

Une brève histoire des atomes froids

Du mécanisme Doppler aux gaz quantiques

Jean Dalibard

Chaire *Atomes et rayonnement*

Année 2014-15



COLLÈGE
DE FRANCE
—1530—

Contrôler la matière par la lumière

Est-il possible d'imposer une température ou un ordre donné à une assemblée d'atomes, de molécules, par des faisceaux lumineux ?

Einstein 1916-17 : bases de l'interaction matière-rayonnement

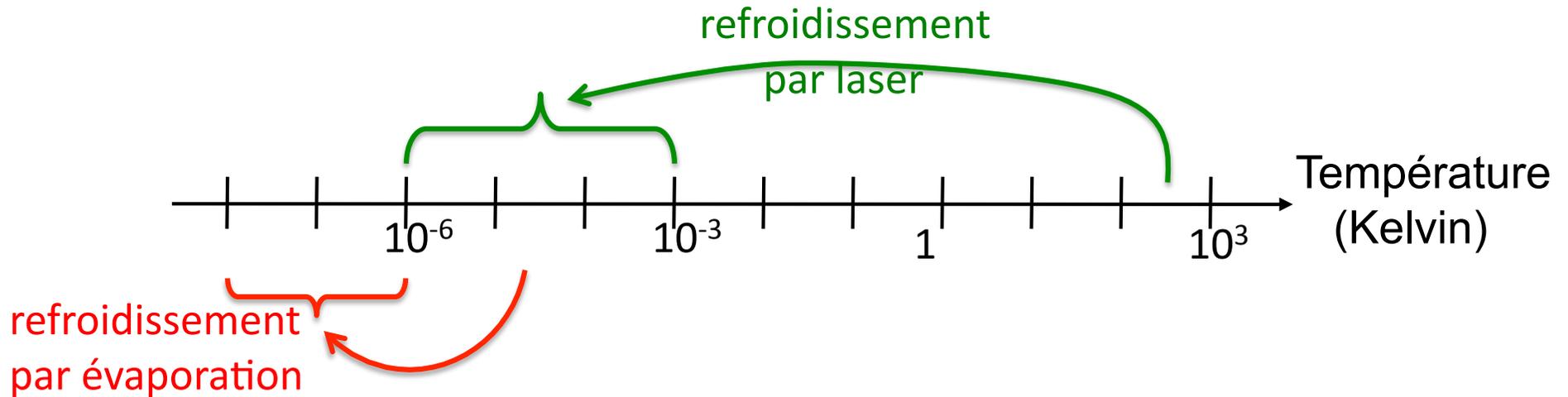
Kastler 1950 : effet lumino-frigorifique

A partir des années 70, sources laser accordables qui ouvrent de nouvelles perspectives

1975 : Hänsch-Schawlow

Wineland-Dehmelt

La situation aujourd'hui



Les atomes froids (neutres ou ionisés) sont omniprésents en métrologie du temps et des fréquences, ainsi que dans les mesures de haute précision

Atteinte du régime quantique dégénéré pour les gaz d'atomes neutres

$$\lambda_T \sim h/M\bar{v} \quad \text{comparable à la distance interatomique}$$

au prix d'une perte d'un facteur 100 à 1000 sur le nombre d'atomes (évaporation)

Les espèces atomiques concernées

CLASSIFICATION PÉRIODIQUE DES ÉLÉMENTS CHIMIQUES

1	IA											18	VIIIA																							
1	1,00794 H <i>Hydrogène</i>											2	4,0026 He <i>Hélium</i>																							
	2											10	20,1797 Ne <i>Neon</i>																							
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	VIIIA																				
	6,941 Li <i>Lithium</i>	9,01218 Be <i>Béryllium</i>											10,811 B <i>Bore</i>	12,0107 C <i>Carbone</i>	14,0067 N <i>Azote</i>	15,9994 O <i>Oxygène</i>	18,9984 F <i>Fluor</i>	20,1797 Ne <i>Neon</i>																		
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36										
	22,9898 Na <i>Sodium</i>	24,305 Mg <i>Magnésium</i>											26,9815 Al <i>Aluminium</i>	28,0855 Si <i>Silicium</i>	30,9738 P <i>Phosphore</i>	32,065 S <i>Soufre</i>	35,453 Cl <i>Chlore</i>	39,948 Ar <i>Argon</i>																		
	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
	39,0983 K <i>Potassium</i>	40,078 Ca <i>Calcium</i>	<i>Scandium</i>	47,867 Ti <i>Titane</i>	50,9415 V <i>Vanadium</i>	52,091 Cr <i>Chrome</i>	54,9380 Mn <i>Manganèse</i>	55,845 Fe <i>Fer</i>	58,9332 Co <i>Cobalt</i>	58,9332 Ni <i>Nickel</i>	63,546 Cu <i>Cuivre</i>	65,38 Zn <i>Zinc</i>	69,723 Ga <i>Gallium</i>	72,63 Ge <i>Germanium</i>	74,9216 As <i>Arsenic</i>	78,96 Se <i>Sélénium</i>	79,904 Br <i>Brome</i>	83,798 Kr <i>Krypton</i>																		
	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	
	85,4678 Rb <i>Rubidium</i>	87,62 Sr <i>Strontium</i>	<i>Yttrium</i>	91,224 Zr <i>Zirconium</i>	92,9064 Nb <i>Niobium</i>	95,96 Mo <i>Molybdène</i>	{ 98 } Tc <i>Technetium</i>	101,07 Ru <i>Ruthénium</i>	102,905 Rh <i>Rhodium</i>	106,42 Pd <i>Palladium</i>	107,868 Ag <i>Argent</i>	112,411 Cd <i>Cadmium</i>	114,818 In <i>Indium</i>	118,71 Sn <i>Étain</i>	121,76 Sb <i>Antimoine</i>	127,6 Te <i>Tellure</i>	126,905 I <i>Iode</i>	131,293 Xe <i>Xénon</i>																		
	55	56	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103		
	132,905 Cs <i>Césium</i>	137,327 Ba <i>Barium</i>	<i>Hafnium</i>	178,49 Hf <i>Hafnium</i>	180,948 Ta <i>Tantale</i>	183,84 W <i>Tungstène</i>	186,207 Re <i>Rhénium</i>	190,23 Os <i>Osmium</i>	192,227 Ir <i>Iridium</i>	195,084 Pt <i>Platine</i>	196,967 Au <i>Or</i>	200,59 Hg <i>Mercure</i>	204,383 Tl <i>Thallium</i>	207,2 Pb <i>Plomb</i>	208,98 Bi <i>Bismuth</i>	{ 209 } Po <i>Polonium</i>	{ 210 } At <i>Astate</i>	{ 222 } Rn <i>Radon</i>																		
	87	88	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134			
	{ 223 } Fr <i>Francium</i>	{ 226 } Ra <i>Radium</i>	<i>Rutherfordium</i>	{ 266 } Rf <i>Rutherfordium</i>	{ 268 } Db <i>Dubnium</i>	{ 269 } Sg <i>Seaborgium</i>	{ 270 } Bh <i>Bohrium</i>	{ 269 } Hs <i>Hassium</i>	{ 278 } Mt <i>Mitnerium</i>	{ 279 } Ds <i>Darmstadtium</i>	{ 281 } Rg <i>Röntgenium</i>	{ 285 } Cn <i>Copernicium</i>	{ 284 } Uut <i>Ununtrium</i>	{ 289 } Fl <i>Flerovium</i>	{ 288 } Uup <i>Ununpentium</i>	{ 294 } Lv <i>Livermorium</i>	{ 294 } Uus <i>Ununseptium</i>	{ 294 } Uuo <i>Ununoctium</i>																		
	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89			
	138,906 La <i>Lanthane</i>	140,116 Ce <i>Cérium</i>	140,908 Pr <i>Praseodyme</i>	144,242 Nd <i>Néodyme</i>	{ 145 } Pm <i>Prométhium</i>	150,36 Sm <i>Samarium</i>	151,964 Eu <i>Europeum</i>	157,25 Gd <i>Gadolinium</i>	158,925 Tb <i>Terbium</i>	175,25 Dy <i>Dysprosium</i>	174,930 Ho <i>Holmium</i>	175,25 Er <i>Ér</i>	175,25 Tm <i>Thulium</i>	175,25 Yb <i>Ytterbium</i>	174,967 Lu <i>Lutécium</i>																					
	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122		
	{ 227 } Ac <i>Actinium</i>	232,038 Th <i>Thorium</i>	231,036 Pa <i>Protactinium</i>	238,029 U <i>Uranium</i>	{ 237 } Np <i>Neptunium</i>	{ 244 } Pu <i>Plutonium</i>	{ 243 } Am <i>Americium</i>	{ 247 } Cm <i>Curium</i>	{ 247 } Bk <i>Berkélium</i>	{ 251 } Cf <i>Californium</i>	{ 252 } Es <i>Einsteinium</i>	{ 257 } Fm <i>Fermium</i>	{ 258 } Md <i>Mendélium</i>	{ 259 } No <i>Nobelium</i>	{ 262 } Lr <i>Lawrencium</i>																					

14 IVA
6 12,0107
C
Carbone

SYMBOLE : C
NOM DE L'ÉLÉMENT : CARBONE
NUMÉRO ATOMIQUE : 6
MASSE ATOMIQUE : 12,0107
GROUPE : 14 (IUPAC) - IVA (CAS)
PÉRIODE : 2

- MASSES ATOMIQUES DES ISOTOPES LES PLUS STABLES ENTRE ACCOLADES
- MASSES ATOMIQUES DONNÉES À 6 CHIFFRES SIGNIFICATIFS

	NON MÉTAUX		MÉTALLOÏDES
	MÉTAUX ALCALINS		HALOGÈNES
	MÉTAUX ALCALINO-TERREUX		GAZ NOBLES
	MÉTAUX DE TRANSITION		LANTHANIDES
	MÉTAUX PAUVRES		ACTINIDES

+ molécules di-atomiques

tableau: Wikipedia

Mécanismes à la base du refroidissement

De nombreuses idées ont été proposées et étudiées expérimentalement. On se concentrera ici sur quelques concepts importants :

- L'effet Doppler, qui permet d'obtenir une réponse de l'atome à l'onde lumineuse qui dépend de la vitesse atomique.
- Le mécanisme Sisyphe, qui oblige l'atome à escalader plus de collines de potentiel qu'il n'en descend.
- L'utilisation d'états noirs, qui consiste à cacher les atomes dans l'obscurité, c'est-à-dire à les accumuler dans des états où ils sont découplés de la lumière.

Qu'entend-on par refroidissement ?

Filtrage ?

Abaissement de température ?

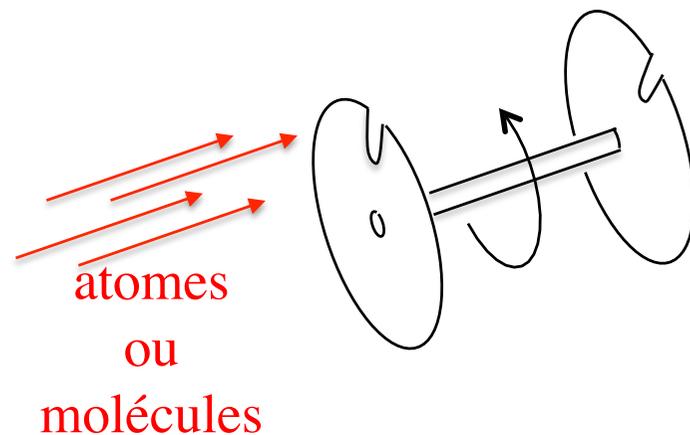
Augmentation de la densité dans l'espace des phases ?

Toutes ces actions peuvent être utiles sur le plan pratique, mais il est essentiel de les distinguer les unes des autres...

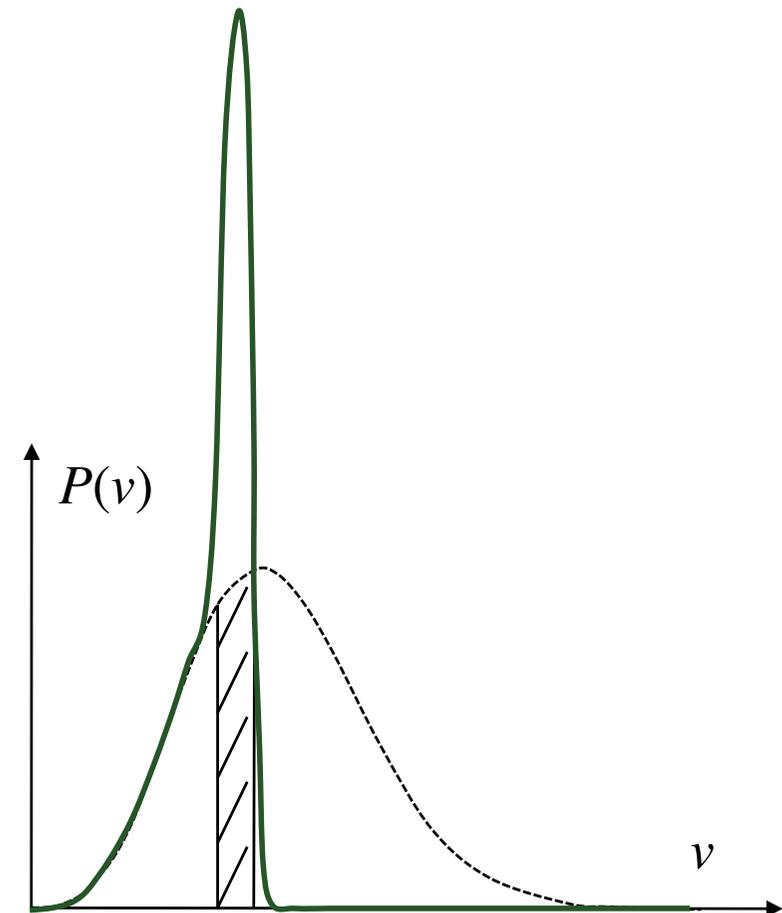
Sélection en vitesse d'un jet atomique

Jet atomique avec une distribution thermique de vitesse

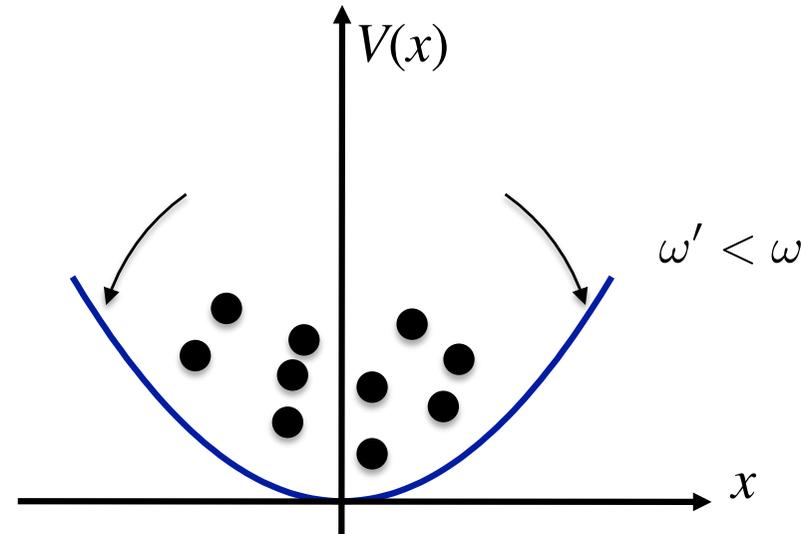
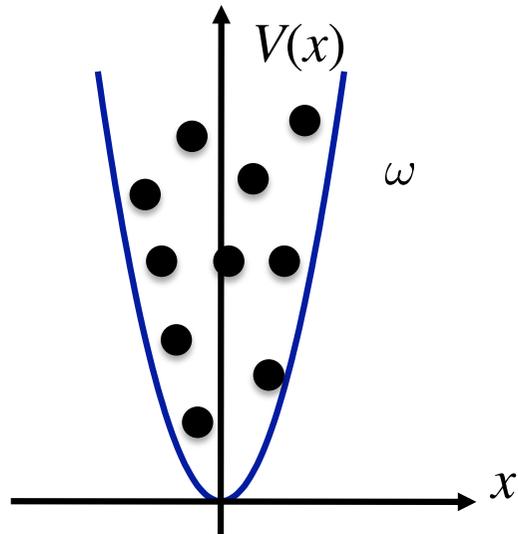
Filtrage d'une classe de vitesse par un système de roues dentées tournantes :



Ce filtrage est très différent du refroidissement que l'on obtient dans un ralentisseur à pression de radiation (pas d'augmentation de la brillance dans le cas du filtrage)



Abaisser la température : ouverture adiabatique d'un piège



Equilibre thermique initial : $\frac{1}{2}M\omega^2 \Delta x^2 = \frac{1}{2}M\Delta v^2 = \frac{1}{2}k_B T$

Adiabaticité : $\frac{T'}{\omega'} = \frac{T}{\omega} \Rightarrow T' = T \frac{\omega'}{\omega} < T$

Distributions finales en position et en vitesse :

$$\begin{cases} \Delta x' = \Delta x \left(\frac{\omega}{\omega'} \right)^{1/2} \\ \Delta v' = \Delta v \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^{1/2} \end{cases}$$

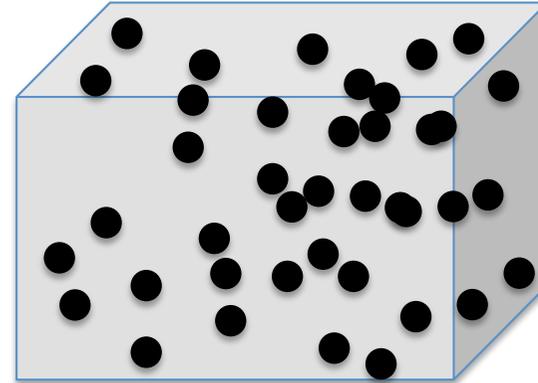
$\Delta x \Delta v$ inchangé dans ce processus : même densité dans l'espace des phases, même occupation des états quantiques individuels

Augmenter la densité dans l'espace des phases ?

(c'est-à-dire diminuer le produit $\Delta x \Delta v$)

On considère un gaz parfait d'atomes ou de molécules décrit par l'opérateur densité à une particule $\hat{\rho}$, de valeurs propres :

$$\pi_1, \pi_2, \dots \quad \sum_j \pi_j = 1$$



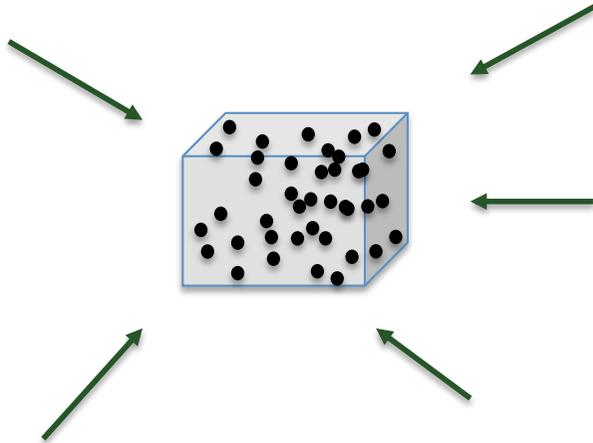
Si on se limite à une évolution hamiltonienne :

$$\hat{\rho}(t_f) = \hat{U}(t_i \rightarrow t_f) \hat{\rho}(t_i) \hat{U}^\dagger(t_i \rightarrow t_f)$$

L'opérateur densité $\hat{\rho}(t_f)$ a alors les mêmes valeurs propres π_1, π_2, \dots que l'opérateur densité initial : pas de changement dans l'occupation des états, ni dans la densité dans l'espace des phases.

Quels moyens d'action pour augmenter la densité dans l'espace des phases?

Evolution hamiltonienne ?



Si on couple le gaz à un autre système quantique (champ électromagnétique):

$$\hat{\rho}(t_f) = \text{Tr}_{\text{champ}} (\hat{\rho}_{\text{total}})$$

Les valeurs propres π_1, π_2, \dots peuvent varier

Gaz parfait ?

Si les particules interagissent entre elles, on peut faire varier les valeurs propres de l'opérateur densité à un corps, même dans une évolution hamiltonienne.

Il est en particulier possible de produire un condensat de Bose-Einstein en modifiant uniquement le potentiel confinant le gaz.

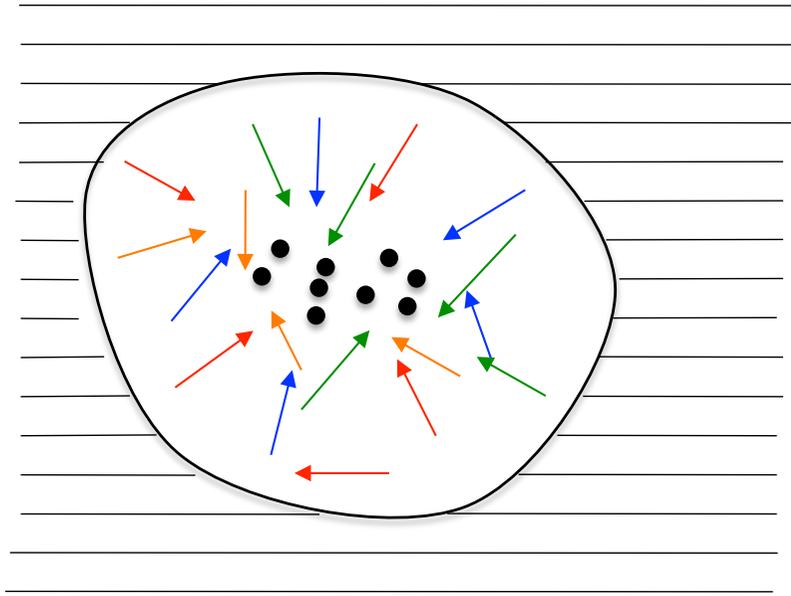
Chapitre 1

Atomes et lumière en équilibre thermodynamique



COLLÈGE
DE FRANCE
—1530—

Le problème d'Einstein 1916-17



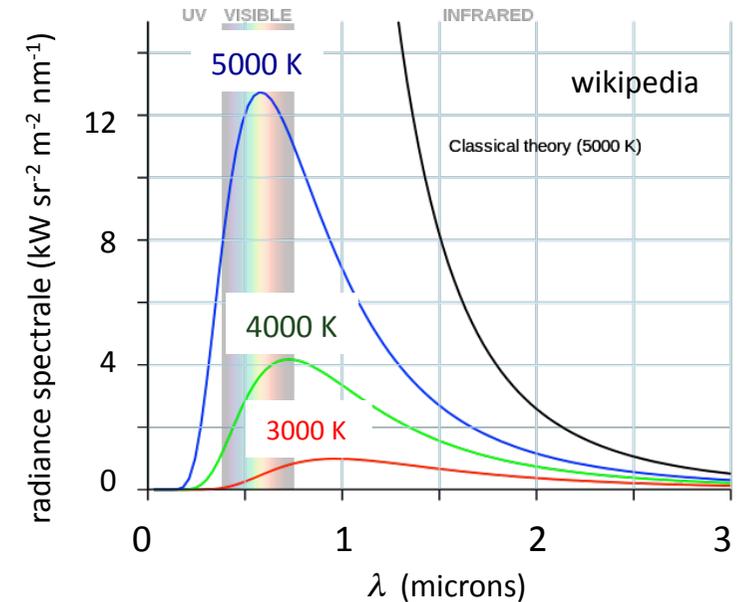
Corps noir à température T

$$\rho(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

formule de Planck

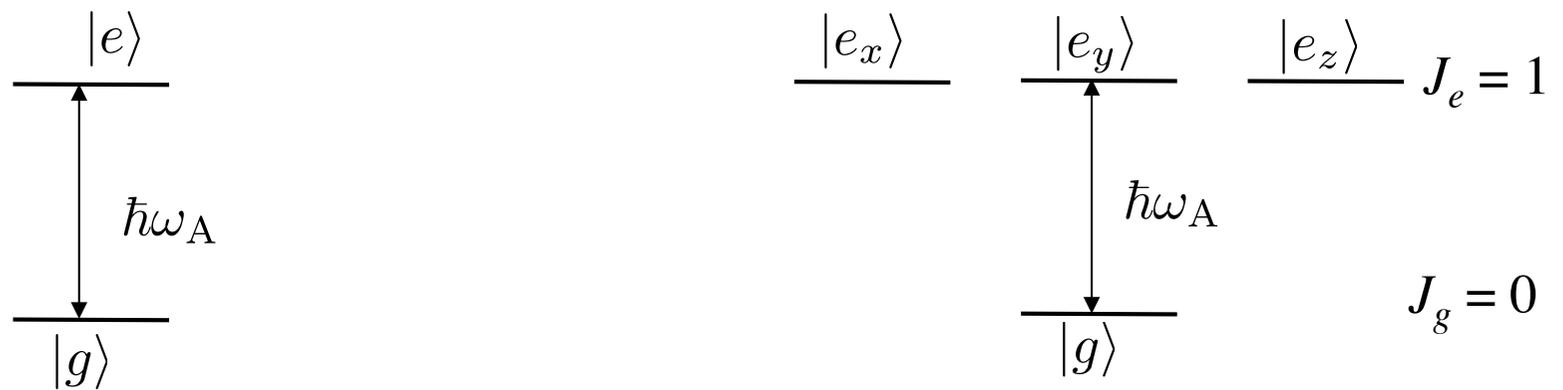
Quelles sont les hypothèses à faire concernant l'interaction matière-rayonnement pour assurer que les atomes atteignent l'état d'équilibre thermodynamique ?

par exemple : $\frac{1}{2} M v_0^2 = \frac{1}{2} k_B T$

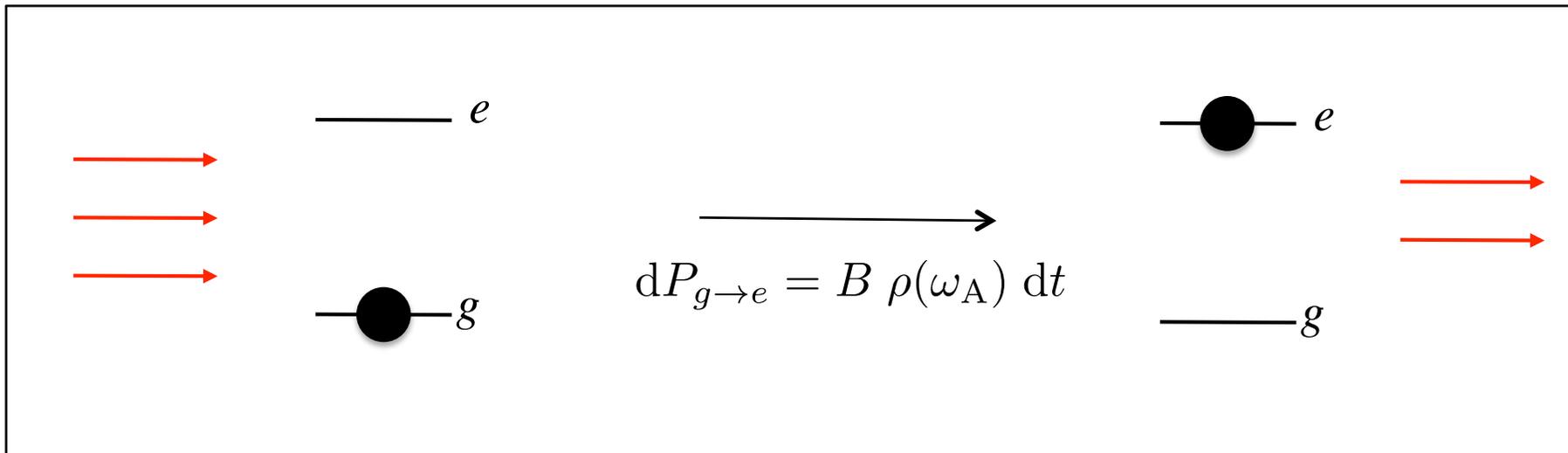


1.

Einstein 1916 : absorption et émission

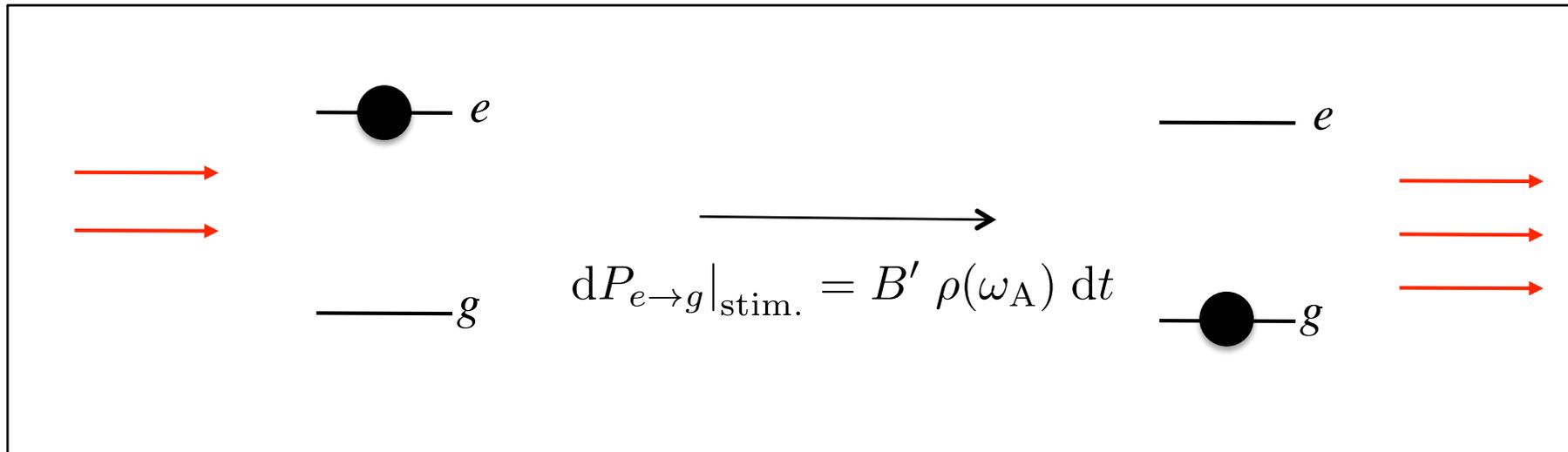
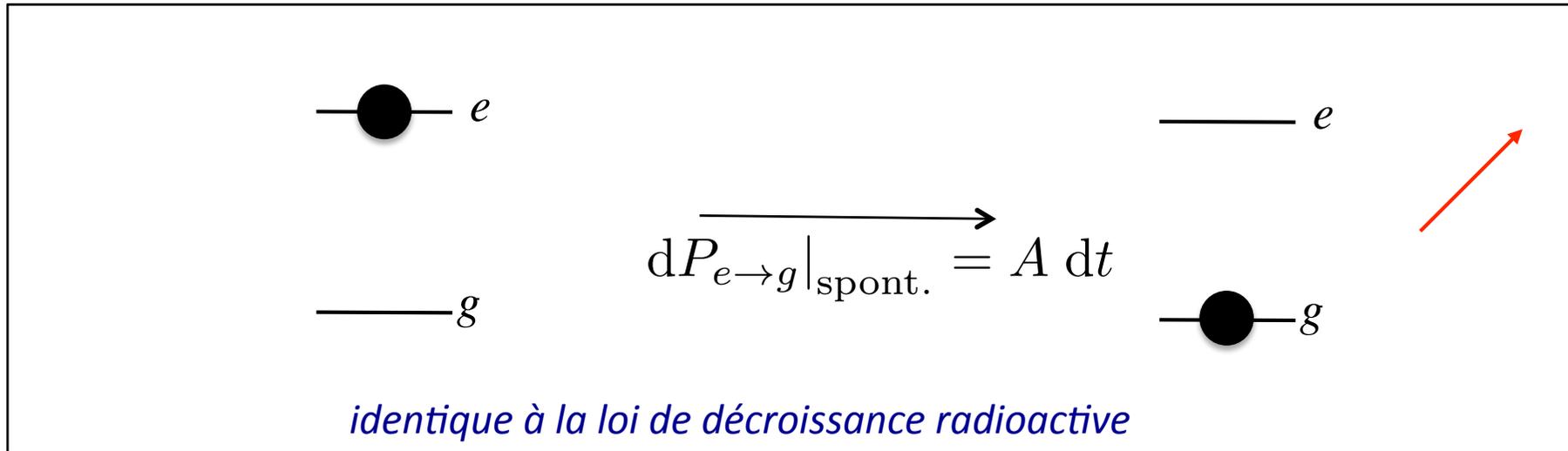


Processus élémentaire 1 : absorption

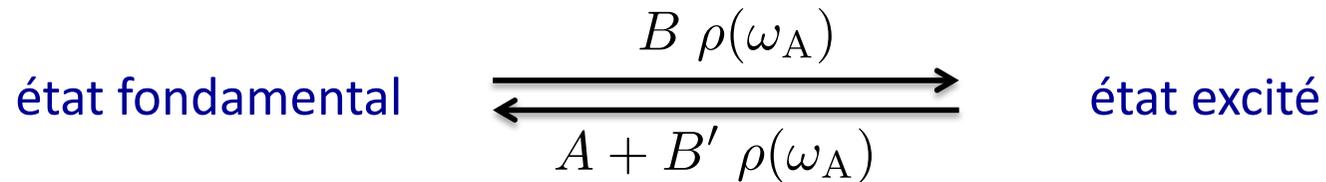


Einstein définit une probabilité par unité de temps de passer de l'état fondamental à l'état excité, cette probabilité étant proportionnelle à l'intensité lumineuse à la fréquence de résonance de l'atome.

Processus élémentaires 2 : émission spontanée et stimulée



Equilibre des variables internes de l'atome (1916)



Egalité des flux si $B \rho(\omega_A) P_g = [A + B' \rho(\omega_A)] P_e$

Par ailleurs, l'équilibre thermodynamique des variables internes est atteint si

$$\frac{P_e}{P_g} = \exp(-\hbar\omega_A/k_B T) \quad \Rightarrow \quad \frac{B \rho(\omega_A)}{A + B' \rho(\omega_A)} = \exp(-\hbar\omega_A/k_B T)$$

Cette loi est satisfaite quelle que soit la température si et seulement si:

$$B' = B \quad \frac{A}{B'} = \frac{\hbar\omega_A^3}{\pi^2 c^3}$$

devient $d_g B = d_e B'$ si les niveaux g et e ont pour dégénérescence d_g et d_e

Conclusion (provisoire) de l'article de 1916

« Les coefficients A , B , B' pourraient être calculés directement si nous disposions d'une version modifiée de l'électrodynamique et de la mécanique qui soit compatible avec l'hypothèse quantique »

« Bien que les trois hypothèses concernant l'émission et l'absorption du rayonnement conduisent à la formule de Planck, je suis bien sûr prêt à admettre que ceci ne les élève pas au rang de résultats confirmés. Mais la simplicité des hypothèses, la généralité avec laquelle l'analyse peut être menée sans effort [...] semblent rendre très probable que ce seront les bases d'une future représentation théorique. »

2.

L'approche quantique

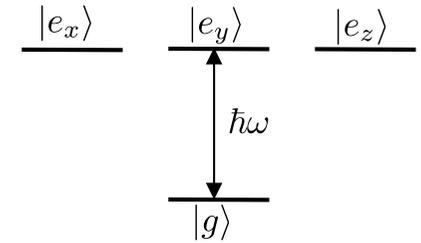
$$\rho(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \longrightarrow \bar{n}(\omega, T) = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

densité spectrale
d'énergie
électromagnétique

nombre de photons
par mode

Un mode est caractérisé par son
vecteur d'onde \mathbf{k} et sa polarisation ϵ

Règle d'or de Fermi



Considérons d'abord l'émission d'un photon:

état initial $|\Psi_i\rangle = |e_j, \{n_{\mathbf{k},\epsilon}\}\rangle$

$$n'_{\mathbf{k}_0, \epsilon_0} = n_{\mathbf{k}_0, \epsilon_0} + 1$$

état final $|\Psi_f\rangle = |g, \{n'_{\mathbf{k},\epsilon}\}\rangle$

$$n'_{\mathbf{k},\epsilon} = n_{\mathbf{k},\epsilon} \quad \text{si } (\mathbf{k}, \epsilon) \neq (\mathbf{k}_0, \epsilon_0)$$

Le mode $(\mathbf{k}_0, \epsilon_0)$ gagne un photon

Probabilité par unité de temps pour que l'atome retombe de e_j vers g :

$$\mathcal{P}_{\text{émission}} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_f \left| \langle \Psi_f | \hat{V} | \Psi_i \rangle \right|^2 \delta(E_f - E_i)$$

$$= \dots$$

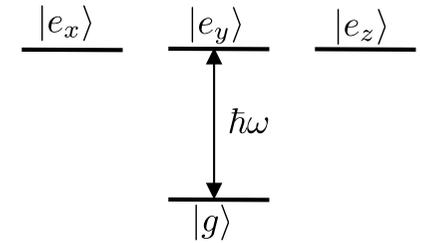
$$= \Gamma + \Gamma \bar{n}(\omega_A)$$

$$\Gamma = \frac{d^2 \omega_A^3}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3}$$

à comparer à : $A + B' \rho(\omega_A)$

$$\Gamma = A = B' \frac{\hbar \omega_A^3}{\pi^2 c^3}$$

Règle d'or de Fermi (suite)



Absorption d'un photon: $\left\{ \begin{array}{l} \text{état initial } |\Psi_i\rangle = |g, \{n_{\mathbf{k},\epsilon}\}\rangle \\ \text{état final } |\Psi_f\rangle = |e_j, \{n'_{\mathbf{k},\epsilon}\}\rangle \end{array} \right.$

Probabilité par unité de temps que l'atome monte de g vers un des e_j :

$$\mathcal{P}_{\text{absorption}} = 3 \bar{n}(\omega_A) \Gamma \quad \Rightarrow \quad B = 3B'$$

conforme à $d_g B = d_e B'$ avec $d_g = 1$, $d_e = 3$

L'approche quantique valide bien tous les mécanismes proposés par Einstein et fournit les valeurs explicites des coefficients A , B , B' (pas seulement leurs rapports)

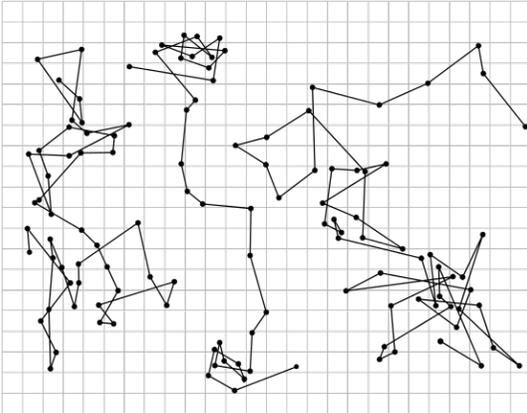
$$P_g = \frac{\bar{n} + 1}{4\bar{n} + 1}, \quad P_{e_j} = \frac{\bar{n}}{4\bar{n} + 1}$$

Einstein, 1917 : peut-on étendre cette idée de thermalisation aux variables externes des atomes (vitesse de leur centre de masse) ?

3.

Le mouvement brownien

Mouvement brownien et thermalisation



Mouvement d'une « grosse » particule dans un bain de petites molécules

Equation de Langevin :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \underbrace{-\alpha\mathbf{p}} + \underbrace{\mathbf{F}(t)}$$

Force de friction (déterministe)
qui peut être calculée par exemple
à partir de la loi de Stokes

Force de Langevin (aléatoire)
qui représente les fluctuations
dus aux chocs des petites molécules

Equation différentielle stochastique : à quelle condition y a-t-il thermalisation ?

$$\mathcal{P}_{\text{stat.}}(\mathbf{p}) \propto e^{-p^2/2p_0^2}$$

$$\frac{p_0^2}{2M} = \frac{1}{2}k_B T$$

Caractérisation de la force de Langevin

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\alpha\mathbf{p} + \mathbf{F}(t)$$

On impose les deux premiers moments (moyennes prises sur différentes réalisations du désordre associé aux positions et vitesses des molécules du fluide) :

$$\langle \mathbf{F}(t) \rangle = 0$$

$$\langle F_i(t) F_j(t') \rangle = 2D_p \delta_{i,j} \delta(t - t'), \quad i, j = x, y, z$$

D_p : coefficient de diffusion en impulsion

La valeur de la force à l'instant t est supposée complètement décorrélée de la valeur qu'elle prend à n'importe quel autre instant (approximation de mémoire courte).

En réalité, temps de corrélation non nul \approx temps de collision d'une molécule

Intégration de l'équation de Langevin : $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0) e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-t')} \mathbf{F}(t') dt'$

ce qui donne pour l'impulsion moyenne : $\langle \mathbf{p}(t) \rangle = \langle \mathbf{p}(0) \rangle e^{-\alpha t}$

Amortissement en un temps caractéristique α^{-1}

Evolution de l'énergie cinétique moyenne

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\alpha\mathbf{p} + \mathbf{F}(t) \qquad \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0) e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-t')} \mathbf{F}(t') dt'$$

Evolution du carré d'une composante de l'impulsion :

$$\begin{aligned} \frac{d\langle p_j^2(t) \rangle}{dt} &= 2\langle p_j(t) \frac{dp_j}{dt} \rangle \\ &= -2\alpha\langle p_j^2(t) \rangle + 2\langle p_j(t) F_j(t) \rangle. \end{aligned}$$

Estimation de la corrélation entre force de Langevin et impulsion :

$$\begin{aligned} \langle p_j(t) F_j(t) \rangle &= \langle p_j(0) F_j(t) \rangle e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-t')} \langle F_j(t') F_j(t) \rangle dt' \\ &= 0 + 2D_p \int_0^t e^{-\alpha\tau} \delta(\tau) d\tau \\ &= D_p \end{aligned}$$

d'où l'équation d'évolution cherchée : $\frac{d\langle p_j^2(t) \rangle}{dt} = -2\alpha\langle p_j^2(t) \rangle + 2D_p$

Energie cinétique stationnaire et thermalisation

L'équation d'évolution $\frac{d\langle p_j^2(t) \rangle}{dt} = -2\alpha\langle p_j^2(t) \rangle + 2D_p$ a pour régime stationnaire

$\langle p_j^2 \rangle_{\text{stat.}} = \frac{D_p}{\alpha}$, c'est-à-dire une température effective telle que :

$$\frac{\langle p_j^2 \rangle}{2M} = \frac{1}{2}k_B T \quad \Rightarrow \quad \frac{D_p}{M\alpha} = k_B T$$

Deux situations sont possibles :

- On connaît le coefficient de friction α (par exemple via la loi de Stokes) et on en déduit D_p pour que l'équilibre thermodynamique soit vérifié.
- On dispose d'une théorie microscopique de l'interaction « particule brownienne – fluide » et on calcule séparément α et D_p . On peut alors vérifier *a posteriori* la cohérence du modèle du point de vue de la thermodynamique.

Approche par équation de Fokker-Planck

On cherche à calculer l'évolution de la distribution de probabilité $\mathcal{P}(\mathbf{p}, t)$

Plus ambitieux que l'approche « équation de Langevin » qui fournit les premiers moments

Hypothèse essentielle (implicite dans l'éq. de Langevin) : sauts d'amplitude faible

L'impulsion de la particule brownienne saute de p à $p+q$, avec $q \ll p_0 = \sqrt{Mk_B T}$

On peut alors montrer que :

$$\frac{\partial \mathcal{P}(p, t)}{\partial t} = \underbrace{\alpha \frac{\partial (p \mathcal{P}(p, t))}{\partial p}}_{\text{Force de friction}} + \underbrace{D_p \frac{\partial^2 \mathcal{P}(p, t)}{\partial p^2}}_{\text{Diffusion en impulsion qui représente les fluctuations dues aux chocs}}$$

Force de friction

Diffusion en impulsion qui représente les fluctuations dues aux chocs

Etat stationnaire par l'approche Fokker-Planck

L'équation $\frac{\partial \mathcal{P}(p, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial (p \mathcal{P}(p, t))}{\partial p} + D_p \frac{\partial^2 \mathcal{P}(p, t)}{\partial p^2}$ admet pour état stationnaire:

$$\mathcal{P}_{\text{stat.}}(p) = \frac{1}{p_0 \sqrt{2\pi}} e^{-p^2/2p_0^2}, \quad \text{avec} \quad p_0^2 = \frac{D_p}{\alpha}$$

On retrouve bien l'équilibre thermique (distribution de Maxwell Boltzmann) avec la « bonne » température pourvu que $k_B T = D_p / (M\alpha)$

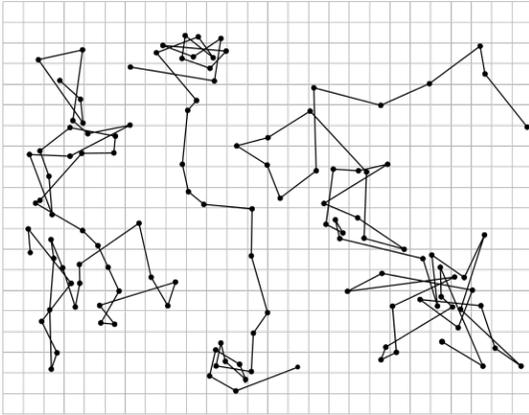
Remarque sur la structure mathématique du coefficient de diffusion en impulsion

L'impulsion effectue une marche au hasard de pas p_0 dont la direction change tous les α^{-1}

$$D_p = p_0^2 \alpha$$

= (pas de la marche au hasard)² * taux de renouvellement

Diffusion dans l'espace des positions



Etude aux temps longs : $t - t_i \gg \alpha^{-1}$

$$\frac{d\Delta x^2}{dt} = 2D_x \quad \text{avec} \quad D_x = \frac{D_p}{M^2 \alpha^2}$$

Mouvement purement diffusif dont le coefficient de diffusion peut s'écrire

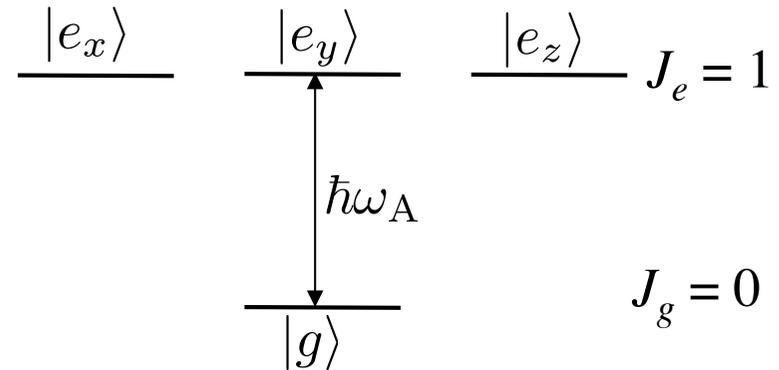
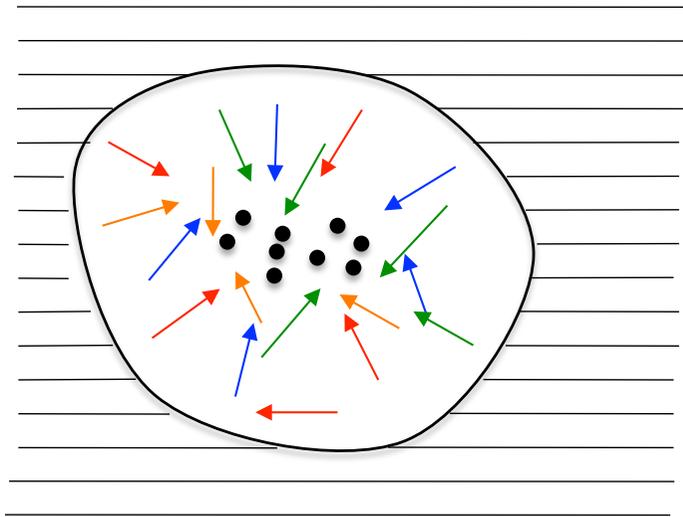
$$D_x = \left(\frac{v_0}{\alpha} \right)^2 \alpha$$

Marche au hasard dans l'espace des positions avec des pas de longueur $v_0 \alpha^{-1}$ et un taux de rafraichissement α

4.

Einstein 1917 : thermalisation du gaz

Thermalisation du mouvement des atomes



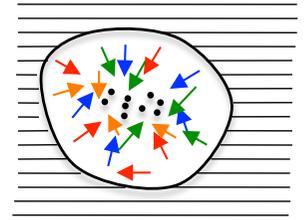
Approche de type *mouvement brownien* avec

- particule brownienne = atome
- bain de molécules du fluide = photons du rayonnement du corps noir

Calculs séparés du coefficient de diffusion en impulsion et du coefficient de friction

A-t-on $\frac{D_p}{M\alpha} = k_B T$ où T est la température du corps noir ?

Le coefficient de diffusion en impulsion



On considère un atome de vitesse initiale nulle

$$\langle p(t) \rangle = 0 \text{ à tout instant}$$

Comment augmente $\langle p^2(t) \rangle$?

Chaque processus d'absorption ou d'émission crée un choc dans une direction aléatoire d'amplitude $\hbar k = \hbar \omega_A / c$. En un temps Δt , ΔN chocs se produisent :

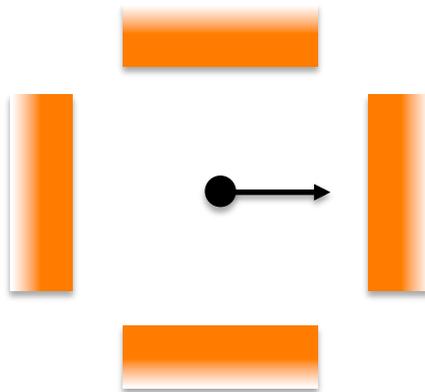
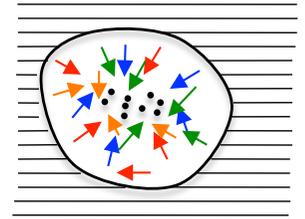
$$\langle p_j^2(\Delta t) \rangle = \frac{1}{3} \hbar^2 k^2 \Delta N \quad \Delta N = R \Delta t$$

Le taux R se calcule à partir des lois trouvées précédemment:

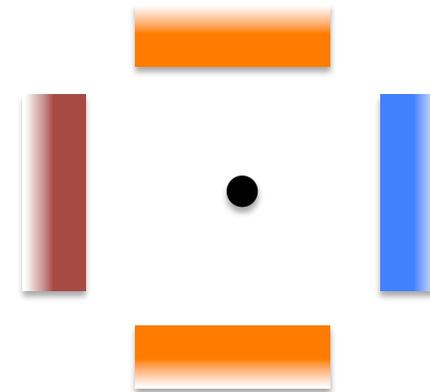
$$R = 3\bar{n} \Gamma P_g + \sum_j (\bar{n} + 1) \Gamma P_{e_j} \quad \longrightarrow \quad R = 6\Gamma \frac{\bar{n}(\bar{n} + 1)}{4\bar{n} + 1}$$

$$D_p = \frac{1}{2} \frac{\langle p_j^2(\Delta t) \rangle}{\Delta t}, \quad \text{ou encore} \quad D_p = \hbar^2 k^2 \Gamma \frac{\bar{n}(\bar{n} + 1)}{4\bar{n} + 1}$$

L'origine de la friction



Référentiel du corps noir



Référentiel de l'atome

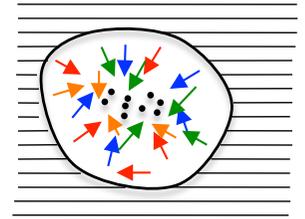
A cause de l'effet Doppler, l'atome « sonde » le rayonnement du corps aux fréquences $\omega_A(1 \pm v/c)$, selon qu'on considère les modes allant dans le même sens que lui ou en sens opposé.

Or on a toujours : $\bar{n}[\omega_A(1 - v/c)] > \bar{n}[\omega_A(1 + v/c)]$

A température fixée, la loi de Planck est une fonction décroissante quand on s'intéresse au nombre de photons par mode.

L'atome « voit » plus de photons résonants venir à sa rencontre que de photons allant dans le même sens que lui ...

Le coefficient de friction



Règle d'or de Fermi : impulsion gagnée dans un processus d'absorption

$$\Delta p_z = \Delta t \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_j \sum_{\mathbf{k}_0, \epsilon_0} \hbar k_z \left| \langle e_j, \{n'_{\mathbf{k}, \epsilon}\} | \hat{V} | g, \{n_{\mathbf{k}, \epsilon}\} \rangle \right|^2 \delta(\omega_0 - \omega_A)$$

La distribution de Dirac $\delta(\omega_0 - \omega_A)$ sélectionne les modes de fréquence ω_A dans le référentiel de l'atome, donc de fréquence $\omega_A + k_z v_z$ dans le ref. du laboratoire.

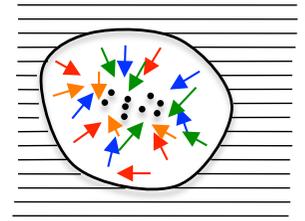
Vitesse de l'atome $\ll c$ (non relativiste) : $k_z v_z \sim \frac{\omega_A v}{c} \ll \omega_A$

$$\bar{n}(\omega_A + k_z v_z) \approx \bar{n}(\omega_A) + k_z v_z \left. \frac{\partial \bar{n}}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_A}$$

En prenant en compte les processus d'absorption et d'émission, on arrive à :

$$\mathbf{F} = -\alpha \mathbf{p} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\hbar k^2}{M} \frac{\Gamma}{4\bar{n} + 1} \left| \frac{\partial \bar{n}}{\partial \omega} \right|$$

Equilibre entre friction et diffusion



Chauffage décrit par le coefficient de diffusion : $D_p = \hbar^2 k^2 \Gamma \frac{\bar{n}(\bar{n} + 1)}{4\bar{n} + 1}$

Refroidissement décrit par le coefficient de friction : $\alpha = \frac{\hbar k^2}{M} \frac{\Gamma \left| \frac{\partial \bar{n}}{\partial \omega} \right|}{4\bar{n} + 1}$

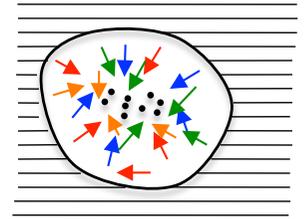
Etat d'équilibre : $\mathcal{P}_{\text{stat.}}(p) = \frac{1}{p_0 \sqrt{2\pi}} e^{-p^2/2p_0^2}$, avec $p_0^2 = \frac{D_p}{\alpha}$

c'est-à-dire : $k_B T_{\text{eff}} = \frac{D_p}{M\alpha} = \hbar \frac{\bar{n}(\bar{n} + 1)}{\left| \frac{\partial \bar{n}}{\partial \omega} \right|}$

Retrouve-t-on la température du corps noir ?

Si on utilise $\bar{n}(\omega, T) = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$, oui : $T_{\text{eff}} = T$

Conclusion d'Einstein (1917)

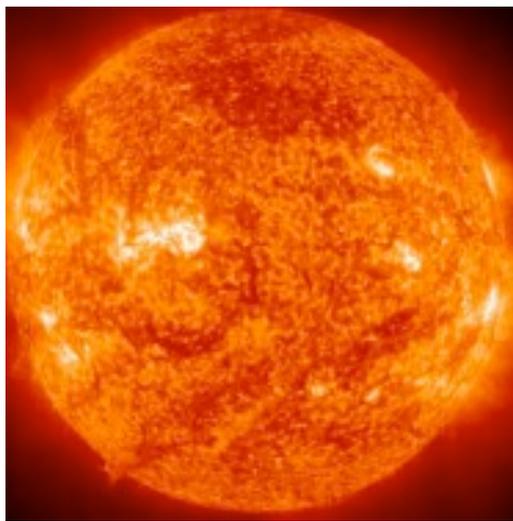


« Le résultat le plus important, à mon sens, est celui qui porte sur les impulsions transférées à la molécule du fait de l'émission et de l'immersion dans le rayonnement. Si l'une de nos hypothèses relatives aux impulsions était modifiée, l'équation $k_B T = D_p / M \alpha$ ne serait plus vérifiée. »

« La faiblesse de la présente théorie réside d'une part dans ce qu'elle ne nous rapproche guère d'une unification avec la théorie ondulatoire, d'autre part en ce que les instants et les directions des processus élémentaires y sont livrés au hasard; malgré tout, j'ai pleinement confiance dans la sûreté de la démarche ici suivie. »

« Presque toutes les théories du rayonnement thermique reposent sur la considération de l'interaction entre le rayonnement et les molécules. Cependant, en général, on se contente de considérer l'échange d'énergie, sans prendre en compte l'échange d'impulsion. On s'y croit volontiers autorisé par le fait que les impulsions que transfère le rayonnement sont petites [...] Mais, dans les arguments théoriques, il faut accorder à ces faibles effets la même importance qu'aux effets plus visibles liés au transfert d'énergie. »

Ordres de grandeur



Atome de sodium (589 nm) dans le rayonnement de type « corps noir » émis par le soleil (6000 K)

$$v_0 = \sqrt{k_B T / M} \approx 1500 \text{ m/s}$$

Changement de vitesse dans un processus d'absorption ou d'émission :

$$v_r = \hbar k / M \approx 3 \text{ cm/s} \quad \text{vitesse de recul}$$

L'hypothèse des petits pas est bien vérifiée

Nombre moyen de photons/mode à la fréquence ω_A : $\bar{n} = 0.017$

Temps de thermalisation : $\alpha^{-1} \approx 40$ minutes

Libre parcours moyen : $v_0 / \alpha \approx 3600$ km

Non pertinent en pratique...

Suite du cours : ce que les lasers vont apporter

$$D_p = \hbar^2 k^2 \Gamma \frac{\bar{n}(\bar{n} + 1)}{4\bar{n} + 1} \qquad \alpha = \frac{\hbar k^2}{M} \frac{\Gamma}{4\bar{n} + 1} \left| \frac{\partial \bar{n}}{\partial \omega} \right|$$

Plaçons-nous dans le cas d'une excitation faible (intensité non saturante): $\bar{n} \ll 1$

$$D_p \approx \hbar^2 k^2 \Gamma \bar{n} \qquad \alpha \approx \frac{\hbar k^2}{M} \Gamma \left| \frac{\partial \bar{n}}{\partial \omega} \right|$$

va rester tel quel

va être énormément augmenté
avec une source laser !

Un laser monochromatique revient à prendre : $\Gamma \left| \frac{\partial \bar{n}}{\partial \omega} \right| \approx \bar{n}$

Température effective : $k_B T = \frac{D_p}{M \alpha} \approx \hbar \Gamma$ en dessous du millikelvin...