

Chapitre 5

Les résonances de diffusion

Sommaire

1	Exemples de résonances de diffusion	2
1-1	Résonance à énergie nulle	2
1-2	Résonance de forme	3
1-3	Résonance de Fano–Feshbach	4
1-4	Résonance induite par le confinement	6
2	La limite $a = \pm\infty$ est-elle singulière?	7
2-1	Centre de masse et variable relative	7
2-2	Le cas uni-dimensionnel	7
2-3	Le cas tri-dimensionnel	9
2-4	Étude expérimentale	10
3	Un outil commode : les potentiels séparables	12
3-1	Potentiel local vs. potentiel séparable	12
3-2	État lié d’un potentiel séparable	13
3-3	États de diffusion pour un potentiel séparable	13
3-4	Un exemple de potentiel séparable	14
4	Un modèle simple de résonance de Fano–Feshbach	15
4-1	Position du problème	15
4-2	Recherche des états de diffusion	16
4-3	Longueur de diffusion	17

Nous abordons dans les deux cours qui suivent les résonances de diffusion et plus précisément les résonances de Fano–Feshbach. Il s’agit d’un outil essentiel de la physique des gaz quantiques qui a ouvert la voie au régime des interactions fortes, que l’on atteint quand la longueur de diffusion devient de l’ordre de la distance entre particules dans le gaz. Elles permettent également de préparer des gaz en interaction quasi-nulle ($a = 0$), réalisant ainsi le modèle du gaz parfait. Elles sont par ailleurs une source de données très précises sur la structure des dimères et donc sur les potentiels inter-atomiques. Elles ont enfin permis le développement d’une recherche très originale sur les systèmes à petit nombre de corps (*few-body problem*), avec notamment l’étude d’états d’Efimov.

Nous commencerons par situer les résonances de Fano–Feshbach dans le cadre général des résonances de diffusion qui, pour une collision en onde s , conduisent à une divergence de la longueur de diffusion. Nous montrerons l’originalité des résonances de Fano–Feshbach qui mettent en jeu deux canaux de collision, l’un ouvert, l’autre fermé, dont on peut contrôler les énergies relatives, et ajuster ainsi la force de la résonance. Nous nous interrogerons également sur la signification d’une longueur de diffusion infinie et nous étudierons pour cela un modèle très instructif, proposé par BUSCH, ENGLERT et al. (1998), qui donne de manière exacte les états propres d’un système à deux particules confinées dans un piège harmonique. Nous développerons ensuite un modèle simple de résonance à deux canaux, pour lequel un traitement analytique peut être mené. Ce modèle fera appel à la notion de potentiel séparable que nous préciserons préalablement dans le cas mono-canal. Dans le chapitre suivant, nous approfondirons ce mo-

dèle pour dégager la notion importante de largeur de résonance et clarifier la contribution du canal fermé. Nous passerons à la description de traitements plus quantitatifs de ces résonances, pour terminer par la présentation de quelques expériences récentes. Nous examinerons les principaux outils disponibles au laboratoire pour caractériser ces résonances et nous verrons qu'elles peuvent avoir des prolongements inattendus, en lien par exemple avec la théorie du chaos quantique.

Au cours des vingt dernières années, la littérature traitant des résonances de Fano–Feshbach dans les gaz atomiques est devenue extrêmement vaste et il n'est pas possible de citer ici tous les travaux importants qui ont été menés. Nous renvoyons le lecteur vers les articles de revue de KÖHLER, GÓRAL et al. (2006) et CHIN, GRIMM et al. (2010) qui présentaient au moment de leur parution un panorama complet du domaine.

1 Exemples de résonances de diffusion

Dans ce chapitre et le suivant, nous nous intéresserons principalement aux résonances de Fano-Feshbach, obtenues en couplant deux canaux de diffusion, l'un ouvert, l'autre fermé. Pour mettre ces résonances en perspective, nous allons brièvement passer en revue dans cette première section quelques types de résonances rencontrées dans la physique des atomes froids.

1-1 Résonance à énergie nulle

La résonance à énergie nulle est un processus que nous avons déjà rencontré dans les chapitres qui précèdent. Elle se produit pour des collisions en onde s ; elle survient quand un nouvel état lié est sur le point d'apparaître ou quand il vient d'apparaître, suite à la variation d'un des paramètres du potentiel inter-atomique $V(r)$, le coefficient C_6 par exemple (figure 1, gauche).

L'amplitude de diffusion peut s'écrire dans ce cas :

$$f(k) \approx -\frac{a}{1 + ika} \quad (1)$$

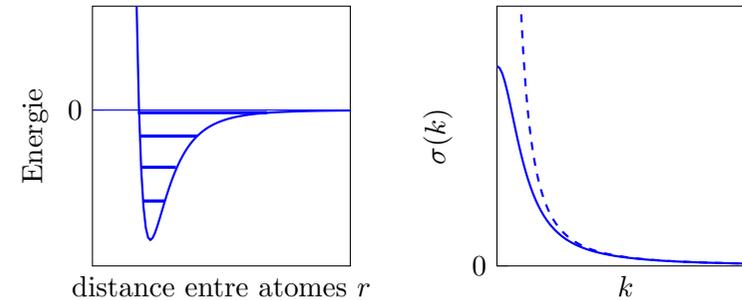


FIGURE 1. Résonance à énergie nulle. Gauche : Ce type de résonance survient quand le dernier état lié du potentiel $V(r)$ est très proche de la limite de dissociation ou si un nouvel état lié est proche du seuil d'apparition pour une légère variation de $V(r)$ (N.B. la position des niveaux d'énergie est purement indicative). Droite : le trait plein représente la variation de la section efficace de diffusion selon la loi (2). Quand l'état lié est exactement à la limite de dissociation, la section efficace varie comme $8\pi/k^2$ et diverge donc en $k = 0$ (courbe tiretée).

ce qui correspond à une section efficace pour des bosons polarisés variant comme (cf. figure 1, droite) :

$$\sigma(k) = 8\pi|f(k)|^2 = \frac{8\pi a^2}{1 + k^2 a^2} \quad \text{avec} \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r}. \quad (2)$$

Au point précis où la résonance se produit ($a = \infty$), la section efficace atteint sa plus grande valeur autorisée par l'unitarité de la mécanique quantique :

$$\text{Régime unitaire pour des bosons polarisés :} \quad \sigma(k) = \frac{8\pi}{k^2}. \quad (3)$$

Le césium en champ magnétique nul présente la particularité d'être naturellement dans ce régime (ARNDT, DAHAN et al. 1997). On montre sur la figure 2 une mesure de la section efficace de collision élastique en fonction de la température pour un gaz d'atomes de césium polarisés (état triplet $|f = m_f = 4\rangle$) pour lequel les spins de l'électron externe et du noyau sont alignés). On voit que la section efficace varie comme $\sigma(T) \propto 1/T$, en accord avec la prédiction du régime unitaire (3).

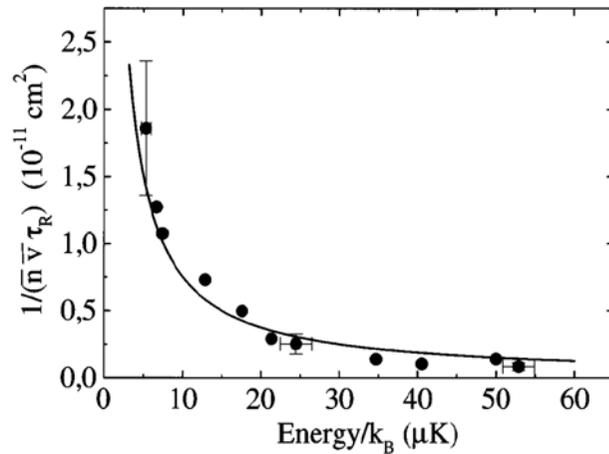


FIGURE 2. Mesure de la section efficace de collision élastique pour un gaz d'atomes de césium polarisés. Cette mesure est basée sur le temps de retour à l'équilibre thermique du gaz, τ_R , pour une densité n et une vitesse quadratique moyenne \bar{v} connues. La courbe en trait plein représente la prédiction obtenue par dynamique moléculaire pour un gaz de même densité et de même température et placé dans le régime unitaire (3).

Une analyse fine de ces résultats et de la position des derniers états liés ont permis à KERMAN, CHIN et al. (2001) de déterminer la longueur de diffusion pour cet état triplet. Elle vaut $2400 \pm 100 a_0$, soit 130 nm. Elle n'est pas infinie à strictement parler, mais elle est 25 fois plus grande que la valeur la plus probable \bar{a} (soit une section efficace 625 fois plus grande qu'attendu naïvement!). À première vue, une telle longueur de diffusion semble une bonne nouvelle pour l'obtention d'un condensat de Bose-Einstein, car elle permet de mener le refroidissement par évaporation extrêmement rapidement. Malheureusement, cette résonance de diffusion s'accompagne (comme pratiquement toujours pour des bosons) de pertes importantes par collisions inélastiques qui empêche la condensation en champ magnétique faible (SÖDING, GUERY-ODELIN et al. 1998). L'utilisation judicieuse de résonances de Fano-Feshbach en champ plus élevé et pour un état interne différent de l'état triplet a permis à WEBER, HERBIG et al. (2003) de contourner cette difficulté et de condenser finalement cette espèce atomique.

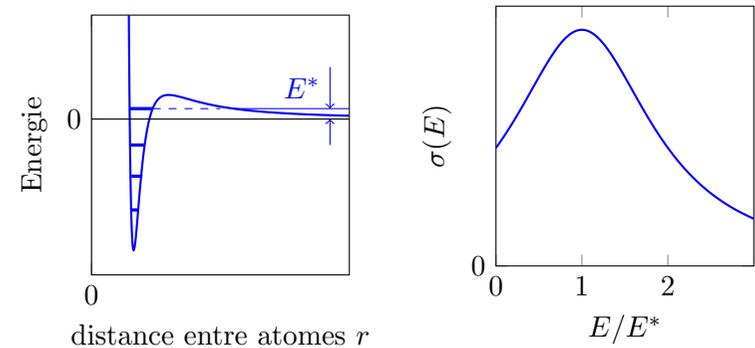


FIGURE 3. Résonance de forme. Gauche : potentiel d'interaction en présence d'une barrière centrifuge pour un moment cinétique non nul. Un état quasi-lié d'énergie E^* peut exister aux petites distances de r , sa durée de vie étant limitée par l'effet tunnel à travers la barrière. Droite : résonance de la section efficace de diffusion pour une énergie incidente voisine de E^* .

1-2 Résonance de forme

Une résonance de forme se produit quand le potentiel inter-atomique se comporte de manière répulsive à l'infini, comme c'est le cas pour des collisions en ondes partielles de moment cinétique non nul. Dans ce cas, le potentiel centrifuge variant comme $1/r^2$ est dominant à longue distance par rapport au potentiel de van der Waals en $-1/r^6$.

La situation est alors analogue à celle d'une cavité Fabry-Perot en optique. Il peut y avoir un (ou plusieurs) état d'énergie positive E^* confiné à l'intérieur du puits de potentiel situé au voisinage de $r = 0$ (figure 3). Cet état est l'équivalent du champ lumineux piégé dans une cavité formée de deux miroirs (figure 4). Un dimère préparé dans cet état est instable et finit par se dissocier, tout comme le champ lumineux finit par s'échapper de la cavité Fabry-Perot puisque les miroirs ne sont pas parfaitement réfléchissants. La durée de vie du dimère peut être grande quand on la compare aux périodes habituelles des oscillations moléculaires.

Considérons maintenant une collision entre deux atomes initialement libres d'énergie voisine de E^* . La particule relative peut bien sûr rebon-

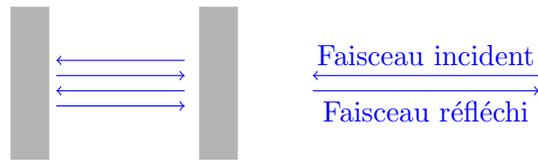


FIGURE 4. Cavity Fabry-Perot formée de deux miroirs à grand coefficient de réflexion. La variation du déphasage du faisceau réfléchi par rapport au faisceau incident est similaire à celle trouvée pour une résonance de forme.

dir à l'extérieur de la barrière de potentiel, mais le dimère peut se former temporairement. L'interférence entre ces deux processus provoque une variation rapide du déphasage associé à cette onde partielle, et donc un pic dans la section efficace de collision. Ce pic est d'autant plus fin et marqué que la durée de vie de l'état quasi-lié est grande.

Plusieurs expériences d'atomes froids ont mis en évidence ce type de résonance. VOLZ, DÜRR et al. (2005) l'ont observé pour l'onde d sur un condensat de rubidium 87, avec une méthode de détection assez subtile, puisqu'elle fait appel à des molécules elles-mêmes formées à partir d'une résonance de Fano-Feshbach. Très récemment, YAO, QI et al. (2019) ont observé une résonance de ce type en onde d dans un condensat de Bose-Einstein de potassium 41.

1-3 Résonance de Fano-Feshbach

À la différence des deux processus décrits ci-dessus, une résonance de Fano-Feshbach met en jeu au moins deux canaux de collision (figure 5). Ce type de résonance multi-canaux a été introduit dans le cadre de la physique nucléaire par FESHBACH (1958) [voir aussi FESHBACH (1962)] et dans le cadre de la physique atomique par FANO (1961). Les premiers développements historiques autour de ces idées sont décrits en détail dans l'article de revue de CHIN, GRIMM et al. (2010).

Dans le cadre de la physique des gaz quantiques, les premières mentions de ce type de résonance (STWALLEY 1976; REYNOLDS, SHINKODA et al. 1986) sont venues de la physique de l'hydrogène atomique, qui était le

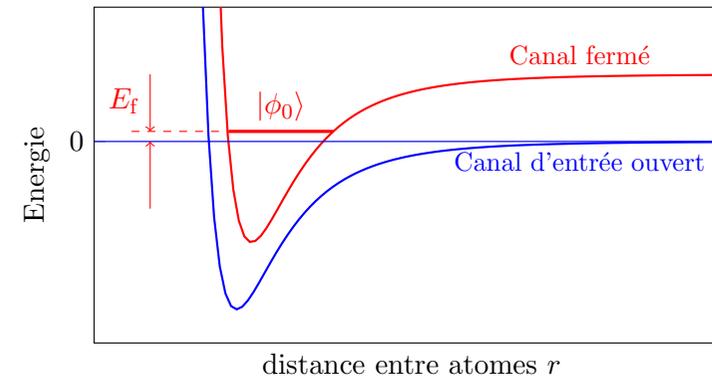


FIGURE 5. Résonance de Fano-Feshbach : les particules incidentes sont préparées dans un état interne correspondant au canal ouvert. Lors de la collision, le couplage quasi-résonnant à un état lié $|\phi_0\rangle$ du canal fermé provoque une modification importante du déphasage collisionnel, et donc une résonance de l'amplitude de diffusion et de la section efficace correspondante.

seul système disponible avant l'entrée en jeu du refroidissement par laser et par évaporation. C'est l'équipe hollandaise regroupée autour de B. Verhaar qui a transposé ces idées aux collisions entre alcalins, en mettant en avant les possibilités qu'elles ouvraient (TIESINGA, VERHAAR et al. 1993; MOERDIJK, VERHAAR et al. 1995). Les premières démonstrations expérimentales de ces résonances ont été faites au MIT par INOUE, ANDREWS et al. (1998) et à l'Université d'Austin par COURTEILLE, FREELAND et al. (1998).

Nous nous intéressons ici au cas de collisions entre atomes froids et nous décrirons donc ce processus pour des interactions en onde s, qui sont les plus pertinentes en pratique. Le canal 1, appelé *canal ouvert* et décrit par le potentiel inter-atomique $V_1(r)$, est celui dans lequel les deux particules en collision arrivent. Ce canal correspond à un certain état de spin des atomes incidents. Le canal 2 décrit par $V_2(r)$ correspond à un autre état de spin des atomes. C'est un canal fermé : la valeur de $V_2(r)$ à l'infini est bien supérieure à l'énergie incidente des particules et sa population après la collision est négligeable. En revanche, le couplage entre les deux

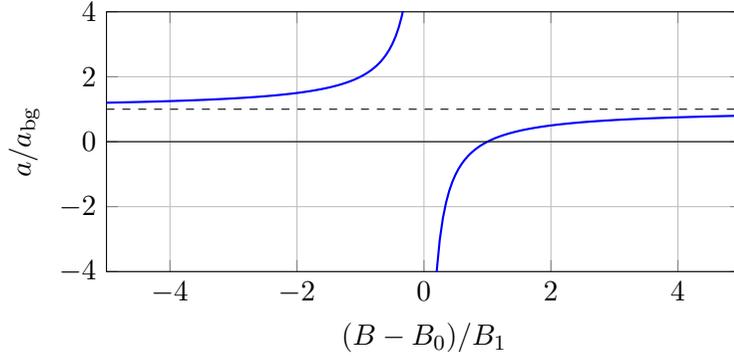


FIGURE 6. Variation de la longueur de diffusion avec le champ magnétique, selon la loi (4), tracée ici pour $B_1 > 0$. La ligne tiretée indique la valeur de la longueur de diffusion "de fond" a_{bg} .

canaux durant la collision est significatif; il peut induire une variation du déphasage δ_0 , et donc modifier l'amplitude de diffusion et la section efficace correspondante.

L'analogie avec la cavité Fabry–Perot donnée plus haut est également intéressante dans ce cas. On s'attend naïvement (et cela sera confirmé par une analyse quantitative) à ce que l'influence du canal fermé soit importante quand ce dernier présente un état lié $|\phi_0\rangle$ dont l'énergie E_f est voisine de l'énergie des particules incidentes, c'est-à-dire $E_f \approx V_1(\infty)$.

Un aspect essentiel de ces résonances est qu'il est possible de contrôler finement la différence d'énergie $E_f - V_1(\infty)$. Il suffit pour cela que les moments magnétiques des états de spin des deux canaux soient différents. En première approximation, la variation du champ magnétique ambiant aura pour effet de déplacer la courbe $V_2(r)$ par rapport à $V_1(r)$, et donc de varier l'écart à résonance $E_f - V_1(\infty)$.

La variation de la longueur de diffusion au voisinage d'une résonance de Fano–Feshbach contrôlée par un champ magnétique est traditionnellement mise sous la forme

$$a = a_{\text{bg}} \left(1 - \frac{B_1}{B - B_0} \right), \quad (4)$$

et dépend donc de trois paramètres : a_{bg} représente la longueur de diffusion "de fond" (*background*); c'est essentiellement la valeur associée au canal ouvert quand on est loin de la résonance. Le champ B_0 donne la position de la résonance, là où la longueur de diffusion diverge, et le paramètre B_1 donne la largeur en champ magnétique de la résonance. Supposons pour fixer les idées que B_1 est positif; à gauche de la résonance, quand on passe de $B = B_0$ à $B = B_0 - B_1$, la valeur de a retombe de l'infini à $2a_{\text{bg}}$; à droite de la résonance, pour $B = B_0 + B_1$, la longueur de diffusion s'annule (figure 6).

Anticipons un peu sur les résultats qui vont suivre : nous allons montrer que la résonance de Fano–Feshbach ne se produit pas exactement pour $E_f = 0$, mais pour $E_f + \Delta = 0$ où Δ est un déplacement en énergie que nous allons calculer. Le lien entre le champ magnétique B et l'énergie E_f de l'état lié $|\phi_0\rangle$ du canal fermé (mesurée par rapport à la limite de dissociation du canal libre) se fait donc par

$$E_f + \Delta = \delta\mu(B - B_0) \quad (5)$$

où $\delta\mu$ est la différence entre le moment magnétique de la paire d'atomes dans le canal libre et le moment magnétique du dimère lié dans l'état $|\phi_0\rangle$.

Signalons également un point important concernant l'expression (4). Nous verrons au prochain chapitre qu'une caractéristique importante d'une résonance de Fano–Feshbach est sa *largeur*, qui détermine les poids relatifs des canaux ouvert et fermé dans les états susceptibles d'apparaître. Il serait tentant de poser que cette *largeur* est donnée par $|B_1|$. Nous verrons que la réalité est plus complexe : l'équation (4) est une paramétrisation commode, mais qui masque partiellement les quantités physiques importantes caractérisant véritablement la résonance.

Nous présenterons à la fin du prochain chapitre des expériences récentes qui illustrent la diversité des situations où une résonance de Fano–Feshbach peut se manifester. Donnons ici le résultat d'une des premières expériences où ces résonances ont été vues dans le cadre des gaz d'atomes froids [cf. figure 7 extraite de INOUE, ANDREWS et al. (1998)]. Cette expérience a été menée sur un condensat d'atomes de sodium, pour lequel la résonance se situe autour de 900 Gauss (0.09 T). La résonance se manifeste à la fois par une perte accrue d'atomes sous l'effet des collisions inélastiques et par une variation de l'énergie d'interaction, mesurée par expan-

sion balistique du gaz. Dans la même période, des résonances de Fano–Feshbach ont été observées pour ^{85}Rb (ROBERTS, CLAUSSEN et al. 1998; COURTEILLE, FREELAND et al. 1998) et pour ^{133}Cs (VULETIC, KERMAN et al. 1999).

1-4 Résonance induite par le confinement

Ces résonances, initialement prédites par OLSHANII (1998), puis interprétées physiquement par BERGEMAN, MOORE et al. (2003), se produisent quand les atomes sont fortement piégés selon une ou deux directions de l'espace. Considérons par exemple des atomes bougeant librement le long d'un tube d'axe z , avec un confinement fort dans le plan xy , caractérisé par la fréquence d'oscillation ω_{\perp} . Partant d'atomes interagissant avec une longueur de diffusion a à 3 dimensions, OLSHANII (1998) et BERGEMAN, MOORE et al. (2003) montrent qu'on peut modéliser l'interaction entre deux atomes confinés par une distribution de Dirac, $g_{1D}\delta(z_1 - z_2)$, avec

$$g_{1D} = \frac{2\hbar^2 a}{m_{\tau} a_{\perp}^2} \frac{1}{1 - Ca/a_{\perp}} \quad \text{avec } C = 1.4603, \quad (6)$$

où $a_{\perp}^2 = \hbar/m_{\tau}\omega$. Une résonance de diffusion se produit donc quand $a_{\perp} = Ca$.

L'interprétation de ce phénomène est en fait très proche d'une résonance de Fano–Feshbach. Les différents canaux sont les différents états d'excitation du mouvement transverse des atomes. Le canal ouvert correspond à l'état fondamental, d'énergie $\hbar\omega_{\perp}$. Le canal fermé intéressant est le niveau excité du mouvement transverse d'énergie $3\hbar\omega_{\perp}$, qui contient un état de moment cinétique orbital $\ell_z = 0$ et qui peut donc se coupler de manière résonante à l'état fondamental lors d'une collision. BERGEMAN, MOORE et al. (2003) montrent que ce canal contient toujours un état lié, et que la condition de résonance $a_{\perp} = Ca$ correspond précisément au point où l'énergie de cet état lié est égale à $\hbar\omega_{\perp}$, la limite de dissociation du canal ouvert. Un phénomène similaire se produit avec un confinement selon une direction de l'espace, les collisions étant alors bi-dimensionnelles (PETROV, HOLZMANN et al. 2000).

Ce type de résonance a été mis en évidence à Innsbruck par HALLER, GUSTAVSSON et al. (2009). Partant d'un condensat de Bose–Einstein

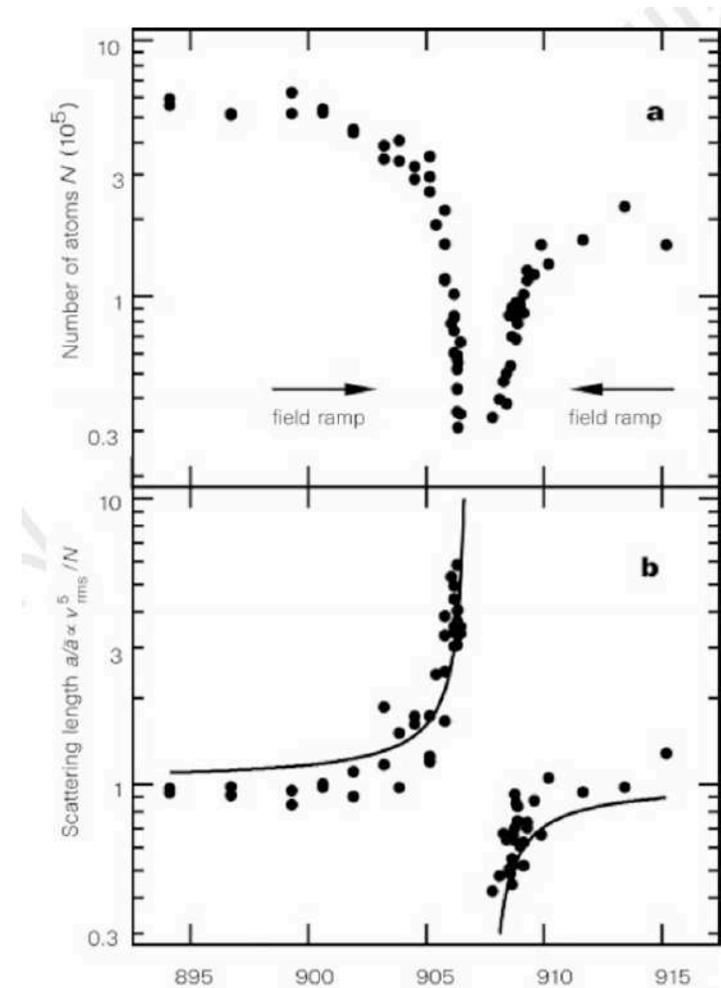


FIGURE 7. Résonance de Fano–Feshbach détectée sur un condensat d'atomes de sodium. Le graphe du haut montre la perte d'atomes au voisinage de la résonance. Le graphe du bas montre la variation de la longueur de diffusion, déduite d'une mesure de l'énergie d'interaction du gaz, elle-même déduite de la mesure de l'expansion balistique du nuage d'atomes quand on le relâche du piège qui le confine. Figure extraite de INOUE, ANDREWS et al. (1998).

d'atomes de césium, les chercheurs d'Innsbruck ont placé ce gaz dans une série de tubes formés par un réseau optique bi-dimensionnel. Une résonance de Fano–Feshbach est ensuite utilisée pour venir ajuster le rapport a/a_{\perp} . Grâce à cette résonance induite par le confinement, HALLER, GUSTAVSSON et al. (2009) ont réussi à produire un gaz uni-dimensionnel en interaction forte dans une phase appelée *super Tonks–Girardeau*.

Pour terminer, signalons que MASSIGNAN & CASTIN (2006) et NISHIDA & TAN (2008) (voir également XIAO, ZHANG et al. (2019)) ont montré que ce type de résonance pouvait être étendu aux interactions entre deux atomes d'espèces différentes, l'une étant fortement confinée selon certaines directions de l'espace et l'autre pas du tout. Une première étude expérimentale de ce phénomène a été menée par LAMPORESI, CATANI et al. (2010).

2 La limite $a = \pm\infty$ est-elle singulière ?

Les résonances de diffusion auxquelles nous allons nous intéresser dans la suite, à savoir les résonances de Fano–Feshbach, sont caractérisées par une longueur de diffusion qui tend vers $\pm\infty$ alors que la portée du potentiel reste finie. Dans une approche de champ moyen, où l'énergie d'une particule est proportionnelle à an où n est la densité du gaz, on voit alors apparaître une singularité. Nous allons montrer dans ce qui suit que cette singularité n'est qu'un artefact de l'approche de champ moyen.

Nous allons présenter ici le modèle développé par BUSCH, ENGLERT et al. (1998), qui considèrent deux particules interagissant par l'intermédiaire du pseudo-potentiel \hat{V}_{pp} (donc de portée nulle). Ces deux particules sont placées dans un potentiel harmonique isotrope de fréquence ω . Nous allons voir qu'il y a continuité parfaite des niveaux d'énergie de ce système binaire à travers la résonance $a = \infty$. En revanche, nous verrons qu'il n'y a pas continuité autour de $a = 0$: pour le pseudo-potentiel, les limites $a \rightarrow 0_+$ et $a \rightarrow 0_-$ ne sont pas équivalentes.

On s'intéresse donc à l'hamiltonien

$$\hat{H}_{\text{tot}} = \left(\frac{\hat{p}_A^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r_A^2 \right) + \left(\frac{\hat{p}_B^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r_B^2 \right) + \hat{V}_{pp}(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B). \quad (7)$$

Nous prendrons ici la définition du pseudo-potentiel revenant à imposer les conditions aux limites de Bethe–Peierls (cf. chapitre 3).

2-1 Centre de masse et variable relative

L'intérêt du choix d'un potentiel de confinement harmonique est qu'il préserve la séparation entre variables du centre de masse et variables relatives. On a en effet

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B \quad \Rightarrow \quad 2R^2 + \frac{r^2}{2} = r_A^2 + r_B^2 \quad (8)$$

ce qui entraîne

$$\frac{1}{2}m\omega^2 r_A^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 r_B^2 = \frac{1}{2}M\omega^2 R^2 + \frac{1}{2}m_r\omega^2 r^2 \quad (9)$$

avec $M = 2m$ pour la masse totale et $m_r = m/2$ pour la masse réduite.

Le mouvement du centre de masse est celui d'une particule de masse M confinée dans un potentiel harmonique. Les niveaux d'énergie correspondants sont inchangés par l'interaction entre particules et valent donc $(n + 3/2)\hbar\omega$, avec $n = 0, 1, \dots$. Nous n'en tiendrons plus compte dans la suite. Nous allons nous concentrer sur le mouvement de la particule relative qui est régi par l'hamiltonien

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m_r} + \frac{1}{2}m_r\omega^2 r^2 + \hat{V}_{pp}(r). \quad (10)$$

Signalons que CHEN, XIAO et al. (2020) ont récemment étendu cette étude au cas d'un potentiel harmonique anisotrope.

2-2 Le cas uni-dimensionnel

Avant d'aborder le cas 3D, il est intéressant de considérer le cas uni-dimensionnel pour lequel le simple potentiel de contact $V(x) = g\delta(x)$ est légitime. L'équation aux valeurs propres pour la variable relative s'écrit alors

$$-\frac{\hbar^2}{2m_r} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m_r\omega^2 x^2 \psi(x) + g\delta(x) \psi(x) = E \psi(x). \quad (11)$$

Utilisons les échelles naturelles d'énergie et de longueur¹ pour l'oscillateur harmonique, c'est-à-dire $\hbar\omega$ et $a_{\text{ho}} = \sqrt{\hbar/m_r\omega}$. Cette équation aux valeurs propres se simplifie en

$$-\frac{1}{2}\psi''(x) + \frac{x^2}{2}\psi(x) + G\delta(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad \text{avec} \quad G = g/(a_{\text{ho}}\hbar\omega). \quad (12)$$

Le problème est invariant par parité (changement $x \leftrightarrow -x$). On peut donc chercher les solutions sous forme de fonctions $\psi(x)$ paires ou impaires. Pour une fonction impaire, $\psi(0) = 0$ de sorte que le potentiel de contact ne contribue pas. On retrouve donc les mêmes fonctions propres (fonctions de Hermite) et le même spectre qu'en absence d'interaction :

$$\text{Énergies des fonctions impaires :} \quad E_n = n + \frac{1}{2}, \quad n = 1, 3, \dots \quad (13)$$

Ces énergies sont tracées en rouge sur la figure 9.

Nous allons maintenant nous concentrer sur les fonctions paires. Pour celles-ci, la présence de $\delta(x)$ crée une singularité en $x = 0$: la dérivée première de $\psi(x)$ est discontinue en ce point avec un saut obtenu en intégrant (12) sur un intervalle arbitrairement petit centré en 0 :

$$-\frac{1}{2}[\psi'(0_+) - \psi'(0_-)] + G\psi(0) = 0. \quad (14)$$

La parité de ψ entraîne que $\psi'(0_-) = -\psi'(0_+)$ d'où la condition aux limites :

$$\text{Fonctions paires :} \quad \psi'(0_+) = G\psi(0). \quad (15)$$

Deux exemples de fonctions paires avec ce type de point anguleux en $x = 0$ sont tracés en figure 8.

Pour résoudre complètement le problème, il suffit maintenant de chercher à quelle condition sur l'énergie E il existe sur l'intervalle ouvert $x \in]0, +\infty[$ une solution de

$$-\frac{1}{2}\psi''(x) + \frac{x^2}{2}\psi(x) = E\psi(x) \quad (16)$$

qui

1. Nous définissons ici a_{ho} à partir de la masse réduite m_r et pas de la masse de chaque atome m . Cela introduit un facteur $\sqrt{2}$ par rapport à BUSCH, ENGLERT et al. (1998).

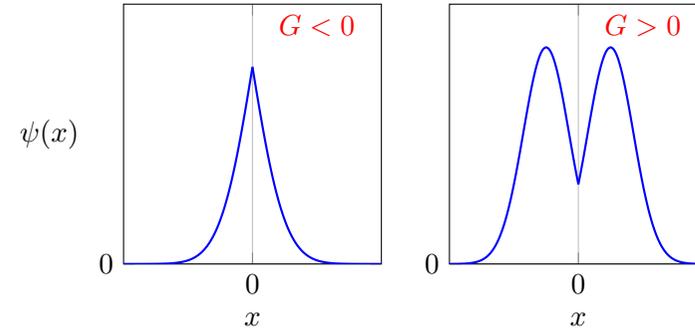


FIGURE 8. Exemples de points anguleux en $x = 0$ pour les fonctions propres paires, résultant de la présence du potentiel $G\delta(x)$ dans l'équation de Schrödinger.

- satisfait la condition aux limites (15),
- tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$.

La solution générale de (16) s'écrit² en terme de la fonction de Kummer $M(a, b, z)$

$$\psi(x) \propto \left[\alpha M\left(\frac{1}{4} - \frac{E}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right) + \beta x M\left(\frac{3}{4} - \frac{E}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right) \right] e^{-x^2/2}. \quad (18)$$

Au voisinage de l'origine, on trouve $M(a, b, x^2) = 1 + \mathcal{O}(x^2)$ de sorte que la condition aux limites (15) impose $\beta = \alpha G$. Quand $x \rightarrow +\infty$, la fonction de Kummer diverge comme :

$$M(a, b, z) \sim \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-b}. \quad (19)$$

Pour éviter que $\psi(x)$ ne diverge en l'infini comme $e^{x^2/2}$, les divergences

2. Pour montrer ce résultat, on peut faire les changements de variable et de fonction $z = x^2$ et $\phi(z) = \psi(x) e^{x^2/2}$, ce qui permet de réécrire (12) sous la forme de l'équation de Kummer

$$z\phi'' + \left(\frac{1}{2} - z\right)\phi' + \left(\frac{E}{2} - \frac{1}{4}\right)\phi = 0 \quad (17)$$

dont les solutions sont les fonctions de Kummer $M(a, b, z)$ et $z^{1-b}M(a+1-b, 2-b, z)$ (cf. page Wikipedia *Confluent hypergeometric function*).

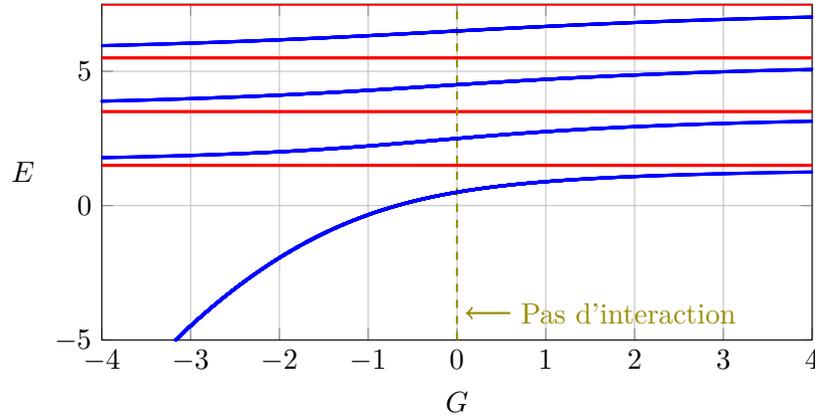


FIGURE 9. Cas 1D. Bleu : variation de l'énergie des fonctions d'onde paires pour la variable relative de deux particules piégées. Rouge : énergies des fonctions d'onde impaires.

des deux contributions à (18) doivent se compenser et il faut imposer :

$$\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4 - E/2)} + G \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4 - E/2)} = 0 \quad (20)$$

ou encore, en utilisant $\Gamma(1/2) = 2\Gamma(3/2)$:

$$G = -2 \frac{\Gamma(3/4 - E/2)}{\Gamma(1/4 - E/2)}. \quad (21)$$

Pour chaque valeur de G , cette relation vient sélectionner une série (infinie) de valeurs discrètes de E . Ces valeurs sont tracées en bleu sur la figure 9.

Commentons quelques régimes sur cette figure :

- Pour G grand et négatif, le potentiel en $G \delta(r)$ simule un puits profond, avec un état fortement lié de fonction d'onde paire. Les autres états pairs doivent être orthogonaux à cet état très localisé, ce qui revient quasiment à leur imposer un nœud à ces états en $x = 0$ comme pour les états impaires. L'énergie d'un état pair excité est alors voisine de celle de l'état impair immédiatement inférieur.

- En $G = 0$, il n'y a pas d'interaction et on retrouve les énergies non perturbées, $1/2, 5/2, 9/2$ pour les états pairs. On retrouve ce résultat sur (21) puisque la fonction $\Gamma(x)$ est infinie pour toutes les valeurs $x = 0, -1, -2, \dots$ de l'argument.
- Pour G grand et positif, on a l'équivalent d'un potentiel de cœur dur au voisinage de $x = 0$, qui vient pratiquement imposer aux fonctions d'onde paires d'avoir un nœud en ce point (cf. figure 8, droite). Leur énergie est alors très proche de la fonction d'onde impaire de n immédiatement supérieur.

L'interprétation des résultats à une dimension ne pose donc pas de difficulté et elle est conforme à l'intuition.

2-3 Le cas tri-dimensionnel

Le pseudo-potential n'ayant d'effet que sur les fonctions d'onde de moment cinétique nul, nous allons nous restreindre à cette classe d'états isotropes dans ce qui suit. Nous continuons à utiliser les échelles d'énergie $\hbar\omega$ et $a_{\text{ho}} = \sqrt{\hbar/m_r\omega}$ pour l'énergie et la position. Nous cherchons donc à résoudre l'équation de Schrödinger radiale pour la fonction d'onde $u(r) = r\psi(r)$

$$-\frac{1}{2}u''(r) + \frac{r^2}{2}u(r) = Eu(r) \quad (22)$$

avec la condition aux limites de Bethe–Peierls :

$$u(r) \propto r - a \quad \Leftrightarrow \quad u'(0) = -\frac{1}{a}u(0). \quad (23)$$

Rappelons qu'en absence d'interaction ou pour un potentiel régulier, la condition aux limites pour la fonction d'onde radiale réduite est $u(0) = 0$.

Le problème est donc formellement identique à celui que nous avons résolu à 1D, pourvu que l'on fasse la substitution

$$G \longrightarrow -\frac{1}{a}. \quad (24)$$

Nous pouvons reprendre tels quels les résultats de la figure 9, que nous traçons en figure 10 en fonction de $1/a$ (cela revient simplement à inverser l'axe des abscisses).

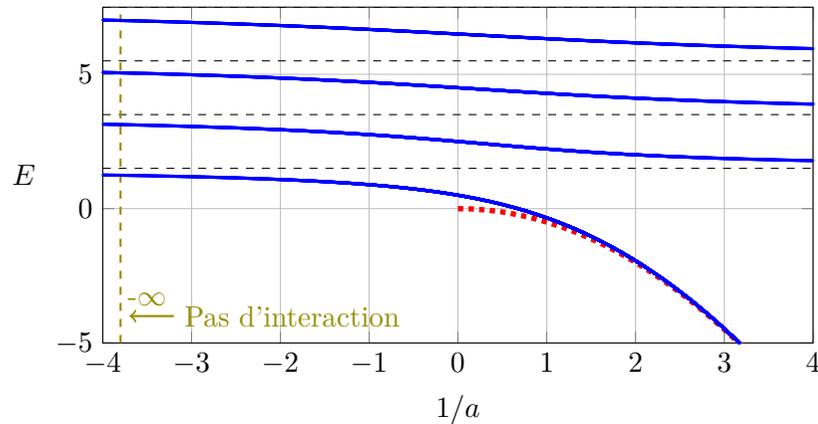


FIGURE 10. Cas 3D. Variation de l'énergie des fonctions d'onde de moment cinétique $\ell = 0$ pour la variable relative de deux particules piégées. La ligne en pointillé rouge donne l'énergie $-\hbar^2/2m_r a^2$ de l'état lié qui apparaît pour $a > 0$ en absence de piège harmonique. Les lignes tiretées noires indiquent la position des niveaux d'énergie de moment cinétique nul en absence d'interaction.

En dépit de cette similarité formelle dans les calculs, l'interprétation des résultats est très différente. Les points suivants sont à souligner :

- Sur la figure 10, nous avons tracé en lignes tiretées noires la position des niveaux d'énergie pour les états $\ell = 0$ en absence d'interaction, $E_n = n + 3/2$ avec $n = 0, 2, 4, \dots$. La première remarque porte sur la position de l'état fondamental en présence d'interaction : il est toujours en dessous de la plus basse de ces lignes tiretées. Cela signifie que le pseudo-potential doit être considéré comme attractif, dans le sens où il abaisse l'énergie du fondamental quel que soit le signe de a . Ce résultat est évidemment très différent de celui trouvé à 1D, où la position du fondamental avec interaction peut être au dessus ou en dessous du cas sans interaction, selon le signe de G .
- Quand $1/a \rightarrow -\infty$, c'est-à-dire $a \rightarrow 0_-$, les niveaux d'énergie en présence d'interaction se rapprochent des niveaux d'énergie non perturbés. C'est donc cette limite (et seulement elle) qui permet de retrouver avec certitude le cas sans interaction.

- Quand on se place exactement à $1/a = 0$, la condition aux limites de Bethe-Peierls (23) s'écrit $u'(0) = 0$, c'est-à-dire une tangente horizontale en $r = 0$. Cette condition est équivalente à celle imposée aux fonctions paires dans le cas 1D en absence d'interaction (§2-2). On trouve donc les niveaux d'énergie $n + 1/2$ avec $n = 0, 2, 4, \dots$: dans la limite unitaire, les interactions abaissent chaque état $\ell = 0$ de 1 (i.e. $\hbar\omega$) par rapport à la limite sans interaction.
- Quand on traverse la région $1/a = 0$, c'est-à-dire $a = \pm\infty$, aucune singularité n'apparaît sur la position des niveaux d'énergie. Ce résultat est bien sûr très différent de celui qu'on attendrait dans un théorie de champ moyen, où l'énergie est proportionnelle à a et donc divergerait vers $\pm\infty$ en ce point.
- Quand $1/a \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire $a \rightarrow 0_+$, l'énergie du niveau fondamental tend vers $-\infty$. Cela s'explique simplement par l'existence d'un dimère dans cette région avec une énergie $-\hbar^2/(2m_r a^2)$ (ligne en pointillés rouges). En toute rigueur, ce résultat pour l'énergie du dimère n'est exact que pour des particules libres, mais on s'attend à ce qu'il reste à peu près correct dès que l'énergie correspondante devient dominante par rapport à $\hbar\omega$.
- Dans cette région $1/a$ grand et positif, on peut retrouver la limite de l'état fondamental sans interaction, mais en préparant le système sur le premier état excité. L'énergie de cet état tend en effet vers $3/2 \hbar\omega$ quand $a \rightarrow 0_+$. Comme cette énergie est supérieure à l'énergie trouvée pour l'état fondamental en absence d'interaction, on parle souvent de *branche répulsive* pour désigner cet état. En particulier, c'est sa généralisation au problème à N corps qui permet de décrire les condensats d'atomes observés dans le régime $a > 0$. Signalons toutefois que s'agissant d'un état excité, il peut être fragile en pratique si un canal de dissipation d'énergie autorise sa décroissance vers le véritable état fondamental, c'est-à-dire le dimère.

2-4 Étude expérimentale

GUAN, KLINKHAMER et al. (2019) ont mené une étude expérimentale détaillée de ce modèle, en confinant deux atomes de ^6Li dans une pince optique. Les atomes sont préparés dans deux états de spin différents, de

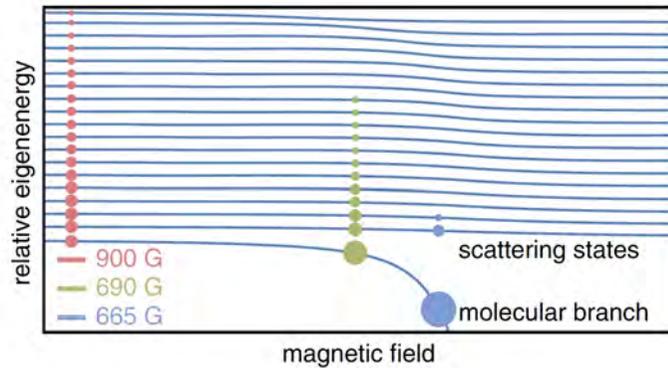


FIGURE 11. Préparation d'un paquet d'ondes dans un système de deux atomes de ${}^6\text{Li}$ confinés dans une pince optique, grâce à une trempe consistant à modifier soudainement la raideur du piège. Figure extraite de GUAN, KLINKHAMER et al. (2019).

sorte que les interactions en onde s sont permises. Partant de l'état fondamental des deux atomes dans la pince optique pour une longueur de diffusion fixée, ils effectuent une "trempe" en changeant brusquement la raideur de cette pince, ce qui a pour effet de préparer une superposition cohérente de plusieurs états propres (figure 11).

Le nombre d'états contribuant de manière significative à cette superposition dépend de la valeur de la longueur de diffusion, qui est contrôlée par le champ magnétique via une résonance de Fano–Feshbach :

- Quand a est petit et négatif (gauche de la figure 11), un grand nombre d'états, proches de ceux du cas sans interaction, sont peuplés. GUAN, KLINKHAMER et al. (2019) estiment que la population de l'état le plus peuplé ne dépasse pas 2 %.
- Quand a est très grand (régime unitaire au centre de la figure 11), seuls quelques états sont significativement peuplés.
- Quand a est petit et positif (droite de la figure 11), seul le dimère lié est appréciablement peuplé, à la fois avant et après la trempe.

Une fois la trempe effectuée, GUAN, KLINKHAMER et al. (2019) laissent le système évoluer librement pendant une durée t ajustable avant de me-

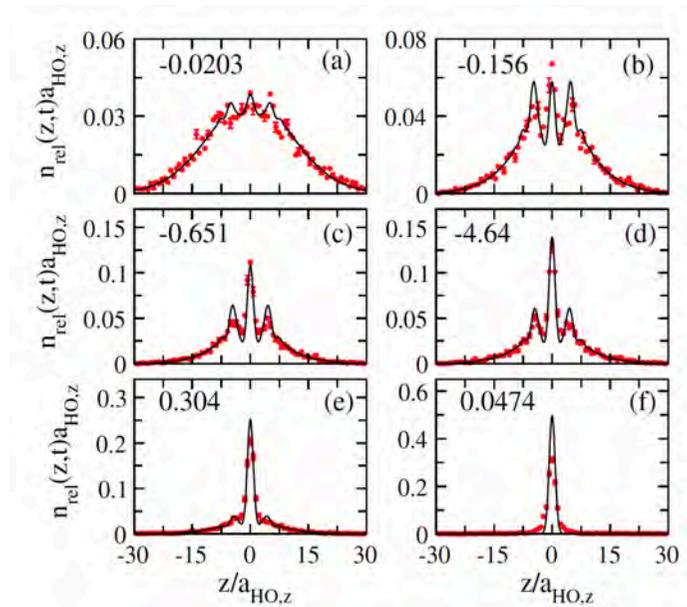


FIGURE 12. Densités de probabilité de la variable relative, mesurées et calculées à $t = 3.5$ ms après la trempe. Ces mesures sont effectuées pour différentes valeurs de la longueur de diffusion, indiquées en unité de a_{ho} (selon l'axe z). Figure extraite de GUAN, KLINKHAMER et al. (2019).

surer la position des deux particules. Cette mesure est faite avec une résolution de $4\ \mu\text{m}$, ce qui correspond à $\sim 0.5 a_{ho}$. Les résultats pour la densité relative dans le cas $t = 3.5$ ms, correspondant à environ 4 collisions entre les deux partenaires, sont donnés en figure 12.

Ces résultats confirment pleinement l'interprétation donnée plus haut pour ce modèle :

- Dans le cas $a < 0$ et petit (gauche de la figure 11), le grand nombre d'états peuplés entraîne un déphasage rapide des différentes amplitudes contribuant au paquet d'ondes et on observe une distribution large, quasiment non modulée, de la variable relative, comme pour des particules indépendantes.
- Dans le régime intermédiaire, ($|a|$ grand, situation proche du régime

unitaire), on peut observer des interférences entre les quelques amplitudes jouant un rôle significatif. Ces interférences permettent de "suivre" en temps réel les collisions entre les deux atomes en mesurant les déphasages accumulés.

- Pour $a > 0$ et petit (droite de la figure 11), on peuple essentiellement le dimère fortement lié; la distribution de probabilité pour la variable relative est donc piquée autour de 0.

Signalons pour être complet que ces expériences sont menées dans un piège harmonique non isotrope et qu'il faut donc raffiner le modèle développé ci-dessus pour faire un traitement quantitatif du processus de collision (traits pleins de la figure 12).

3 Un outil commode : les potentiels séparables

Avant de passer à une modélisation d'une résonance de Fano–Feshbach dans un processus à deux canaux de diffusion, nous allons étudier brièvement un outil très commode pour modéliser un processus de diffusion mono-canal, les potentiels séparables. Nous allons d'abord expliquer comment ces potentiels se distinguent des potentiels envisagés jusqu'ici, puis nous montrerons qu'ils conduisent à une solution analytique pour la détermination des états propres de l'hamiltonien, aussi bien pour les états liés que pour les états de diffusion.

3-1 Potentiel local vs. potentiel séparable

Comme nous l'avons vu à plusieurs reprises dans ce cours, le problème de l'interaction entre deux particules se ramène au problème à un corps évoluant dans un potentiel décrit par l'opérateur \hat{V} . Parmi les opérateurs \hat{V} envisageables, on peut distinguer (parmi beaucoup d'autres) deux classes remarquables :

- La plus utilisée concerne les *opérateurs locaux*³. Un opérateur local est tel que l'action sur une fonction d'onde $\psi(\mathbf{r}) \equiv \langle \mathbf{r} | \psi \rangle$ donne au point \mathbf{r}

3. Cette appellation ne suppose rien sur la portée du potentiel. Un potentiel peut être à longue portée, comme le potentiel Coulombien, et vérifier le critère de localité défini en (25-26).

un résultat ne dépendant que de la valeur de la fonction ψ en ce point, et pas de la valeur $\psi(\mathbf{r}')$ en $\mathbf{r}' \neq \mathbf{r}$. Les éléments de matrice de \hat{V} , qui est hermitien, s'écrivent en représentation position :

$$\langle \mathbf{r} | \hat{V} | \mathbf{r}' \rangle = V(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (25)$$

de sorte que

$$\langle \mathbf{r} | \hat{V} | \psi \rangle = \int \langle \mathbf{r} | \hat{V} | \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r}' | \psi \rangle d^3 r' = V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}). \quad (26)$$

- Une autre classe intéressante est constituée par les *opérateurs séparables* introduits par YAMAGUCHI (1954), dont les éléments de matrice en représentation position sont tels que

$$\langle \mathbf{r} | \hat{V} | \mathbf{r}' \rangle = V_0 \phi_0(\mathbf{r}) \phi_0(\mathbf{r}'), \quad (27)$$

où V_0 est un coefficient réel ayant la dimension d'une énergie et où la fonction ϕ_0 est supposée réelle, normalisée

$$\langle \phi_0 | \phi_0 \rangle = \int \phi_0^2(\mathbf{r}) d^3 r = 1, \quad (28)$$

et peut être comprise comme la fonction d'onde d'un état localisé $|\phi_0\rangle$. Le potentiel séparable \hat{V} est donc proportionnel au projecteur sur $|\phi_0\rangle$:

$$\hat{V} = V_0 |\phi_0\rangle \langle \phi_0|. \quad (29)$$

L'action de \hat{V} sur une fonction d'onde $\psi(\mathbf{r})$ s'écrit :

$$\langle \mathbf{r} | \hat{V} | \psi \rangle = V_0 \phi_0(\mathbf{r}) \int \phi_0(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3 r', \quad (30)$$

ce qui est généralement non local, au sens défini plus haut : le résultat au point \mathbf{r} de l'action de \hat{V} sur $|\psi\rangle$ fait intervenir les valeurs $\psi(\mathbf{r}')$ sur toute la zone où ϕ_0 prend des valeurs significatives. La portée de l'opérateur \hat{V} est donc donnée par la taille de cette zone.

Ces opérateurs séparables ne sont pas réalisés en tant que tels dans la nature, mais ils constituent des modèles très commodes car on peut les traiter analytiquement complètement. Le modèle simple de résonance de Fano–Feshbach que nous aborderons un peu plus loin fera appel à ce type

de potentiel pour décrire l'interaction entre un atome dans le canal ouvert et un autre atome dans le canal fermé. Mais avant d'aborder ce problème à deux canaux, il est utile de regarder comment on peut traiter le problème à un canal :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m_r} + \hat{V}, \quad (31)$$

tant du point de vue des états stationnaires de diffusion que des états liés.

Notons que le potentiel de contact $\hat{V} = g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ (qui ne présente pas de singularité à une dimension) peut être vu comme un potentiel séparable pour lequel le projecteur se fait sur l'état de position bien définie $|\mathbf{r}_0\rangle$:

$$\hat{V} = g |\mathbf{r}_0\rangle \langle \mathbf{r}_0|. \quad (32)$$

Le potentiel de contact est donc à la fois local et séparable.

3-2 État lié d'un potentiel séparable

L'équation aux valeurs propres de l'hamiltonien (31) pour un état lié d'énergie $E = -\hbar^2 \kappa^2 / 2m_r$ s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_r} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + V_0 I \phi_0(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m_r} \psi(\mathbf{r}) \quad (33)$$

avec

$$I = \langle \phi_0 | \psi \rangle = \int \phi_0(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3 r' = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{\phi}_0^*(\mathbf{q}') \tilde{\psi}(\mathbf{q}') d^3 q'. \quad (34)$$

Cette équation est plus simple à résoudre en point de vue de Fourier⁴ :

$$(q^2 + \kappa^2) \tilde{\psi}(\mathbf{q}) = \frac{I}{\sigma_0} \tilde{\phi}_0(\mathbf{q}), \quad (36)$$

4. Rappelons la convention adoptée dans ce cours pour le passage dans l'espace de Fourier (c'est-à-dire de la base continue en position $|\mathbf{r}\rangle$ à la base continue en vecteur d'onde $|\mathbf{q}\rangle$) :

$$\tilde{\psi}(\mathbf{q}) = \langle \mathbf{q} | \psi \rangle = \int \langle \mathbf{q} | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | \psi \rangle d^3 r = \int e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \psi(\mathbf{r}) d^3 r, \quad (35)$$

et $\langle \mathbf{q} | \mathbf{q}' \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$.

où nous avons posé

$$V_0 = -\frac{\hbar^2}{2m_r \sigma_0}, \quad (37)$$

la quantité σ_0 ayant la dimension d'une surface et pouvant être positive ou négative. La solution de (36) s'écrit :

$$\tilde{\psi}(\mathbf{q}) = \frac{I}{\sigma_0} \frac{\tilde{\phi}_0(\mathbf{q})}{q^2 + \kappa^2}, \quad (38)$$

la valeur de κ étant déterminée de façon à satisfaire la condition d'auto-cohérence liée à la définition de I :

$$I = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{\phi}_0^*(\mathbf{q}) \tilde{\psi}(\mathbf{q}) d^3 q = \frac{I}{\sigma_0 (2\pi)^3} \int \frac{|\tilde{\phi}_0(\mathbf{q})|^2}{q^2 + \kappa^2} d^3 q, \quad (39)$$

ou encore

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{|\tilde{\phi}_0(\mathbf{q})|^2}{q^2 + \kappa^2} d^3 q = \sigma_0. \quad (40)$$

Le membre de gauche est une fonction décroissante de κ et il y a donc, à σ_0 et ϕ_0 fixés, au plus une valeur de κ qui convient. Notons qu'il ne peut pas y avoir de solution quand σ_0 est négatif.

Inversement, si on souhaite modéliser un problème pour lequel on connaît (à peu près) l'énergie de l'état lié et la forme de sa fonction d'onde, l'équation (40) donne le couplage V_0 à utiliser dans l'expression du potentiel séparable \hat{V} .

3-3 États de diffusion pour un potentiel séparable

Intéressons-nous maintenant à un état de diffusion d'énergie $E = \hbar^2 k^2 / 2m_r$, se raccordant continument à l'onde plane $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ quand le couplage g tend vers 0. L'équation aux valeurs propres (équation de Lippmann-Schwinger) s'écrit :

$$(E - \hat{H}_0) |\psi\rangle = V_0 I |\phi_0\rangle \quad (41)$$

dont la solution physiquement pertinente est

$$|\psi_{\mathbf{k}}\rangle = |\mathbf{k}\rangle + \frac{V_0 I}{E - \hat{H}_0 + i0_+} |\phi_0\rangle. \quad (42)$$

Cette solution s'écrit en représentation position et vecteur d'onde :

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + V_0 I \int \mathcal{G}_0^{(+)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \phi_0(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (43)$$

$$\tilde{\psi}_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{k}) - \frac{I}{\sigma_0} \frac{\tilde{\phi}_0(\mathbf{q})}{k^2 - q^2 + i0_+}. \quad (44)$$

Pour simplifier, nous allons nous restreindre dans ce qui suit au cas où $\phi_0(\mathbf{r})$ est de symétrie sphérique, ce qui entraîne que $\tilde{\phi}_0(\mathbf{q})$ est également réelle et de symétrie sphérique. L'onde diffusée apparaissant dans (42) est alors elle-même isotrope, indiquant que la diffusion se fait uniquement dans l'onde s. En utilisant l'expression asymptotique de $\mathcal{G}_0^{(+)}$ vue au chapitre 2 :

$$\mathcal{G}_0^{(+)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{m_r}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx -\frac{m_r}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}'}, \quad (45)$$

on arrive à l'amplitude de diffusion

$$f(k) = \frac{I}{4\pi\sigma_0} \tilde{\phi}_0(k). \quad (46)$$

Comme dans le cas de la recherche d'un état lié, il reste à déterminer la valeur de l'intégrale I , ce qui se fait à partir de la condition d'auto-cohérence pour cette intégrale qui donne ici :

$$I = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{\phi}_0(q) \tilde{\psi}_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) d^3 q = \tilde{\phi}_0(k) - \frac{I}{\sigma_0 (2\pi)^3} \int \frac{\tilde{\phi}_0^2(q)}{k^2 - q^2 + i0_+} d^3 q, \quad (47)$$

soit

$$\begin{aligned} I &= \tilde{\phi}_0(k) \left[1 + \frac{1}{\sigma_0 (2\pi)^3} \int \frac{\tilde{\phi}_0^2(q)}{k^2 - q^2 + i0_+} d^3 q \right]^{-1} \\ &= \tilde{\phi}_0(k) \left[1 + \frac{1}{\sigma_0 (2\pi)^3} \int \mathcal{P}\mathcal{P} \left(\frac{\tilde{\phi}_0^2(q)}{k^2 - q^2} \right) d^3 q - i \frac{k}{4\pi\sigma_0} \tilde{\phi}_0^2(k) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (48)$$

On en déduit l'amplitude de diffusion :

$$\frac{1}{f(k)} = \frac{1}{\tilde{\phi}_0^2(k)} \left[4\pi\sigma_0 + \frac{1}{2\pi^2} \int \mathcal{P}\mathcal{P} \left(\frac{\tilde{\phi}_0^2(q)}{k^2 - q^2} \right) d^3 q \right] - ik. \quad (49)$$

On retrouve la partie imaginaire $-ik$ imposée par le théorème optique et on dispose d'une expression analytique exacte pour la partie réelle.

3-4 Un exemple de potentiel séparable

YAMAGUCHI (1954) propose l'exemple suivant, qui peut se traiter entièrement analytiquement⁵ :

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \frac{e^{-r/b}}{r}, \quad \tilde{\phi}_0(\mathbf{q}) = \sqrt{\frac{8\pi}{b}} \frac{1}{q^2 + \frac{1}{b^2}}, \quad (52)$$

où la longueur b représente la portée du potentiel.

Une condition nécessaire pour avoir un état lié est $V_0 < 0$ ou encore $\sigma_0 > 0$, et la condition d'existence d'un état lié (40) s'écrit

$$\frac{1}{(\kappa + \frac{1}{b})^2} = \sigma_0 \quad \leftrightarrow \quad \kappa = \frac{1}{\sqrt{\sigma_0}} - \frac{1}{b}. \quad (53)$$

Il faut donc prendre $0 < \sigma_0 < b^2$ pour que l'état lié existe. Quand c'est le cas, sa fonction d'onde s'écrit :

$$\tilde{\psi}(\mathbf{q}) \propto \frac{1}{(q^2 + \kappa^2)(q^2 + \frac{1}{b^2})}, \quad \psi(\mathbf{r}) \propto \frac{1}{r} \left(e^{-\kappa r} - e^{-r/b} \right). \quad (54)$$

De même, on peut mener les calculs pour les états stationnaires de diffusion et on arrive en particulier à l'expression de la longueur de diffusion :

$$\frac{a}{b} = \frac{2b^2}{b^2 - \sigma_0}. \quad (55)$$

On retrouve en particulier le fait que la longueur de diffusion diverge au seuil de l'apparition d'un état lié, $\sigma_0 = b^2$; elle est positive quand l'état lié existe et négative sinon.

5. Rappelons les relations de fermeture en position et en vecteur d'onde :

$$\hat{1} = \int |\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r}| d^3 r = \frac{1}{(2\pi)^3} \int |\mathbf{q}\rangle \langle \mathbf{q}| d^3 q \quad (50)$$

qui entraînent la normalisation suivante pour $\phi_0(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \phi_0 \rangle$ et $\tilde{\phi}_0(\mathbf{q}) = \langle \mathbf{q} | \phi_0 \rangle$:

$$1 = \langle \phi_0 | \phi_0 \rangle = \int |\phi_0(\mathbf{r})|^2 d^3 r = \frac{1}{(2\pi)^3} \int |\tilde{\phi}_0(\mathbf{q})|^2 d^3 q. \quad (51)$$

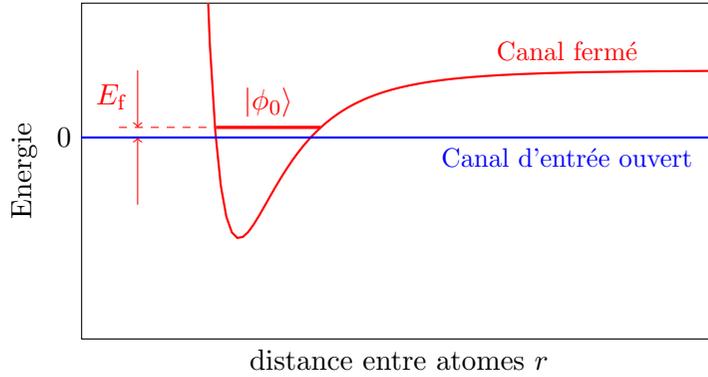


FIGURE 13. Modèle simplifié d'une résonance de Fano–Feshbach : nous supposons qu'il n'y a pas d'interaction dans le canal d'entrée (canal ouvert). Par ailleurs, nous faisons l'approximation qu'un seul état lié du canal fermé contribue de manière significative à la résonance.

4 Un modèle simple de résonance de F.-F.

Nous allons maintenant développer un modèle simplifié de résonance de Fano–Feshbach, qui va nous permettre de calculer analytiquement l'ensemble des propriétés de la résonance. Nous verrons au chapitre suivant que ce modèle est en fait suffisamment complet pour dégager les paramètres importants comme la largeur de la résonance ou la contribution du canal fermé. On trouvera dans la littérature d'autres approches analytiques fondées elles aussi sur des potentiels modèles simples, voir par exemple KOKKELMANS, MILSTEIN et al. (2002), DUINE & STOOF (2004), GOGOLIN, MORA et al. (2008) et CHIN, GRIMM et al. (2010).

4-1 Position du problème

Nous supposons que les deux atomes entrent en collision dans un canal pour lequel il n'y a aucune interaction (figure 13). L'hamiltonien de

ce canal ouvert est donc

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m_r} \quad (56)$$

pour la variable relative. Pour le canal fermé qui va permettre la résonance, nous faisons l'approximation que seul un état lié contribue, d'une manière similaire à ce que nous avons vu au paragraphe précédent dans le cadre des potentiels séparables ; nous noterons cet état $|\phi_0\rangle$ et son énergie E_f .

La fonction d'onde $\phi_0(\mathbf{r})$ est supposée normalisée, $\int |\phi_0(\mathbf{r})|^2 d^3r = 1$, et elle est "rigide" ; l'unique paramètre de contrôle dans tout ce qui va suivre est l'énergie E_f , qui peut être variée par exemple en changeant le champ magnétique ambiant. Cette énergie E_f est repérée par rapport au zéro d'énergie du canal ouvert, correspondant à une énergie cinétique incidente nulle.

Dans ce modèle, un état donné de la variable relative pour notre paire d'atomes est donc un spineur à deux composantes, donnant les amplitudes de probabilité pour les deux canaux :

$$\begin{pmatrix} \text{ouvert} \\ \text{fermé} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\psi\rangle \\ |\phi\rangle \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad |\phi\rangle = \alpha|\phi_0\rangle. \quad (57)$$

Les inconnues sont la fonction d'onde $\psi(\mathbf{r})$ et le coefficient de proportionnalité α , qu'il s'agira de déterminer selon le problème étudié.

Nous noterons \hat{W} l'opérateur couplant le canal ouvert et le canal fermé ; nous supposons que cet opérateur est local en point de vue position et donc caractérisé par une fonction $W(\mathbf{r})$. Tout comme la fonction d'onde de l'état lié $\phi_0(\mathbf{r})$, la fonction $W(\mathbf{r})$ est localisée au voisinage de l'origine, là où les couplages inter-canaux mentionnés dans la section 1 sont significatifs. Nous verrons d'ailleurs très bientôt que les résultats ne dépendent que du produit $W(\mathbf{r})\phi_0(\mathbf{r})$. Pour simplifier les notations, nous choisirons ce produit réel, mais notre démarche se généralise sans difficulté au cas complexe. Par ailleurs, nous le supposons isotrope de sorte que sa transformée de Fourier sera également isotrope. Cette hypothèse est correcte si l'état lié est formé dans un canal en onde s.

Un état propre d'énergie E du modèle à deux canaux doit donc satis-

faire les deux équations couplées

$$\hat{H}_0|\psi\rangle + \hat{W}|\phi\rangle = E|\psi\rangle \quad (58)$$

$$\hat{W}|\psi\rangle + E_f|\phi\rangle = E|\phi\rangle. \quad (59)$$

Ce système de deux équations est valable aussi bien pour la recherche des états de diffusion, asymptotiquement libres et donc avec une énergie $E > 0$, que d'éventuels états liés à deux canaux, d'énergie $E < 0$.

4-2 Recherche des états de diffusion

Choisissons une énergie $E > 0$ et cherchons à résoudre le système (58-59). Intéressons-nous à la première de ces équations dans laquelle nous remplaçons $|\phi\rangle$ par sa valeur $\alpha|\phi_0\rangle$, sans chercher à déterminer le coefficient complexe α pour l'instant. Cette équation s'écrit

$$(E - \hat{H}_0)|\psi\rangle = \alpha\hat{W}|\phi_0\rangle \quad (60)$$

et peut être résolue par la technique habituelle des fonctions de Green que nous avons utilisée au chapitre 2. Elle est formellement identique à celle trouvée pour un potentiel séparable au paragraphe précédent (eq. 41) et nous allons donc la résoudre de la même façon, en adoptant le formalisme opératoire, plus économique en termes de notations. Nous introduisons comme au chapitre 2

$$\hat{G}_0(E) = \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i0_+} \quad (61)$$

où nous avons ajouté comme précédemment une partie imaginaire infinitésimale et positive, correspondant à la fonction de Green avancée (ondes sphériques sortantes). Une solution particulière de l'équation (60) sans second membre est un état de moment bien défini $|\mathbf{k}\rangle$, c'est-à-dire l'onde plane $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, de sorte qu'une solution physiquement pertinente de (60) pour notre problème s'écrit

$$|\psi_{\mathbf{k}}\rangle = |\mathbf{k}\rangle + \alpha\hat{G}_0(E)\hat{W}|\phi_0\rangle. \quad (62)$$

Cette expression, similaire à l'équation (42) obtenue pour un potentiel séparable, constitue déjà un premier élément de réponse à notre problème

de diffusion. L'expression ci-dessus a en effet la forme canonique d'un état stationnaire de diffusion avec une onde plane incidente de vecteur d'onde \mathbf{k} (avec $E = \hbar^2 k^2 / 2m_r$) et une onde diffusée. Une démarche identique à celle du chapitre 2 basée sur l'expression asymptotique de la fonction de Green $\mathcal{G}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle \mathbf{r} | \hat{G}_0(E) | \mathbf{r}' \rangle$ conduit à la fonction d'onde asymptotique :

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \alpha \frac{m_r}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{-i\mathbf{k}_f\cdot\mathbf{r}'} W(\mathbf{r}') \phi_0(\mathbf{r}') d^3r'. \quad (63)$$

Nous voyons apparaître ici la transformée de Fourier de la fonction $W(\mathbf{r})\phi_0(\mathbf{r})$, prise au point $\mathbf{k}_f = k\mathbf{r}/r$. Pour la suite, il sera utile d'introduire la fonction proportionnelle à cette transformée de Fourier :

$$g(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{m_r}{2\pi\hbar^2}} \int \phi_0(\mathbf{r}) W(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r \quad (64)$$

$$= \sqrt{\frac{m_r}{2\pi\hbar^2}} \langle \mathbf{k} | \hat{W} | \phi_0 \rangle. \quad (65)$$

Comme nous l'avons écrit plus haut, l'hypothèse de réalité et d'isotropie pour $\phi_0 W$ entraîne que g est également réelle et isotrope : $g(\mathbf{k}) = g(k)$.

L'amplitude de diffusion associée à l'état stationnaire de diffusion (63) s'écrit

$$f(k) = -\alpha \sqrt{\frac{m_r}{2\pi\hbar^2}} g(k), \quad (66)$$

et il nous faut maintenant trouver le coefficient α pour terminer notre étude du problème de diffusion.

Pour cela, nous reportons le résultat (62) pour $|\psi_{\mathbf{k}}\rangle$ dans la seconde équation du système (58-59) et nous trouvons

$$\hat{W}|\mathbf{k}\rangle + \alpha\hat{W}\hat{G}_0(E)\hat{W}|\phi_0\rangle + E_f\alpha|\phi_0\rangle = E\alpha|\phi_0\rangle. \quad (67)$$

Projetons cette équation sur $|\phi_0\rangle$ et regroupons les termes proportionnels à α pour arriver à l'expression explicite :

$$\alpha = \frac{\langle \phi_0 | \hat{W} | \mathbf{k} \rangle}{E - E_f - \langle \phi_0 | \hat{W} \hat{G}_0(E) \hat{W} | \phi_0 \rangle}. \quad (68)$$

Le numérateur de (68) fait lui aussi intervenir la transformée de Fourier de la fonction $\phi_0(\mathbf{r}) W(\mathbf{r})$ prise au point \mathbf{k} . L'élément de matrice intervenant au dénominateur s'écrit :

$$-\langle \phi_0 | \hat{W} \hat{G}_0(E) \hat{W} | \phi_0 \rangle = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{|\langle \phi_0 | \hat{W} | \mathbf{q} \rangle|^2}{E - \varepsilon(\mathbf{q}) + i0_+} d^3q, \quad (69)$$

où l'on a posé comme dans les cours précédents $\varepsilon(\mathbf{q}) = \hbar^2 q^2 / 2m_r$. Là encore, nous voyons apparaître la transformée de Fourier de $\phi_0(\mathbf{r}) W(\mathbf{r})$, cette fois-ci prise en un point générique \mathbf{q} .

Pour évaluer (69), utilisons l'égalité habituelle au sens des distributions :

$$\frac{1}{E - \varepsilon(\mathbf{q}) + i0_+} = \mathcal{P}\mathcal{P} \left(\frac{1}{E - \varepsilon(\mathbf{q})} \right) - i\pi \delta(E - \varepsilon(\mathbf{q})). \quad (70)$$

Intéressons-nous d'abord à la partie imaginaire de cette expression. On a $\delta(E - \frac{\hbar^2 q^2}{2m_r}) = \delta(k - q) \frac{m_r}{\hbar^2 q}$, ce qui conduit au résultat simple :

$$\text{partie imaginaire de (69)} : \quad ik g^2(k). \quad (71)$$

La partie réelle quant à elle ne peut pas être calculée explicitement à ce stade et nous poserons simplement, une fois l'intégrale angulaire effectuée :

$$\text{partie réelle de (69)} : \quad \delta E_f(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{q^2 g^2(q)}{q^2 - k^2} dq. \quad (72)$$

La valeur recherchée de α est donc :

$$\alpha = \frac{\sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{m_r}} g(k)}{E - E_f + \delta E_f(k) + ik g^2(k)} \quad (73)$$

dont découle l'amplitude de diffusion (66) :

$$f(k) = -\frac{g^2(k)}{E - E_f + \delta E_f(k) + ik g^2(k)}, \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r}. \quad (74)$$

Insistons sur le fait que dans le cadre du modèle de départ, nous n'avons fait aucune approximation à ce stade. Cette amplitude de diffusion doit

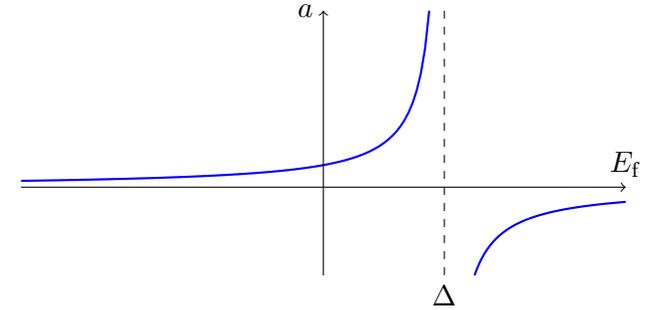


FIGURE 14. Variation de la longueur de diffusion a avec l'énergie E_f de l'état $|\phi_0\rangle$ pour notre modèle simple [Eq. (76)].

donc vérifier toutes les propriétés requises, en particulier le théorème optique. On vérifie effectivement que

$$\frac{1}{f(k)} = -\frac{E - E_f + \delta E_f(k)}{g^2(k)} - ik, \quad (75)$$

avec la partie imaginaire requise par l'unitarité.

4-3 Longueur de diffusion

La longueur de diffusion est définie comme $a = -\lim_{k \rightarrow 0} f(k)$, ce qui donne pour (74) :

$$a = -\frac{g_0^2}{E_f - \Delta} \quad \text{avec } g_0 \equiv g(0) \quad (76)$$

et

$$\Delta \equiv \delta E_f(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} |g(q)|^2 dq, \quad (77)$$

la quantité Δ étant manifestement positive.

Le résultat (76), tracé sur la figure 14, est le principal enseignement de cette étude. On peut obtenir n'importe quelle valeur pour la longueur de

diffusion, positive ou négative, en ajustant convenablement le paramètre de contrôle E_f . La résonance elle-même est obtenue en prenant

$$\text{résonance : } E_f = \Delta. \quad (78)$$

Cette position de la résonance n'est pas la position naïve $E_f = 0$ que l'on aurait pu attendre : la longueur de diffusion maximale (*i.e.* infinie) est obtenue en ajustant la position de l'état lié (légèrement) au dessus de l'énergie $E = 0$ du canal ouvert, avec l'expression formelle suivante pour le déplacement Δ [voir aussi (77)]

$$\Delta = -\langle \phi_0 | \hat{W} \hat{G}_0(0) \hat{W} | \phi_0 \rangle. \quad (79)$$

Dans le cadre de notre modèle, ce résultat est exact ; sa structure rappelle néanmoins la formule de perturbation au deuxième ordre de l'état $|\phi_0\rangle$, avec au numérateur le carré de l'élément de matrice de W qui connecte le canal fermé au canal ouvert, et au dénominateur l'énergie des états libres provenant de G_0 .

Nous étudierons au chapitre suivant les enseignements que l'on peut tirer de cette modélisation sur le plan physique.

Références

- ARNDT, M., M. Ben DAHAN, D. GUÉRY-ODELIN, M. W. REYNOLDS & J. DALIBARD (1997), « Observation of a zero-energy resonance in Cs-Cs collisions », in *Phys. Rev. Lett.* **79**, p. 625.
- BERGEMAN, T., M. G. MOORE & M. OLSHANII (2003), « Atom-Atom Scattering under Cylindrical Harmonic Confinement : Numerical and Analytic Studies of the Confinement Induced Resonance », in *Phys. Rev. Lett.* **91**, p. 163201.
- BUSCH, Thomas, Berthold-Georg ENGLERT, Kazimierz RZAŻEWSKI & Martin WILKENS (1998), « Two cold atoms in a harmonic trap », in *Foundations of Physics* **28**, p. 549-559.
- CHEN, Yue, Da-Wu XIAO, Ren ZHANG & Peng ZHANG (2020), *Analytical solution for the spectrum of two ultracold atoms in a completely anisotropic confinement*, arXiv : 2002.02168.
- CHIN, Cheng, Rudolf GRIMM, Paul JULIENNE & Eite TIESINGA (2010), « Feshbach resonances in ultracold gases », in *Rev. Mod. Phys.* **82**, p. 1225-1286.
- COURTEILLE, Ph., R. S. FREELAND, D. J. HEINZEN, F. A. van ABELEN & B. J. VERHAAR (1998), « Observation of a Feshbach Resonance in Cold Atom Scattering », in *Physical Review Letters* **81**, p. 69-72.
- DUINE, Rembert A & Henk TC STOOF (2004), « Atom–molecule coherence in Bose gases », in *Physics Reports* **396**, p. 115-195.
- FANO, U. (1961), « Effects of Configuration Interaction on Intensities and Phase Shifts », in *Phys. Rev.* **124**, p. 1866-1878.
- FESHBACH, Herman (1958), « Unified Theory of Nuclear Reactions », in *Annals of Physics* **5**, p. 357-390.
- (1962), « A unified theory of nuclear reactions. II », in *Annals of Physics* **19**, p. 287-313.
- GOGOLIN, Alexander O., Christophe MORA & Reinhold EGGER (2008), « Analytical Solution of the Bosonic Three-Body Problem », in *Phys. Rev. Lett.* **100**, p. 140404.
- GUAN, Qingze, V KLINKHAMER, R KLEMT, JH BECHER, A BERGSCHNEIDER, PM PREISS, S JOCHIM & D BLUME (2019), « Density Oscillations Induced by Individual Ultracold Two-Body Collisions », in *Physical review letters* **122**, p. 083401.
- HALLER, Elmar, Mattias GUSTAVSSON, Manfred J MARK, Johann G DANZL, Russell HART, Guido PUPILLO & Hanns-Christoph NÄGERL

- (2009), « Realization of an excited, strongly correlated quantum gas phase », in *Science* **325**, p. 1224-1227.
- INOUYE, S., M. ANDREWS, J. STENGER, H. J. MIESNER, D. M. STAMPER-KURN & W. KETTERLE (1998), « Observation of Feshbach resonances in a Bose–Einstein condensate », in *Nature* **392**, p. 151.
- KERMAN, Andrew J, Cheng CHIN, Vladan VULETIĆ, Steven CHU, Paul J LEO, Carl J WILLIAMS & Paul S JULIENNE (2001), « Determination of Cs–Cs interaction parameters using Feshbach spectroscopy », in *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IV-Physics* **2**, p. 633-639.
- KÖHLER, Thorsten, Krzysztof GÓRAL & Paul S. JULIENNE (2006), « Production of cold molecules via magnetically tunable Feshbach resonances », in *Rev. Mod. Phys.* **78**, p. 1311-1361.
- KOKKELMANS, S. J. J. M. F., J. N. MILSTEIN, M. L. CHIOFALO, R. WALSER & M. J. HOLLAND (2002), « Resonance superfluidity : Renormalization of resonance scattering theory », in *Physical Review A* **65**, p. 053617.
- LAMPORESI, G., J. CATANI, G. BARONTINI, Y. NISHIDA, M. INGUSCIO & F. MINARDI (2010), « Scattering in Mixed Dimensions with Ultracold Gases », in *Phys. Rev. Lett.* **104**, p. 153202.
- MASSIGNAN, Pietro & Yvan CASTIN (2006), « Three-dimensional strong localization of matter waves by scattering from atoms in a lattice with a confinement-induced resonance », in *Phys. Rev. A* **74**, p. 013616.
- MOERDIJK, A. J., B. J. VERHAAR & A. AXELSSON (1995), « Resonances in ultracold collisions of Li 6 , Li 7 , and Na 23 », in *Physical Review A* **51**, p. 4852-4861.
- NISHIDA, Yusuke & Shina TAN (2008), « Universal Fermi Gases in Mixed Dimensions », in *Phys. Rev. Lett.* **101**, p. 170401.
- OLSHANII, Maxim (1998), « Atomic scattering in the presence of an external confinement and a gas of impenetrable bosons », in *Physical review letters* **81**, p. 938.
- PETROV, D. S., M. HOLZMANN & G. V. SHLYAPNIKOV (2000), « Bose–Einstein Condensation in Quasi-2D Trapped Gases », in *Phys. Rev. Lett.* **84**, p. 2551.
- REYNOLDS, M. W., I. SHINKODA, R. W. CLINE & W. N. HARDY (1986), « Observation of inverse predissociation of spin-polarized atomic hydrogen at low temperatures », in *Phys. Rev. B* **34**, p. 4912-4915.
- ROBERTS, J. L., N. R. CLAUSSEN, James P. BURKE, Chris H. GREENE, E. A. CORNELL & C. E. WIEMAN (1998), « Resonant Magnetic Field Control of Elastic Scattering in Cold ^{85}Rb », in *Phys. Rev. Lett.* **81**, p. 5109-5112.
- SÖDING, J., D. GUERY-ODELIN, P. DESBIOLLES, G. FERRARI & J. DALIBARD (1998), « Giant spin relaxation of an ultracold cesium gas », in *Phys. Rev. Lett.* **80**, p. 1869.
- STWALLEY, William C. (1976), « Stability of Spin-Aligned Hydrogen at Low Temperatures and High Magnetic Fields : New Field-Dependent Scattering Resonances and Predissociations », in *Phys. Rev. Lett.* **37**, p. 1628-1631.
- TIESINGA, E., B. J. VERHAAR & H. T. C. STOOF (1993), « Threshold and resonance phenomena in ultracold ground-state collisions », in *Phys. Rev. A* **47**, p. 4114-4122.
- VOLZ, Thomas, Stephan DÜRR, Niels SYASSEN, Gerhard REMPE, Eric van KEMPEN & Servaas KOKKELMANS (2005), « Feshbach spectroscopy of a shape resonance », in *Phys. Rev. A* **72**, p. 010704.
- VULETIĆ, Vladan, Andrew J. KERMAN, Cheng CHIN & Steven CHU (1999), « Observation of Low-Field Feshbach Resonances in Collisions of Cesium Atoms », in *Phys. Rev. Lett.* **82**, p. 1406-1409.
- WEBER, Tino, Jens HERBIG, Michael MARK, Hanns-Christoph NÄGERL & Rudolf GRIMM (2003), « Bose-Einstein condensation of cesium », in *Science* **299**, p. 232-235.
- XIAO, Dawu, Ren ZHANG & Peng ZHANG (2019), « Confinement Induced Resonance with Weak Bare Interaction in a Quasi 3+0 Dimensional Ultracold Gas », in *Few-Body Systems* **60**, p. 63.
- YAMAGUCHI, Yoshio (1954), « Two-Nucleon Problem When the Potential Is Nonlocal but Separable. I », in *Phys. Rev.* **95**, p. 1628-1634.
- YAO, Xing-Can, Ran QI, Xiang-Pei LIU, Xiao-Qiong WANG, Yu-Xuan WANG et al. (2019), « Degenerate Bose gases near a d-wave shape resonance », in *Nature Physics* **15**, p. 570-576.