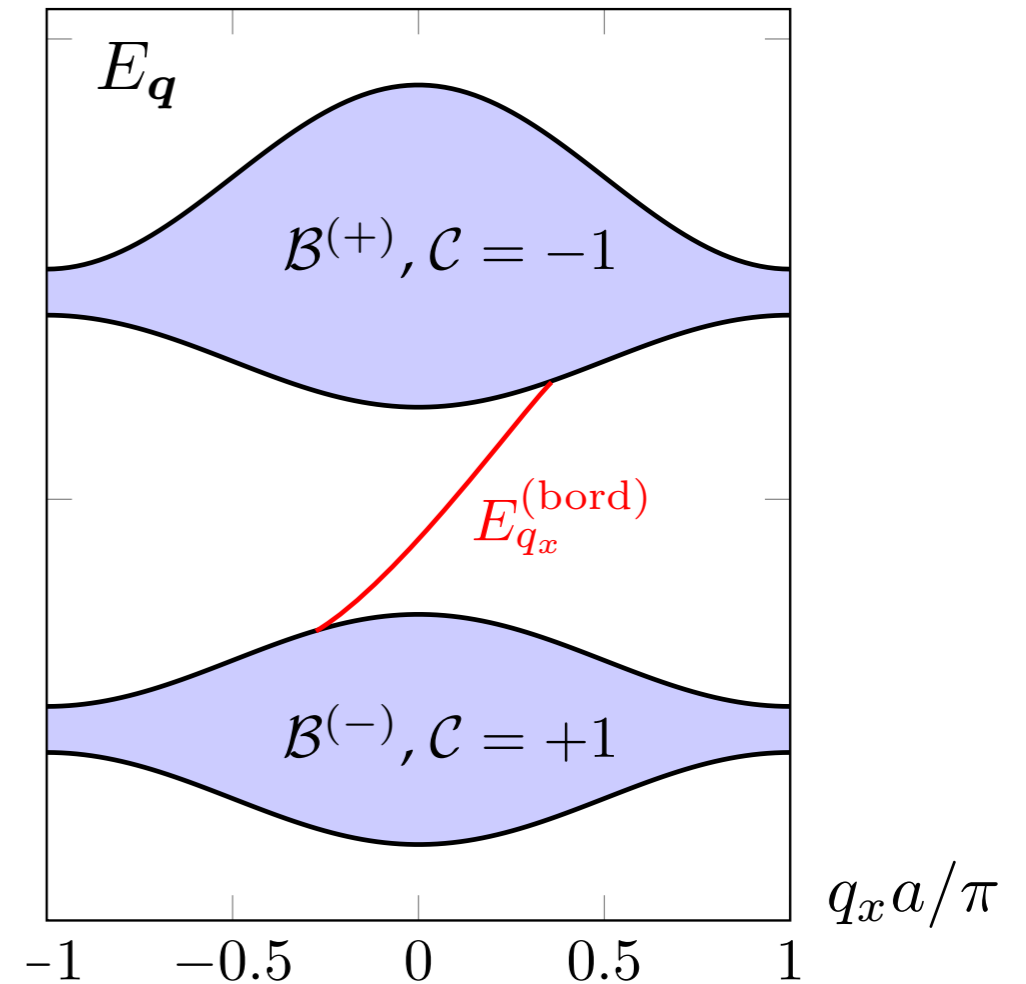
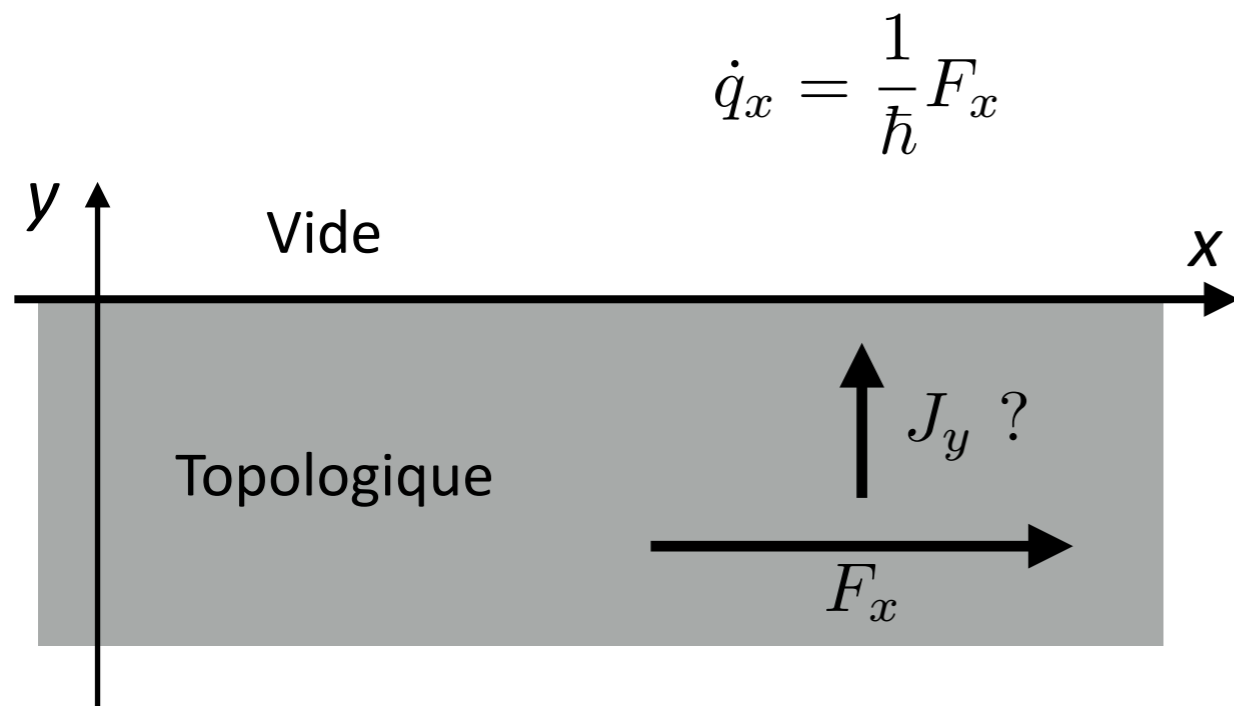
Pour un demi-plan, on conserve l'invariance par translation selon  $x$  :  
le théorème de Bloch est toujours valable dans cette direction



Y a-t-il un courant selon  $y$  ?

Si c'est le cas, comment éviter l'accumulation de particules sur la ligne  $y=0$  ?

# Pourquoi un canal de bord doit exister (2)



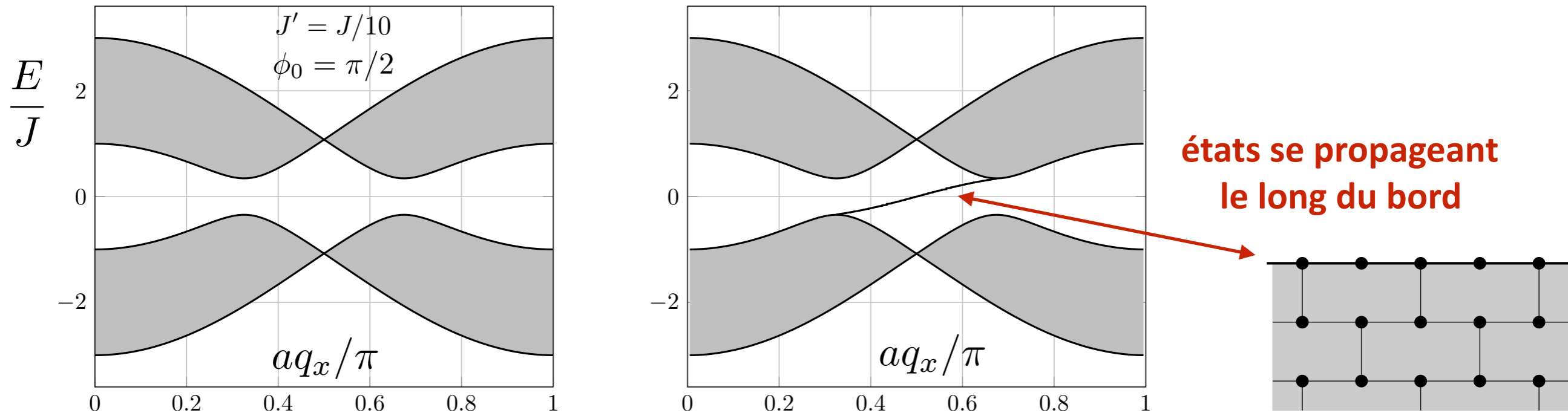
Le canal de bord crée un « détour » pour envoyer les particules dans la bande supérieure. Une fois passées dans la bande supérieure, elles repartent vers le bas car  $\mathcal{C} = -1 \Rightarrow J_y < 0$

*Canal robuste tant que les deux bandes ne se touchent pas*

*Exemple simple de la correspondance coeur - bord (bulk-edge)*

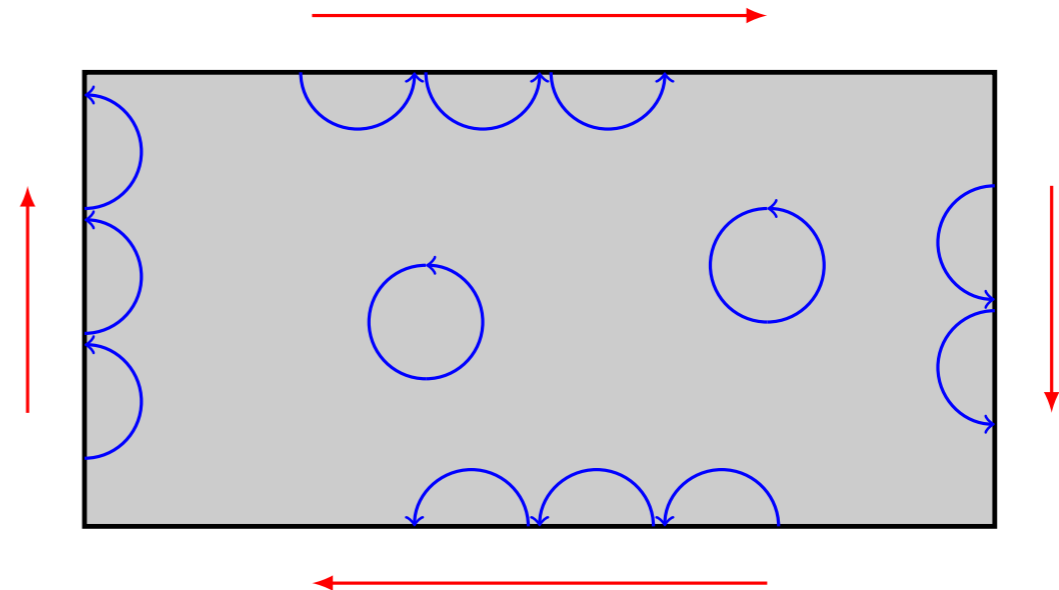
# Etats de bord et orbites sautantes

Plan vs. demi-plan pour le réseau « mur de briques » (cas topologique)



Canal de bord mono-mode avec la vitesse de groupe  $\frac{1}{\hbar} \frac{dE_{q_x}^{(\text{bord})}}{dq_x}$

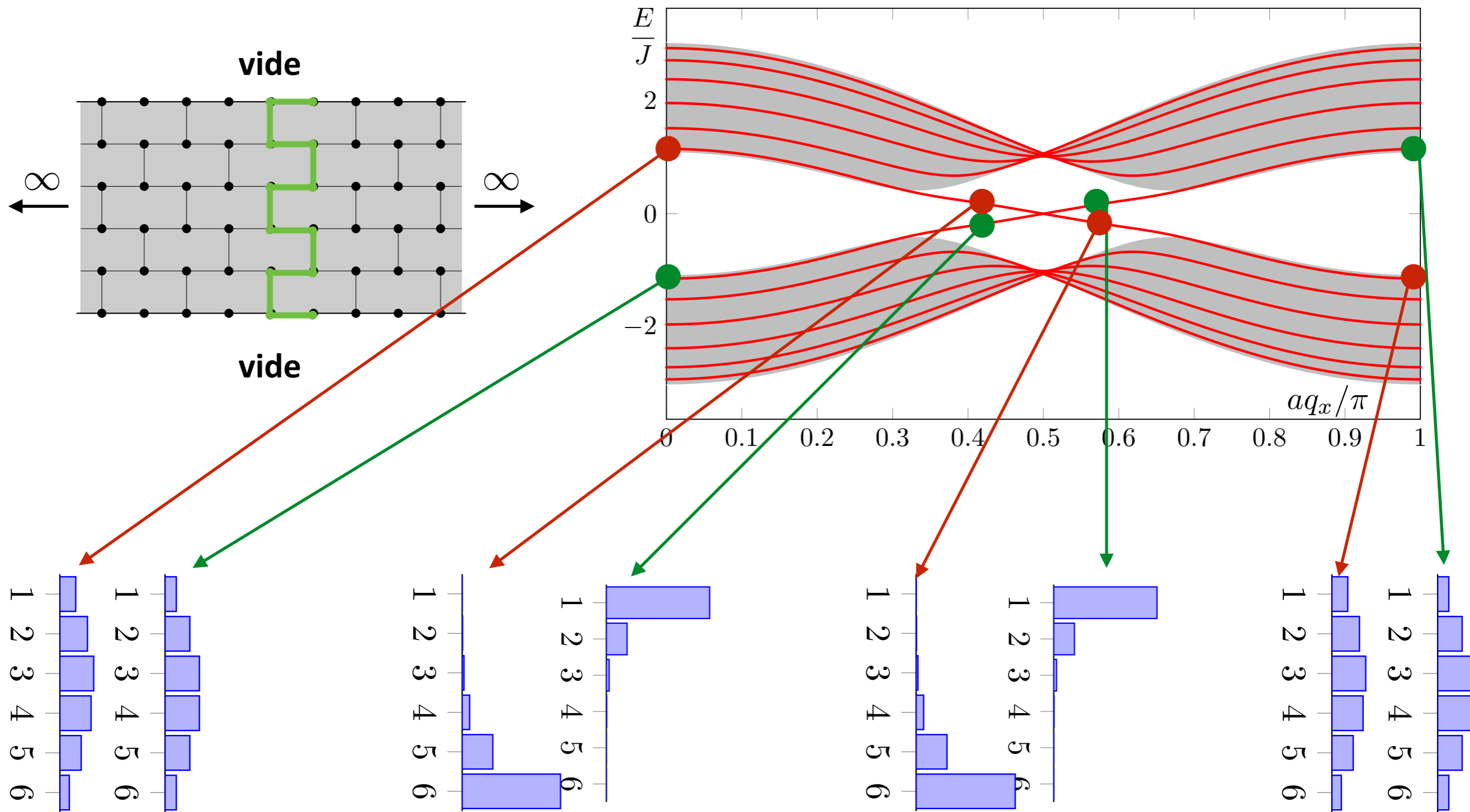
*Equivalent pour l'effet Hall quantique des orbites sautantes*



# Le canal de bord pour un ruban

Ruban infini selon  $x$  avec 6 lignes selon  $y$

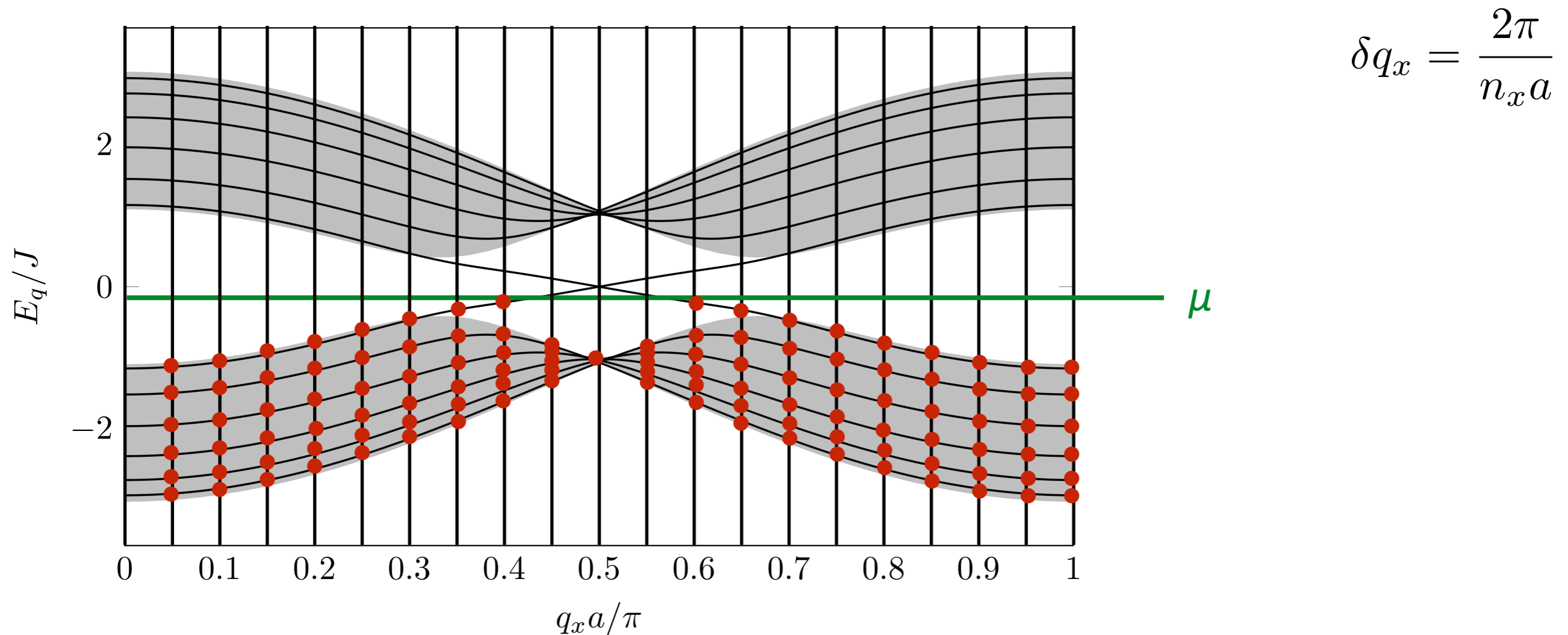
Diagonalisation numérique d'une matrice  $12 \times 12$  pour chaque valeur de  $q_x$



# Réservoir et transport quantifié

Un réservoir impose son potentiel chimique  $\mu$  au ruban (toujours 6 lignes selon  $y$ )

Conditions aux limites périodiques selon  $x$  (ici  $n_x=20$  sites) :  $q_x$  est quantifié



Courants opposés selon l'axe  $x$  sur les bords supérieurs et inférieurs du ruban

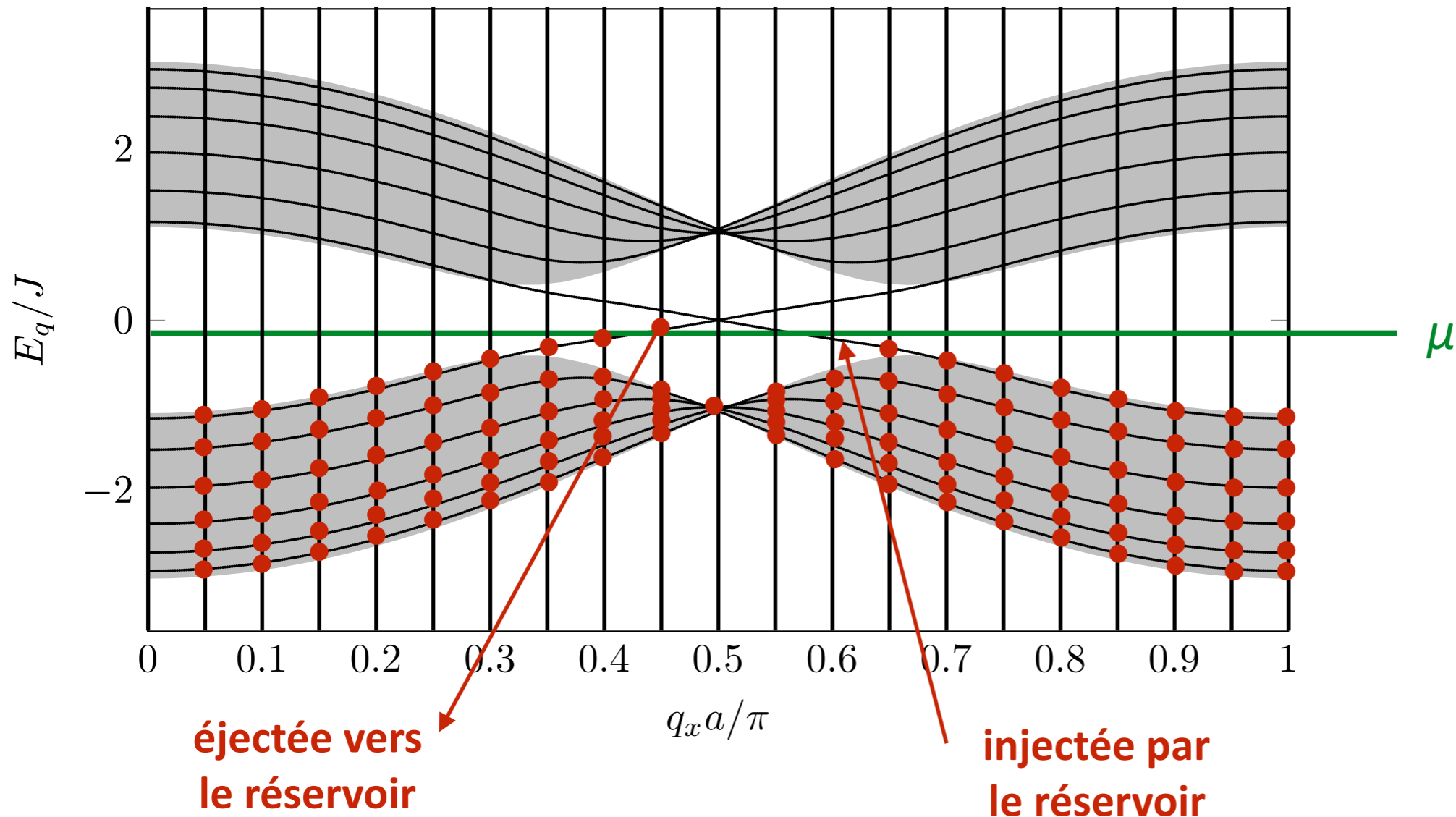
Pas de courant selon  $y$

On applique une force  $F_x$  selon l'axe  $x$  : que se passe-t-il ?

# Réservoir et transport quantifié

Force  $F_x$  : oscillations de Bloch selon  $x$  :  $\hbar\dot{q}_x = F_x$

En un temps  $\delta t = \frac{2\pi}{n_x a} \frac{\hbar}{F_x}$ , les moments  $q_x$  ont augmenté d'un quantum  $\delta q_x = \frac{2\pi}{n_x a}$



Densité de courant :  $J_y = \frac{1/\delta t}{n_x a} = \frac{F_x}{2\pi\hbar} \longrightarrow \sigma_{yx} = \frac{\mathcal{C}}{2\pi\hbar}$  avec  $\mathcal{C} = 1$



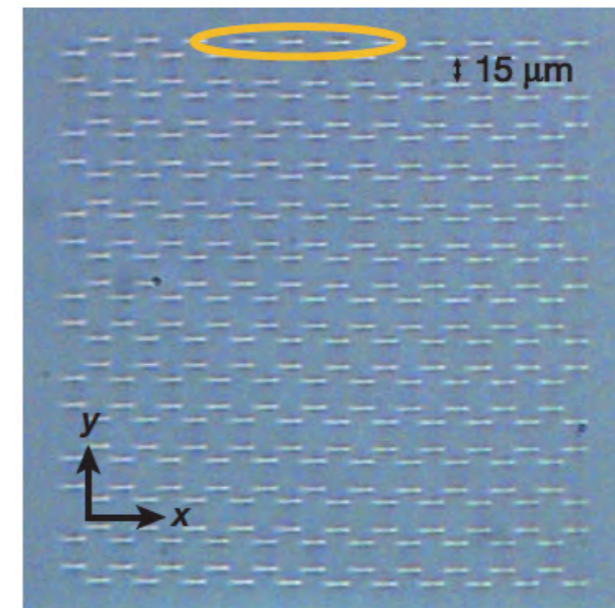
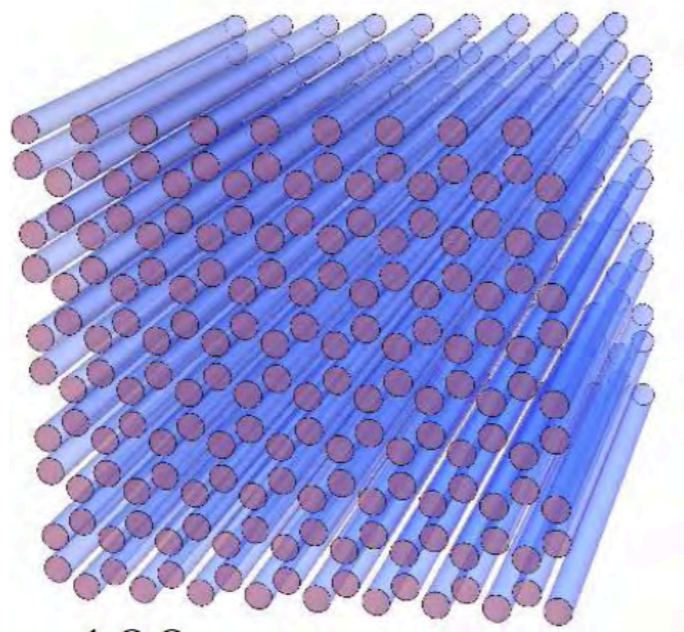
# Un réseau hexagonal photonique

M. Rechtsman et al., Nature 496, 196 (2013) ; Technion & Jena

Guides d'onde gravés par laser dans de la silice (indice 1.45), générés par une légère variation d'indice ( $10^{-3}$ ) : réseau hexagonal dans le plan  $xy$

Couplage entre guides voisins par onde évanescente (distance  $15 \mu\text{m}$ )

Propagation sur une distance de 10 cm selon l'axe  $z$



$$i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = -\frac{1}{2k_0} \left( \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0 \Delta n(\mathbf{r})}{n_0} \mathcal{E}$$

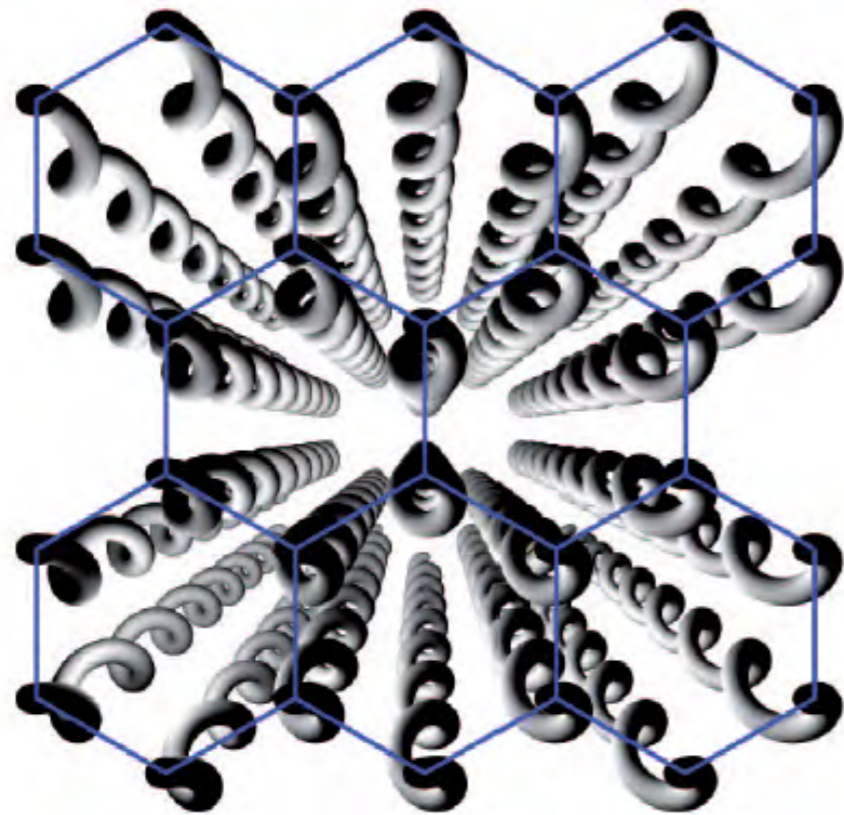
Identique à l'équation de Schrödinger 2D pour une particule massive : graphène

# Ouverture d'un gap topologique

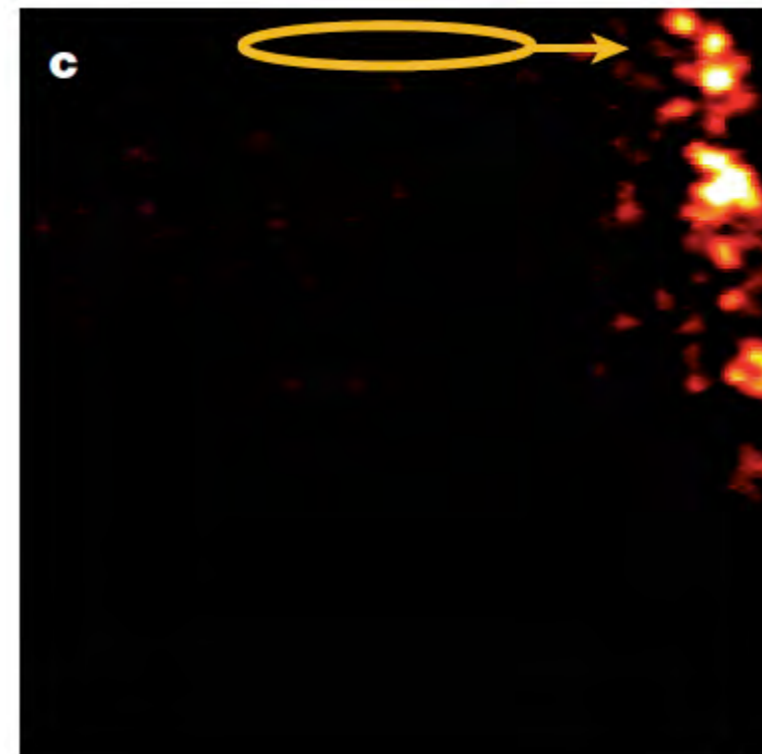
Guides d'onde de forme hélicoïdale : équivalent d'un réseau modulé

Pas de l'hélice : 5mm (20 cycles sur les 10 cm de propagation)

Rayon de l'hélice : 8  $\mu\text{m}$



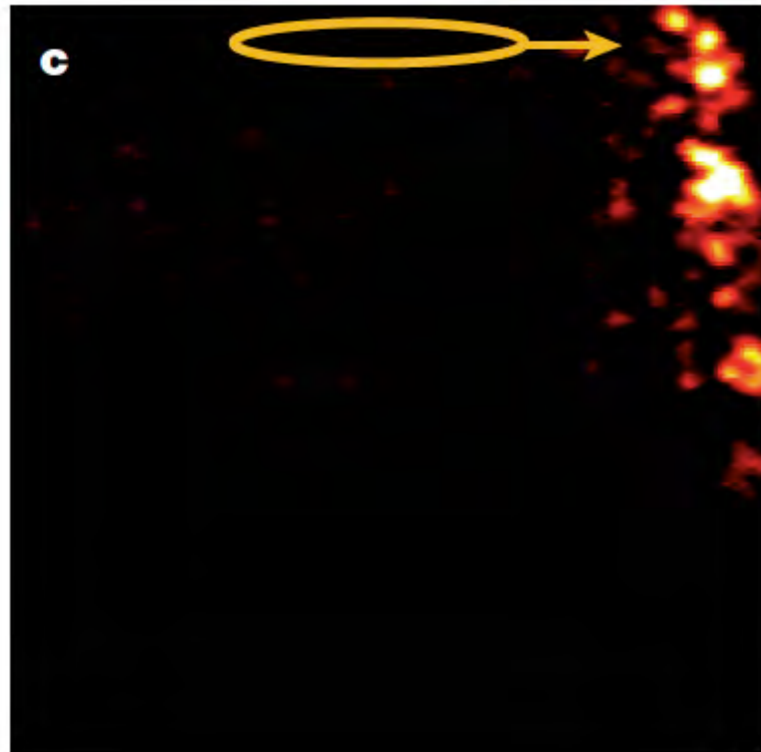
Zone éclairée dans le plan d'entrée des guides d'onde



Répartition de l'intensité dans le plan de sortie

# Etats de bord chiraux

Zone éclairée dans le plan d'entrée des guides d'onde



Répartition de l'intensité dans le plan de sortie

- La lumière n'a pratiquement pas diffusé vers le centre de l'échantillon

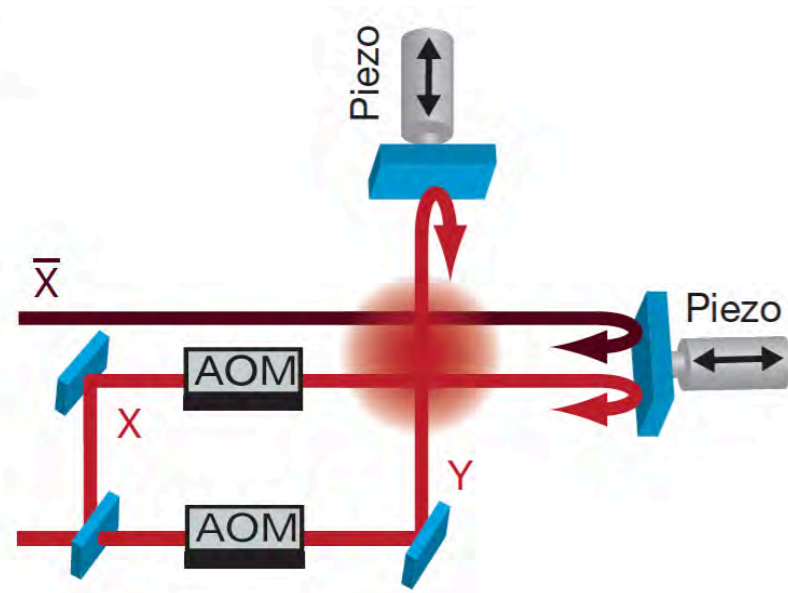
*C'est essentiellement le canal de bord qui est peuplé*

- La lumière a progressé le long du bord de manière chirale, en partant uniquement vers la droite de la zone d'excitation
- Ce canal de bord est robuste : pas de réflexion au niveau du coin supérieur gauche

*L'insensibilité à d'éventuels défauts a également été vérifiée*

# Conclusions

Construction et étude d'un modèle (Haldane ou « mur de briques ») de cellule à deux sites conduisant à des bandes topologiques



Modèle qui peut être directement implémenté avec une modulation temporelle des paramètres de l'hamiltonien, pour des atomes ou de la lumière

Nouveau critère physique pour la caractérisation d'une bande topologique : canaux de bord conduisant à des courants circulant de manière chirale à la frontière de l'échantillon

