

Géométrie Algorithmique

Données, Modèles, Programmes

5. Courbes et surfaces

Jean-Daniel Boissonnat

Collège de France
10 mai 2017

Géométrie algorithmique

Données, modèles, programmes

- 1 Modèles géométriques discrets
F. Cazals : Modèles géométriques pour la prédiction des interactions macro-moléculaires
- 2 La puissance de l'aléa : algorithmes randomisés
P. Calka : Probabilités géométriques
- 3 Le calcul géométrique
S. Pion : La bibliothèque logicielle CGAL
- 4 Génération de maillages
J-M. Mirebeau : Les deux réductions de Voronoï et leur application aux équations aux dérivées partielles
- 5 Courbes et surfaces
P. Alliez : Reconstruction de surfaces
- 6 Espaces de configurations
A. de Mesmay : Dessin de graphes
- 7 Structures de données géométriques
D. Feldman : Core sets
- 8 Géométrie des données
F. Chazal : Analyse topologique des données

1 Maillage de surfaces

- Conditions d'échantillonnage
- Critères de qualité

2 Triangulation de Delaunay restreinte à une surface

- Théorème d'approximation
- Algorithme de génération de maillages de surfaces
- Éléments de preuves

1 Maillage de surfaces

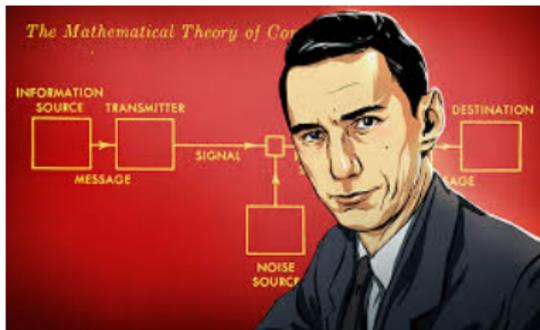
- Conditions d'échantillonnage
- Critères de qualité

2 Triangulation de Delaunay restreinte à une surface

- Théorème d'approximation
- Algorithme de génération de maillages de surfaces
- Éléments de preuves

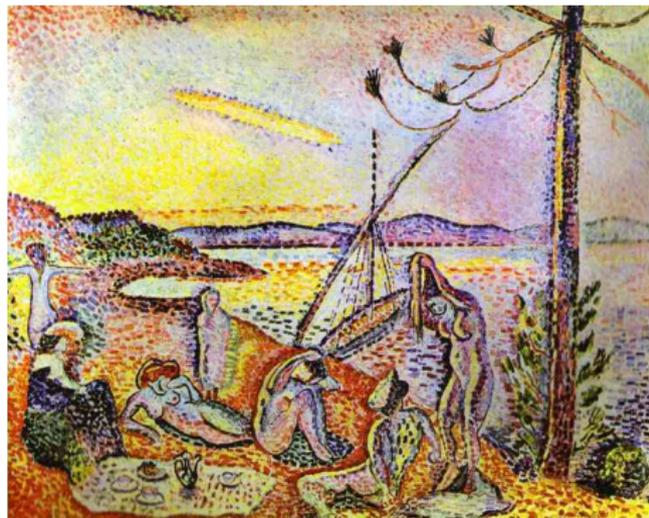
Courbes et surfaces

Passage continu-discret

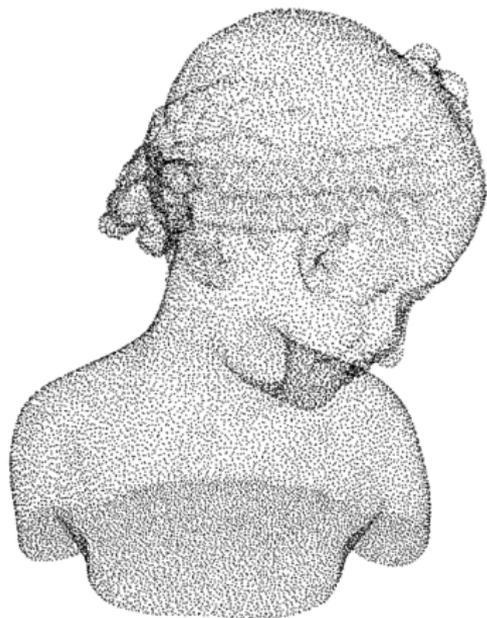


Claude Shannon

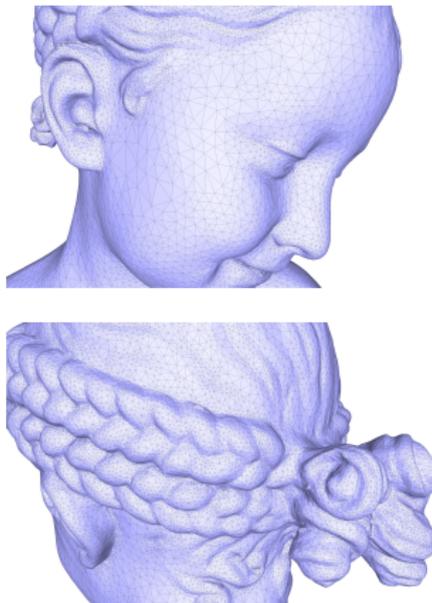
Henri Matisse



Pour une théorie de l'échantillonnage géométrique



- Quels espaces ?
- Critères de qualité

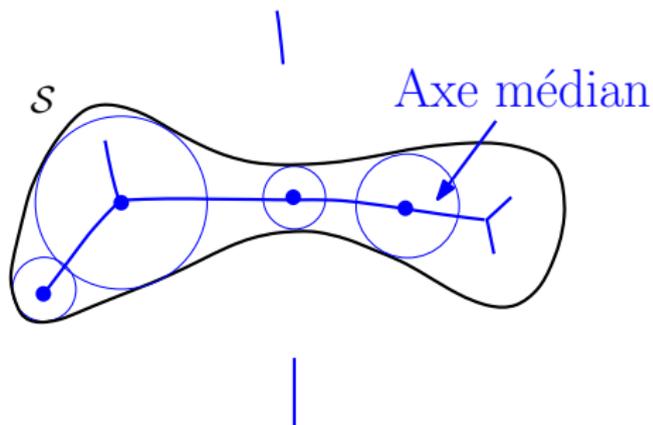


- Conditions d'échantillonnage
- Algorithmes de maillage

Axe médian

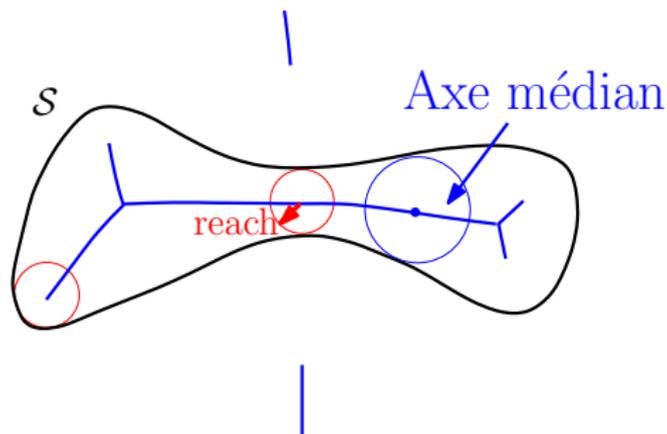
Axe médian de \mathcal{S} : $\text{axis}(\mathcal{S})$

Ensemble des points qui ont plus d'un plus proche voisin sur \mathcal{S}



Local Feature Size et Reach (Portée)

[Federer 1958], [Amenta & Bern 1998]



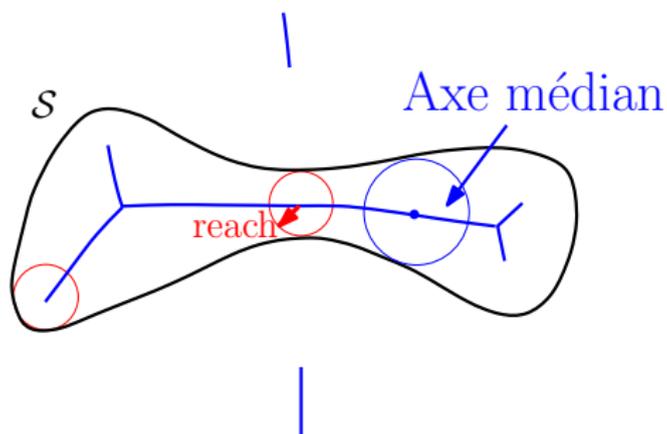
Local feature size

$$\forall x \in \mathcal{S}, \text{ lfs}(x) = d(x, \text{axis}(\mathcal{S}))$$

$$(1\text{-Lipschitz} : |f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|)$$

$$\text{rch}(\mathcal{S}) = \inf_{x \in \mathcal{S}} \text{ lfs}(x)$$

ϵ -nets sur des surfaces



$(\epsilon, \bar{\eta})$ -net de S

1. $\mathcal{P} \subset S, \forall x \in S : d(x, \mathcal{P}) \leq \epsilon \text{ lfs}(x)$
2. $\forall p, q \in \mathcal{P} : \|p - q\| \geq \bar{\eta}\epsilon \min(\text{lfs}(p), \text{lfs}(q))$

1 Maillage de surfaces

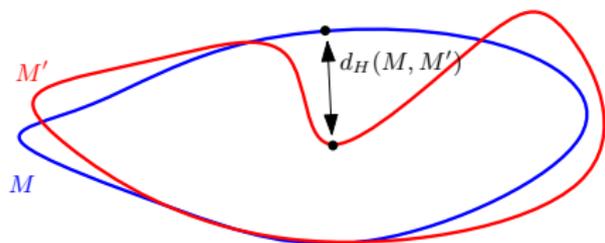
- Conditions d'échantillonnage
- Critères de qualité

2 Triangulation de Delaunay restreinte à une surface

- Théorème d'approximation
- Algorithme de génération de maillages de surfaces
- Éléments de preuves

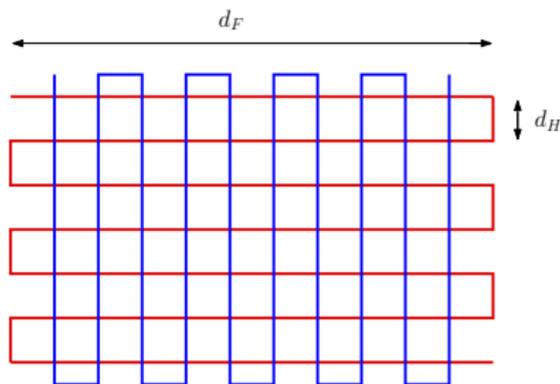
Critères de qualité

1. Distance de Hausdorff / Distance de Fréchet



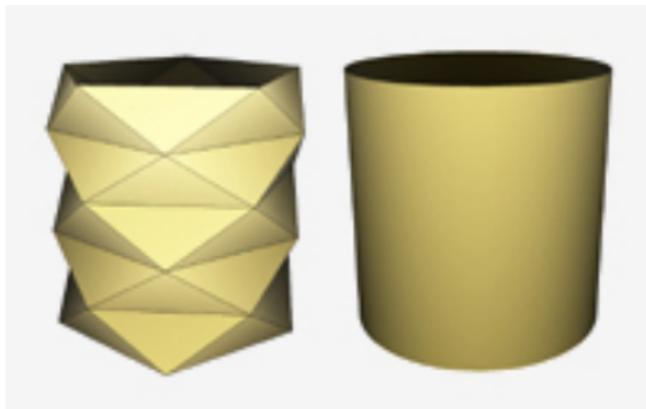
$$d_H(M, M') = \max \left(\sup_{x \in M} \inf_{x' \in M'} \|x - x'\|, \sup_{x \in M'} \inf_{x' \in M} \|x - x'\| \right)$$

$$= \min \{ r : M \subset M'^{+r} \text{ et } M' \subset M^{+r} \}$$



Critères de qualité

2. Angles entre les facettes et la surface



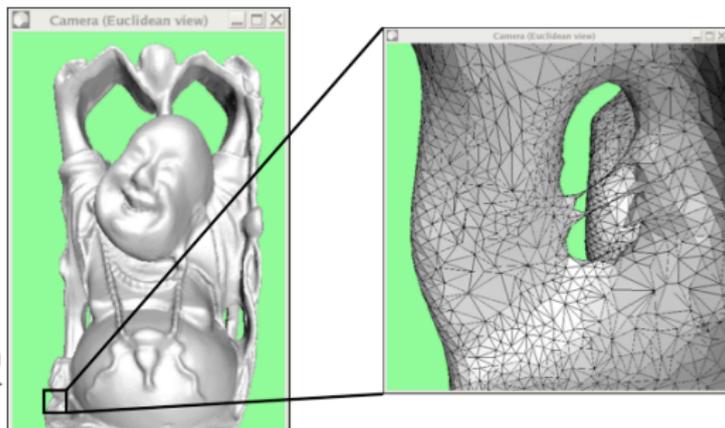
Critères de qualité

3. Topologie

Homéomorphisme

$f : X \rightarrow Y$ est une application bijective continue et d'inverse continue

$$X \approx Y$$



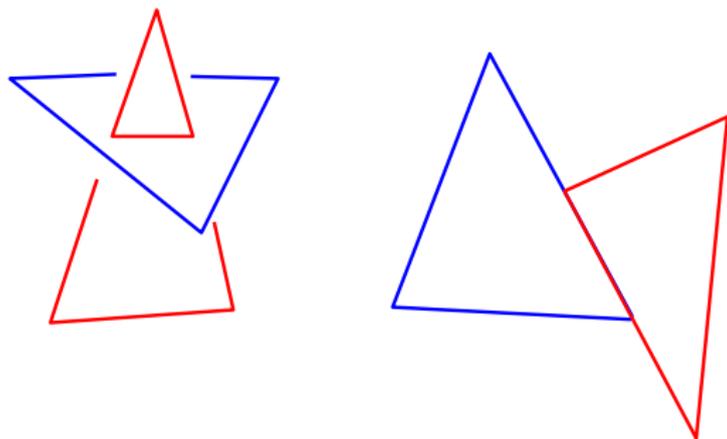
Critères de qualité

Triangulation de surface

Définition

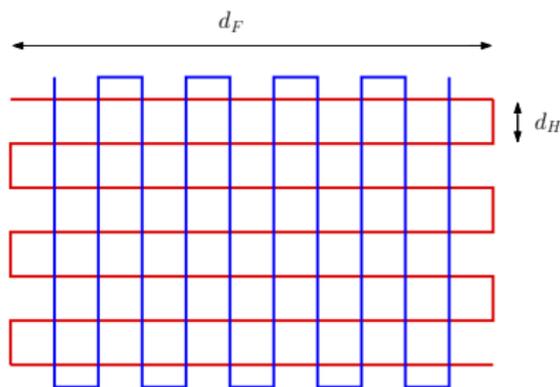
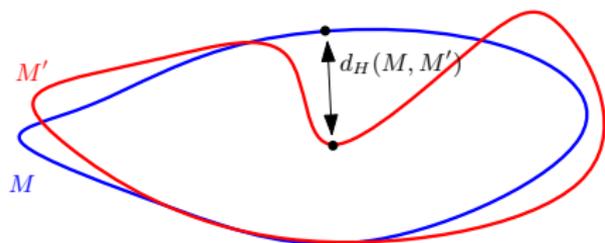
Un ensemble $\hat{\mathcal{S}}$ de triangles de \mathbb{R}^3 est appelé une triangulation de \mathcal{S} si les 2 conditions suivantes sont remplies

- 1 $\forall f, f' \in \hat{\mathcal{S}}$, on a un des 3 cas
 - ▶ $f \cap f' = \emptyset$
 - ▶ $f \cap f'$ est un sommet commun
 - ▶ $f \cap f'$ est une arête commune de f et f'
- 2 $\bigcup_{f \in \hat{\mathcal{S}}} f \approx \mathcal{S}$



Critères de qualité

Distance de Hausdorff / Distance de Fréchet



$$d_F(M, M') = \inf_{f \in \mathcal{H}(M, M')} \sup_{x \in M} \|x - f(x)\|$$

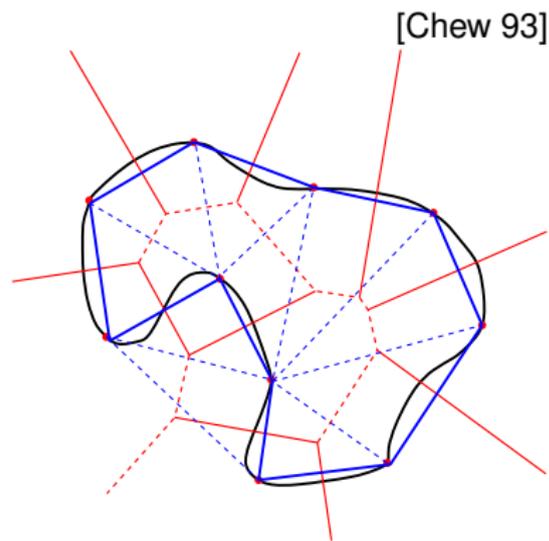
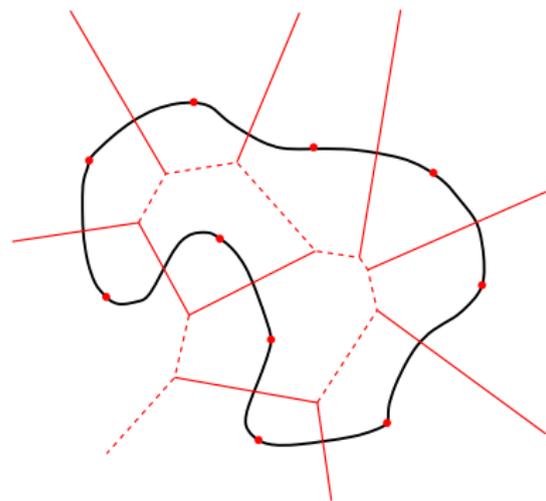
1 Maillage de surfaces

- Conditions d'échantillonnage
- Critères de qualité

2 Triangulation de Delaunay restreinte à une surface

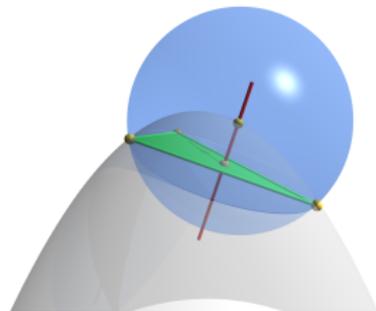
- Théorème d'approximation
- Algorithme de génération de maillages de surfaces
- Éléments de preuves

Triangulation de Delaunay restreinte $\text{Del}_{|\mathcal{S}}(\mathcal{P})$



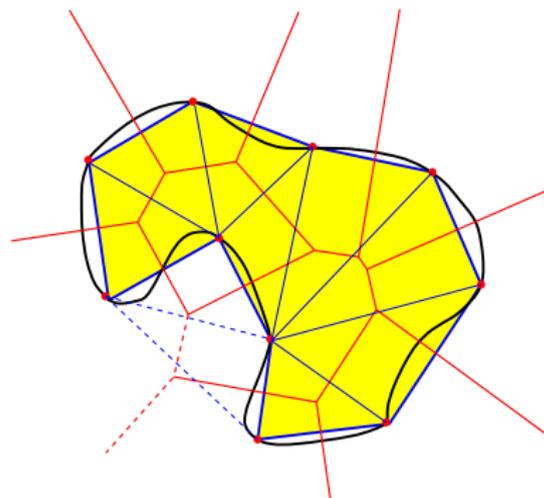
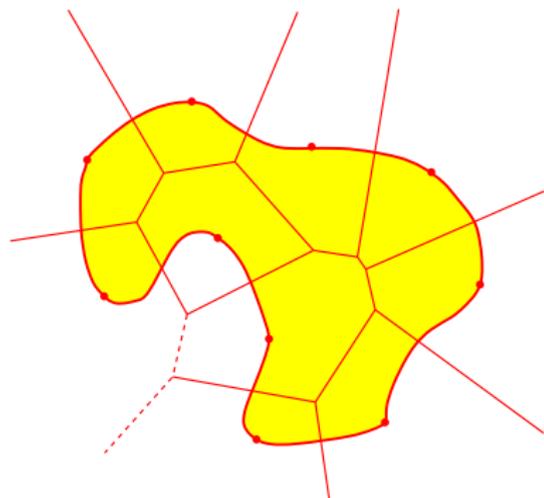
$$\text{Del}_{|\mathcal{S}}(\mathcal{P}) = \{f \in \text{Del}(\mathcal{P}) \mid \text{Vor}(f) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset\}$$

$$= \{f \in \text{Del}(\mathcal{P}) \mid \exists \text{ boule vide } B_f \text{ circonscrite à } f \text{ centrée sur } \mathcal{S}\}$$



Maillage de volumes limités par des surfaces

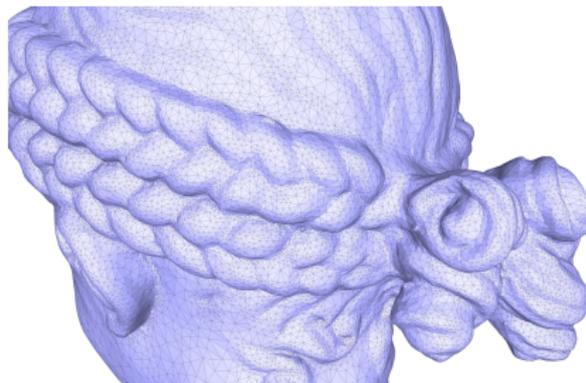
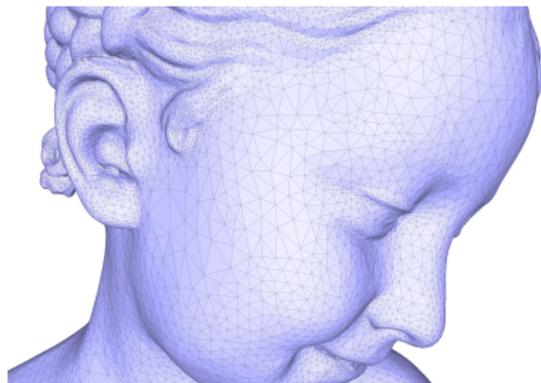
Triangulation de Delaunay restreinte $\text{Del}_{|\Omega}(\mathcal{P})$



$$\text{Del}_{|\mathcal{S}}(\mathcal{P}) = \{f \in \text{Del}(\mathcal{P}) \mid \text{Vor}(f) \cap \Omega \neq \emptyset\}$$

$$= \{f \in \text{Del}(\mathcal{P}) \mid \exists \text{ boule vide } B_f \text{ circonscrite à } f \text{ centrée dans } \Omega\}$$

Théorème d'approximation



Amenta et Bern [1998], Amenta et Dey [2002]
Boissonnat et Cazals [2000], Boissonnat et Oudot [2005]

Si S est une surface compacte de portée $\text{rch}(S) > 0$ sans bord de \mathbb{R}^3 ,
et si \mathcal{P} est un ε -net de S pour ε assez petit

alors $\text{Del}_S(\mathcal{P})$ est une triangulation de S qui a les qualités 1-3 précédentes

1 Maillage de surfaces

- Conditions d'échantillonnage
- Critères de qualité

2 Triangulation de Delaunay restreinte à une surface

- Théorème d'approximation
- Algorithme de génération de maillages de surfaces
- Éléments de preuves

Génération de maillages de surfaces

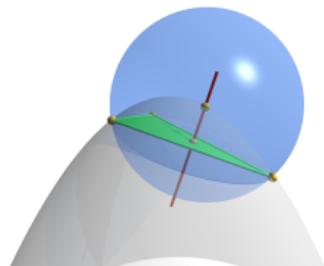
Raffinement de Delaunay

[Chew 1993, B. & Oudot 2003]

$\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ = fonction Lipschitz
 $\forall x \in S, 0 < \phi_0 \leq \phi(x) < \varepsilon \text{ lfs}(x)$

ORACLE : Pour une facette f de $\text{Del}_{|S}(\mathcal{P})$,
retourner c_f, r_f et $\phi(c_f)$

Une facette f est **mauvaise** si $r_f > \phi(c_f)$



Algorithme

INIT prendre un (petit) échantillon initial $\mathcal{P}_0 \subset S$

REPEAT si f est une mauvaise facette
insert_in_Del3D(c_f) ,
update \mathcal{P} et $\text{Del}_{|S}(\mathcal{P})$

UNTIL il n'y a plus de mauvaise facette

Génération de maillages de surfaces

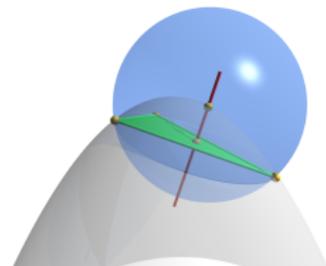
Raffinement de Delaunay

[Chew 1993, B. & Oudot 2003]

$\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ = fonction Lipschitz
 $\forall x \in S, 0 < \phi_0 \leq \phi(x) < \varepsilon \text{ lfs}(x)$

ORACLE : Pour une facette f de $\text{Del}_{|S}(\mathcal{P})$,
retourner c_f, r_f et $\phi(c_f)$

Une facette f est **mauvaise** si $r_f > \phi(c_f)$



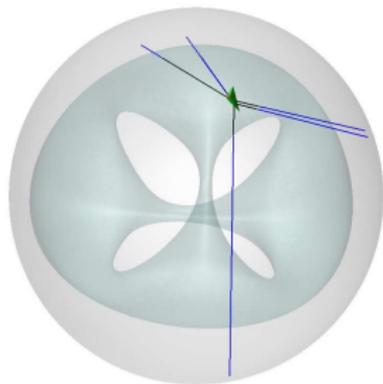
Algorithme

INIT prendre un (petit) échantillon initial $\mathcal{P}_0 \subset S$

REPEAT si f est une mauvaise facette
 insert_in_Del3D(c_f) ,
 update \mathcal{P} et $\text{Del}_{|S}(\mathcal{P})$

UNTIL il n'y a plus de mauvaise facette

L'algorithme de maillage en action



Propriétés de l'algorithme de maillage de surfaces

Théorème

Si \mathcal{S} est une surface de portée positive, l'algorithme de raffinement de Delaunay produit

- un $(\varepsilon + O(\varepsilon^2))$ -net \mathcal{P} de \mathcal{S}
- une surface PL $\hat{\mathcal{S}}$
 - ▶ homéomorphe à \mathcal{S}
 - ▶ proche de \mathcal{S}
 - distances de Hausdorff et Fréchet = $O(\varepsilon^2)$
 - approximation des normales = $O(\varepsilon)$

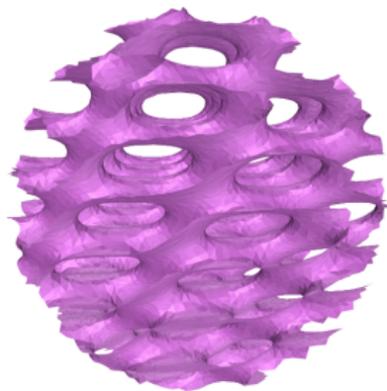
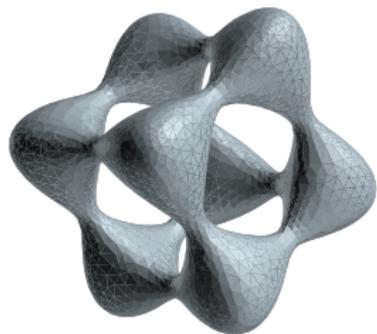
Applications

CGAL mesh

L'oracle permet de mailler des surfaces représentées sous des formes différentes

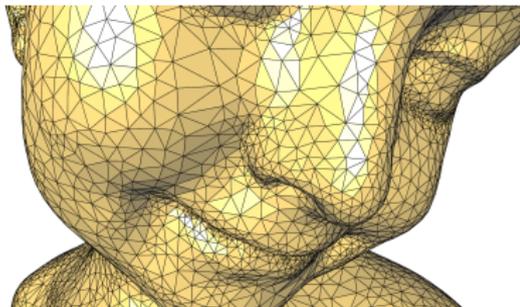
- Surfaces implicites $f(x, y, z) = 0$
- Isosurfaces dans des images 3d (Images médicales)
- Remaillage de surfaces triangulées
- Reconstruction de surfaces

Surfaces implicites

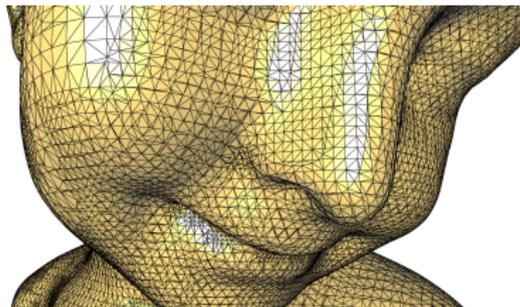


Remaillage de surfaces triangulées

Comparaison avec l'algorithme du Marching Cube



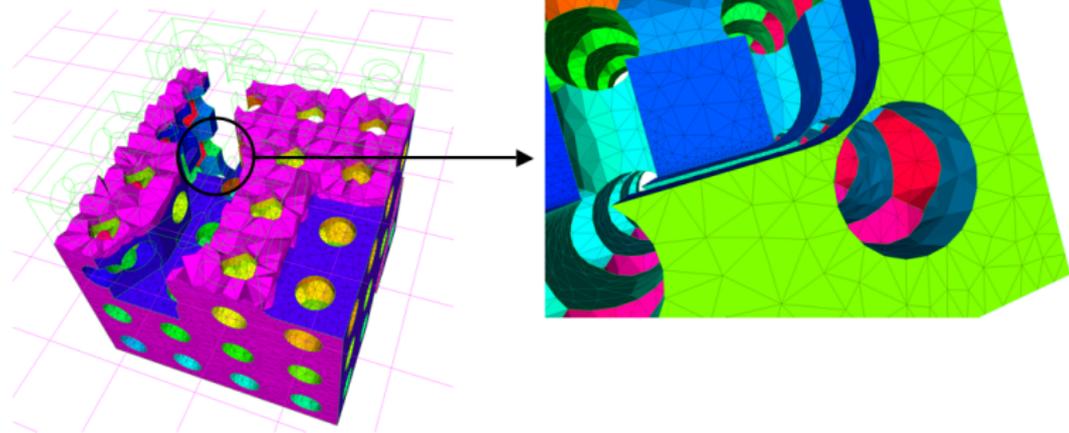
Raffinement de Delaunay



Marching cube

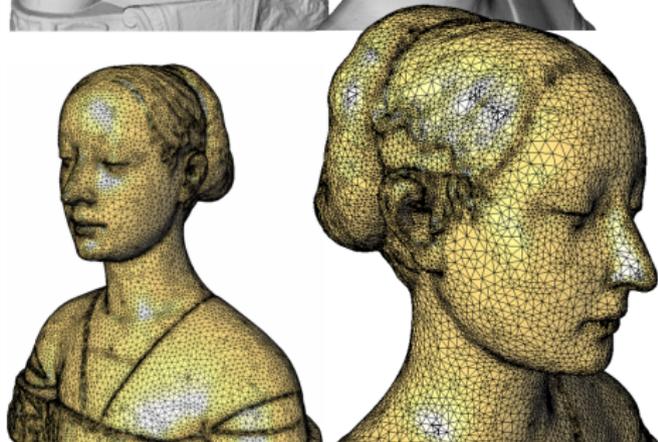
Gestion des arêtes vives

Utilisation de triangulations pondérées pour respecter les arêtes vives



Reconstruction de surfaces

Point set surfaces



Maillages de volumes bornés par des surfaces

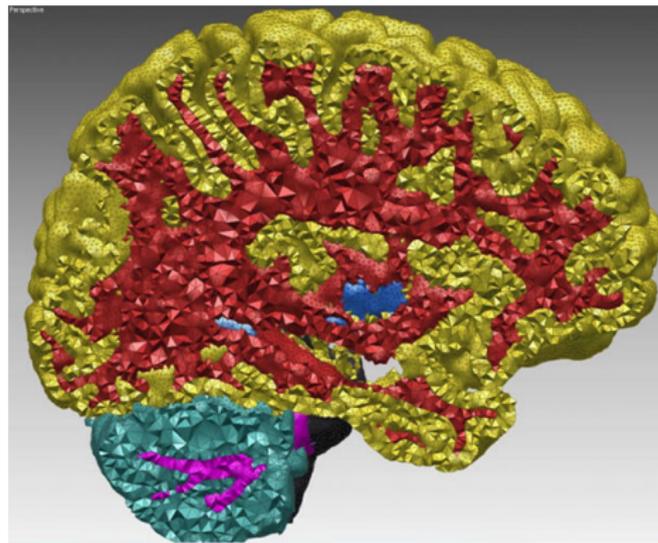
Propriétés de l'algorithme de maillage

Si le bord du domaine Ω est une surface \mathcal{S} de portée positive, l'algorithme de raffinement de Delaunay produit

- un $(\varepsilon + O(\varepsilon^2))$ -net \mathcal{P} de Ω
- un maillage tétraédrique $\hat{\Omega}$ de Ω dont le bord est une surface PL $\hat{\mathcal{S}}$
 - ▶ $\hat{\Omega}$ est homéomorphe à Ω
 - ▶ $\hat{\mathcal{S}}$ est homéomorphe à \mathcal{S} et proche de \mathcal{S}
 - distances de Hausdorff et Fréchet = $O(\varepsilon^2)$
 - approximation des normales = $O(\varepsilon)$
- Z $\hat{\Omega}$ peut contenir des tétraèdres plats

Maillages tétraédriques à partir d'images 3d

Visualisation, robotique chirurgicale, simulations numériques



1 Maillage de surfaces

- Conditions d'échantillonnage
- Critères de qualité

2 Triangulation de Delaunay restreinte à une surface

- Théorème d'approximation
- Algorithme de génération de maillages de surfaces
- **Éléments de preuves**

Propriétés de l'échantillon produit

ε -échantillon faible

Pour les mêmes raisons que pour les ε -échantillons de \mathbb{R}^d

Séparation $\|p - q\| \geq \min(\phi(p), \phi(q)) \geq \phi_0 > 0$

Densité Chaque facette a une boule $B_f = (c_f, r_f)$
t.q. $r_f \leq \phi(c_f) < \varepsilon \text{ lfs}(c_f)$

Cas uniforme : $r_f \leq \varepsilon \text{rch}(\mathcal{S})$ (Supposé dans la suite)

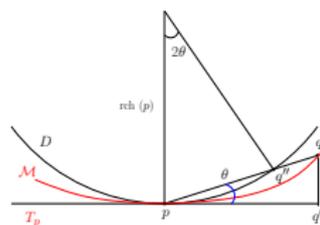
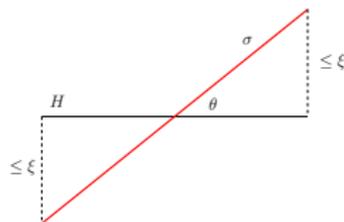
Approximation des plans tangents

Lemme [Whitney 1957]

Si σ est un j -simplexe de \mathbb{R}^d dont les sommets sont à distance ξ d'un hyperplan H , alors

$$\sin \angle(\text{aff}(\sigma), H) \leq \frac{2j\xi}{D(\sigma)} = \frac{2\xi}{\Theta(\sigma)\Delta(\sigma)}$$

$D(\sigma)$ plus petite hauteur de σ

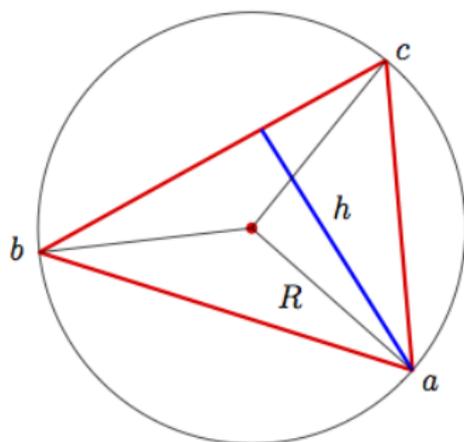


Corollaire (cas d'un échantillon uniforme)

Si σ est un j -simplexe, $j \leq k$, $\text{vert}(\sigma) \subset \mathcal{S}$, $\Delta(\sigma) \leq 2\varepsilon \text{rch}(\mathcal{S})$

$$\forall p \in \sigma, \quad \sin \angle(\text{aff}(\sigma), T_p) \leq \frac{2 \frac{\Delta(\sigma)^2}{2 \text{rch}(\mathcal{S})}}{\Theta(\sigma) \Delta(\sigma)} \leq \frac{\Delta(\sigma)}{\text{rch}(\mathcal{S})} \leq \frac{2\varepsilon}{\Theta(\sigma)}$$

Epaisseur et borne sur les angles des facettes



$$h = ab \times \sin b = \frac{ab \times ac}{2R}$$

$$\Theta(abc) = \frac{h}{2\Delta} \geq \frac{h}{4R} \geq \frac{\phi_0^2}{32R} \geq \frac{\phi_0^2}{32\varepsilon \text{rch}(\mathcal{S})}$$

$$\sin b \geq \frac{\phi_0}{2\varepsilon \text{rch}(\mathcal{S})}$$

$\text{Del}_S(\mathcal{P})$ est une surface PL

Définition

\hat{S} est une surface PL ssi le link de chaque sommet est un polygone simple

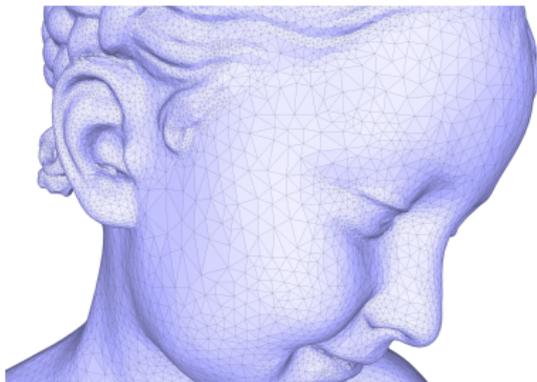
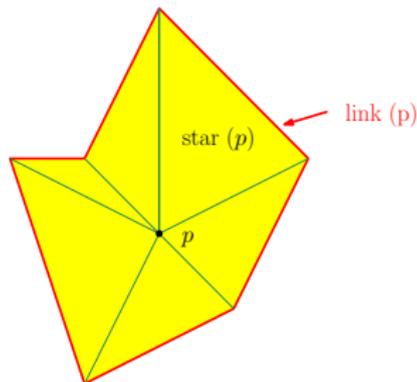
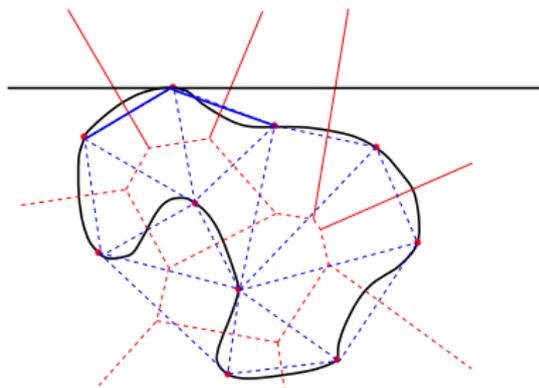
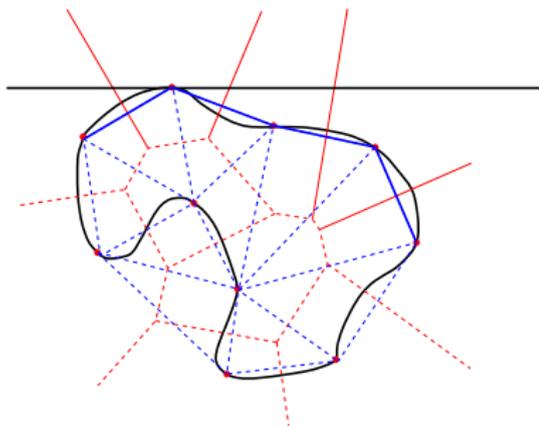


Schéma de la démonstration

- Vrai pour le complexe tangent
- Identité du complexe tangent et de la triangulation de Delaunay restreinte si les simplexes sont protégés

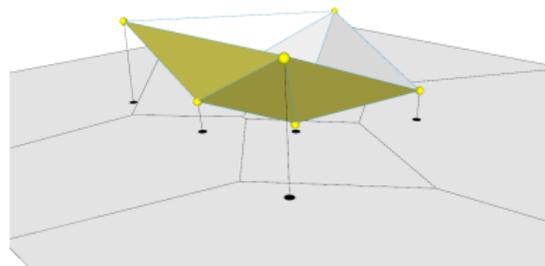
Le complexe tangent

Triangulations de Delaunay restreintes aux plans tangents

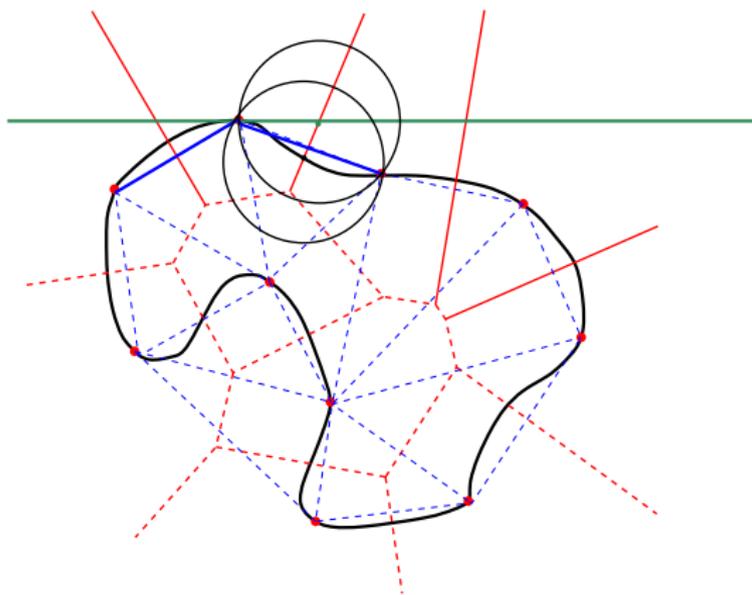


Complexe tangent

$$TC(\mathcal{P}) = \{\text{star}(p, \text{Del}_{|T_p}), p \in \mathcal{P}\}$$



Triang. de Delaunay restreinte et complexe tangent



Lemme

Si $\text{Del}_{T_p}(\mathcal{P})$ est $\Omega(\varepsilon^2)$ -protégé, alors $\text{star}(p, \text{Del}_S(\mathcal{P})) = \text{star}(p, \text{Del}_{T_p}(\mathcal{P}))$

Propriétés de l'échantillon produit

$(\varepsilon + O(\varepsilon^2))$ -échantillon

- Avec une initialisation correcte, $\text{Del}_S(\mathcal{P})$ a un sommet sur chaque composante de S
- \mathcal{P} est un échantillon $(\varepsilon + O(\varepsilon^2))$ -dense de S
- Taille de l'échantillon $= O\left(\int_S \frac{dx}{\phi^2(x)}\right)$

- Triangulation des variétés
- Approximation d'espaces plus généraux