

# Chapitre 6

## Caractérisation d'une résonance de Fano–Feshbach

### Sommaire

---

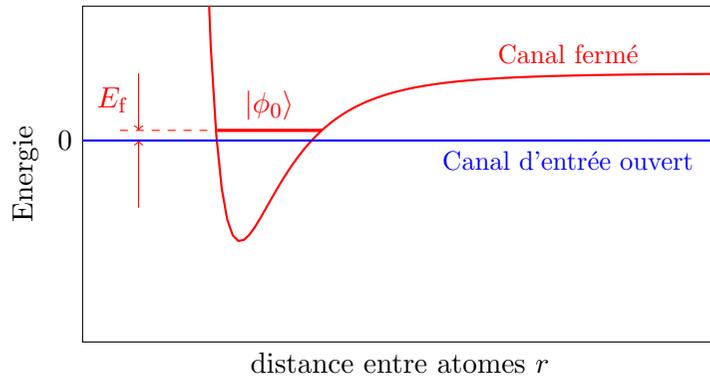
<b>1</b>	<b>Modélisation de la résonance</b>	<b>2</b>
1-1	Les ingrédients du modèle	2
1-2	Y a-t-il un état lié?	3
1-3	Structure de la résonance	4
1-4	Paramètres physiquement pertinents	5
1-5	Domaine utile pour ces paramètres	6
<b>2</b>	<b>Résonances larges, résonances étroites</b>	<b>7</b>
2-1	Côté $a > 0$ et énergie de l'état lié	7
2-2	La population du canal fermé	9
2-3	Côté $a < 0$ et forme de la résonance	10
<b>3</b>	<b>Modélisations et approches quantitatives</b>	<b>11</b>
3-1	L'approche "résonance isolée" standard	11
3-2	Modélisation par canaux couplés	12
3-3	Le couplage $\hat{W}$	14
3-4	Résonances assistées par un champ oscillant	15
<b>4</b>	<b>Quelques expériences récentes</b>	<b>16</b>
4-1	Mesures de précision sur le potassium 39	16
4-2	Résonances orbitales pour l'ytterbium 173	18
4-3	Le cas des lanthanides	20

---

Nous poursuivons dans ce chapitre notre étude des résonances de Fano–Feshbach. Rappelons qu'il s'agit d'un processus mettant en jeu deux canaux de collision, l'un ouvert, l'autre fermé, dont on peut contrôler les énergies relatives et ajuster ainsi la force de la résonance. Grâce à cet outil remarquable, on peut désormais utiliser des gaz quantiques dilués pour aborder la physique des interactions fortes, avec une longueur de diffusion qui peut atteindre, voire dépasser, la distance moyenne entre particules.

Au chapitre précédent, nous avons présenté un modèle simple pour décrire une résonance de Fano–Feshbach, avec un canal ouvert sans interaction et un canal fermé décrit par un potentiel séparable associé à une fonction  $\phi_0$ . Nous avons montré qu'il conduisait bien à un comportement résonnant de la longueur de diffusion quand l'énergie  $E_f$  du canal fermé approchait le zéro d'énergie du canal ouvert. Nous souhaitons maintenant approfondir les prédictions de ce modèle pour dégager la notion importante de largeur de résonance et de clarifier la contribution du canal fermé. Nous passerons ensuite à la description de traitements plus quantitatifs de ces résonances, pour terminer par la présentation de quelques expériences récentes. Nous examinerons les principaux outils disponibles au laboratoire pour caractériser ces résonances et nous verrons qu'elles peuvent avoir des prolongements inattendus, en lien par exemple avec la théorie du chaos quantique.

Comme nous l'avons déjà indiqué au chapitre précédent, la littérature traitant des résonances de Fano–Feshbach dans les gaz atomiques est extrêmement vaste et il n'est pas possible de citer ici tous les travaux importants



**FIGURE 1.** Modélisation d'une résonance de Fano–Feshbach. Nous supposons qu'il n'y a pas d'interaction dans le canal d'entrée (canal ouvert). Par ailleurs, nous faisons l'approximation qu'un seul état lié du canal fermé contribue de manière significative à la résonance.

qui ont été menés. Nous renvoyons le lecteur intéressé vers les articles de revue de KÖHLER, GÓRAL et al. (2006), CHIN, GRIMM et al. (2010) et NAIDON & ENDO (2017).

## 1 Modélisation de la résonance

### 1-1 Les ingrédients du modèle

Le modèle introduit au chapitre précédent est fondé sur les éléments suivants (figure 1) :

- Dans le canal ouvert, les particules n'interagissent pas entre elles.
- Dans le canal fermé, le potentiel d'interaction est séparable, correspondant simplement au projecteur sur l'état localisé  $|\phi_0\rangle$ .
- Le couplage entre canal ouvert et canal fermé est décrit par le potentiel  $\hat{W}(\mathbf{r})$ .

Dans ce modèle, un état donné de la variable relative pour notre paire

d'atomes est un spineur à deux composantes, donnant les amplitudes de probabilité pour les deux canaux :

$$\begin{pmatrix} \text{ouvert} \\ \text{fermé} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\psi\rangle \\ |\phi\rangle \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad |\phi\rangle = \alpha|\phi_0\rangle. \quad (1)$$

Les inconnues sont la fonction d'onde  $\psi(\mathbf{r})$  et le coefficient de proportionnalité  $\alpha$ , ces inconnues étant déterminées en résolvant l'équation aux valeurs propres pour l'hamiltonien. Plus précisément, un état propre d'énergie  $E$  dans ce modèle à deux canaux satisfait les deux équations couplées

$$\hat{H}_0|\psi\rangle + \hat{W}|\phi\rangle = E|\psi\rangle \quad (2)$$

$$\hat{W}|\psi\rangle + E_f|\phi\rangle = E|\phi\rangle. \quad (3)$$

Le résultat principal de l'analyse menée au chapitre précédent est l'expression de  $f(k)$ , amplitude de diffusion en onde s :

$$f(k) = \frac{g^2(k)}{E_f - E + \langle \phi_0 | \hat{W} \hat{G}_0(E) \hat{W} | \phi_0 \rangle} \quad \text{avec} \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r}, \quad (4)$$

$$= \frac{g^2(k)}{E_f - E - \delta E_f(k) - ikg^2(k)}, \quad (5)$$

où le couplage  $g(k)$  est relié à la transformée de Fourier du produit  $W(\mathbf{r})\phi_0(\mathbf{r})$ , supposé ici isotrope :

$$g(k) = \sqrt{\frac{m_r}{2\pi\hbar^2}} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} W(\mathbf{r}) \phi_0(\mathbf{r}) d^3r = \sqrt{\frac{m_r}{2\pi\hbar^2}} \langle \mathbf{k} | \hat{W} | \phi_0 \rangle. \quad (6)$$

Le décalage en énergie  $\delta E_f(k)$  est donné par

$$\delta E_f(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{q^2 g^2(q)}{q^2 - k^2} dq. \quad (7)$$

La limite  $k \rightarrow 0$  de l'amplitude de diffusion  $f(k)$  donne la longueur de diffusion

$$a = -\frac{g_0^2}{\tilde{E}_f} \quad \text{avec} \quad g_0 \equiv g(0), \quad \tilde{E}_f \equiv E_f - \Delta \quad (8)$$

et

$$\Delta \equiv \delta E_f(0) = -\langle \phi_0 | \hat{W} \hat{G}_0(0) \hat{W} | \phi_0 \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} g^2(q) dq. \quad (9)$$

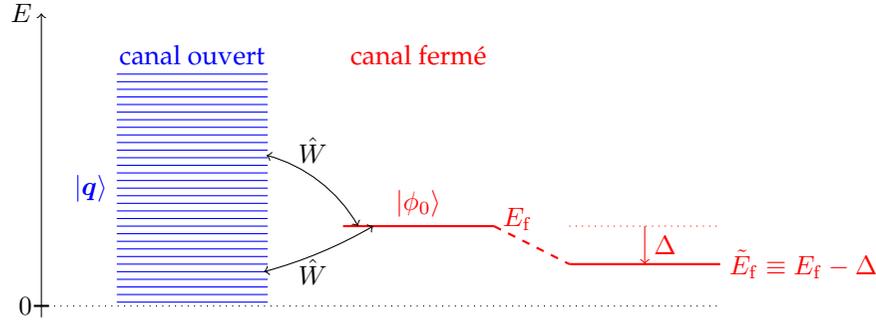


FIGURE 2. L'énergie du canal fermé est déplacée du fait de son couplage avec le continuum formé par le canal ouvert. La résonance se produit quand ce déplacement amène le niveau  $|\phi_0\rangle$  à l'énergie nulle [cf. eq. (10)].

L'expression (8) montre que la résonance  $a = \pm\infty$  se produit quand on ajuste l'énergie du canal fermé à

$$\tilde{E}_f = E_f - \Delta = 0. \quad (10)$$

On aurait pu s'attendre naïvement à ce que la résonance se produise lorsque  $E_f = 0$ , c'est-à-dire lorsque l'énergie de l'état du canal fermé coïncide avec la valeur asymptotique du canal ouvert, en l'occurrence  $E = 0$ . Mais cela reviendrait à ignorer que le couplage entre les deux canaux déplace l'énergie de l'état du canal fermé. Le décalage de la résonance à  $E_f = \Delta$  s'explique simplement en considérant le déplacement en énergie de  $|\phi_0\rangle$  à l'ordre 2 de la théorie des perturbations<sup>1</sup> (cf. figure 2) :

$$\begin{aligned} E_f^{(2)} &= E_f + \sum_{\mathbf{q}} \frac{|\langle \mathbf{q} | \hat{W} | \phi_0 \rangle|^2}{E_f - \epsilon_{\mathbf{q}}} \quad \text{avec} \quad \epsilon_{\mathbf{q}} = \frac{\hbar^2 q^2}{2m_r}, \\ &= E_f + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{|\langle \mathbf{q} | \hat{W} | \phi_0 \rangle|^2}{E_f - \epsilon_{\mathbf{q}}} d^3q. \end{aligned} \quad (11)$$

À cet ordre de la théorie des perturbations, la résonance entre les deux

1. Le déplacement à l'ordre 1 est nul car on a supposé  $\langle \phi_0 | \hat{W} | \phi_0 \rangle = 0$ .

canaux est attendue pour  $E_f^{(2)} = 0$ , c'est-à-dire

$$0 = E_f + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{|\langle \mathbf{q} | \hat{W} | \phi_0 \rangle|^2}{-\epsilon_{\mathbf{q}}} d^3q \quad (12)$$

où l'on a pris  $E_f = 0$  dans l'intégrale du membre de droite, puisque le numérateur de cette intégrale fait déjà intervenir le couplage à l'ordre 2. En utilisant la relation (6) entre l'élément de matrice  $\langle \mathbf{q} | \hat{W} | \phi_0 \rangle$  et  $g(q)$ , on vérifie immédiatement que cette condition de résonance est équivalente à (10), c'est-à-dire  $\tilde{E}_f = 0$ .

## 1-2 Y a-t-il un état lié ?

Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, le problème de la diffusion à basse énergie est intimement lié à la recherche des états faiblement liés. Plus précisément, nous savons que pour une diffusion monocal, la divergence de  $a$  est associée à l'apparition d'un nouvel état lié : cet état apparaît quand  $a$  bascule des valeurs grandes et négatives vers les valeurs grandes et positives. Son énergie dans le régime des grandes valeurs de  $a$  est donnée par

$$E_{\text{lié}} \approx -\frac{\hbar^2}{2m_r a^2}, \quad (13)$$

et sa fonction d'onde est

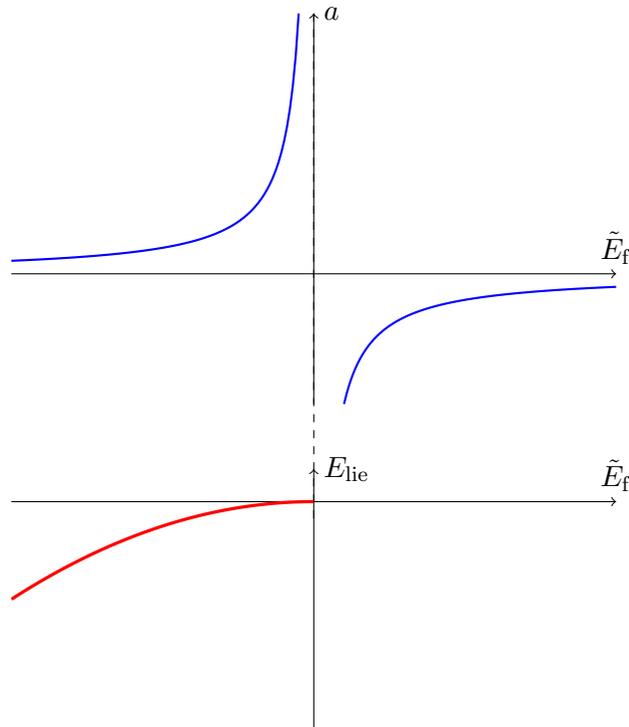
$$\psi_{\text{lié}}(\mathbf{r}) \approx \frac{e^{-\kappa r}}{r} \quad \text{avec} \quad \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m_r} = |E_{\text{lié}}|. \quad (14)$$

Ce résultat reste valable dans notre modèle à deux canaux, au moins au voisinage immédiat de la résonance.

La recherche explicite des états liés est menée dans l'appendice de ce chapitre. On y montre qu'il y a au plus un état lié et que son énergie (quand il existe) est donnée par le pôle de l'amplitude de diffusion (4), c'est-à-dire une énergie  $E$  satisfaisant l'équation :

$$E - \langle \phi_0 | \hat{W} \hat{G}_0(E) \hat{W} | \phi_0 \rangle = E_f. \quad (15)$$

On y montre également que cette équation n'admet de solution que si  $\tilde{E}_f < 0$ , c'est-à-dire que si la longueur de diffusion est positive. Cette situation est résumée sur la figure 3.



**FIGURE 3.** Haut : variation de la longueur de diffusion  $a$  avec l'énergie  $E_f$  de l'état  $|\phi_0\rangle$  pour notre modèle simple [Eq. (8)]. Bas : variation de l'énergie de l'état lié selon la loi "universelle" (13). L'état lié apparaît dans le domaine  $E_f - \Delta < 0$ , correspondant aux valeurs positives de  $a$ . Les limites de la région où cette loi universelle est valable seront discutées en § 2.

On peut retrouver ce résultat simplement à partir de l'amplitude de diffusion calculée<sup>2</sup> à l'ordre 1 en  $k$ , donc au voisinage immédiat de la résonance :

$$\text{ordre 1 en } k : \quad f(k) \approx \frac{g_0^2}{\tilde{E}_f - ikg_0^2} \quad (17)$$

La fonction  $f(k)$  admet dans la limite basse énergie un pôle en  $k = i\kappa$  avec  $\kappa = -(E_f - \Delta)/g_0^2 = 1/a$ , de sorte que l'état correspondant<sup>3</sup>  $\propto e^{i\kappa r} = e^{-\kappa r}$  n'est décroissant à l'infini que si  $\kappa > 0$ , donc  $a > 0$ . L'énergie de l'état lié est alors bien donnée par la loi "universelle" (13) dans le cadre de ce calcul mené à l'ordre 1 en  $k$ .

Notons par ailleurs que la portée  $1/\kappa = a$  de la fonction d'onde de l'état lié est très grande dans le régime proche de résonance. Elle dépasse donc celle de l'état  $|\phi_0\rangle$  du canal fermé qui est une quantité fixée. Par conséquent, on s'attend à ce que l'état lié soit essentiellement porté par le canal ouvert dans ce régime. Nous vérifierons et préciserons ce point dans la prochaine section.

### 1-3 Structure de la résonance

Avant d'aller plus loin dans l'exploration de notre modèle, il est utile de vérifier que la forme (5) trouvée pour l'amplitude de diffusion correspond bien aux expressions canoniques données dans la littérature. Commençons par LANDAU & LIFSHITZ (1975), qui proposent l'écriture suivante au voisinage d'une résonance de diffusion [leur eq. (134.17)] :

$$f(k) = -\alpha - \frac{\hbar\gamma}{\sqrt{2m_r} \left( E - E_0 + i\gamma\sqrt{E} \right)}, \quad (18)$$

où  $\alpha$  représente la longueur de diffusion "de fond" (*background scattering length*) prise nulle dans notre modèle. Notre résultat (5) se ramène à la

2. On vérifiera que du fait de la symétrie sphérique de la fonction  $W\phi_0$ , sa transformée de Fourier

$$g(q) = \frac{2\pi}{q} \int_0^{+\infty} \sin(qr) W(r) \phi_0(r) r dr \quad (16)$$

à un développement de Taylor n'incluant que des puissances paires de  $q$ .

3. Rappelons que c'est  $e^{i\kappa r}$  et non  $e^{-i\kappa r}$  que nous avons sélectionné en prenant la fonction de Green avancée, d'où la nécessité d'avoir  $\kappa > 0$ .

forme de LANDAU & LIFSHITZ (1975) quand on prend les limites à  $k$  petit :  $g(k) \rightarrow g_0$ ,  $\delta E_f(k) \rightarrow \Delta$ ; il suffit alors de poser  $E_0 = E_f - \Delta$  et de définir la largeur  $\gamma$  par :

$$\frac{\hbar\gamma}{\sqrt{2m_r}} = g_0^2, \quad (19)$$

pour identifier (5) et (18).

Très récemment, NAIDON & PRICOUPENKO (2019) ont fait une analyse critique des traitements utilisés jusqu'ici pour les résonances de Fano–Feshbach en physique atomique. Ils utilisent la forme suivante pour la longueur de diffusion [leur eq. (17)] :

$$a = a_{\text{bg}} - \frac{\lim_{k \rightarrow 0} \Gamma/2k}{E_m + \Delta} \quad (20)$$

où  $a_{\text{bg}}$  est là aussi la longueur de diffusion "de fond". Cela correspond à notre expression (8) avec la même définition de  $\Delta$  (au signe près), l'identification  $E_m \equiv E_f$  et la définition de la largeur  $\Gamma$  :

$$\Gamma = 2kg_0^2. \quad (21)$$

Dans les deux cas cités ci-dessus, les largeurs  $\gamma$  et  $\Gamma$  sont des quantités dimensionnées, proportionnelles à notre paramètre  $g_0^2$ . Pour définir sans ambiguïté la notion de résonance large et de résonance étroite, il est préférable d'utiliser un nombre sans dimension, c'est-à-dire comparer  $\gamma$  ou  $\Gamma$  à une quantité physiquement pertinente et de même dimension. C'est ce que nous allons faire dans le paragraphe qui suit.

#### 1-4 Paramètres physiquement pertinents

Une résonance de Fano–Feshbach conduit à une divergence de la longueur de diffusion vers les valeurs positives et négatives selon le signe de  $\tilde{E}_f$ . Elle conduit en particulier au régime universel d'une résonance à énergie nulle du cas mono-canal, avec un état lié d'énergie  $\approx -\hbar^2/2m_r a^2$  quand  $\tilde{E}_f$  est suffisamment proche de 0 et négatif. Pour mieux caractériser une résonance de Fano–Feshbach, il faut maintenant préciser sa largeur, c'est-à-dire le domaine sur lequel le régime universel s'applique.

Nous allons pour cela partir d'une valeur "raisonnable" pour  $a$ ; nous pouvons utiliser la longueur  $R_{\text{vdW}} = \frac{1}{2} (2m_r C_6/\hbar^2)^{1/4}$  introduite au chapitre 4 pour l'interaction de van der Waals. On peut supposer que le canal ouvert, que nous avons pris ici sans interaction pour simplifier les calculs, possède en fait une longueur de diffusion de cet ordre. La question importante à ce stade est la suivante : le régime universel peut-il couvrir toutes les valeurs de  $|a|$  depuis l'infini jusqu'à  $\sim R_{\text{vdW}}$  ou s'interrompt-il bien avant? Nous allons voir que la réponse à cette question dépend de la force du couplage entre les deux canaux.

Pour caractériser la force du couplage de notre modèle, nous allons utiliser l'énergie  $\Delta$  définie en (9), dont nous avons vu qu'elle correspondait au déplacement de l'état du canal fermé induit par le couplage  $\tilde{W}$ , à l'ordre deux de la théorie des perturbations. Il sera utile de relier cette énergie  $\Delta$  au paramètre  $g_0^2$  qui entre dans l'expression de  $a$  [cf. (8)]; pour cela, faisons l'hypothèse que le produit  $W(r)\phi_0(r)$  a lui-même une extension spatiale de l'ordre de  $R_{\text{vdW}}$ , c'est-à-dire une extension  $\sim 1/R_{\text{vdW}}$  pour sa transformée de Fourier  $g(q)$  définie en (6). Comme l'énergie  $\Delta$  définie en (9) fait intervenir l'intégrale sur  $q$  de  $g^2(q)$ , on en déduit :

$$\Delta \sim \frac{g_0^2}{R_{\text{vdW}}}. \quad (22)$$

Dans ce qui suit, nous supposons pour simplifier que la relation ci-dessus est une égalité. L'introduction d'un facteur multiplicatif d'ordre 1 ne changerait rien à nos conclusions.

Le problème de van der Waals fournit une échelle d'énergie naturelle,  $E_{\text{vdW}} = \hbar^2/(2m_r R_{\text{vdW}}^2)$ , et il est donc naturel de mesurer l'énergie  $\Delta$  avec cette échelle. Nous expliquerons en détail dans la section 2 pourquoi le rapport  $\Delta/E_{\text{vdW}}$  est déterminant pour caractériser la nature de la résonance. Plus précisément, nous utiliserons la classification suivante :

$$\text{Résonance large : } \Delta \gg E_{\text{vdW}}, \quad (23)$$

$$\text{Résonance étroite : } \Delta \ll E_{\text{vdW}}. \quad (24)$$

Nous pouvons d'ores et déjà en donner une explication qualitative en revenant à l'expression (5) de l'amplitude de diffusion  $f(k)$ . Les valeurs physiquement intéressantes de  $k$  sont  $\lesssim 1/R_{\text{vdW}}$  puisqu'au delà de cette valeur, les contributions des autres ondes partielles deviennent significatives. À

l'ordre 0 en  $k$ , on a  $f(k) = -a$  que nous avons déjà commenté. À l'ordre 1 en  $k$ ,  $E_f - \delta E_f(k) = E_f - \Delta = \tilde{E}_f$ ,  $g(k) = g_0$ ,  $E = 0$  et on trouve

$$\text{ordre 1 en } k : \quad f(k) = \frac{g_0^2}{\tilde{E}_f - ikg_0^2} \quad (25)$$

qui conduit au régime "universel". Regardons maintenant les corrections possibles à l'ordre 2 en  $k$  qui sont de deux natures :

- Le développement de Taylor de  $g^2(k)$  et de  $\delta E_f(k)$  : si on prend une fonction  $g(k)$  variant doucement à l'échelle de  $1/R_{\text{vdW}}$ , on ne s'attend pas à ce que ces corrections, qui sont de type *portée effective*, jouent un rôle différent de celui qu'elles ont pour une diffusion mono-canal.
- L'énergie  $E = \hbar^2 k^2 / 2m_r$  qu'il s'agit de comparer au terme linéaire  $ikg_0^2$  pour  $k$  allant jusqu'à la valeur  $1/R_{\text{vdW}}$ . On constate alors immédiatement que cet terme est négligeable pour une résonance large, alors qu'il est dominant pour une résonance étroite.

On s'attend donc – et cela sera confirmé en § 2 – à ce que pour une résonance large, les propriétés de la résonance de collision soient similaires à celles d'une résonance à énergie nulle mono-canal. Au contraire pour une résonance étroite, seule la proximité immédiate de  $\tilde{E}_f = 0$ , avec des grandes longueurs de diffusion et des valeurs de  $k$  associées très faibles, pourra être décrite avec le formalisme d'une résonance mono-canal. Dès que l'on sort de ce domaine, il faut revenir à la description en termes de canaux couplés ; en particulier, la contribution du canal fermé domine celle du canal ouvert pour l'état lié associé à la résonance de diffusion.

**Remarque : Lien avec d'autres paramétrisations.** Le paramètre sans dimension  $\Delta/E_{\text{vdW}}$  utilisé ici est équivalent à celui introduit par NAIDON & ENDO (2017) :

$$\frac{\Delta}{E_{\text{vdW}}} \sim \frac{R_{\text{vdW}}}{R_*} \quad \text{avec} \quad R_* \equiv \frac{\hbar^2}{2m_r g_0^2}. \quad (26)$$

On pourra vérifier que ce paramètre coïncide également avec le paramètre  $s_{\text{res}}$  introduit par CHIN, GRIMM et al. (2010) [leur équation (35)], une fois éliminées les références à la longueur de diffusion de fond  $a_{\text{bg}}$  et au moment magnétique des atomes. Le tableau 1 donne la largeur de ce paramètre  $s_{\text{res}} \approx \Delta/E_{\text{vdW}}$  pour quelques résonances de Fano–Feshbach connues pour les atomes alcalins.

Atome	$B$ [G]	$a_{\text{bg}}$ [ $a_0$ ]	$s_{\text{res}}$
$^6\text{Li}$	834.1	-1405	59
	690.4	-1727	29
	811.2	-1490	46
$^7\text{Li}$	736.8	-25	0.80
$^{23}\text{Na}$	907	63	0.09
$^{39}\text{K}$	402.4	-29	2.1
$^{40}\text{K}$	224.2	174	2.7
$^{85}\text{Rb}$	155.04	-443	28
$^{87}\text{Rb}$	1007.4	100	0.13
$^{133}\text{Cs}$	48.0	926	0.67

**TABLE 1.** Largeur  $s_{\text{res}}$  de quelques résonances de Fano–Feshbach pour les atomes alcalins. Nous reproduisons ici les valeurs données par CHIN, GRIMM et al. (2010) pour leur paramètre sans dimension  $s_{\text{res}}$  qui coïncide pratiquement avec notre  $g_0^2/(R_{\text{vdW}}E_{\text{vdW}}) \approx \Delta/E_{\text{vdW}}$ .

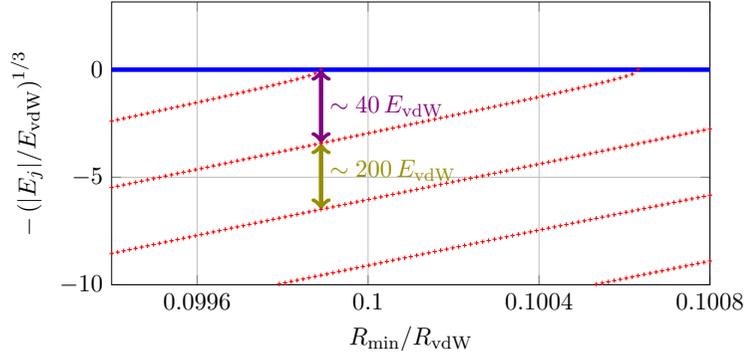
## 1-5 Domaine utile pour ces paramètres

Notre traitement de la résonance de Fano–Feshbach repose sur deux paramètres sans dimensions

$$\frac{\Delta}{E_{\text{vdW}}} \quad \text{et} \quad \frac{\tilde{E}_f}{E_{\text{vdW}}}. \quad (27)$$

Le premier caractérise la force du couplage, le second l'écart à la résonance. Nous allons voir que deux contraintes existent sur le domaine utile pour ces paramètres.

**Critère 1 :** Notre traitement repose sur l'hypothèse que la résonance décrite par le couplage à l'état lié  $|\phi_0\rangle$  est isolée. Cette hypothèse n'a de sens que si le déplacement  $\Delta$  de l'état lié considéré est suffisamment faible pour ne pas l'amener au voisinage d'autres états liés. Or, cet état est généralement le dernier ou l'avant-dernier état lié du canal fermé. Nous avons vu au chapitre 4 que l'écart en énergie entre les deux derniers états liés varie entre 40 et 200  $E_{\text{vdW}}$  (cette structure est rappelée en figure 4). Par sécurité,



**FIGURE 4. Critère 1.** Énergies des derniers états liés dans un potentiel de van der Waals (cf. chapitre 4). Si on utilise le dernier état lié du canal fermé pour induire la résonance de Fano–Feshbach, le modèle utilisé dans ce chapitre n’a de sens que si on limite le déplacement  $\Delta$  à moins d’une centaine de  $E_{\text{vdW}}$ .

nous prendrons comme plage de variation de  $\Delta$  la valeur typique

$$\frac{\Delta}{E_{\text{vdW}}} \lesssim 100. \quad (28)$$

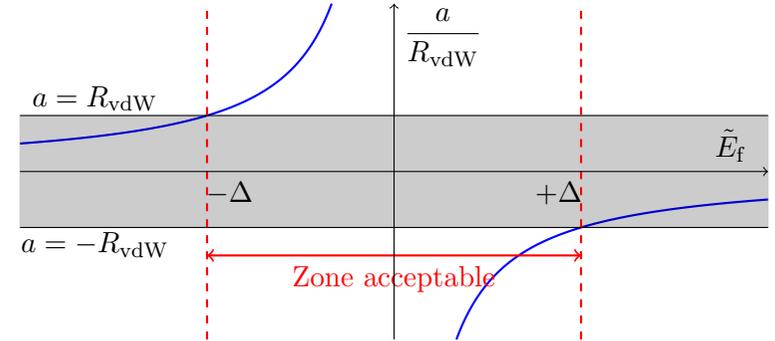
Au delà de cette valeur, il est possible qu’un autre état lié, non pris en compte dans le modèle, soit plus proche du seuil  $E = 0$  du canal ouvert; notre modèle perdrait alors son intérêt. On vérifiera que les valeurs de  $s_{\text{res}} \approx \Delta/E_{\text{vdW}}$  données dans la table 1 satisfont bien cette inégalité.

**Critère 2.** En utilisant l’estimation (22) de l’énergie  $\Delta$ , la valeur (8) de la longueur de diffusion peut s’écrire :

$$\frac{a}{R_{\text{vdW}}} \sim \frac{\Delta}{\tilde{E}_f}. \quad (29)$$

Or notre modèle vise à décrire une résonance de la longueur de diffusion, donc des valeurs de  $a$  supérieures *a priori* à la valeur typique  $R_{\text{vdW}}$ . Il nous faut donc restreindre l’amplitude de variation de  $|\tilde{E}_f|$  à l’intervalle

$$|\tilde{E}_f| \lesssim \Delta. \quad (30)$$



**FIGURE 5. Critère 2.** Domaine de validité  $|\tilde{E}_f| \lesssim \Delta$  imposé par la condition  $|a| \gtrsim R_{\text{vdW}}$  [cf. (30)].

Au delà de cet intervalle, tracé en figure 5, les valeurs trouvées pour  $a$  seraient anormalement basses et probablement peu significatives en comparaison avec une longueur de diffusion de fond typique.

## 2 Résonances larges, résonances étroites

### 2-1 Côté $a > 0$ et énergie de l’état lié

Nous allons nous concentrer dans ce paragraphe sur le cas des longueurs de diffusion positives, c’est-à-dire  $\tilde{E}_f < 0$ . Notre point de départ va être l’amplitude de diffusion (5), que nous récrivons après avoir pris la limite à  $k$  petit :  $g(k) \rightarrow g_0$ ,  $\delta E_f(k) \rightarrow \Delta$ , comme suggéré par la comparaison avec le résultat de LANDAU & LIFSHITZ (1975) faite au paragraphe précédent :

$$f(k) \approx \frac{g_0^2}{\tilde{E}_f - E - ikg_0^2}, \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r}. \quad (31)$$

Remarquons que cette expression ne résulte pas d’un développement systématique de  $f(k)$  à l’ordre 2 en  $k$  puisqu’il faudrait inclure en principe à cet ordre des corrections à  $g_0$  et à  $\Delta$  :

$$g(k) = g_0 (1 + \nu k^2 + \dots), \quad \delta E_f(k) = \Delta (1 + \nu' k^2 + \dots) \quad (32)$$

avec  $\nu, \nu' \sim R_{\text{vdW}}^2$ . Toutefois, nous allons pouvoir dégager les éléments principaux avec cette version simplifiée, les corrections supplémentaires liées aux variations de  $g(k)$  et  $\delta E_f(k)$  étant de même nature que celles induites par le terme de portée effective dans le cas mono-canal.

Les énergies (approchées) des états liés s'obtiennent en cherchant les pôles de cette amplitude de diffusion. Posons donc  $k = i\kappa$  et cherchons les solutions avec  $\kappa$  réel positif, de sorte que la fonction d'onde  $e^{ikr}/r = e^{-\kappa r}/r$  soit physiquement acceptable (*i.e.* normalisable). Nous devons résoudre l'équation du second degré en  $\kappa$  :

$$\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m_r} + g_0^2 \kappa + \tilde{E}_f = 0. \quad (33)$$

Introduisons la quantité sans dimension  $X = \kappa R_{\text{vdW}}$  qui permet de ré-écrire cette équation sous la forme :

$$X^2 + \left( \frac{\Delta}{E_{\text{vdW}}} \right) X + \left( \frac{\tilde{E}_f}{E_{\text{vdW}}} \right) = 0, \quad (34)$$

où nous avons supposé que (22) était exacte pour simplifier les notations. L'énergie de l'état lié s'écrit en fonction de  $X$  :

$$\frac{E_{\text{lie}}}{E_{\text{vdW}}} = -\kappa^2 R_{\text{vdW}}^2 = -X^2. \quad (35)$$

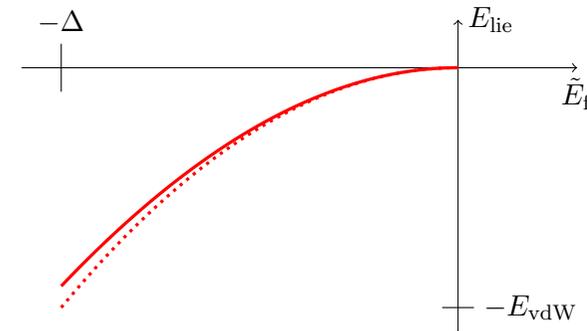
Rappelons que nous cherchons à voir de quelle manière le paramètre  $\kappa$  passe de la valeur 0 à résonance à la valeur "typique"  $\sim 1/R_{\text{vdW}}$  : nous nous intéressons donc aux valeurs de l'inconnue  $X$  comprises entre 0 et 1.

L'équation (34) admet une solution positive (unique) si et seulement si  $\tilde{E}_f < 0$  :

$$2X = -\frac{\Delta}{E_{\text{vdW}}} + \sqrt{\left( \frac{\Delta}{E_{\text{vdW}}} \right)^2 - 4 \frac{\tilde{E}_f}{E_{\text{vdW}}}}, \quad (36)$$

dont nous allons maintenant discuter les variations. Remarquons tout d'abord qu'au voisinage immédiat de la résonance, c'est-à-dire pour  $\tilde{E}_f$  petit, cette solution s'écrit [cf. (8)]

$$4|\tilde{E}_f| \ll \frac{\Delta^2}{E_{\text{vdW}}} : \quad X \approx -\frac{\tilde{E}_f}{\Delta} \Leftrightarrow \kappa \approx \frac{1}{a}. \quad (37)$$



**FIGURE 6.** Courbe continue : variation de l'énergie de l'état lié avec  $\tilde{E}_f$  déduite de (35-36), pour une résonance large ( $\Delta = 20 E_{\text{vdW}}$ ). L'approximation  $E_{\text{lie}} = -\hbar^2/2m_r a^2$ , tracée en pointillés, est valable sur toute la plage accessible de  $\tilde{E}_f$ , c'est-à-dire pour  $a$  variant entre  $R_{\text{vdW}}$  et  $+\infty$ .

On retrouve donc le résultat

$$E_{\text{lie}} \approx -\frac{\hbar^2}{2m_r a^2}, \quad (38)$$

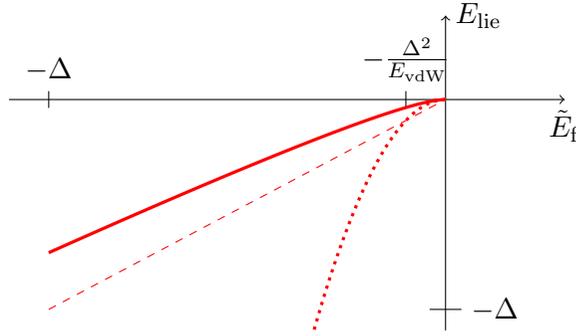
c'est-à-dire la loi universelle reliant longueur de diffusion et énergie du dernier état lié quand il est proche de la limite de dissociation.

Pour aller plus loin, nous allons distinguer les deux cas d'une résonance large ( $\Delta \gg E_{\text{vdW}}$ ) et d'une résonance étroite ( $\Delta \ll E_{\text{vdW}}$ ).

**Résonance large**  $\Delta \gg E_{\text{vdW}}$ . Dans ce cas, le développement limité (37) peut être étendu à toute la plage d'énergie pertinente de  $|\tilde{E}_f|$ , comprise entre 0 et  $\Delta$ . Quand  $|\tilde{E}_f|$  atteint la valeur  $\Delta$ , on a  $X \sim 1$  et donc  $\kappa \sim 1/R_{\text{vdW}}$ . Le régime universel (38) s'étend donc à toutes les valeurs de la longueur de diffusion  $a$ , depuis  $R_{\text{vdW}}$  jusqu'à  $+\infty$ .

**Résonance étroite**  $\Delta \ll E_{\text{vdW}}$ . Dans ce cas, le développement limité cesse d'être valable pour

$$|\tilde{E}_f| \sim \frac{\Delta^2}{E_{\text{vdW}}} \Leftrightarrow \frac{a}{R_{\text{vdW}}} \sim \frac{E_{\text{vdW}}}{\Delta} \gg 1, \quad (39)$$



**FIGURE 7.** Courbe continue : variation de l'énergie de l'état lié avec  $\tilde{E}_f$  déduite de (35-36), pour une résonance étroite ( $\Delta = 0.1 E_{vdW}$ ). L'approximation  $E_{lie} = -\hbar^2/2m_r a^2$ , tracée en pointillés, n'est valable que sur une faible plage :  $|\tilde{E}_f| < \Delta^2/E_{vdW}$ . Sur le reste de la plage accessible pour  $\tilde{E}_f$ , l'énergie de l'état lié varie à peu près linéairement, comme prédit en (41) et tracé en tiret.

et on bascule ensuite sur un autre régime, non universel :

$$\frac{\Delta^2}{E_{vdW}} \ll |\tilde{E}_f| \lesssim \Delta : \quad X \approx \sqrt{|\tilde{E}_f|/E_{vdW}} \quad \Leftrightarrow \quad \hbar\kappa \approx \sqrt{2m_r|\tilde{E}_f|} \quad (40)$$

où nous avons pris en compte la limitation (30) sur  $\tilde{E}_f$ . Ceci donne pour l'énergie de l'état lié :

$$E_{lie} = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m_r} \approx \tilde{E}_f \quad (41)$$

ou encore

$$E_{lie} \approx -\Delta \frac{R_{vdW}}{a}, \quad (42)$$

ce qui donne  $E_{lie} \approx -\Delta$  quand on atteint la limite de validité du modèle  $a \approx R_{vdW}$ .

L'état est beaucoup moins lié que ce qu'on attendrait si la prédiction universelle  $\hbar^2/2m_r a^2$  s'appliquait. En fait, l'énergie de l'état lié trouvée en (41) est égale à celle de l'état du canal fermé, une fois le déplacement  $\Delta$  pris en compte. Dans ce régime, les prédictions sont très différentes du résultat mono-canal et l'état lié se concentre essentiellement sur le canal fermé, comme nous allons le voir maintenant.

## 2-2 La population du canal fermé

Continuons notre étude de l'état lié pour nous concentrer maintenant sur sa composition : comment les amplitudes de probabilité se répartissent-elles entre canal ouvert et canal fermé ?

Revenons au spineur à deux composantes qui définit cet état :

$$\begin{pmatrix} \text{ouvert} \\ \text{fermé} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\psi\rangle \\ |\phi\rangle \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \hat{G}_0(E) \hat{W} |\phi_0\rangle \\ |\phi_0\rangle \end{pmatrix} \quad (43)$$

Le coefficient  $\alpha$  est sans importance ici, puisqu'il sert simplement à normaliser l'état global. Nous nous intéressons plutôt au poids du canal fermé :

$$\frac{\Pi_f}{\Pi_o + \Pi_f} = \frac{1}{1 + \langle \phi_0 | \hat{W} \hat{G}_0^2(E) \hat{W} | \phi_0 \rangle}, \quad (44)$$

avec  $E = -\hbar^2\kappa^2/2m_r$ .

Le calcul de l'élément de matrice figurant au dénominateur de (44) se mène de façon similaire à ce que nous avons fait au chapitre précédent. En insérant une relation de fermeture sur les moments  $\mathbf{q}$  et en exprimant  $\langle \phi_0 | \hat{W} | \mathbf{q} \rangle$  en fonction de  $g(q)$ , nous arrivons à

$$\langle \phi_0 | \hat{W} \hat{G}_0^2(E) \hat{W} | \phi_0 \rangle = \frac{8m_r}{\pi\hbar^2} \int \frac{q^2 g^2(q)}{(q^2 + \kappa^2)^2} dq. \quad (45)$$

L'intégrale ci-dessus est divergente en  $q = 0$  si on prend  $\kappa = 0$ . Pour  $\kappa$  petit et non nul, elle est convergente et dominée par les faibles valeurs de  $q$ . On peut donc prendre dans cette intégrale  $g(q) \approx g(0) \equiv g_0$  pour arriver à :

$$\langle \phi_0 | \hat{W} \hat{G}_0^2(E) \hat{W} | \phi_0 \rangle = \frac{2m_r g_0^2}{\hbar^2 \kappa} = \frac{1}{X} \frac{\Delta}{E_{vdW}}, \quad (46)$$

et donc :

$$\frac{\Pi_f}{\Pi_o + \Pi_f} = \frac{X}{\frac{\Delta}{E_{vdW}} + X} = \frac{\sqrt{1+u} - 1}{\sqrt{1+u} + 1}, \quad u = -4 \frac{\tilde{E}_f E_{vdW}}{\Delta^2} > 0. \quad (47)$$

Deux exemples de variation pour  $\Delta/E_{vdW} = 0.1$  (résonance étroite) et  $\Delta/E_{vdW} = 20$  (résonance large) sont tracés en figure 8.

Reprenons la distinction entre résonance large et résonance étroite établie au paragraphe précédent :

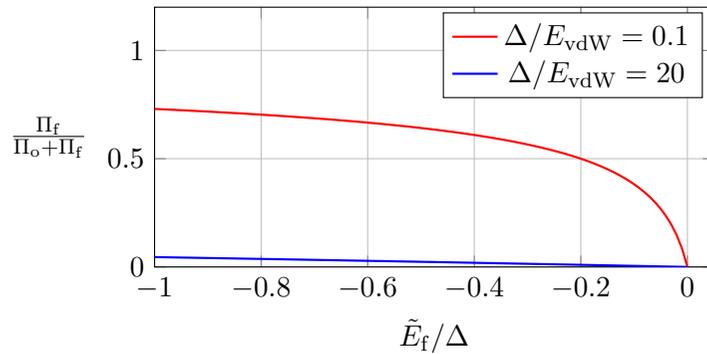


FIGURE 8. Variation de la fraction de population dans le canal fermé pour l'état lié trouvé quand  $E_f - \Delta < 0$  [cf. (47)].

- Pour une résonance large,  $\Delta/E_{\text{vdW}} \gg 1$ , ce poids relatif reste petit devant 1 jusqu'à ce que  $|\tilde{E}_f|$  atteigne sa valeur maximale d'ordre  $\Delta$ . La résonance est donc dominée par le canal ouvert : c'est dans ce canal que l'essentiel de la population est concentrée.
- Pour une résonance étroite,  $\Delta/E_{\text{vdW}} \ll 1$ , la population du canal ouvert n'est dominante qu'au voisinage immédiat de la résonance  $|\tilde{E}_f| \lesssim 2\Delta^2/E_{\text{vdW}}$ . Le canal fermé devient prédominant quand  $|\tilde{E}_f|$  dépasse cette valeur, c'est-à-dire quand on quitte le régime universel pour la variation de l'énergie de l'état lié [cf. (39)].

Le bilan de cette étude est donc qu'il y a une correspondance parfaite entre le fait qu'une résonance soit intégralement dominée par le canal ouvert et le fait qu'elle soit large au sens  $\Delta \gg E_{\text{vdW}}$ . En pratique, il est souvent plus facile de tester le premier critère, c'est-à-dire déterminer le canal dominant, comme expliqué par CHIN, GRIMM et al. (2010).

### 2-3 Côté $a < 0$ et forme de la résonance

Intéressons-nous maintenant au côté  $a < 0$  de la résonance, pour lequel on n'attend pas d'état lié. Ce cas correspond à la situation où l'énergie "perturbée"  $\tilde{E}_f$  de l'état  $|\phi_0\rangle$  est au dessus du seuil du canal ouvert. La question

à laquelle nous souhaitons répondre porte sur la structure de la section efficace de collision  $\sigma(E)$  quand on varie l'énergie  $E$ . S'agit-il d'une fonction simplement décroissante de  $E$ , ou présente-t-elle une résonance pour une énergie  $E^*$  voisine de  $E_f - \Delta$ ? La réponse à cette question dépend là aussi de la nature de la résonance, large ou étroite.

Notre point de départ est l'amplitude de diffusion (31) dont nous déduisons la section efficace (pour des bosons polarisés) :

$$\sigma(E) = 8\pi|f(E)|^2 = \frac{8\pi g_0^4}{(E - \tilde{E}_f)^2 + (2m_r g_0^4/\hbar^2)E}. \quad (48)$$

Le dénominateur est une fonction quadratique de  $E$  et il est minimum en

$$E = \tilde{E}_f - \frac{\Delta^2}{2E_{\text{vdW}}}, \quad (49)$$

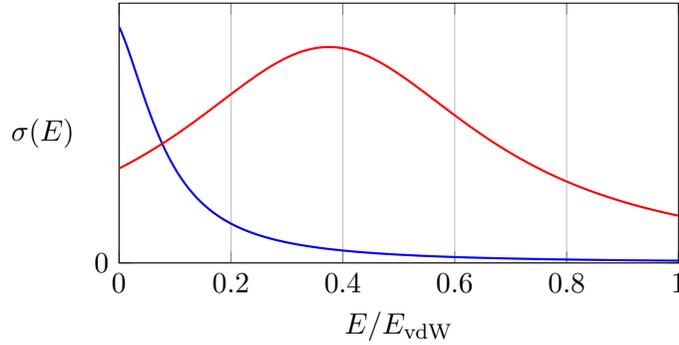
un point qui correspond donc à un maximum de la section efficace.

Reprenons notre distinction entre résonance large et résonance étroite.

- Pour une résonance large,  $\Delta \gg E_{\text{vdW}}$  et pour le domaine physiquement pertinent  $|\tilde{E}_f| \lesssim \Delta$ , le maximum est atteint pour une énergie négative. Cela signifie que dans la région  $E \geq 0$ , la section efficace  $\sigma(E)$  est maximale en 0 et est une fonction décroissante de  $E$ . Là encore, cela correspond au régime universel attendu pour un problème mono-canal quand un état lié est sur le point d'apparaître.
- Pour une résonance étroite,  $\Delta \ll E_{\text{vdW}}$ , deux cas sont possibles, comme illustré sur la figure 9 :
  - Dans le domaine très proche de la résonance  $\tilde{E}_f < \Delta^2/2E_{\text{vdW}}$ , on retrouve là aussi le comportement universel, avec une section efficace qui décroît quand l'énergie de collision  $E$  augmente.
  - En dehors de ce domaine, pour  $\Delta^2/2E_{\text{vdW}} < \tilde{E}_f \lesssim \Delta$ , le minimum  $\mathcal{E}^*$  est situé dans la partie  $E > 0$ , plus précisément en un point proche de  $\tilde{E}_f$ . La section efficace a donc un comportement résonant en  $E^* \approx \tilde{E}_f$ . Ce comportement propre aux résonances de Fano–Feshbach étroites est très différent du régime universel et il rappelle celui d'une résonance de forme.

Pour conclure, signalons un point important en lien avec la formule très couramment utilisée :

$$a = a_{\text{bg}} \left(1 - \frac{B_1}{B - B_0}\right) = a_{\text{bg}} - \frac{a_{\text{bg}} B_1 \delta\mu}{E_f - \Delta}, \quad (50)$$



**FIGURE 9.** Section efficace de collision dans le cas d'une résonance étroite ( $\Delta = 0.5 E_{\text{vdW}}$ ). Pour un petit désaccord  $\tilde{E}_f$  (ici  $\tilde{E}_f = 0.1 E_{\text{vdW}}$  pour la courbe bleue), la section efficace est maximale à énergie incidente nulle. Pour un plus grand désaccord ( $\tilde{E}_f = 0.5 E_{\text{vdW}}$  pour la courbe rouge), la section efficace présente un maximum pour une énergie incidente non nulle.

qui nous conduit à identifier  $a_{\text{bg}} B_1 \delta\mu$  avec notre paramètre  $g_0^2$ . Sur la formule initiale, il est tentant de dire qu'une résonance sera large si  $B_1$  est grand (typiquement plusieurs Gauss). Mais l'étude qui précède montre que le paramètre important n'est pas  $B_1$ , mais le produit  $a_{\text{bg}} B_1 \delta\mu$ , qui est proportionnel à notre paramètre  $\Delta$ . Si  $a_{\text{bg}}$  est anormalement basse, le champ  $B_1$  peut être grand bien que la résonance de Fano–Feshbach présente toutes les caractéristiques d'une résonance étroite. On rencontre cette situation pour l'isotope 7 du lithium (boson) préparé dans son état magnétique le plus bas. Comme indiqué dans la table 1, cet atome présente une résonance pour  $B_0 = 737\text{G}$ ; le champ  $B_1$  correspondant vaut  $192\text{G}$ , ce qui est considérable (KHAYKOVICH, SCHRECK et al. 2002). Mais la longueur de diffusion  $a_{\text{bg}} = -1.3\text{nm}$  est relativement faible si bien que cette résonance de Fano–Feshbach ne peut pas être considérée comme large ( $s_{\text{res}} \approx \Delta/E_{\text{vdW}} \approx 1$ ).

### 3 Modélisations et approches quantitatives

Le modèle que nous avons développé ci-dessus supposait que les atomes n'interagissaient pas dans le canal ouvert. Cela nous a permis de mener les calculs de manière quasi-analytique et de dégager les notions essentielles d'universalité et de largeur de résonance.

Pour aller plus loin, il faut bien sûr enrichir la description de la collision et en premier lieu prendre en compte l'interaction dans le canal ouvert qui conduit, en absence de couplage avec le canal fermé, à la longueur de diffusion "de fond"  $a_{\text{bg}}$ . Dans un deuxième temps, il faut également revenir sur l'approximation de la résonance isolée, qui consiste à ne garder dans le canal fermé que le seul état  $|\phi_0\rangle$ .

#### 3-1 L'approche "résonance isolée" standard

Cette approche est décrite dans plusieurs articles et ouvrages. Dans le cadre de la physique des atomes froids, indiquons par exemple MOERDIJK, VERHAAR et al. (1995), GORAL, KOEHLER et al. (2004), et récemment NAIDON & PRICOUPEK (2019). On pourra aussi consulter le traitement détaillé et complet de COHEN-TANNOUJJI & GUÉRY-ODELIN (2011).

Quand on souhaite simplement prendre en compte les interactions  $V(r)$  dans le canal ouvert, les équations qui ont servi de point de départ à notre modèle simple sont à peine modifiées. On garde la description de l'état stationnaire de collision sous forme du spineur :

$$\begin{pmatrix} \text{ouvert} \\ \text{fermé} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\psi\rangle \\ |\phi\rangle \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad |\phi\rangle = \alpha|\phi_0\rangle, \quad (51)$$

avec toujours un canal fermé réduit au seul état  $|\phi_0\rangle$ . L'équation aux valeurs propres pour ce spineur s'écrit :

$$\left(\hat{H}_0 + \hat{V}\right) |\psi\rangle + \hat{W}|\phi\rangle = E |\psi\rangle \quad (52)$$

$$\hat{W}|\psi\rangle + E_f|\phi\rangle = E |\phi\rangle. \quad (53)$$

La méthode de résolution reste formellement inchangée, même si on ne dispose plus d'expressions analytiques pour les différents éléments qui entrent en jeu.

Prenons une énergie  $E = \hbar^2 k^2 / 2m_r$  positive. Pour  $\hat{W} = 0$ , la solution de (52) est un état stationnaire de diffusion du canal ouvert  $|\psi_{\mathbf{k}}^{\text{ouv}}\rangle$ , conduisant à la longueur de diffusion  $a_{\text{bg}}$  quand  $k \rightarrow 0$ . Pour  $\hat{W} \neq 0$ , la résolution de (52) se fait avec l'opérateur de Green du canal ouvert :

$$\hat{G}^{\text{ouv}}(E) = \frac{1}{E - (\hat{H}_0 + \hat{V}) + i0_+}. \quad (54)$$

La solution générale de (52) s'écrit

$$|\psi_{\mathbf{k}}\rangle = |\psi_{\mathbf{k}}^{\text{ouv}}\rangle + \hat{G}^{\text{ouv}}(E)\hat{W}|\phi\rangle \quad (55)$$

Ce résultat reporté dans (53) permet de déterminer formellement la valeur du coefficient  $\alpha$  :

$$\alpha = \frac{\langle \phi_0 | \hat{W} | \psi_{\mathbf{k}}^{\text{ouv}} \rangle}{E - E_f - \langle \phi_0 | \hat{W} \hat{G}^{\text{ouv}}(E) \hat{W} | \phi_0 \rangle}. \quad (56)$$

La combinaison de (55) et de (56) donne alors :

$$|\psi_{\mathbf{k}}\rangle = |\psi_{\mathbf{k}}^{\text{ouv}}\rangle + \hat{G}^{\text{ouv}}(E)\hat{T}(E)|\psi_{\mathbf{k}}^{\text{ouv}}\rangle \quad (57)$$

avec

$$\hat{T}(E) = \frac{\hat{W}|\phi_0\rangle\langle\phi_0|\hat{W}}{E - E_f - \langle\phi_0|\hat{W}\hat{G}^{\text{ouv}}(E)\hat{W}|\phi_0\rangle}. \quad (58)$$

La relation (57) a la même structure que l'équation de Lippmann–Schwinger obtenue au chapitre 2 pour un problème de diffusion mono-canal, exprimant l'état stationnaire de diffusion  $|\psi_{\mathbf{k}}\rangle$  en terme de l'onde plane  $|\mathbf{k}\rangle$  et de l'opérateur de transition  $\hat{T}$  :

$$|\psi_{\mathbf{k}}\rangle = |\mathbf{k}\rangle + \hat{G}_0(E)\hat{T}(E)|\mathbf{k}\rangle. \quad (59)$$

Nous avons donc formellement ramené notre problème bi-canal à un problème mono-canal avec la transposition

$$|\mathbf{k}\rangle \rightarrow |\psi_{\mathbf{k}}^{\text{ouv}}\rangle, \quad \hat{G}_0 \rightarrow \hat{G}^{\text{ouv}}. \quad (60)$$

Nous en déduisons que l'amplitude de transition  $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  est proportionnelle à  $\langle \psi_{\mathbf{k}'}^{\text{ouv}} | \hat{T}(E) | \psi_{\mathbf{k}}^{\text{ouv}} \rangle$ , qui généralise le résultat du chapitre 2 :  $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \propto \langle \mathbf{k}' | \hat{T}(E) | \mathbf{k} \rangle$ .

Examinons ce qui se passe quand on prend la limite  $E \rightarrow 0$  de (57) :

- Le premier terme  $|\psi_{\mathbf{k}}^{\text{ouv}}\rangle$  va faire apparaître dans sa partie asymptotique un comportement en  $r - a_{\text{bg}}$ , donc la longueur de diffusion  $a_{\text{bg}}$ .
- Le deuxième terme de (57) est résonnant quand le dénominateur de l'opérateur  $T(E)$  s'annule. Ecrivons la limite  $E \rightarrow 0$  de ce dénominateur comme

$$\lim_{E \rightarrow 0} \left[ E - E_f - \langle \phi_0 | \hat{W} \hat{G}^{\text{ouv}}(E) \hat{W} | \phi_0 \rangle \right] = -E_f + \Delta \quad (61)$$

avec le coefficient réel

$$\Delta = -\langle \phi_0 | \hat{W} \hat{G}^{\text{ouv}}(0) \hat{W} | \phi_0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{|\langle \phi_0 | \hat{W} | \psi_{\mathbf{k}}^{\text{ouv}} \rangle|^2}{\hbar^2 k^2 / 2m_r} d^3k \quad (62)$$

qui généralise (9). Comme dans notre modèle simplifié, la partie imaginaire de ce dénominateur fait apparaître le terme proportionnel à  $ik$  requis par le théorème optique et qui tend vers 0 quand  $k \rightarrow 0$ .

On aboutit donc à l'expression suivante pour la longueur de diffusion :

$$a = a_{\text{bg}} - \frac{C}{E_f - \Delta} \quad (63)$$

où le coefficient  $C$  (qui généralise  $g_0^2$  et que nous n'explicitons pas ici) fait intervenir les éléments de matrice de l'opérateur  $\hat{W}$ .

À partir de ce point, la discussion sur la largeur de la résonance, l'éventuel état lié, etc. est similaire à ce que nous avons décrit précédemment à partir de notre modèle simplifié.

### 3-2 Modélisation par canaux couplés

Pour obtenir une modélisation précise d'une résonance de Fano–Feshbach, il faut aller au delà de l'approche "résonance isolée". Pour cela, il faut prendre en compte de manière quantitative le degré de liberté associé au canal fermé, ou plutôt aux canaux fermés car il y a généralement plusieurs courbes de potentiel qui entrent en jeu dans une collision.

Prenons l'exemple d'un atome alcalin bosonique comme le lithium 7, le sodium, le potassium 39 ou 41, ou encore le rubidium 87. Tous ces atomes

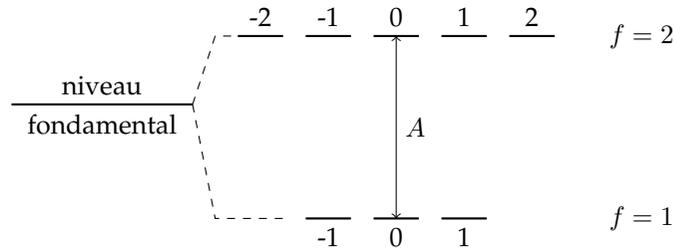


FIGURE 10. Structure hyperfine d'un atome alcalin de spin nucléaire 3/2. On a indiqué la valeur du nombre quantique  $m_f$  pour chaque état.

ont un état fondamental électronique de moment cinétique orbital<sup>4</sup>  $l = 0$  et un spin électronique  $s = 1/2$ . Par ailleurs, leur noyau a un spin  $i = 3/2$ . Le couplage hyperfin entre le moment magnétique de l'électron externe et celui du noyau s'écrit  $\frac{A}{4} \mathbf{s} \cdot \mathbf{i}$ , où  $A$  dépend de l'espèce atomique. Ce couplage clive le niveau fondamental en deux sous-niveaux hyperfin séparés de  $A$ , de moment cinétique total  $f = 1$  et  $f = 2$  (figure 10). Nous allons nous intéresser dans ce qui suit à l'influence de ce degré de liberté de spin (électronique et nucléaire) sur la dynamique de la collision.

Quand les deux atomes (repérés par l'indice  $\alpha = 1, 2$ ) sont éloignés, on peut négliger leur interaction. L'hamiltonien lié au spin s'écrit donc en présence d'un champ magnétique  $\mathbf{B}$  orienté selon l'axe  $z$

$$\sum_{\alpha=1,2} -A s_{\alpha} \cdot \mathbf{i}_{\alpha} + (\gamma_e s_{z,\alpha} - \gamma_n i_{z,\alpha}) B, \quad (64)$$

auquel il faut ajouter l'hamiltonien d'énergie cinétique pour les deux atomes. Un état propre de spin de la paire d'atomes est donc caractérisé par les 4 nombres quantiques :  $f_1, m_{f_1}, f_2, m_{f_2}$ .

Quand les atomes sont proches, le terme dominant est leur interaction mutuelle. L'interaction de van der Waals, qui a été étudiée dans les chapitres précédents, ne fait pas intervenir le spin et nous ne la rediscuterons pas ici. L'interaction dominante résulte de l'échange (cf. chapitre 1) et elle

4. Nous noterons par des lettres minuscules les moments cinétiques des électrons individuels et par des lettres capitales ceux de la paire d'électrons pour le système di-atomique.

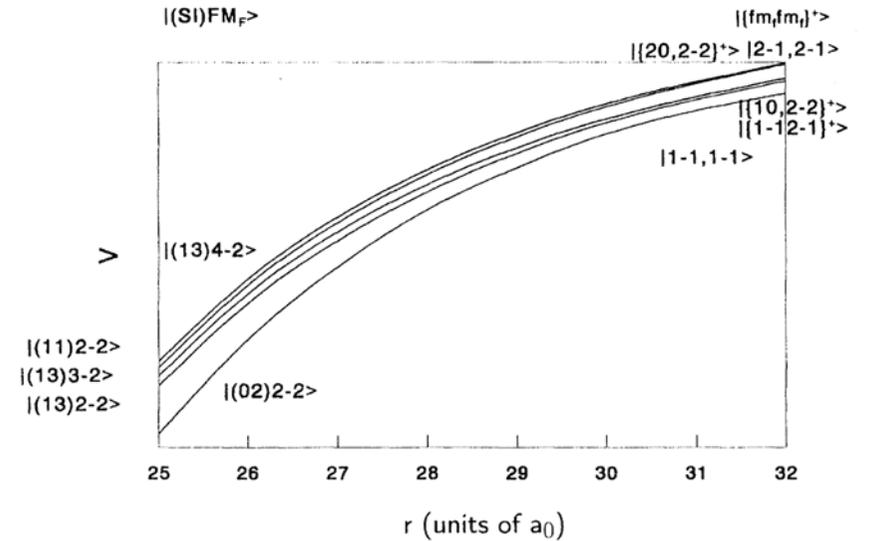


FIGURE 11. Potentiels d'interaction pour les cinq canaux couplés dans une collision entre deux atomes alcalins préparés dans un état tel que  $M_F = m_{f_1} + m_{f_2} = -2$ . Les données numériques sont pour une paire d'atomes de sodium. Figure extraite de MOERDIJK, VERHAAR et al. (1995).

dépend du spin total de la paire d'atomes, avec le potentiel singulet  $V_S(r)$  et triplet  $V_T(r)$  associés respectivement au spin électronique total  $S = 0$  et  $S = 1$ . Le terme dominant de l'hamiltonien peut alors s'écrire :

$$\frac{1}{4} [V_S(r) + 3V_T(r)] + \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 [V_T(r) - V_S(r)]. \quad (65)$$

Les états propres à courte distance sont donc caractérisés par les nombres quantiques  $S, I, F, M_F$ .

On constate qu'il y a un nombre quantique commun aux deux régions,  $M_F = m_{f_1} + m_{f_2}$ , c'est-à-dire la projection du spin total sur l'axe  $z$ . Pour les autres degrés de liberté de spin, il y a une rotation continue de la base propre quand les atomes s'approchent l'un de l'autre. Ce point est illustré sur la figure 11 que nous avons extraite de MOERDIJK, VERHAAR et al. (1995). Elle porte sur l'interaction entre deux atomes de sodium, mais serait

inchangée (en dehors d'une recalibration des axes) pour les autres espèces mentionnées ci-dessus. Cette figure montre les canaux à prendre en compte pour une collision entre deux atomes préparés dans l'état  $|f = 1, m_f = -1\rangle$ . D'après ce que nous venons de voir, le seul nombre quantique qui va être conservé lors de la collision est  $M_F = m_{f_1} + m_{f_2} = -2$ . Cela signifie que tous les canaux correspondant à cette même valeur de  $M_F$  peuvent être couplés entre eux et il nous faut donc les identifier.

Quand les atomes sont éloignés, il y a cinq états possibles avec cette valeur de  $M_F$  :

- Celui que nous avons pris comme état d'entrée de la collision, est noté  $|f_1 m_{f_1}, f_2 m_{f_2}\rangle = |1 - 1, 1, -1\rangle$  sur la figure 11.
- L'état obtenu en prenant un atome en  $|f = 1, m_f = -1\rangle$  et l'autre dans  $|f = 2, m_f = -1\rangle$ , et en symétrisant le résultat. Cet état est noté  $|\{1 - 1, 2 - 1\}^+\rangle$  sur la figure 11. Il a une énergie  $A$  au dessus de l'état incident, et va donc correspondre à un canal fermé.
- L'état obtenu en prenant un atome en  $|f = 1, m_f = 0\rangle$  et l'autre dans  $|f = 2, m_f = -2\rangle$ , et en symétrisant là aussi le résultat. Cet état a également une énergie  $A$  au dessus de l'état incident.
- L'état obtenu en prenant un atome en  $|f = 2, m_f = 0\rangle$  et l'autre dans  $|f = 2, m_f = -2\rangle$ , et en symétrisant là aussi le résultat. Cet état a une énergie  $2A$  au dessus de l'état incident.
- L'état obtenu en prenant les deux atomes en  $|f = 2, m_f = -1\rangle$ . Cet état a une énergie  $2A$  au dessus de l'état incident.

Au final, on trouve donc un canal ouvert et quatre canaux fermés, deux avec l'énergie  $A$  et deux avec l'énergie  $2A$ . Quand les atomes se rapprochent, on voit sur la figure 11 que les états de spin de ces cinq états se mélangent pour former quatre états du canal triplet et un état dans le canal singulet. La notation de la figure 11 pour ces états est  $|(SI)Fm_F\rangle$ .

Pour traiter ce problème, on doit donc (i) choisir une base de travail, qui peut par exemple être la base  $|(SI)Fm_F\rangle$ , (ii) écrire l'hamiltonien en tout point  $r$  dans cette base, qui se présentera comme une matrice  $5 \times 5$ , (iii) résoudre les cinq équations de Schrödinger couplées pour en extraire l'état de diffusion correspondant à une énergie  $E$  donnée [voir par exemple MOERDIJK, VERHAAR et al. (1995), MIES & RAOULT (2000) et CHIN, GRIMM et al. (2010)]. Cette méthode, qui s'avère très précise (voir

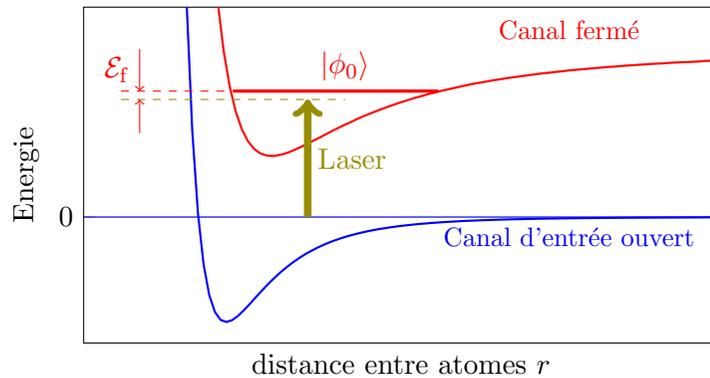
§4-1), repose bien sûr sur une bonne connaissance des potentiels d'interaction.

### 3-3 Le couplage $\hat{W}$

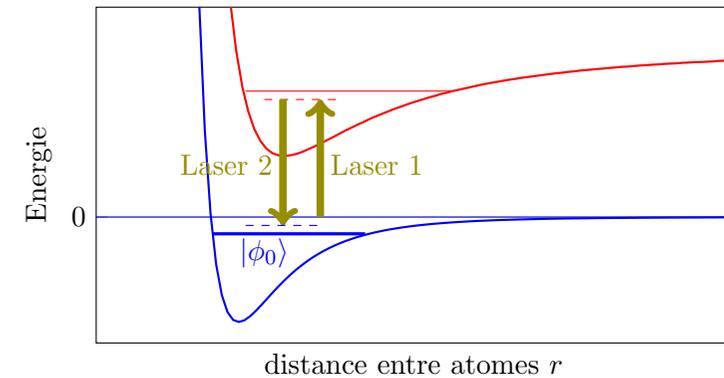
Nous avons discuté au paragraphe précédent la nature des différents canaux couplés, ce qui nous permet de donner maintenant quelques éléments supplémentaires sur le couplage  $\hat{W}$  introduit dans la discussion de notre modèle simple. Nous avons alors indiqué sans plus de précision que  $\hat{W}$  avait un élément de matrice non nul entre le canal ouvert et l'état  $|\phi_0\rangle$  du canal fermé.

La définition précise du canal ouvert requiert de préciser la base de l'espace de spin sur laquelle on choisit d'écrire l'hamiltonien (étape (i) de la fin du paragraphe précédent). On peut par exemple privilégier la base découplée  $|f_1 m_{f_1}, f_2 m_{f_2}\rangle$ . Dans ces conditions, le couplage  $\hat{W}$  se déduira de l'expression (65) : il fera intervenir les éléments de matrice de  $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$ , avec un préfacteur proportionnel à  $V_T(r) - V_S(r)$ . Avec ce choix,  $W(r)$  est très grand dans toute la région intérieure du puits de potentiel, là où la différence entre  $V_S$  et  $V_T$  est maximale. Cette approche est parfaitement légitime, mais elle peut conduire à des grands éléments de matrice de  $\hat{W}$ , qui peuvent rendre problématiques l'approximation de la résonance isolée.

Une autre approche, mise en avant notamment par NAIDON & PRICOU-PENKO (2019), consiste à utiliser une base tournante pour le spin, qui diagonalise en tout point  $r$  l'hamiltonien d'interaction. Par construction, il n'y a alors plus d'élément non diagonal entre canaux. Mais  $\hat{W}$  n'en est pas nul pour autant : il faut en effet prendre en compte la rotation des vecteurs de base avec  $r$ . NAIDON & PRICOU-PENKO (2019) développent cette analyse et montrent que  $\hat{W}$  n'est alors plus simplement local (multiplication par une fonction de  $r$ ), mais fait également intervenir l'opérateur  $\frac{d}{dr}$ . Avec ce choix,  $\hat{W}$  prend des valeurs importantes dans la "zone de transition" définie au chapitre 4. Il s'agit des distances  $r$  où le potentiel d'échange devient comparable à l'interaction de van der Waals; en effet cette dernière, indépendante du spin, admet toujours les états découplés  $|f_1 m_{f_1}, f_2 m_{f_2}\rangle$  comme base propre alors que l'interaction d'échange favorise la base  $|(SI)Fm_F\rangle$ . NAIDON & PRICOU-PENKO (2019) montrent que ce choix conduit à une approximation mieux contrôlée, qui les conduit à modifier l'expression com-



**FIGURE 12.** Principe d'une résonance de Feshbach optique à un photon. Un faisceau lumineux couple de manière quasi-résonnante le canal d'entrée (état électronique fondamental) à un état électronique excité.



**FIGURE 13.** Principe d'une résonance de Feshbach optique à deux photons. Une paire de faisceaux lumineux couple de manière quasi-résonnante le canal d'entrée (état électronique fondamental) à un état lié du niveau électronique fondamental, via un passage vers un état électronique excité.

munément admise pour le décalage en énergie  $\Delta$  [leur équation (49)].

### 3-4 Résonances assistées par un champ oscillant

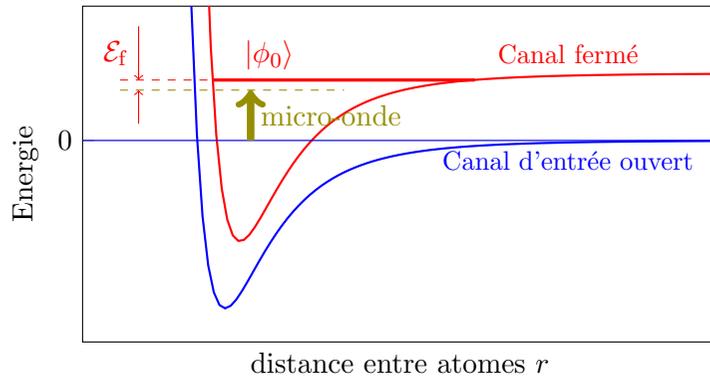
Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que le couplage  $\hat{W}$  était imposé par le choix de l'espèce atomique. Le champ magnétique extérieur permettait de contrôler la position relative du canal fermé par rapport au canal ouvert, mais le couplage lui-même ne dépendait que de la forme des fonctions d'onde de l'état incident et l'état lié  $|\phi_0\rangle$ .

Il est possible d'enrichir les possibilités offertes par les résonances de Fano–Feshbach en utilisant un champ électromagnétique, lumineux ou micro-onde, pour coupler le canal ouvert incident à un canal fermé quelconque, pas nécessairement proche en énergie. L'accordabilité procurée par le champ magnétique  $B$  est remplacée par le choix de la fréquence du champ oscillant. Le couplage  $W$  devient quant à lui proportionnel à l'amplitude de ce champ et peut être ajusté à volonté.

La première proposition dans ce sens a été faite par FEDICHEV, KAGAN et al. (1996) et mise en œuvre par THEIS, THALHAMMER et al. (2004). Il

s'agit de résonances de Fano–Feshbach optiques où le canal d'entrée, qui comporte deux atomes dans l'état électronique fondamental, est couplé à un canal fermé qui comporte un atome dans un état électronique excité et l'autre dans l'état fondamental (figure 12). Une variante, explorée par THALHAMMER, THEIS et al. (2005), consiste à utiliser une transition à deux photons (Raman stimulé), pour retrouver un canal fermé avec deux atomes dans leur état électronique fondamental (figure 13).

Les expériences de THEIS, THALHAMMER et al. (2004) et THALHAMMER, THEIS et al. (2005) ont confirmé les prédictions théoriques concernant la modification de la longueur de diffusion. Mais elles ont également mis en évidence une limitation intrinsèque de cette méthode, lié au chauffage dû au caractère aléatoire des phénomènes d'émission spontanée. Plus précisément, dans le dénominateur d'énergie intervenant dans l'expression de l'amplitude de diffusion, déduite par exemple de l'expression de la matrice  $\hat{T}(E)$  donnée en (58), il faut ajouter un terme imaginaire  $i\Gamma_e$ , correspondant à la largeur naturelle de l'état excité  $e$  utilisé. Ce terme imaginaire vient conférer une partie imaginaire à la longueur de diffusion, c'est-à-dire un terme de perte (en pratique considérable!) quand on l'injecte dans l'équa-



**FIGURE 14.** Résonance de Fano–Feshbach assistée par une micro-onde qui couple deux sous-niveaux hyperfins du niveau électronique fondamental.

tion de Gross–Pitaevskii. On pourra consulter BOHN & JULIENNE (1999) pour un traitement détaillé de ce mécanisme de chauffage.

Une autre voie d'approche a été proposée par PAPOULAR, SHLYAPNIKOV et al. (2010) et est représentée sur la figure 14 [voir aussi KAUFMAN, ANDERSON et al. (2009) et TSCHERBUL, CALARCO et al. (2010)]. Elle consiste à utiliser un couplage micro-onde entre le canal ouvert et le canal fermé. Il n'y a alors pas de passage par un état excité et donc pas de chauffage additionnel. Le point important à noter dans ce cas tient au fait que la longueur d'onde du champ micro-onde utilisé est très grande devant la portée des potentiels d'interaction entre atomes. On peut donc considérer que  $W(r)$  est indépendant de  $r$ . Or nous avons montré en §3-1 que la modification recherchée de la longueur de diffusion faisant intervenir les éléments de matrice

$$\langle \phi_0 | \hat{W} | \psi_{\mathbf{k}}^{\text{ouv}} \rangle \approx W \langle \phi_0 | \psi_{\mathbf{k}}^{\text{ouv}} \rangle. \quad (66)$$

Il faut donc que les deux états  $|\phi_0\rangle$  et  $|\psi_{\mathbf{k}}^{\text{ouv}}\rangle$  aient un recouvrement non nul, et en particulier qu'ils ne soient pas orthogonaux. Comme ils sont chacun état propre d'un hamiltonien  $\hat{p}^2/2m_r + V_\alpha(r)$ , cela signifie que les deux hamiltoniens en question doivent être "notablement différents" l'un de l'autre. Pour des atomes alcalins, cette condition peut être remplie d'autant mieux que les longueurs de diffusion triplet et singulet sont éloignées

l'une de l'autre et que les deux potentiels  $V_\alpha(r)$  en jeu ont des poids significativement différents sur ces canaux singulet et triplet.

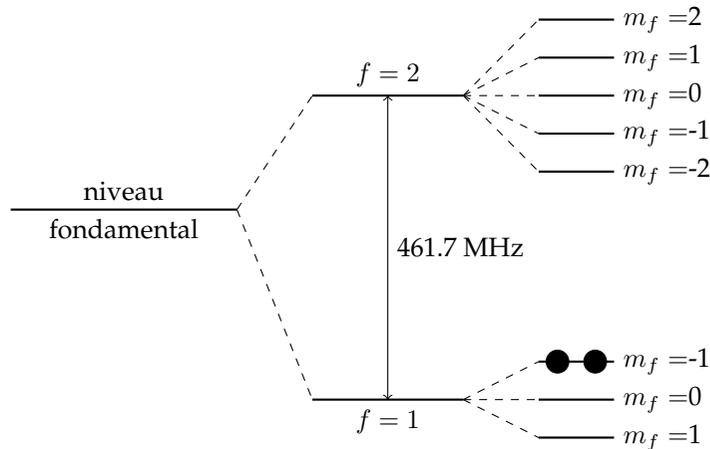
## 4 Quelques expériences récentes

Depuis leur observation initiale pour des gaz atomiques par INOUYE, ANDREWS et al. (1998), les résonances de Feshbach ont joué un rôle considérable dans la physique des fluides quantiques. Il n'est pas question ici de passer en revue ces très nombreuses études expérimentales, ni même de les citer. Nous renvoyons les lecteurs intéressés à l'article de revue de CHIN, GRIMM et al. (2010) qui a donné, au moins à la date de sa parution, un état des lieux complet des connaissances expérimentales dans ce domaine. Nous allons nous contenter dans les paragraphes qui suivent de donner (sans souci d'exhaustivité) trois exemples récents remarquables. Comme ces expériences utilisent des protocoles différents, cette partie nous donnera l'occasion de discuter trois techniques de diagnostic pour la présence d'une résonance de Fano–Feshbach : la spectroscopie de l'état lié, la cinétique de thermalisation d'un gaz piégé et les pertes d'atomes.

### 4-1 Mesures de précision sur le potassium 39

CHAPURIN, XIE et al. (2019) ont récemment mené une expérience sur le potassium 39, dont le but était de tester certains aspects de la physique à trois corps. Un élément essentiel de leur analyse a porté sur les interactions à deux corps dans un gaz de  $^{39}\text{K}$  (bosons) en présence d'un champ magnétique d'environ 30 Gauss. Dans cette expérience, les atomes sont préparés dans l'état  $|f = 1, m_f = -1\rangle$ , c'est-à-dire l'état d'énergie supérieure du sous-niveau hyperfin  $f = 1$ .

Partant d'environ  $10^5$  atomes confinés dans un piège optique à une température de 300 nK, on balaye le champ magnétique à travers la valeur correspondant à la résonance, ce qui permet de transférer adiabatiquement une fraction importante des atomes vers une assemblée de dimères dans l'état  $|\phi_0\rangle$  (KÖHLER, GÓRAL et al. 2006). Les atomes non transférés sont éliminés grâce à une impulsion lumineuse qui les pousse hors du piège.

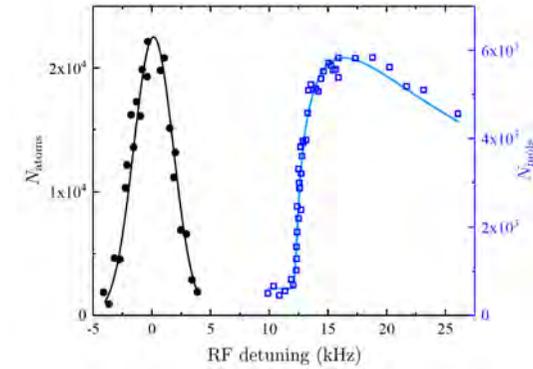


**FIGURE 15.** Position des états hyperfins du niveau fondamental d'un atome  $^{39}\text{K}$  en présence d'un champ magnétique. L'expérience de CHAPURIN, XIE et al. (2019) est menée avec des atomes préparés dans l'état  $|f = 1, m_f = -1\rangle$ .

L'outil principal est la spectroscopie radio-fréquence qui consiste à faire basculer un des atomes du dimère vers l'état  $|f = 2, m_f = 0\rangle$ , puis à compter les atomes ainsi transférés en fonction de la radio-fréquence. Un exemple typique est montré en figure 16. On y voit le spectre enregistré pour le gaz de dimères (en bleu) ainsi que le signal équivalent pour un gaz atomique. Une modélisation précise du décalage entre les deux courbes permet d'en déduire l'énergie de liaison pour cette valeur du champ,  $E_{\text{lie}}/h = 12.274 \text{ kHz}$ .

Cette expérience est répétée pour différentes valeurs du champ magnétique autour de la résonance de Feshbach, ce qui permet de produire les données de la figure 17. L'intervalle de champ magnétique correspond à une variation de la longueur de diffusion  $a$  entre  $16 \text{ nm}$  et  $+\infty$  ( $R_{\text{vdW}} = 3.3 \text{ nm}$  pour  $^{39}\text{K}$ ).

Pour cette courbe, la (faible) correction de l'énergie du dimère liée au potentiel de confinement a été prise en compte. L'ajustement avec un modèle théorique prenant en compte les cinq canaux couplés pour cette réso-

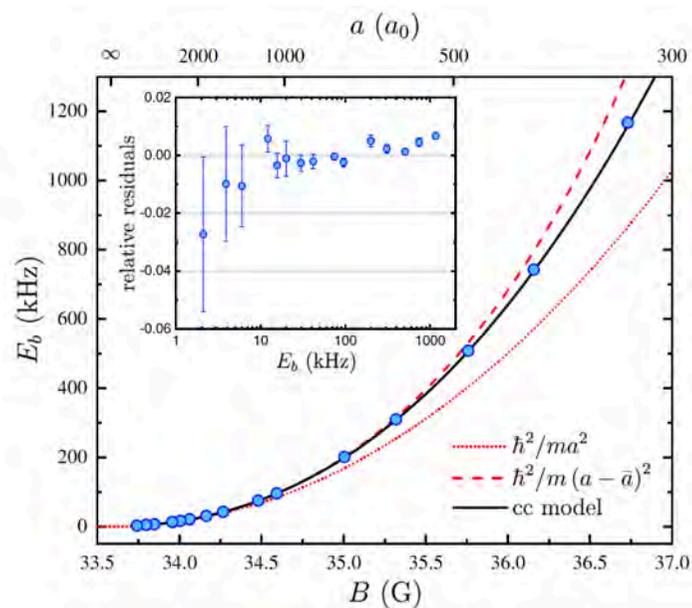


**FIGURE 16.** Carrés bleus : spectre radio-fréquence de dissociation de dimères de  $^{39}\text{K}$  pour un champ magnétique de  $33.9575(3) \text{ G}$ . L'origine de l'axe des abscisses est décalée de  $446.834413 \text{ MHz}$ . Les points noirs sont obtenus pour un gaz d'atomes et permettent de calibrer l'expérience. Figure extraite du Supplemental Material de CHAPURIN, XIE et al. (2019).

nance en onde s (voir §3) est excellent et conduit à la détermination de la position de la résonance avec une précision inédite :  $B_0 = 33.5820(14) \text{ G}$ . Cette précision a permis à CHAPURIN, XIE et al. (2019) d'améliorer très significativement la modélisation des potentiels singulet et triplet pour une paire d'atomes de  $^{39}\text{K}$ .

On constate sur la figure 17 que seule la partie centrale de la résonance est bien décrite par le modèle universel bien que  $a \geq 5 R_{\text{vdW}}$  sur la gamme explorée. Cela prouve que cette résonance ne rentre pas dans la catégorie des résonances larges. Plus précisément, CHAPURIN, XIE et al. (2019) ont relié leurs données au paramètre  $s_{\text{res}}$  de CHIN, GRIMM et al. 2010 (identique à notre paramètre  $\Delta/E_{\text{vdW}}$  introduit plus haut) pour trouver  $s_{\text{res}} \approx 2.6$ . Il s'agit donc d'une résonance "intermédiaire", située à la frontière entre résonances larges et résonances étroites.

Notons que pour décrire la résonance avec ce degré de précision, la modélisation par la formule habituelle (50) n'est pas suffisante et il faut inclure un deuxième pôle, c'est-à-dire une modélisation à 5 paramètres.



**FIGURE 17.** Mesure de l'énergie de liaison du dimère de  $^{39}\text{K}$  au voisinage de la résonance de Fano–Feshbach. La prédiction universelle est tracée en pointillé rouge. La courbe noire est la prédiction issue d'un calcul numérique incluant 5 canaux de spins couplés. La courbe rouge tiretée est une version raffinée de la prédiction universelle. Figure extraite de CHAPURIN, XIE et al. (2019).

## 4-2 Résonances orbitales pour l'ytterbium 173

Pour des atomes alcalins comme le potassium discuté ci-dessus, chaque atome porte un spin électronique  $1/2$ . L'interaction entre deux atomes dans leur état électronique fondamental dépend de la symétrie d'échange de la fonction d'onde électronique. Une fonction d'onde orbitale symétrique [resp. antisymétrique] par échange des deux électrons est associée à un état de spin antisymétrique [resp. symétrique], c'est-à-dire l'état singulet  $S = 0$  [resp. triplet  $S = 1$ ]. Les différents canaux de diffusion contiennent des parts variables du potentiel singulet et du potentiel triplet, et le couplage entre ces canaux donne naissance aux résonances discutées jusqu'ici.

Une classe d'atomes qui joue un rôle important dans la physique des gaz froids concerne les atomes à deux électrons périphériques, comme le strontium ou l'ytterbium. Pour un atome préparé dans son état fondamental  $g$ , le moment cinétique orbital  $L$  des deux électrons est nul ainsi que leur moment cinétique de spin  $S$ ,  $L = S = 0$ , de sorte que le moment cinétique total  $J$  est également nul. La valeur  $S = 0$  empêche de pouvoir mettre en place une résonance de Fano–Feshbach du même type que pour les alcalins, au moins quand les atomes sont tous préparés dans leur état fondamental électronique. Même si ces atomes peuvent avoir un spin nucléaire  $I$ , le potentiel d'interaction entre atomes ne dépendra pas de l'état du spin des noyaux<sup>5</sup> et la collision peut être considérée comme "mono-canal".

Un moyen de contourner cette impossibilité a été proposé par ZHANG, CHENG et al. (2015), puis réalisé expérimentalement quelques mois plus tard par HÖFER, RIEGGER et al. (2015) et PAGANO, MANCINI et al. (2015). ZHANG, CHENG et al. (2015) ont suggéré de tirer parti d'états électroniques excités de très longue durée de vie, en particulier l'état  $^3\text{P}_0$ ; il s'agit d'un état

- de moment cinétique orbital  $L = 1$  (d'où la notation "P");
- de spin électronique  $S = 1$  (état triplet d'où la notation "3"), donc différent du spin  $S = 0$  de l'état fondamental (ce qui contribue à la très longue durée de vie);
- de moment cinétique total (orbital+spin)  $J = 0$ , ce qui renforce la stabilité de cet état car il ne peut pas se désexciter vers l'état fondamental par une transition à un photon, une transition  $J = 0 \rightarrow J = 0$  étant interdite par les règles de sélection de l'interaction lumière-matière.

Ainsi pour  $^{173}\text{Yb}$ , la durée de vie de l'état  $^3\text{P}_0$  est de l'ordre de 20 s, ce qui est extrêmement long à l'échelle atomique.

L'idée mise en avant par ZHANG, CHENG et al. (2015) est de considérer une paire d'atomes, l'un dans l'état fondamental  $^1\text{S}_0$ , l'autre dans l'état  $^3\text{P}_0$ . Ils considèrent l'isotope fermionique  $^{173}\text{Yb}$  qui possède un spin nucléaire  $I = 5/2$ ; en présence d'un champ magnétique extérieur, cela entraîne que chacun des deux états électroniques considérés,  $^1\text{S}_0$  et  $^3\text{P}_0$ , sont clivés en six états correspondant à  $m_I = -\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, \dots, +\frac{5}{2}$ . Dans la mesure où l'on a affaire à un magnétisme nucléaire, les clivages sont très faibles (facteur

<sup>5</sup> Cette invariance vis-à-vis du spin nucléaire conduit à une symétrie  $SU(N)$  pour le potentiel d'interaction,  $N = 2I + 1$  étant le nombre d'états de spin.

$\sim 10^{-3}$  par rapport au magnétisme électronique), mais cela suffit à créer le paramètre de contrôle nécessaire.

Parmi les multiples couples possibles pour les spins nucléaires des deux atomes, on en sélectionne un que l'on note  $(m_I^\downarrow, m_I^\uparrow) \equiv (\downarrow, \uparrow)$  (on choisit  $m_I^\downarrow \neq m_I^\uparrow$ ). Le point important est que les facteurs de Landé  $g_g$  et  $g_e$  des deux états  $^1S_0$  et  $^3P_0$  ne sont pas égaux. Par conséquent, les deux états

$$|g \uparrow; e \downarrow \rangle \quad \text{et} \quad |g \downarrow; e \uparrow \rangle \quad (67)$$

n'ont pas la même énergie : la différence entre ces énergies s'écrit<sup>6</sup>  $\mu_n B (g_e - g_g)(m_I^\downarrow - m_I^\uparrow)$ , où  $\mu_n$  est le magnéton nucléaire. Elle peut être variée grâce au champ magnétique appliqué. Nous supposons dans ce qui suit que le premier de ces deux états est celui de plus basse énergie.

Prenons maintenant en compte le fait que les atomes utilisés sont des fermions et intéressons-nous à une collision en onde  $s$ , c'est-à-dire une fonction d'onde spatiale symétrique par échange des positions des deux atomes. Cela est possible car les atomes n'étant pas dans le même état interne, le caractère antisymétrique global de l'état des deux atomes peut être assuré grâce à ces variables internes. Plus précisément, nous poserons

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g \uparrow; e \downarrow\rangle - |e \downarrow; g \uparrow\rangle) \quad (68)$$

qui va correspondre à l'état électronique + nucléaire du canal ouvert (basse énergie), et

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g \downarrow; e \uparrow\rangle - |e \uparrow; g \downarrow\rangle) \quad (69)$$

qui va correspondre au canal fermé (haute énergie).

Tout comme les potentiels singulet et triplet pour les atomes à un électron, le potentiel d'interaction entre les deux atomes dépend de la nature symétrique ou antisymétrique de l'état électronique orbital. Les parties électroniques et nucléaires des deux états propres utiles ici s'écrivent

$$|\pm\rangle = \frac{1}{2} (|ge\rangle \pm |eg\rangle) \otimes (|\uparrow\downarrow\rangle \mp |\downarrow\uparrow\rangle), \quad (70)$$

6. La différence en énergie pour  $^{173}\text{Yb}$  est de  $h \times 113 \text{ Hz}$  pour  $B = 1 \text{ Gauss}$  et  $m_I^\downarrow - m_I^\uparrow = 1$ . L'origine de la différence entre  $g_g$  et  $g_e$  réside dans un léger couplage hyperfin entre les états  $^3P_0$  et  $^3P_1$ .

caractérisés chacune par une longueur de diffusion,  $a_\pm$ , pour des collisions en onde  $s$ .

Considérons une collision entre atomes de basse énergie initialement préparés dans l'état  $|\psi\rangle$  écrit en (68). Cet état  $|\psi\rangle$  est une combinaison linéaire des deux états  $|\pm\rangle$  :

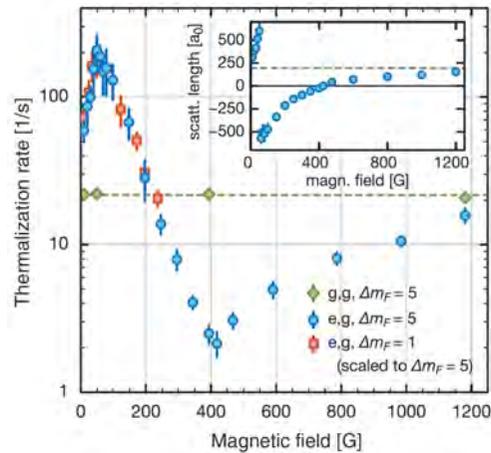
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + |-\rangle) \quad (71)$$

et n'est donc pas lui-même un état propre de l'hamiltonien d'interaction. Durant la collision, il est couplé à l'état du canal fermé  $|\phi\rangle$ . Après la collision, les atomes ressortent dans  $|\psi\rangle$  mais le déphasage accumulé dépend du couplage avec  $|\phi\rangle$ .

Pour qu'une résonance se produise du fait de ce couplage, il faut qu'il y ait dans le canal fermé un état lié d'énergie proche de la limite de dissociation du canal ouvert. C'est effectivement le cas du canal  $|+\rangle$  qui est associé à une longueur de diffusion grande et positive (SCAZZA, HOFRICHTER et al. 2014; CAPPELLINI, MANCINI et al. 2014; CAPPELLINI, MANCINI et al. 2015). L'état lié a pour énergie de liaison de  $h \times 32 \text{ kHz}$ , ce qui est très faible.

Nous montrons en figure 18 des données extraites de HÖFER, RIEGGER et al. (2015); elles indiquent la variation avec le champ magnétique  $B$  du temps de thermalisation d'un mélange équilibré de 60 000 atomes dans la paire d'états  $|g \uparrow\rangle, |e \downarrow\rangle$ , et pour comparaison un mélange  $|g \uparrow\rangle, |g \downarrow\rangle$ . Ce mélange est confiné dans un piège dipolaire anisotrope et on mesure le temps nécessaire pour qu'un excès d'énergie selon un axe propre du piège se répartisse selon les 3 axes, comme attendu pour l'équipartition de l'énergie. Ce temps est inversement proportionnel à la section efficace de collision élastique, donc au carré de la longueur de diffusion recherchée. On voit sur la figure 18 que ce temps varie par deux ordres de grandeur autour de la résonance pour le mélange  $|g \uparrow\rangle, |e \downarrow\rangle$  alors qu'il est indépendant de  $B$  pour le mélange  $|g \uparrow\rangle, |g \downarrow\rangle$ .

Ce type de résonance peut ouvrir de nouvelles perspectives dans la réalisation de superfluides topologiques et constituer un nouvel outil pour la compréhension des phénomènes magnétiques dans les matériaux en forte interaction (CORNISH 2015).

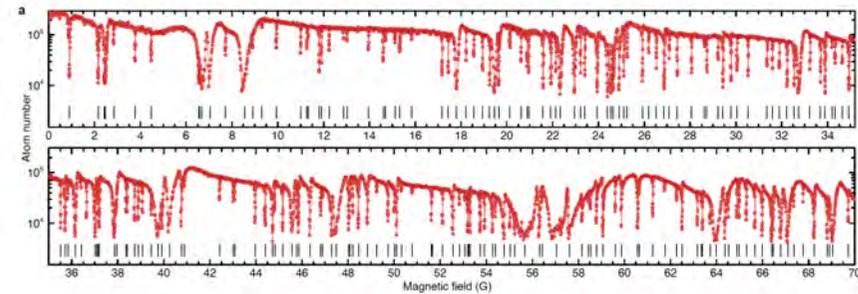


**FIGURE 18.** Résonance de Fano–Feshbach orbitale pour  $^{173}\text{Yb}$ . Taux de thermalisation dans un mélange  $|g \uparrow\rangle, |e \downarrow\rangle$  (points bleus et rouges) et  $|g \uparrow\rangle, |g \downarrow\rangle$  (points verts). Les points rouges [resp. bleus] correspondent à  $m_I^\uparrow = -m_I^\downarrow = \frac{1}{2}$  [resp.  $\frac{5}{2}$ ]. Le champ  $B$  a été redimensionné par un facteur 5 pour les points rouges pour montrer l'universalité du résultat. Figure extraite de HÖFER, RIEGGER *et al.* (2015).

### 4-3 Le cas des lanthanides

Les atomes lanthanides comme l'erbium ou le dysprosium présentent des caractéristiques très différentes des autres atomes couramment utilisés dans les expériences de gaz quantiques comme les alcalins ou les alcalino-terreux. Tout d'abord, le moment cinétique orbital des électrons dans l'état fondamental de ces atomes n'est pas nul. Ajouté au moment cinétique de spin, cela conduit à des moments magnétiques très grands :  $10\mu_B$  pour le dysprosium, donc des interactions dipôle-dipôle magnétiques 100 fois plus grandes que pour des alcalins. Les interactions entre atomes lanthanides présentent une anisotropie marquée, d'un part à cause de ces dipôles magnétiques et aussi du fait des interactions de van der Waals qui acquièrent une partie anisotrope très significative (de l'ordre de 10% de la partie isotrope) provenant du moment cinétique orbital des électrons.

Pour des atomes lanthanides de moment cinétique  $J$ , il y a  $(J + 1)^2$  courbes de potentiel non dégénérées conduisant à  $(J + 1)^2$  longueurs de

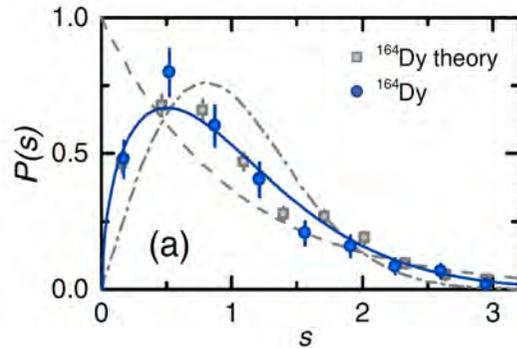


**FIGURE 19.** Nombre d'atomes de  $^{168}\text{Er}$  ayant "survécu" dans un piège lumineux après une durée de 400 ms en présence d'un champ magnétique  $B$ . Chaque pic étroit signale une perte accrue due à une résonance de Feshbach. Figure extraite de FRISCH, MARK *et al.* (2014).

diffusion indépendantes, à comparer aux deux canaux singulet et triplet des alcalins. Cela conduit à un très grand nombre de possibilités de résonances de Feshbach dans un intervalle donné de champ magnétique; ce nombre est encore augmenté par le fait que le déplacement Zeeman des différents états pour un champ donné est beaucoup grand que pour les alcalins, du fait du grand moment magnétique.

Pour localiser ces résonances de Feshbach, une technique fréquemment utilisée consiste à mesurer le taux de pertes d'atomes d'un nuage piégé en fonction du champ magnétique appliqué. Au voisinage d'une résonance, la probabilité de trouver une paire d'atomes proches l'un de l'autre est fortement augmentée et les processus de pertes à deux ou trois corps sont donc favorisés. Une perte à deux corps correspond au basculement d'un spin électronique durant la collision, l'énergie Zeeman libérée étant convertie en énergie cinétique. Un processus à trois corps conduit à la formation d'un dimère fortement lié, le troisième corps emportant l'énergie libérée par cette formation.

Nous montrons sur la figure 19 un exemple de résultat obtenu par FRISCH, MARK *et al.* (2014) pour un gaz d'atomes d'erbium 168 à une température de 330 nK. On y compte 190 résonances pour un intervalle de champ magnétique de 70 Gauss. Ce nombre est considérable : on trouverait en moyenne moins d'une résonance sur un intervalle de cette largeur

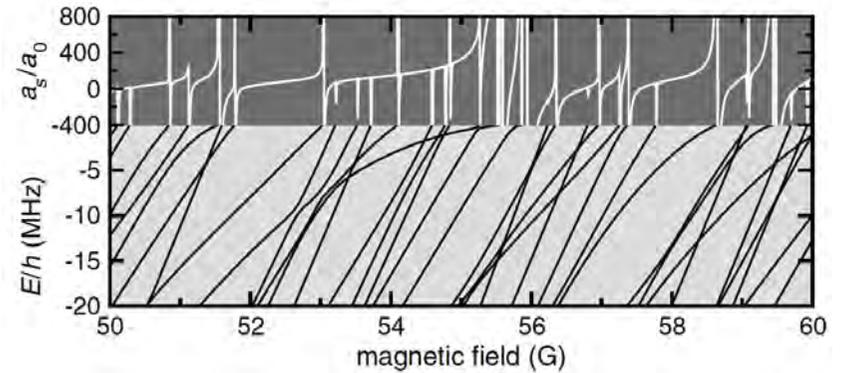


**FIGURE 20.** Distribution normalisée de l'écart entre deux résonances de Fano–Feshbach successives pour  $^{164}\text{Dy}$ . Les points bleus correspondent aux mesures et les points gris au résultat d'un calcul par canaux couplés. La courbe tiretée donne le résultat attendu pour un hamiltonien régulier, celle en pointillés le résultat pour un hamiltonien chaotique (loi de Wigner-Dyson). On voit que les résonances "se repoussent", mais pas autant que prévu par la loi de Wigner-Dyson. Figure extraite de MAIER, KADAU et al. (2015).

pour des atomes alcalins.

FRISCH, MARK et al. (2014) et MAIER, KADAU et al. (2015) ont tiré parti de ce grand nombre de résonances, obtenues à la fois pour l'erbium et pour le dysprosium, pour en faire une analyse statistique. Ils ont étudié en particulier la répartition des écarts entre deux résonances consécutives, dont un exemple est montré en figure 20. On constate que les résonances successives "se repoussent", c'est-à-dire que la probabilité de trouver deux résonances avec une faible séparation est plus petite que si ces résonances étaient réparties aléatoirement.

La répartition des positions des résonances de Fano–Feshbach quand on varie le champ magnétique est directement reliée au spectre des états liés de l'hamiltonien du problème, pour un champ magnétique donné. Ce point est illustré sur la figure 21, où les énergies des états liés, montrées ici pour  $^{168}\text{Er}$ , ont été obtenues par un calcul de canaux couplés. Or le spectre de l'hamiltonien, plus précisément la répartition  $P(s)$  de l'intervalle  $s$  entre valeurs propres successives, renseigne sur la nature du mouvement sous-



**FIGURE 21.** Haut : longueur de diffusion estimée par un calcul de canaux couplés pour  $^{168}\text{Er}$ . Bas : spectre des états faiblement liés. Une résonance de Fano–Feshbach se produit à chaque fois qu'un état lié croise l'énergie nulle et disparaît dans le continuum. Figure extraite de MAIER, KADAU et al. (2015).

jaçant. Si ce mouvement est régulier, une collections d'oscillateurs harmoniques découplés par exemple, la distribution  $P(s)$  sera une distribution de Poisson. Si ce mouvement est chaotique et l'hamiltonien décrit par une matrice aléatoire symétrique réelle, on s'attend à une distribution de Wigner-Dyson  $\propto s e^{-\pi s^2/4}$ .

On constate sur la figure 20 que la répulsion des positions des résonances de Fano–Feshbach, si elle est bien présente, n'est pas aussi forte que celle attendue pour la loi de Wigner-Dyson. Ce résultat, confirmé par le calcul numérique, indique que l'hamiltonien n'est ni complètement régulier, ni complètement chaotique dans cette gamme de champ magnétique<sup>7</sup>.

7. Le paramètre de Brody permet de caractériser l'écart de la distribution mesurée aux distributions de Poisson et de Wigner-Dyson. Pour un champ magnétique  $\sim 30$  Gauss, la valeur de ce paramètre déduite du calcul par canaux couplés vaut  $\sim 0.5$  pour  $^{164}\text{Dy}$  ou  $^{168}\text{Er}$ .

### Appendice : état lié pour notre modèle de résonance

Comme pour l'étude des états de diffusion menée au chapitre précédent, notre point de départ pour la recherche d'éventuels états liés sera la première des deux équations aux valeurs propres (2-3) :

$$(E - \hat{H}_0)|\psi\rangle = \hat{W}|\phi\rangle. \quad (72)$$

Sa solution s'écrit grâce à l'opérateur résolvante  $\hat{G}_0$  (sans terme libre puisque nous considérons  $E < 0$ ) :

$$|\psi\rangle = \hat{G}_0(E) \hat{W}|\phi\rangle. \quad (73)$$

Il s'agit maintenant de trouver l'énergie (ou les énergies?)  $E$  pour laquelle cette équation est compatible avec la seconde équation aux valeurs propres (3) :

$$(E - E_f)|\phi\rangle = \hat{W}|\psi\rangle. \quad (74)$$

Pour cela, rappelons-nous que  $|\phi\rangle = \alpha|\phi_0\rangle$  et projetons (74) sur  $|\phi_0\rangle$  :

$$(E - E_f)\alpha = \langle\phi_0|\hat{W}|\psi\rangle = \alpha\langle\phi_0|\hat{W}\hat{G}_0(E)\hat{W}|\phi_0\rangle \quad (75)$$

d'où l'équation permettant de déterminer  $E$  :

$$E - \langle\phi_0|\hat{W}\hat{G}_0(E)\hat{W}|\phi_0\rangle = E_f. \quad (76)$$

Pour rendre cette équation plus explicite, reprenons le résultat obtenu au chapitre précédent pour l'élément de matrice intervenant dans le membre de gauche de cette équation :

$$\langle\phi_0|\hat{W}\hat{G}_0(E)\hat{W}|\phi_0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{|\langle\phi_0|\hat{W}|\mathbf{q}\rangle|^2}{E - \varepsilon(\mathbf{q}) + i0_+} d^3q, \quad (77)$$

Après intégrale angulaire et remplacement de  $E$  par  $-\hbar^2\kappa^2/2m_r$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle\phi_0|\hat{W}\hat{G}_0(E)\hat{W}|\phi_0\rangle &= -\frac{2}{\pi} \int \frac{q^2 g^2(q)}{q^2 + \kappa^2} dq \\ &= -\Delta + \frac{2\kappa^2}{\pi} \int \frac{g^2(q)}{q^2 + \kappa^2} dq \end{aligned} \quad (78)$$

ce qui, en utilisant  $\tilde{E}_f \equiv E_f - \Delta$  conduit finalement à

$$\frac{\hbar^2}{2m_r} \left[ \kappa^2 + \frac{4m_r}{\pi\hbar^2} \int_0^{+\infty} \frac{\kappa^2 g^2(q)}{q^2 + \kappa^2} dq \right] = -\tilde{E}_f. \quad (79)$$

Le membre de gauche de cette équation est manifestement positif et c'est par ailleurs une fonction croissante de  $\kappa$ , avec des valeurs allant de 0 à  $+\infty$ . Pour avoir une solution (unique) à cette équation, il faut et il suffit que le membre de droite soit également positif, c'est-à-dire  $\tilde{E}_f < 0$ . Ceci correspond d'après (8) au régime  $a > 0$ .

On voit sur (79) que le choix  $\tilde{E}_f = 0$  conduit à la solution  $\kappa = 0$ . Vérifions maintenant que pour  $\tilde{E}_f$  suffisamment petit, donc  $a$  suffisamment grand, on retrouve bien la loi universelle (13). Pour cela, remarquons d'abord que quand  $\kappa \rightarrow 0$ , l'intégrale figurant dans le membre de gauche de (79) diverge en  $q = 0$ . Pour  $\kappa$  petit mais non nul, cette intégrale est donc dominée par les faibles valeurs de  $q$ . On peut y remplacer  $g(q)$  par  $g_0 \equiv g(0)$  pour trouver :

$$\kappa \rightarrow 0 : \quad \int_0^{+\infty} \frac{g^2(q)}{q^2 + \kappa^2} dq \approx g_0^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{q^2 + \kappa^2} dq = \frac{\pi g_0^2}{2\kappa}. \quad (80)$$

Quand  $\kappa \rightarrow 0$ , ce terme devient dominant dans le [...] de (79), qui se simplifie en

$$\kappa g_0^2 \approx -\tilde{E}_f \quad (81)$$

ou encore, en utilisant (8) :

$$\kappa \approx \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{lie}} \approx -\frac{\hbar^2}{2m_r a^2}. \quad (82)$$

C'est le résultat attendu : pour  $a > 0$  et dans le régime de petit  $|\tilde{E}_f|$ , l'énergie de l'état lié est reliée à la longueur de diffusion par la relation universelle (13).

## Références

- BOHN, John L. & P. S. JULIENNE (1999), « Semianalytic theory of laser-assisted resonant cold collisions », in *Phys. Rev. A* **60**, p. 414-425.
- CAPPELLINI, G., M. MANCINI, G. PAGANO, P. LOMBARDI, L. LIVI et al. (2014), « Direct Observation of Coherent Interorbital Spin-Exchange Dynamics », in *Phys. Rev. Lett.* **113**, p. 120402.
- (2015), « Erratum : Direct Observation of Coherent Interorbital Spin-Exchange Dynamics [Phys. Rev. Lett. 113, 120402 (2014)] », in *Phys. Rev. Lett.* **114**, p. 239903.
- CHAPURIN, Roman, Xin XIE, Michael J. Van de GRAAFF, Jared S. POPOWSKI, Jose P. D'INCAO, Paul S. JULIENNE, Jun YE & Eric A. CORNELL (2019), « Precision Test of the Limits to Universality in Few-Body Physics », in *Physical Review Letters* **123**, p. 233402.
- CHIN, Cheng, Rudolf GRIMM, Paul JULIENNE & Eite TIESINGA (2010), « Feshbach resonances in ultracold gases », in *Rev. Mod. Phys.* **82**, p. 1225-1286.
- COHEN-TANNOUJJI, Claude & David GUÉRY-ODELIN (2011), *Advances in Atomic Physics*, World Scientific.
- CORNISH, Simon (2015), « Controlling Collisions in a Two-Electron Atomic Gas », in *Physics* **8**, p. 125.
- FEDICHEV, P. O., M. W. KAGAN, G. V. SHLYAPNIKOV & J. T. M. WALRAVEN (1996), « Influence of Nearly Resonant Light on the Scattering Length in Low-Temperature Atomic Gases », in *Phys. Rev. Lett.* **77**, p. 2913.
- FRISCH, Albert, Michael MARK, Kiyotaka AIKAWA, Francesca FERLAINO, John L BOHN, Constantinos MAKRIDES, Alexander PETROV & Svetlana KOTOCHIGOVA (2014), « Quantum chaos in ultracold collisions of gas-phase erbium atoms », in *Nature* **507**, p. 475-479.
- GORAL, Krzysztof, Thorsten KOEHLER, Simon A GARDINER, Eite TIESINGA & Paul S JULIENNE (2004), « Adiabatic association of ultracold molecules via magnetic-field tunable interactions », in *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* **37**, p. 3457.
- HÖFER, M., L. RIEGGER, F. SCAZZA, C. HOFRICHTER, D. R. FERNANDES, M. M. PARISH, J. LEVINSSEN, I. BLOCH & S. FÖLLING (2015), « Observation of an Orbital Interaction Induced Feshbach Resonance in Yb 173 », in *Physical Review Letters* **115**, p. 265302.
- INOUE, S., M. ANDREWS, J. STENGER, H. J. MIESNER, D. M. STAMPER-KURN & W. KETTERLE (1998), « Observation of Feshbach resonances in a Bose–Einstein condensate », in *Nature* **392**, p. 151.
- KAUFMAN, A. M., R. P. ANDERSON, Thomas M. HANNA, E. TIESINGA, P. S. JULIENNE & D. S. HALL (2009), « Radio-frequency dressing of multiple Feshbach resonances », in *Phys. Rev. A* **80**, p. 050701.
- KHAYKOVICH, L., F. SCHRECK, G. FERRARI, T. BOURDEL, J. CUBIZOLLES, L. D. CARR, Y. CASTIN & C. SALOMON (2002), « Formation of a matter-wave bright soliton », in *Science* **296**, p. 1290.
- KÖHLER, Thorsten, Krzysztof GÓRAL & Paul S. JULIENNE (2006), « Production of cold molecules via magnetically tunable Feshbach resonances », in *Rev. Mod. Phys.* **78**, p. 1311-1361.
- LANDAU, L. D. & E. M. LIFSHITZ (1975), *Mécanique quantique*, Editions Mir.
- MAIER, T, H KADAU, M SCHMITT, M WENZEL, I FERRIER-BARBUT, T PFAU, Albert FRISCH, Simon BAIER, Kiyotaka AIKAWA, Lauriane CHOMAZ et al. (2015), « Emergence of chaotic scattering in ultracold Er and Dy », in *Physical Review X* **5**, p. 041029.
- MIES, Frederick H. & Maurice RAOULT (2000), « Analysis of threshold effects in ultracold atomic collisions », in *Phys. Rev. A* **62**, p. 012708.
- MOERDIJK, A. J., B. J. VERHAAR & A. AXELSSON (1995), « Resonances in ultracold collisions of Li 6 , Li 7 , and Na 23 », in *Physical Review A* **51**, p. 4852-4861.
- NAIDON, Pascal & Shimpei ENDO (2017), « Efimov physics : a review », in *Reports on Progress in Physics* **80**, p. 056001.
- NAIDON, Pascal & Ludovic PRICOUPENKO (2019), « Width and shift of Fano-Feshbach resonances for van der Waals interactions », in *Phys. Rev. A* **100**, p. 042710.
- PAGANO, G., M. MANCINI, G. CAPPELLINI, L. LIVI, C. SIAS, J. CATANI, M. INGUSCIO & L. FALLANI (2015), « Strongly Interacting Gas of Two-Electron Fermions at an Orbital Feshbach Resonance », in *Physical Review Letters* **115**, p. 265301.
- PAPOULAR, D. J., G. V. SHLYAPNIKOV & J. DALIBARD (2010), « Microwave-induced Fano-Feshbach resonances », in *Phys. Rev. A* **81**, p. 041603.
- SCAZZA, Francesco, Christian HOFRICHTER, Moritz HÖFER, PC DE GROOT, Immanuel BLOCH & Simon FÖLLING (2014), « Observation of two-orbital spin-exchange interactions with ultracold SU (N)-symmetric fermions », in *Nature Physics* **10**, p. 779-784.

- THALHAMMER, Gregor, Matthias THEIS, Klaus WINKLER, Rudolf GRIMM & Johannes Hecker DENSCHLAG (2005), « Inducing an optical Feshbach resonance via stimulated Raman coupling », in *Phys. Rev. A* **71**, p. 033403.
- THEIS, M., G. THALHAMMER, K. WINKLER, M. HELLWIG, G. RUFF, R. GRIMM & J. Hecker DENSCHLAG (2004), « Tuning the Scattering Length with an Optically Induced Feshbach Resonance », in *Phys. Rev. Lett.* **93**, p. 123001.
- TSCHERBUL, T. V., T. CALARCO, I. LESANOVSKY, R. V. KREMS, A. DALGARNO & J. SCHMIEDMAYER (2010), « rf-field-induced Feshbach resonances », in *Phys. Rev. A* **81**, p. 050701.
- ZHANG, Ren, Yanting CHENG, Hui ZHAI & Peng ZHANG (2015), « Orbital Feshbach Resonance in Alkali-Earth Atoms », in *Physical Review Letters* **115**, p. 135301.