

*Fluides quantiques de basse dimension
et transition de Kosterlitz-Thouless*

Invariance d'échelle classique,
anomalies quantiques

Jean Dalibard

Chaire *Atomes et rayonnement*

Année 2016-17



COLLÈGE
DE FRANCE
— 1530 —

Bilan des cours précédents

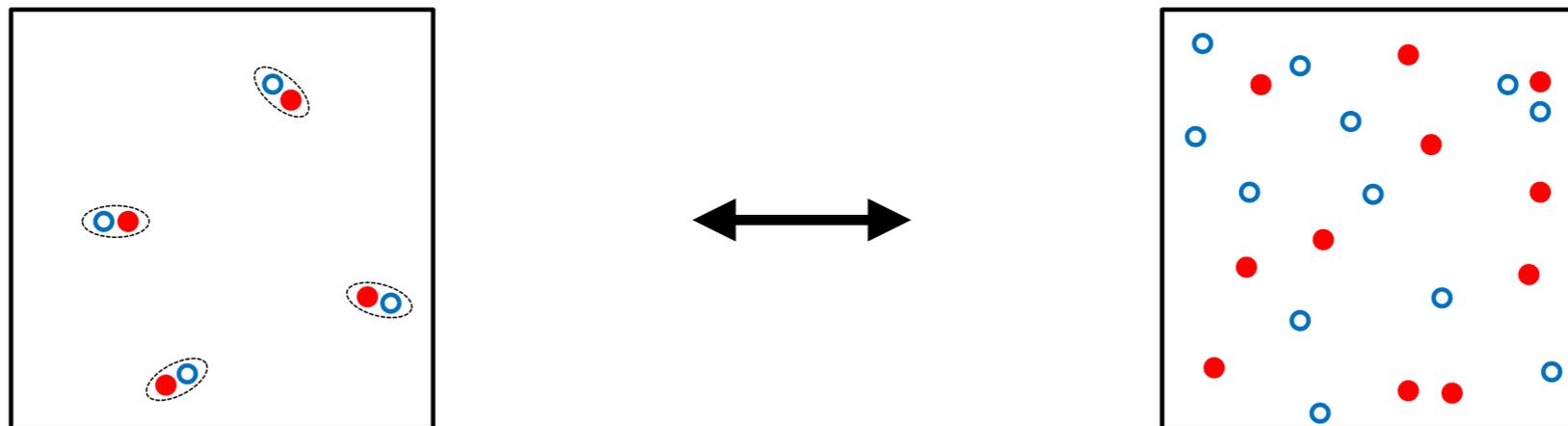
Fluide 2D de particules de Bose en interaction à courte portée

Description du fluide en termes de champ classique

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \longrightarrow \psi(\mathbf{r}_1) \dots \psi(\mathbf{r}_N)$$

Une transition superfluide peut se produire dans ce milieu, en dépit du théorème de Mermin-Wagner-Hohenberg.

Transition pilotée par les défauts topologiques : appariement des vortex



Bilan (suite) : le point de transition



$$\mathcal{D}_{\text{crit}} \approx \ln \left(\frac{380}{\tilde{g}} \right)$$

\tilde{g} : paramètre sans dimension caractérisant la force des interactions à 2D

$$\left. \frac{\mu}{k_B T} \right|_{\text{crit.}} \approx \frac{\tilde{g}}{\pi} \ln \left(\frac{13.2}{\tilde{g}} \right)$$

La caractérisation du point de transition se fait uniquement en fonction du paramètre sans dimension $\mu/k_B T$

Bilan (fin) : l'équation d'état

Equation d'état du fluide de Bose à 2D établie dans deux régimes limites

- Régime très dilué, interactions négligeables

$$\mathcal{D} = -\ln \left(1 - e^{-\mu/k_B T} \right)$$

- Régime dense, approximation de Bogoliubov

$$\mathcal{D} = \frac{2\pi}{\tilde{g}} \frac{\mu}{k_B T} - \ln \left(\frac{k_B T}{\mu} \right) + \dots$$

Dans les deux régimes, \mathcal{D} est fonction de $\mu/k_B T$ seulement, et pas de μ et T séparément comme c'est le cas à 1D et 3D.

Hasard ? Non, conséquence d'une invariance d'échelle !

But de ce cours

→ Comprendre l'origine de cette invariance d'échelle

Valable pour une catégorie de potentiels d'interaction

$$V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \propto \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2} \qquad V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \propto \delta^{(2)}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

→ Potentiel δ à deux dimensions et mécanique quantique ?

Nécessité d'une régularisation, anomalie quantique

→ Aspect dynamique de l'invariance d'échelle : le mode de respiration d'un gaz piégé

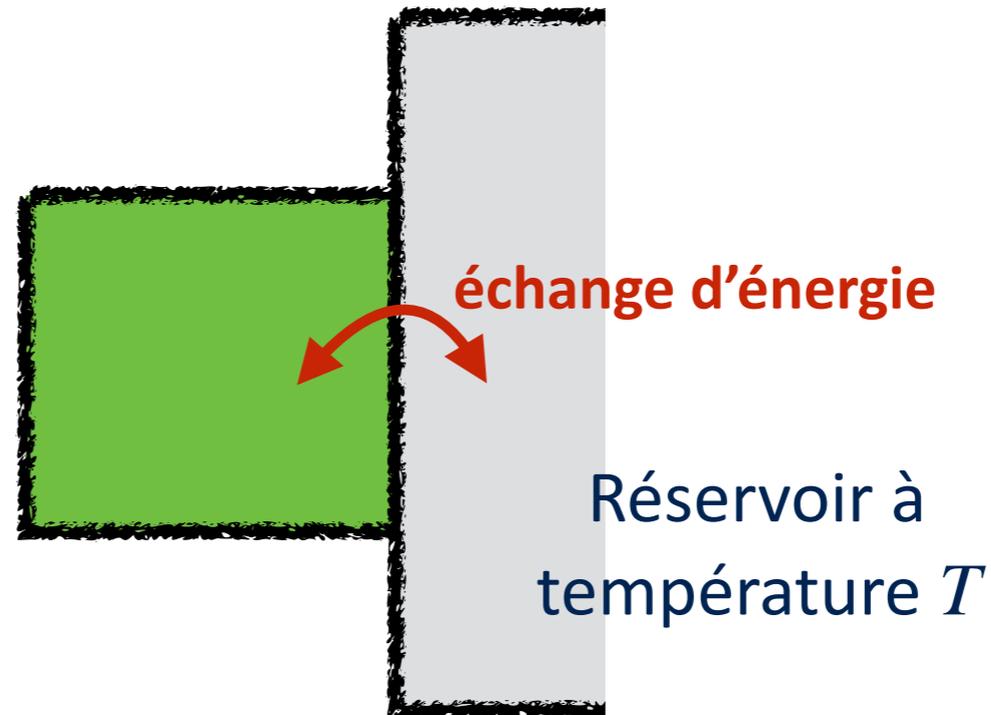
1.

Invariance d'échelle à l'équilibre thermodynamique

Les potentiels thermodynamiques

Ensemble canonique

système de N particules
et de volume (ou d'aire) V



Variables thermodynamiques pertinentes : T, N, V

Potentiel thermodynamique correspondant : énergie libre de Helmholtz

$$F(T, N, V)$$

$$\text{différentielle : } dF = -S dT + \mu dN - P dV$$

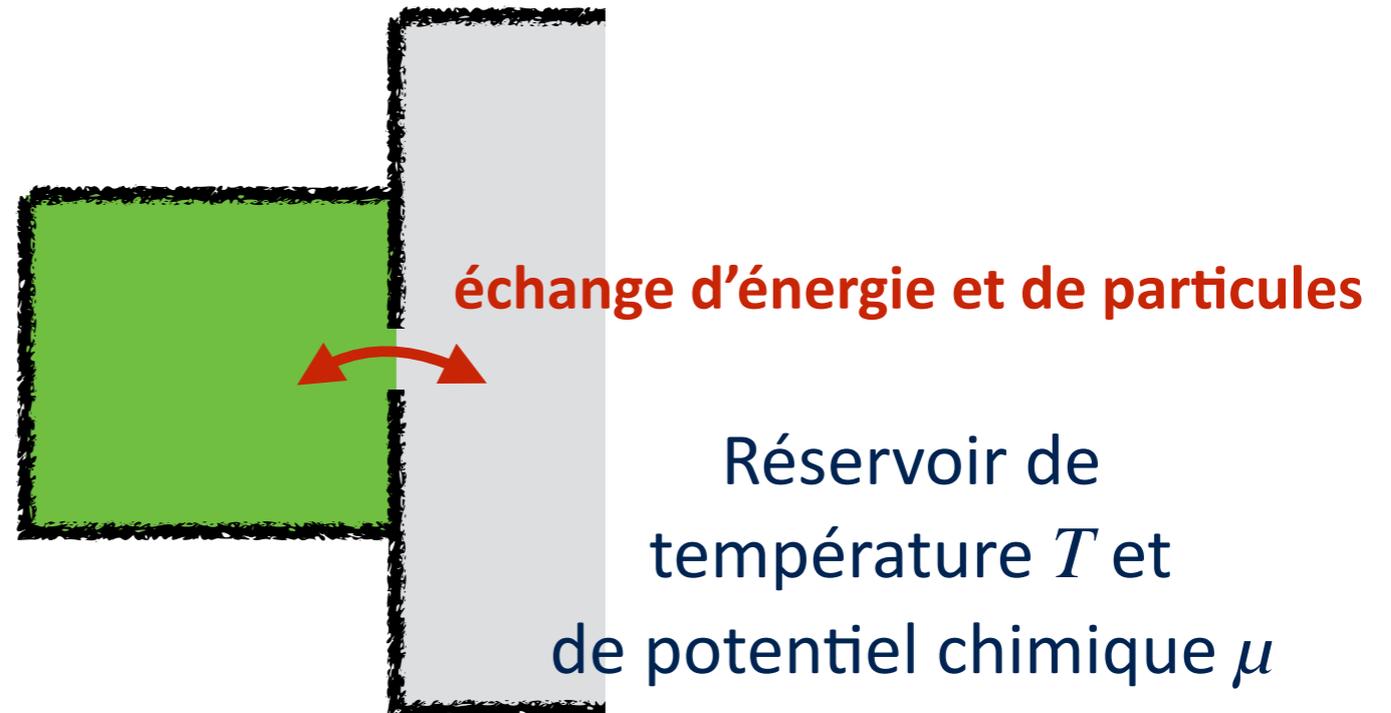
Exemple : définition de la pression

$$P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T, N}$$

Les potentiels thermodynamiques

Ensemble grand-canonique

système de volume
(ou d'aire) V



Variables thermodynamiques pertinentes : T, μ, V

Potentiel thermodynamique correspondant : énergie libre de Landau

$$\Omega(T, \mu, V) = F(T, N, V) - \mu N \quad \text{Transformation de Legendre}$$

$$\text{différentielle : } d\Omega = -S dT - N d\mu - P dV$$

$$\text{Exemple : définition de la pression } P = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial V} \right)_{T, \mu}$$

Equation d'état d'un système thermodynamique

Exprime une grandeur physique (par exemple la pression) en fonction des variables thermodynamiques d'un des ensembles (canonique, grand-canonique, etc.)

Exemple : gaz parfait dans l'ensemble canonique (T, N, V)

$$P = \frac{Nk_B T}{V}$$

Connaissant une grandeur, on en déduit les autres en utilisant les dérivées croisées (relations de Maxwell) :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} \quad dF = -S dT + \mu dN - P dV$$

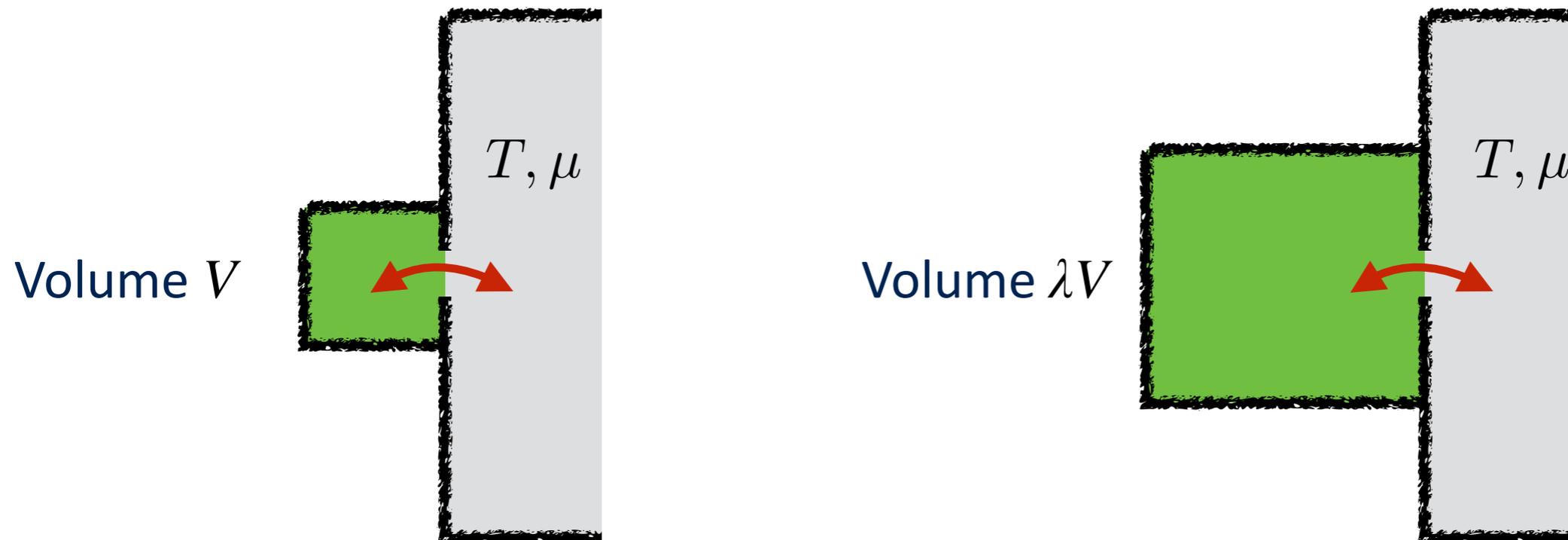
→ $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{N,V} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,N}$ dont on déduit l'entropie...

Loi d'échelle homogène

Une première invariance d'échelle...

Fluide homogène 1D, 2D, 3D,... avec des interactions à courte portée

Description dans l'ensemble grand-canonique, de variables T, μ, V



L'énergie libre de Landau Ω doit être proportionnelle au volume, à T et μ fixés

$$\lambda \Omega(T, \mu, V) = \Omega(T, \mu, \lambda V) \quad \longrightarrow \quad \Omega = V \frac{\partial \Omega}{\partial V}$$

$$\longrightarrow \quad \Omega(T, \mu, V) = -V P(T, \mu)$$

Invariance d'échelle en $\mu / k_B T$: le cas du gaz parfait

La densité dans l'espace des phases du gaz parfait ne dépend que du rapport $\mu / k_B T$

$$\text{Invariant dans le changement : } T \longrightarrow \frac{1}{\lambda^2} T \quad \mu \longrightarrow \frac{1}{\lambda^2} \mu$$

Explication au niveau de la fonction de partition grand-canonique (classique) :

$$\mathcal{Z}_{\text{GC}} = \sum_N \frac{1}{N!} \int \prod_j \frac{d^2 r_j d^2 p_j}{(2\pi\hbar)^2} \exp \left[-\frac{E(\{\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j\}) - \mu N}{k_B T} \right]$$

$$\text{avec pour le gaz parfait : } E(\{\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j\}) = \sum_j \frac{\mathbf{p}_j^2}{2m}$$

Si l'on fait le changement d'échelle sur les positions et les impulsions

$$\mathbf{r}_j \longrightarrow \lambda \mathbf{r}_j \quad \mathbf{p}_j \longrightarrow \frac{1}{\lambda} \mathbf{p}_j \quad \text{alors } E(\{\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j\}) \longrightarrow \frac{1}{\lambda^2} E(\{\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j\})$$

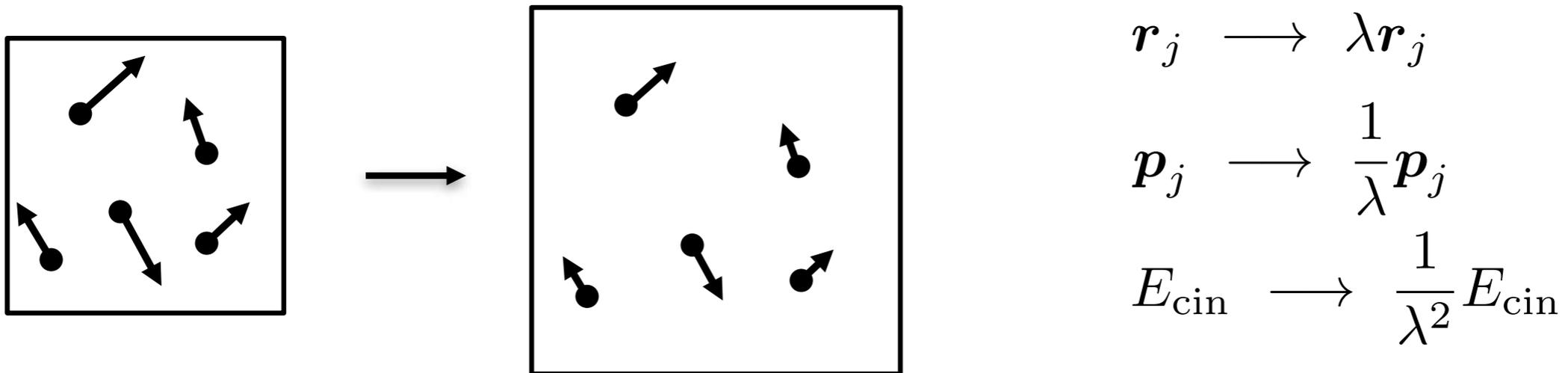
et chaque terme de la somme sur N est inchangé dans \mathcal{Z}_{GC}

Invariance d'échelle en $\mu / k_B T$: le cas du fluide en interaction

Extension du raisonnement précédent en présence d'interactions binaires :

$$E = \sum_{j=1}^N \frac{\mathbf{p}_j^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = E_{\text{cin}} + E_{\text{int}}$$

Comment se comporte le terme d'interaction dans la loi d'échelle position - impulsion



On conservera l'invariance d'échelle trouvée pour le gaz parfait si et seulement si :

$$E_{\text{int}} \longrightarrow \frac{1}{\lambda^2} E_{\text{int}} \quad \text{c'est-à-dire} \quad V(\lambda \mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda^2} V(\mathbf{r})$$

Quels sont les fluides invariants d'échelle ?

On veut que $E_{\text{int}} \longrightarrow \frac{1}{\lambda^2} E_{\text{int}}$, qui s'obtient en prenant $V(\lambda \mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda^2} V(\mathbf{r})$

- Le gaz parfait, à 1D, 2D, 3D,...
- Un fluide avec des interactions en $\frac{1}{r^2}$

Lien avec les modèles de Calogero - Sutherland - Moser

- Interaction de contact à deux dimensions

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{m} \tilde{g} \delta^{(2)}(\mathbf{r}) \qquad \delta^{(2)}(\lambda \mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda^2} \delta^{(2)}(\mathbf{r})$$

Dans tous ces cas, l'invariance de la fonction de partition entraîne l'invariance de la densité dans l'espace des phases :

$$T \longrightarrow \frac{1}{\lambda^2} T \quad \text{et} \quad \mu \longrightarrow \frac{1}{\lambda^2} \mu \quad \text{entraîne} \quad \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D} \quad \text{i.e.,} \quad \mathcal{D} = f\left(\frac{\mu}{k_B T}\right)$$

Gaz 2D : invariance d'échelle et analyse dimensionnelle

Dans un gaz 3D, l'interaction de contact est caractérisée par la longueur de diffusion a

$$V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a \delta^{(3)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad \text{Echelle d'énergie : } \epsilon = \frac{\hbar^2}{ma^2}$$

La densité dans l'espace des phases peut alors s'écrire comme :

$$\mathcal{D}(T, \mu) = \mathcal{F} \left(\frac{k_B T}{\epsilon}, \frac{\mu}{\epsilon} \right)$$

A 2D, l'interaction de contact est caractérisée par le nombre sans dimension \tilde{g}

$$V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{\hbar^2}{m} \tilde{g} \delta^{(2)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad \text{pas d'échelle d'énergie associée}$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}(T, \mu) = \mathcal{F} \left(\frac{k_B T}{\mu}, \tilde{g} \right)$$

L'invariance d'échelle est liée à l'absence de longueur intrinsèque dans le problème

Un autre exemple d'invariance d'échelle

Gaz 3D de fermions de spin 1/2 avec des interactions binaires $V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$
au voisinage d'une résonance de Feshbach

Amplitude de diffusion :
$$f(k) = \frac{-a}{1 + ika}$$

Situation « normale » : a est finie et on prend la limite $\lim_{k \rightarrow 0} f(k) = -a$

Mais une résonance de diffusion peut conduire à $|a| = +\infty$

$$f(k) = \frac{i}{k} \quad : \text{limite unitaire}$$

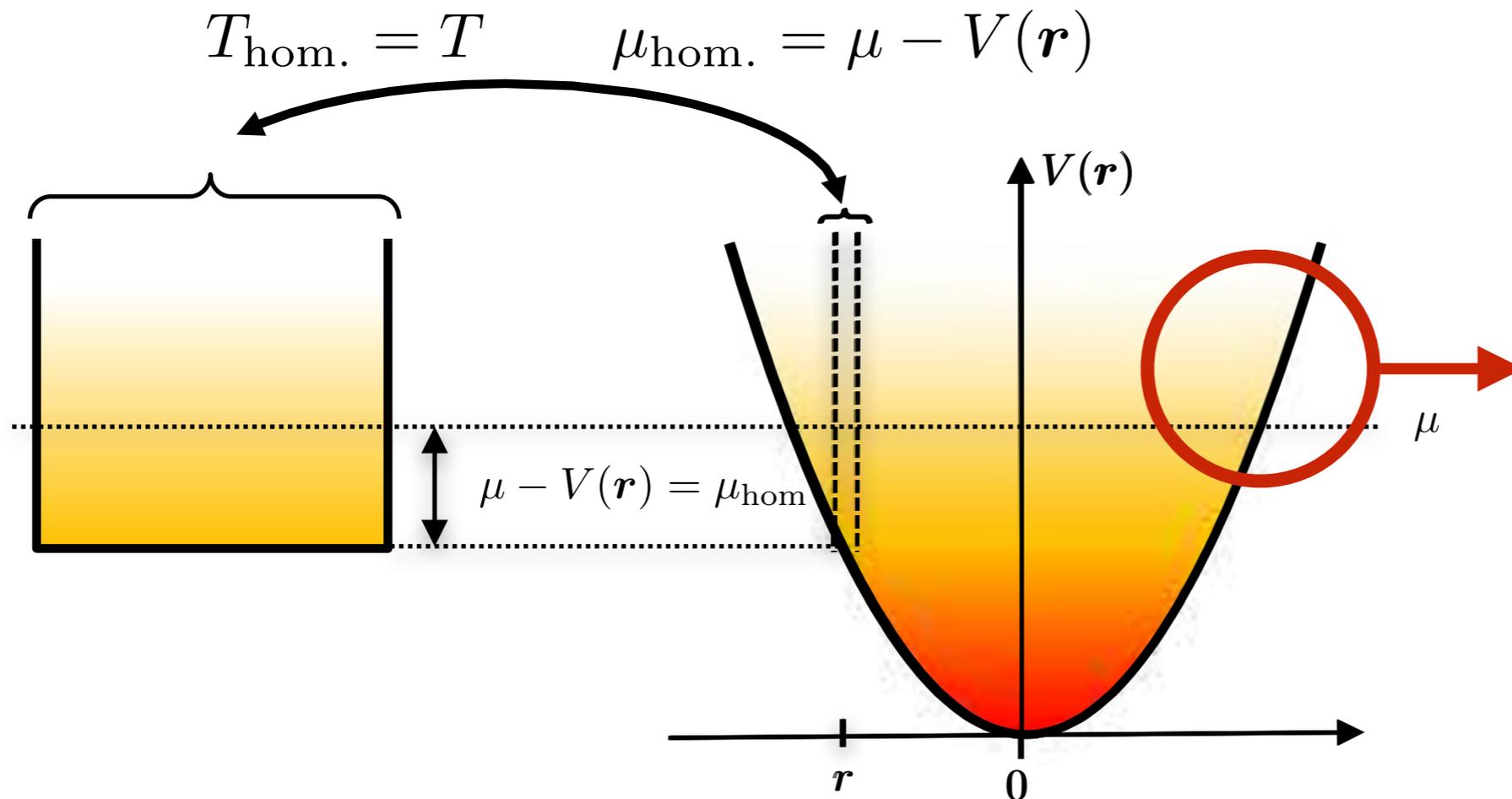
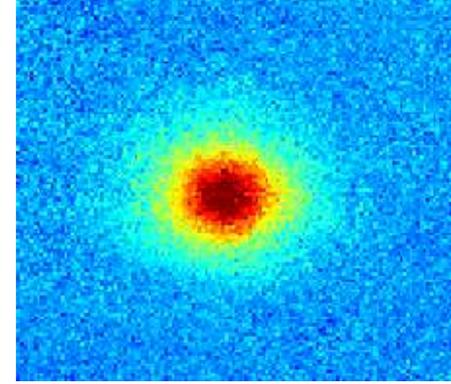
Perte de l'échelle de longueur associée aux interactions : invariance d'échelle

Attention : cela ne marche pas pour les bosons car le problème bosonique à trois corps vient réintroduire une échelle de longueur via les états d'Efimov

2.

Mesures de l'équation d'état

L'approximation de densité locale



Ailes de la distribution dans le piège : gaz dilué dans lequel les interactions jouent un rôle mineur

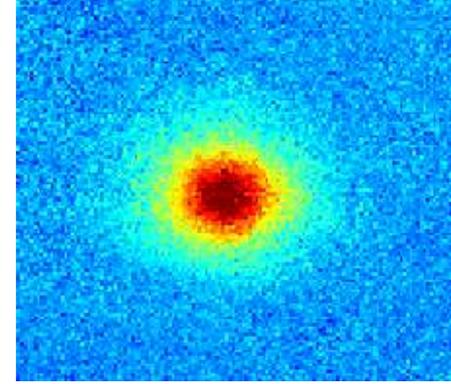
Grâce aux ailes de la distribution, on détermine T et μ en les ajustant par la loi

$$\rho(\mathbf{r}) = -\lambda_T^{-2} \ln \left(1 - e^{-\mu_{\text{loc}}(r)/k_B T} \right)$$

$$\lambda_T^{-2} \propto T$$

$$\mu_{\text{loc}}(r) = \mu - V(r)$$

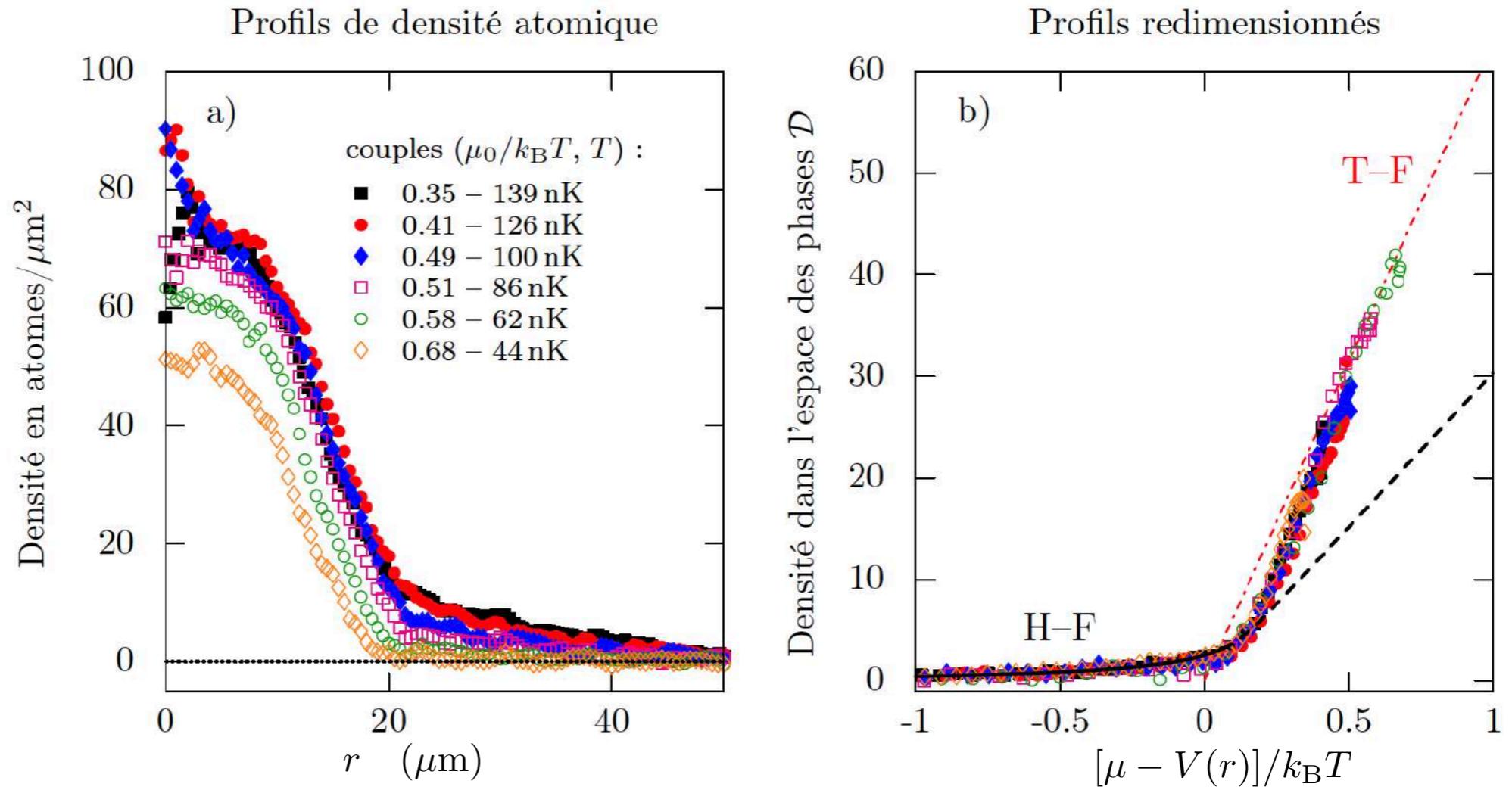
Vérification de l'invariance d'échelle



Chicago & ENS, 2011-2014

Thèse de
Tarik Yefsah
(2011)

$$\tilde{g} \approx 0.1$$

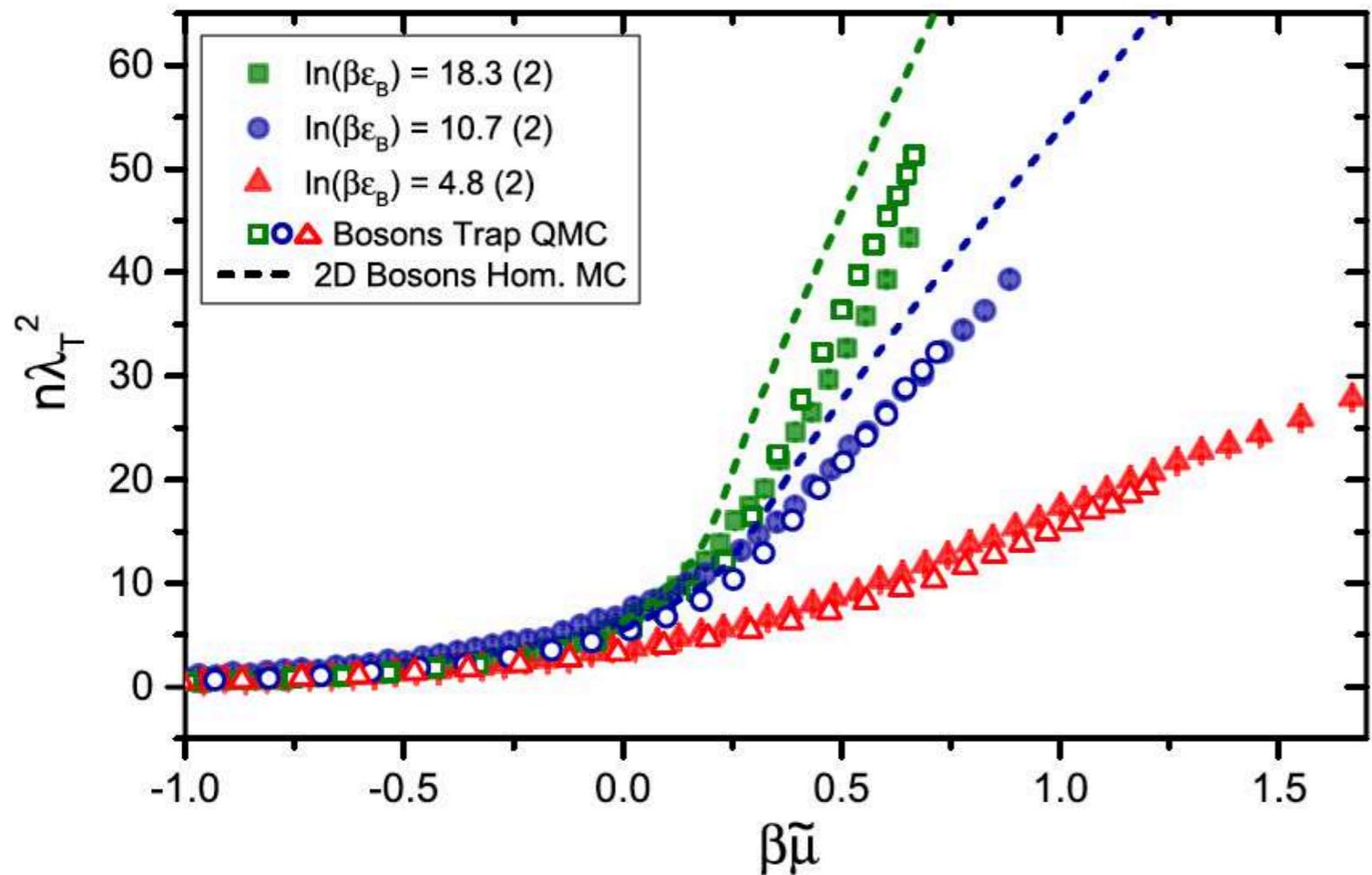


Tous les profils de densité mesurés pour différents couples (T, μ) se superposent quand on trace la densité dans l'espace des phases en fonction de $\mu_{\text{loc}}/k_B T$

Excellent accord avec la prédiction de champ classique

Le cas des interactions fortes

Expérience de Heidelberg (2016) avec des molécules ${}^6\text{Li}_2$



$$\tilde{g} \approx 0.6$$

$$\tilde{g} \approx 1.1$$

$$\tilde{g} \approx 2.3$$

Expérience : symboles pleins

Champ classique : tirets

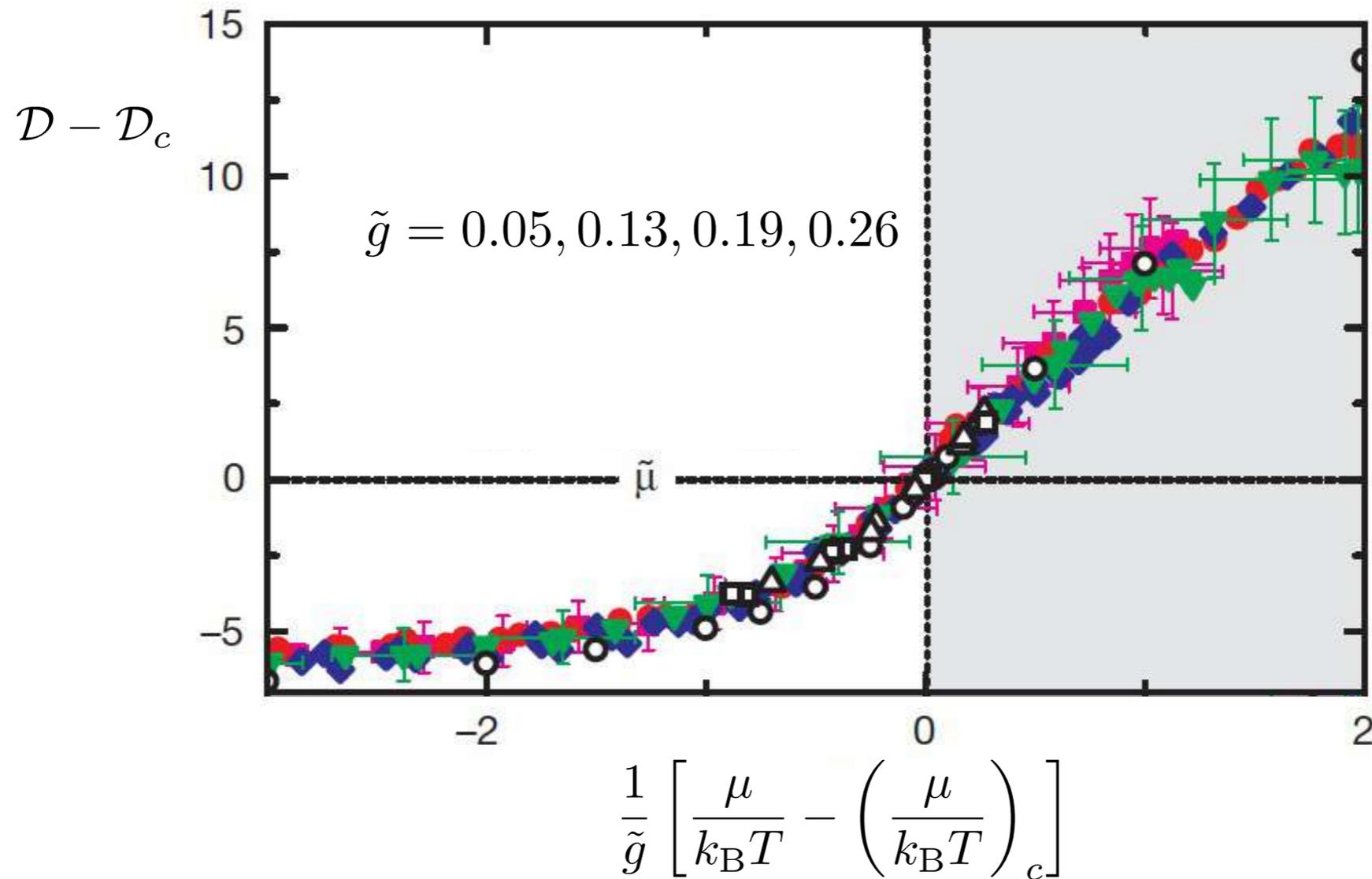
Monte Carlo quantique :
symboles évidés

- Déviation significative des résultats expérimentaux par rapport à la théorie de champ classique
- Bon accord avec les simulations Monte Carlo quantiques

Universalité autour du point critique

Chicago 2011

$$\mathcal{D}_{\text{crit}} \approx \ln \left(\frac{380}{\tilde{g}} \right) \quad \left. \frac{\mu}{k_B T} \right|_{\text{crit.}} \approx \frac{\tilde{g}}{\pi} \ln \left(\frac{13.2}{\tilde{g}} \right)$$



Relie entre eux les résultats obtenus pour différentes forces d'interaction \tilde{g}

3.

Le potentiel de contact δ à deux dimensions

L'invariance d'échelle est liée à l'absence d'échelle de longueur de la distribution de Dirac

Mais est-ce correct dans le cadre de la mécanique quantique ?

Non : anomalie quantique

Diffusion par un potentiel δ

Collision à deux corps
avec $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$



Diffusion de la particule relative
par le potentiel $V(\mathbf{r})$

Equation de Schrödinger indépendante du temps :

$$\hat{H} \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}) \quad \left\{ \begin{array}{l} E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r} \quad m_r = m/2 \\ V(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{m} \tilde{g} \delta^{(2D)}(\mathbf{r}) \end{array} \right.$$

Cette équation différentielle s'écrit : $(\nabla^2 + k^2) \psi(\mathbf{r}) = \tilde{g} \delta(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r})$

Passage dans l'espace de Fourier : $\psi(\mathbf{r}) \xleftrightarrow{\text{TF}} \phi(\mathbf{q})$

$$(q^2 - k^2) \phi(\mathbf{q}) = -\tilde{g} \psi(0)$$

Amplitude de diffusion à 2D pour le potentiel de contact

Equation de Schrödinger en point de vue de Fourier : $(q^2 - k^2) \phi(\mathbf{q}) = -\tilde{g} \psi(0)$

Pour une onde plane initiale, cette équation se résout en :

$$\phi(\mathbf{q}) = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{k}) - \frac{\tilde{g} \psi(0)}{q^2 - k^2 - i\varepsilon}$$

onde incidente $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ onde cylindrique sortante : $-i\varepsilon$

amplitude de diffusion : $f(k) = \tilde{g} \psi(0)$

Equation d'autocohérence sur $\psi(0)$:

Transformée de Fourier inverse : $\psi(0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \phi(\mathbf{q}) d^2q$

et $\phi(\mathbf{q})$ s'exprime elle-même en fonction de $\psi(0)$:

$$\psi(0) = 1 - \frac{\tilde{g} \psi(0)}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{q^2 - k^2 - i\varepsilon} d^2q$$

Pourquoi il faut régulariser la distribution de Dirac à 2D

Equation d'autocoherence :
$$\psi(0) = 1 - \frac{\tilde{g} \psi(0)}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{q^2 - k^2 - i\varepsilon} d^2q$$

A deux ou trois dimensions, cette intégrale diverge aux grandes valeurs de q

On met donc une coupure « ultraviolette » à la valeur Q

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{q^2 - k^2 - i\varepsilon} d^2q \approx \frac{1}{2\pi} \ln(Q/k) + \frac{i}{4}$$

On peut alors calculer $\psi(0)$ et l'amplitude de diffusion $f(k) = \tilde{g} \psi(0)$

$$f(k) = \frac{1}{\frac{1}{2\pi} \ln(1/ka_2) + \frac{i}{4}} \quad a_2 = \frac{e^{-2\pi/\tilde{g}}}{Q}$$

Introduction d'une échelle de longueur a_2 liée aux interactions

→ Brise l'invariance d'échelle

Exemple (simple) d'une « anomalie quantique »

Phénomène bien connu en théorie quantique des champs

- On part d'un système qui possède une symétrie exacte au niveau classique

Ici, l'invariance d'échelle pour un gaz avec l'interaction $\tilde{g} \int |\psi(\mathbf{r})|^4 d^2r$

- On quantifie le problème

- Cette quantification nécessite une régularisation pour éliminer certaines divergences

Ici, la régularisation de l'interaction de contact $\tilde{g} \delta(\mathbf{r})$

- Dans la version régularisée, la symétrie initiale est perdue

Equation d'état du gaz 2D à température nulle

Dans le cadre de la théorie de champ classique :

$$\mathcal{D} = f\left(\frac{\mu}{k_B T}\right) \longrightarrow \rho \propto T f\left(\frac{\mu}{k_B T}\right)$$

limite $T \rightarrow 0$: $\rho \propto \mu$

loi de Thomas-Fermi

Au delà de l'approximation de champ classique, développement en fonction du paramètre

$$\epsilon = \frac{1}{\ln(E_2/\mu)} \quad E_2 = \frac{\hbar^2}{ma_2^2} \quad a_2 : \text{longueur de diffusion 2D}$$

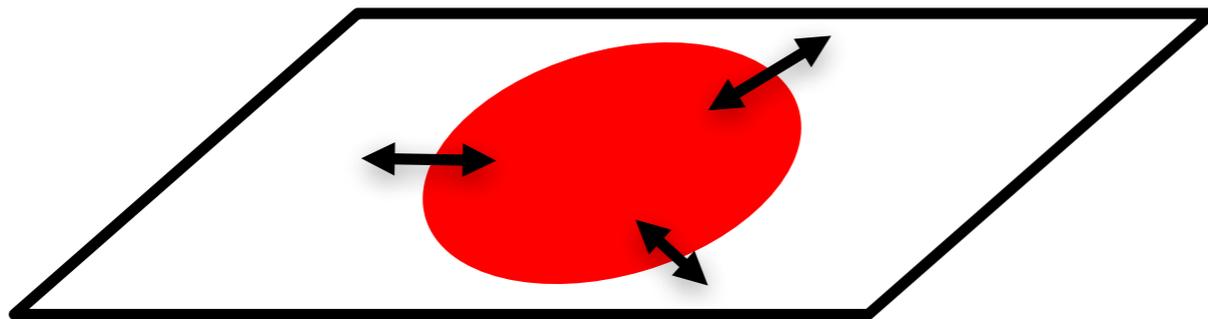
valable dans la limite $\epsilon \ll 1$, c'est-à-dire $\mu \ll E_2$

$$\rho = \frac{m\mu}{4\pi\hbar^2} \ln\left(\frac{E_2}{\mu}\right) \quad (\text{voir par exemple Mora-Castin 2009})$$

Correction mesurée à Chicago (2013)

4.

Le mode de respiration d'un gaz piégé



$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

Pitaevskii & Rosch (1997)

Le point de vue « ondulatoire »

On part d'une solution statique de l'équation de Gross-Pitaevskii

$$\mu \psi_0(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_0 + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \psi_0(\mathbf{r}) + \frac{\hbar^2}{m} \tilde{g} |\psi_0(\mathbf{r})|^2 \psi_0(\mathbf{r})$$

$$\rho_0(\mathbf{r}) = |\psi_0(\mathbf{r})|^2$$

On peut alors fabriquer une famille infinie de solutions exactes de l'équation dépendant du temps, ces solutions vérifiant

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\lambda^2(t)} \rho_0\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda(t)}\right) \quad \ddot{\lambda}(t) = \omega^2 \left[\frac{1}{\lambda^3(t)} - \lambda(t) \right]$$

- Pas d'amortissement
- valable quelle que soit l'amplitude de λ

Spécifique du cas 2D : comportement identique
de E_{cin} et E_{int} dans le changement d'échelle

Le point de vue « algébrique »

Les trois énergies en présence

$$\hat{H}_{\text{cin}} = \sum_j \frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m} \quad \hat{H}_{\text{int}} = \sum_{i < j} U(\hat{\mathbf{r}}_i - \hat{\mathbf{r}}_j) \quad \hat{H}_{\text{trap}} = \sum_j \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{\mathbf{r}}_j^2$$

On construit les trois opérateurs :

$$\hat{L}_1 = \frac{1}{2\omega} \left(\hat{H}_{\text{cin}} + \hat{H}_{\text{int}} - \hat{H}_{\text{trap}} \right)$$

$$\hat{L}_2 = \frac{1}{4} \sum_j (\hat{\mathbf{r}}_j \cdot \hat{\mathbf{p}}_j + \hat{\mathbf{p}}_j \cdot \hat{\mathbf{r}}_j)$$

$$\hat{L}_3 = \frac{1}{2\omega} \left(\hat{H}_{\text{cin}} + \hat{H}_{\text{int}} + \hat{H}_{\text{trap}} \right) \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2\omega} \hat{H}_{\text{tot}}$$

On a alors une algèbre particulièrement simple si $U(\lambda \mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda^2} U(\mathbf{r})$

$$[\hat{L}_1, \hat{L}_2] = -i\hbar \hat{L}_3 \quad [\hat{L}_2, \hat{L}_3] = i\hbar \hat{L}_1 \quad [\hat{L}_3, \hat{L}_1] = i\hbar \hat{L}_2$$

« Presque » un moment cinétique : $\text{SO}(3) \longrightarrow \text{SO}(2,1)$

Le point de vue « algébrique » (suite)

Partant de $[\hat{L}_1, \hat{L}_2] = -i\hbar\hat{L}_3$ $[\hat{L}_2, \hat{L}_3] = i\hbar\hat{L}_1$ $[\hat{L}_3, \hat{L}_1] = i\hbar\hat{L}_2$

on adopte une technique similaire à celle utilisée pour le moment cinétique

$$\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_1 \pm i\hat{L}_2 \qquad [\hat{L}_3, \hat{L}_{\pm}] = \pm\hbar \hat{L}_{\pm}$$

Partant d'un état propre de $\hat{L}_3 = \hat{H}_{\text{tot}}/2\omega$, c'est-à-dire $\hat{L}_3|\psi\rangle = \frac{E}{2\omega}|\psi\rangle$,

on construit par action répétée de \hat{L}_+ une « tour » d'états d'énergie $E + n 2\hbar\omega$

$$\begin{aligned} \hat{L}_3 \left(\hat{L}_+ |\psi\rangle \right) &= \hat{L}_+ \left(\hat{L}_3 |\psi\rangle \right) + \hbar \hat{L}_+ |\psi\rangle \\ &= \left(\frac{E}{2\omega} + \hbar \right) \left(\hat{L}_+ |\psi\rangle \right) \end{aligned}$$

Cet ensemble d'états indépendants correspond au mode monopolaire avec une amplitude arbitraire

L'anomalie quantique

La régularisation du potentiel en $\delta(\mathbf{r})$ entraîne que l'algèbre des trois opérateurs \hat{L}_1 , \hat{L}_2 , \hat{L}_3 n'est plus fermée

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] \neq \pm i\hbar \hat{L}_k \quad \text{si} \quad U(\lambda \mathbf{r}) \neq \frac{1}{\lambda^2} U(\mathbf{r})$$

→ Le mode monopolaire ne se produit plus à la pulsation 2ω

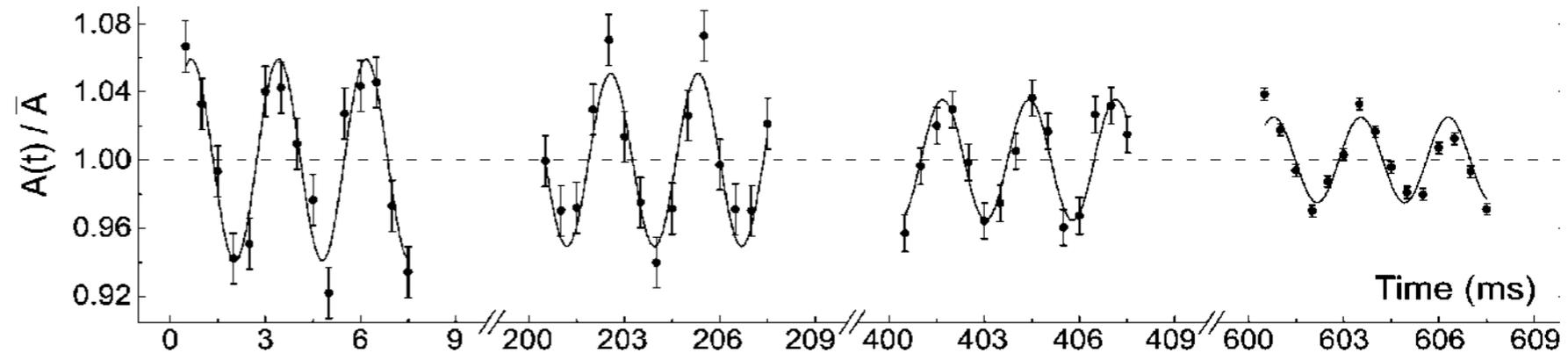
$$\text{Olshanii et al., 2010:} \quad \frac{\delta\omega_{\text{monop.}}}{2\omega} = \frac{\tilde{g}}{8\pi\sqrt{2}} \quad \text{pour } \tilde{g} \ll 1$$

→ L'oscillation de ce mode monopolaire est amortie

Recherche expérimentale de cette anomalie

ENS (2001): expériences sur un cigare allongé

*interactions faibles :
pas de trace d'anomalie*

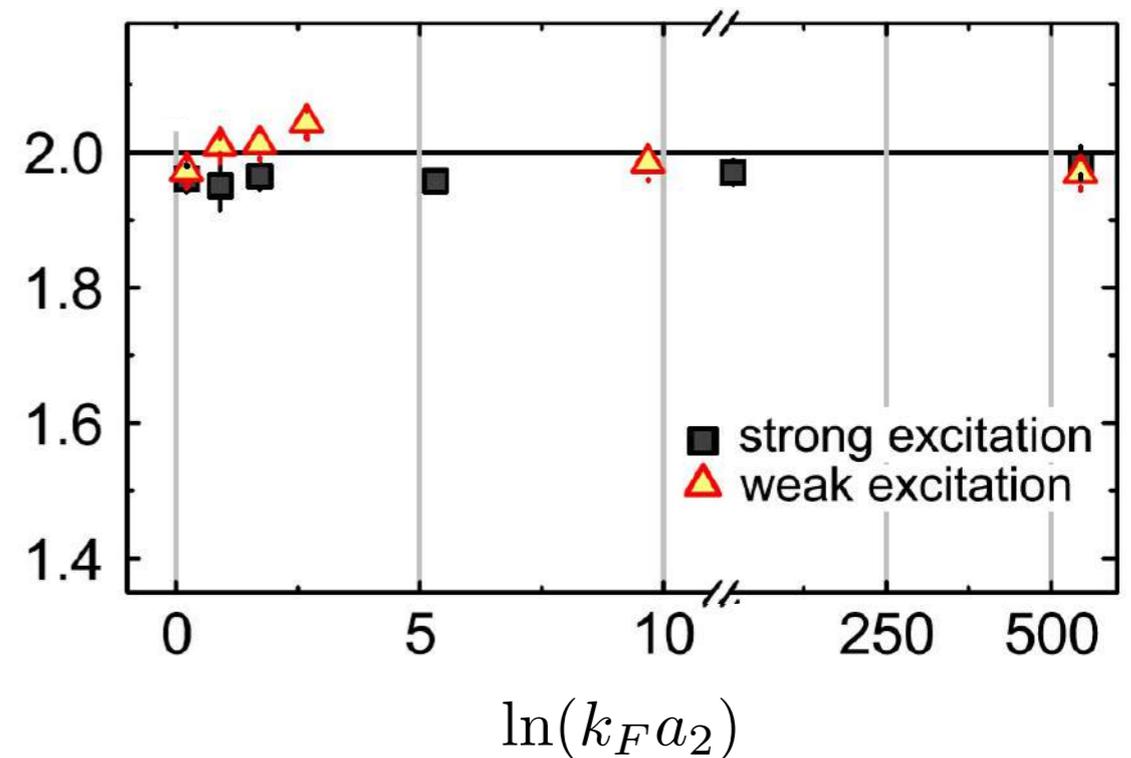


$\omega_{\text{monop.}} = 2\omega$ et très grand facteur de qualité (> 2000)

Cambridge (2012), groupe de M. Köhl

Gaz d'atomes fermioniques ^{40}K
au voisinage d'une résonance
de Feshbach : interaction forte
et pourtant... $\omega_{\text{monop.}} \approx 2\omega$

$$\frac{\omega_{\text{monop.}}}{\omega}$$



*Taylor & Randeria (2012) : compensation « fortuite » de deux contributions
différentes à l'effet de l'anomalie quantique sur ce mode monopolaire*

Bilan global pour cette série de cours

De Peierls à Berezinskii - Kosterlitz - Thouless



R. Peierls 1907-95



VADIM L'VOVICH
BEREZINSKII
(1935-1980)



J.M. Kosterlitz



D.J. Thouless

Peierls suivi de Mermin - Wagner - Hohenberg : absence de brisure d'une symétrie continue dans un système de basse dimension à $T \neq 0$ (inter. à courte portée)

Pas de cristal, pas de condensat de Bose-Einstein,...

BKT : il y a malgré tout possibilité d'une transition de phase non conventionnelle en présence d'interactions

Ordre orientationnel, gaz de Bose 2D superfluide

La transition BKT dans un fluide de bosons

Etude faite dans le cadre d'une approximation de champ classique

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})} e^{i\theta(\mathbf{r})} \quad \text{champ de vitesse : } \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{m} \nabla\theta(\mathbf{r})$$

Modélisation des interactions entre particules par un potentiel de contact

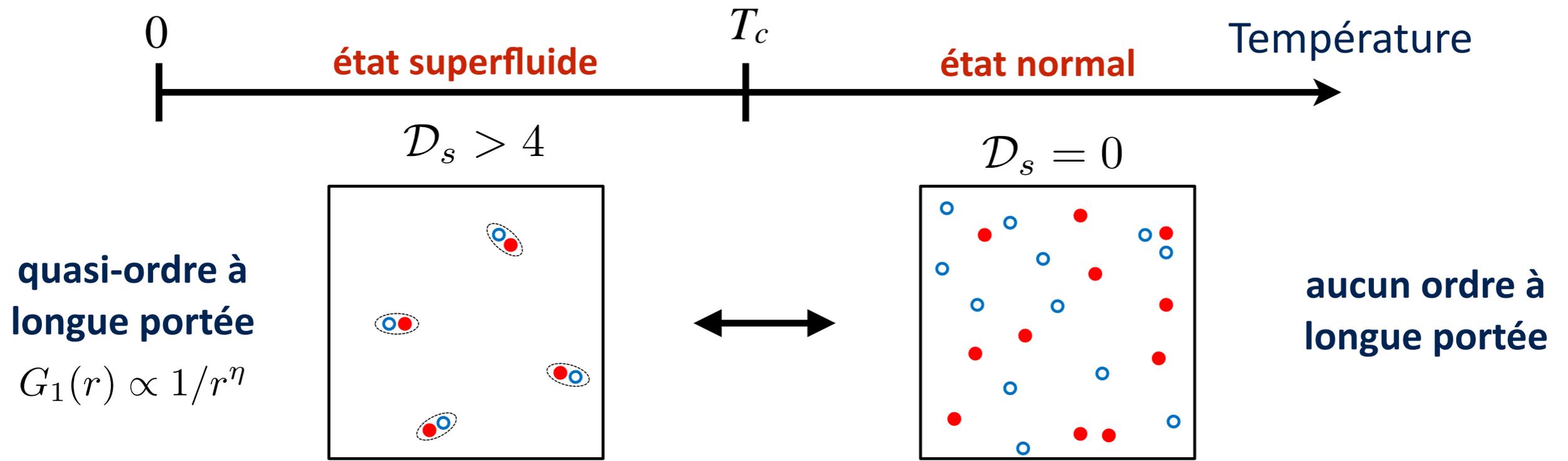
$$V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{\hbar^2}{m} \tilde{g} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

En dépit de l'utilisation d'une méthode de champ classique, il reste une quantification dans cette étude :

$$\oint \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{\hbar}{m} 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

Notion de « défaut topologique » (vortex) sur laquelle la théorie BKT se construit

L'appariement des défauts topologiques



Au point de transition, saut « universel » de la densité superfluide

Caractérisation du point critique à partir de l'équation d'état du gaz :

$$\mathcal{D}_{\text{crit}} \approx \ln \left(\frac{380}{\tilde{g}} \right) \quad \left. \frac{\mu}{k_B T} \right|_{\text{crit.}} \approx \frac{\tilde{g}}{\pi} \ln \left(\frac{13.2}{\tilde{g}} \right) \quad \text{Bon accord avec les expériences}$$

Plus généralement, cette équation d'état présente une invariance d'échelle :

$$\mathcal{D}(T, \mu) = \mathcal{F} \left(\frac{k_B T}{\mu} \right) \quad \text{Bon accord avec les expériences}$$

Au delà de l'approche champ classique

Nécessaire quand le paramètre \tilde{g} devient de l'ordre de 1

Il faut alors régulariser le potentiel de contact

Introduction d'une échelle de longueur qui vient briser l'invariance d'échelle

La transition BKT est toujours présente, mais sa description théorique précise passe alors par des méthodes de simulations Monte Carlo quantiques

Existence d'une manifestation dynamique simple de l'invariance d'échelle :
le mode de respiration d'un gaz piégé

*A priori un bon candidat pour détecter l'anomalie quantique,
mais reste pour l'instant en deçà des précisions de mesure...*

Et la suite ? Cours 2017-18

La matière topologique et son exploration avec les gaz quantiques

Deuxième volet du prix Nobel 2016

Comment fabriquer l'équivalent de l'effet Hall quantique, d'isolants topologiques, de supraconducteurs topologiques et les fermions de Majorana associés avec des gaz d'atomes ou de photons