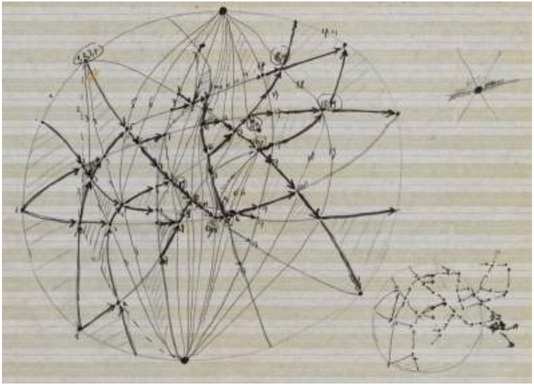
Dessins de Graphes

Arnaud de Mesmay

CNRS, GIPSA-lab, Grenoble



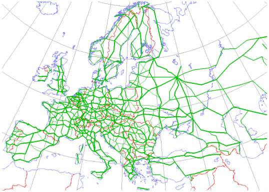
Des graphes...

Graphes

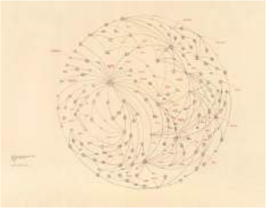
Un *graphe* est un ensemble de *sommets* V et d'*arêtes* $E \subseteq V^2$.

Structure fondamentale pour représenter les relations et les connexions.

Jeu de Morris (13 siècle avant J-C.)



Cartographie



Réseaux
"World Finance Corporation and Associates"
Mark Lombardi, 2000

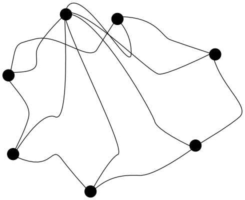
... au dessin de graphes

Dessin de graphes

Comment représenter un graphe ?

$G = (V, E)$
$V = [|1, 7|]$
$E = \{(1, 2), (2, 3)$
$(3, 4), (4, 5)$
$(5, 6), (1, 7)$
$(2, 7), (3, 7)$
$(4, 7), (5, 7), (6, 7)\}$

$\xrightarrow{\quad f \quad}$



- Quelle est la “meilleure” fonction $f : G \to \mathbb{R}^2$?

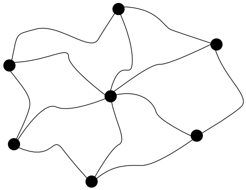
… au dessin de graphes

Dessin de graphes

Comment représenter un graphe ?

$G = (V, E)$
$V = [|1, 7|]$
$E = \{(1,2), (2,3)$
$(3,4), (4,5)$
$(5,6), (1,7)$
$(2,7), (3,7)$
$(4,7), (5,7), (6,7)\}$

$\xrightarrow{f}$



- Quelle est la "meilleure" fonction $f : G \to \mathbb{R}^2$?

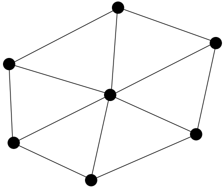
... au dessin de graphes

Dessin de graphes

Comment représenter un graphe ?

$G = (V, E)$
$V = [|1, 7|]$
$E = \{(1, 2), (2, 3)$
$(3, 4), (4, 5)$
$(5, 6), (1, 7)$
$(2, 7), (3, 7)$
$(4, 7), (5, 7), (6, 7)\}$

$$\xrightarrow{f}$$



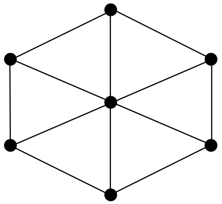
- Quelle est la "meilleure" fonction $f : G \to \mathbb{R}^2$?

Dessin de graphes

Comment représenter un graphe ?

$G = (V, E)$
$V = [|1, 7|]$
$E = \{(1, 2), (2, 3)$
$(3, 4), (4, 5)$
$(5, 6), (1, 7)$
$(2, 7), (3, 7)$
$(4, 7), (5, 7), (6, 7)\}$

$\xrightarrow{f}$



- Quelle est la "meilleure" fonction $f : G \to \mathbb{R}^2$?

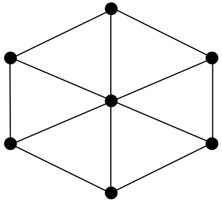
... au dessin de graphes

Dessin de graphes

Comment représenter un graphe ?

$G = (V, E)$
$V = [|1, 7|]$
$E = \{(1,2), (2,3)$
$(3,4), (4,5)$
$(5,6), (1,7)$
$(2,7), (3,7)$
$(4,7), (5,7), (6,7)\}$

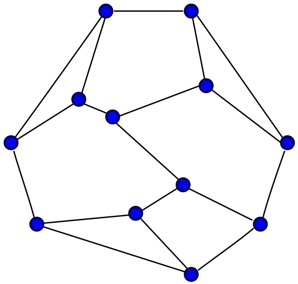
$\xrightarrow{f}$



- Quelle est la "meilleure" fonction $f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$?
- Comment la calculer automatiquement et efficacement?

Qu'est-ce qu'un bon algorithme de dessin de graphes ?

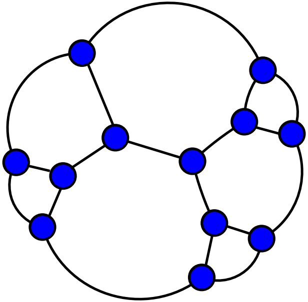
- Lisibilité, peu de croisements
  $\rightarrow$ *Topologie*
- Aspect des arêtes, respect des distances et des symétries
  $\rightarrow$ *Géométrie*
- Faible temps de calcul
  $\rightarrow$ *Algorithmique*



Les critères dépendent fondamentalement des applications.

Qu'est-ce qu'un bon algorithme de dessin de graphes ?

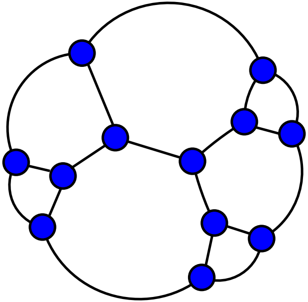
- Lisibilité, peu de croisements
  → *Topologie*
- Aspect des arêtes, respect des distances et des symétries
  → *Géométrie*
- Faible temps de calcul
  → *Algorithmique*
- Esthétique
  → ???



Les critères dépendent fondamentalement des applications.

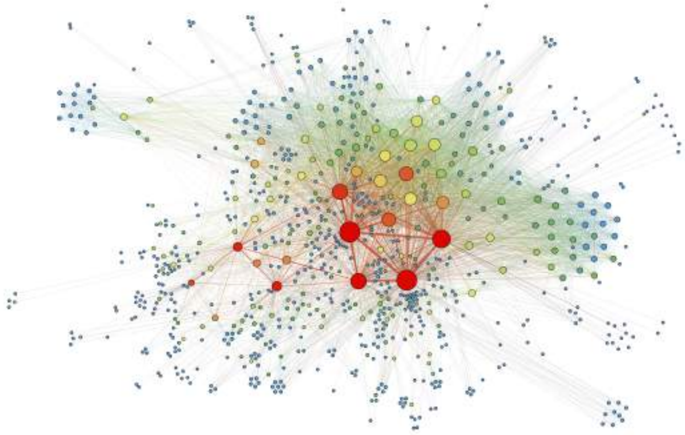
Qu'est-ce qu'un bon algorithme de dessin de graphes ?

- Lisibilité, peu de croisements
  $\rightarrow$ *Topologie*
- Aspect des arêtes, respect des distances et des symétries
  $\rightarrow$ *Géométrie*
- Faible temps de calcul
  $\rightarrow$ *Algorithmique*
- Esthétique
  $\rightarrow$???
  "Aesthetics cannot be formalized", [Knuth '96]



Les critères dépendent fondamentalement des applications.

Dessins de réseaux sociaux



- Faire ressortir les noeuds centraux et les clusters.
- Permet d'illustrer les propriétés de ces réseaux (par exemple les phénomènes de petit monde).
- Besoin d'algorithmes très efficaces.

Systèmes d'information géographique

La *généralisation cartographique* vise à abstraire des informations d'une carte pour la représenter à une échelle plus faible.

- Techniques pour "lisser" des graphes planaires.
- Nombreuses contraintes géométriques et topologiques à respecter.

Plan

L'exposé se concentre sur quelques aspects de la théorie riches en connexions et structure mathématiques, surtout liés aux graphes dessinés sans croisements et ignore d'innombrables autres techniques.

1. Plongement de Tutte et techniques à base de ressorts.
2. Bois de Schnyder et plongements sur une grille.
3. Empilements de cercles et dessins de Lombardi.
4. Dessins sur des surfaces.

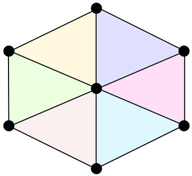
Planarité et plongements

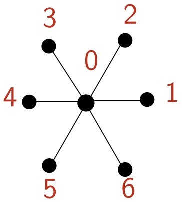
Un graphe est *planaire* si l'on peut le dessiner dans le plan sans croisements, on dit que le graphe est *plongé* dans le plan.

Théorème (Hopcroft-Tarjan '74)

On peut décider en temps linéaire si un graphe donné est planaire.

L'algorithme fournit également une représentation *combinatoire* d'un plongement [Melhorn, Mutzel '96] (*carte* ou *système de rotations*).

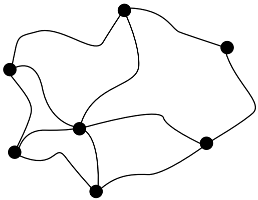




Théorème (Fáry-Wagner '36)

Un graphe planaire simple peut être plongé dans le plan de sorte que les arêtes soient des segments.

W.T. Tutte, "How to draw a graph" (1963)



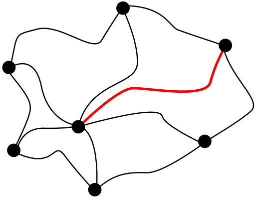
Partant d'un graphe planaire G:

1. Trianguler G.
2. "Clouer" les sommets de la face extérieure de G.
3. "Remplacer" les arêtes de G par des ressorts de raideur $k_e > 0$.
4. Laisser le système atteindre son point d'équilibre.
5. Retirer les arêtes en trop.

Théorème (Tutte)

Le dessin obtenu est un plongement de G dans le plan où les arêtes sont des segments.

W.T. Tutte, "How to draw a graph" (1963)



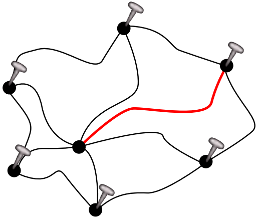
Partant d'un graphe planaire G:

1. Trianguler G.
2. "Clouer" les sommets de la face extérieure de G.
3. "Remplacer" les arêtes de G par des ressorts de raideur $k_e > 0$.
4. Laisser le système atteindre son point d'équilibre.
5. Retirer les arêtes en trop.

Théorème (Tutte)

Le dessin obtenu est un plongement de G dans le plan où les arêtes sont des segments.

W.T. Tutte, “How to draw a graph” (1963)



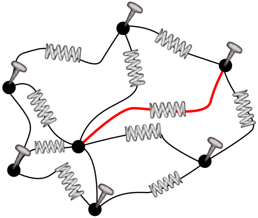
Partant d’un graphe planaire G:

1. Trianguler G.
2. “Clouer” les sommets de la face extérieure de G.
3. “Remplacer” les arêtes de G par des ressorts de raideur $k_e > 0$.
4. Laisser le système atteindre son point d’équilibre.
5. Retirer les arêtes en trop.

Théorème (Tutte)

Le dessin obtenu est un plongement de G dans le plan où les arêtes sont des segments.

W.T. Tutte, "How to draw a graph" (1963)



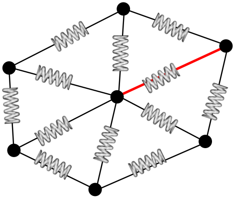
Partant d'un graphe planaire G:

1. Trianguler G.
2. "Clouer" les sommets de la face extérieure de G.
3. "Remplacer" les arêtes de G par des ressorts de raideur $k_e > 0$.
4. Laisser le système atteindre son point d'équilibre.
5. Retirer les arêtes en trop.

Théorème (Tutte)

Le dessin obtenu est un plongement de G dans le plan où les arêtes sont des segments.

W.T. Tutte, "How to draw a graph" (1963)



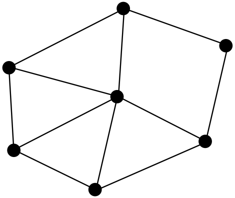
Partant d'un graphe planaire G:

1. Trianguler G.
2. "Clouer" les sommets de la face extérieure de G.
3. "Remplacer" les arêtes de G par des ressorts de raideur $k_e > 0$.
4. Laisser le système atteindre son point d'équilibre.
5. Retirer les arêtes en trop.

Théorème (Tutte)

Le dessin obtenu est un plongement de G dans le plan où les arêtes sont des segments.

W.T. Tutte, "How to draw a graph" (1963)



Partant d'un graphe planaire G:

1. Trianguler G.
2. "Clouer" les sommets de la face extérieure de G.
3. "Remplacer" les arêtes de G par des ressorts de raideur $k_e > 0$.
4. Laisser le système atteindre son point d'équilibre.
5. Retirer les arêtes en trop.

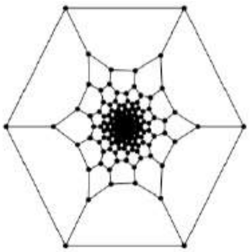
Théorème (Tutte)

Le dessin obtenu est un plongement de G dans le plan où les arêtes sont des segments.

Inconvénients et heuristiques

- Ce plongement se calcule assez efficacement.
- Problèmes de *précision numérique*.
- Cette méthode a tendance à *agglutiner* les sommets.

→ Les heuristiques utilisent d'autres forces.



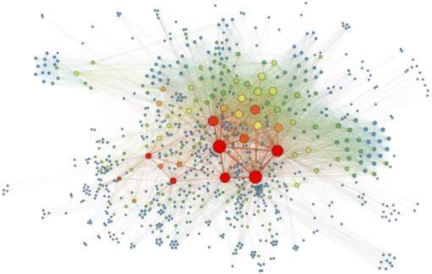
Eades (1984) propose :

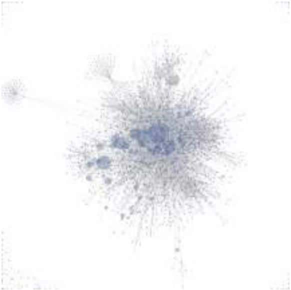
- Des forces *attractives* en $c_1 \log(d/c_2)$ entre sommets adjacents et
- des forces *répulsives* en c_3/d^2 entre sommets non-adjacents.

Algorithmiquement :

1. Placer les sommets au hasard.
2. Répéter M fois:
   - Calculer la force sur chaque sommet.
   - Déplacer chaque sommet de $c_4 * \overrightarrow{force(v)}$.
3. Dessiner les arêtes linéairement.

Force-directed layouts





- Méthodes très *versatiles* et utilisées en pratique.
- De plus en plus *efficaces* (dizaines de milliers de sommets).
- Essentiellement heuristiques : aucune garantie topologique hormis le théorème de Tutte.

Alternatives heuristiques très efficaces : techniques *spectrales*.

Dessins sur une grille

Rosenstiehl-Tarjan '86

Peut-on plonger un graphe à n sommets avec des segments sur une grille de taille $O(n^k) \times O(n^k)$?

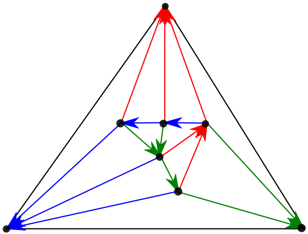
Dessins sur une grille

Rosenstiehl-Tarjan '86

Peut-on plonger un graphe à n sommets avec des segments sur une grille de taille $O(n^k) \times O(n^k)$?

Réponse : Oui, avec $k = 1$ [de Fraysseix-Pach-Pollack '90, Schnyder '90].

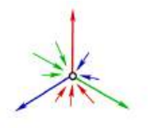
- Une méthode utilise une propriété structurelle des triangulations planaires : l'existence de *bois de Schnyder*.



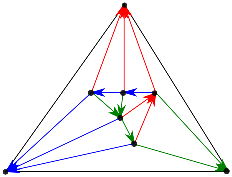
Bois de Schnyder

Soit G une triangulation planaire avec un triangle extérieur $\{a_0, a_1, a_2\}$.
Un *bois de Schnyder* est une partition des arêtes intérieures en trois arbres T_0, T_1 et T_2 orientés telle que

1. Le voisinage de chaque sommet intérieur ressemble à



2. Les arêtes (v, a_i) sont orientées $v \to a_i$ et de couleur i.



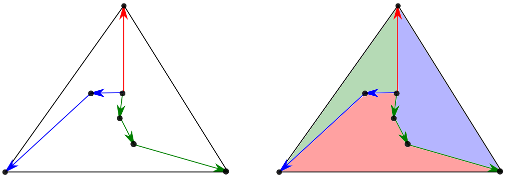
Théorème

Toute triangulation planaire admet un bois de Schnyder, qui peut être calculé en temps linéaire.

Dessin sur une grille

- Chaque v intérieur est relié par un unique chemin orienté dans T_i à a_i.
- Ceux-ci définissent trois *régions* $R_i(v)$ par sommet.

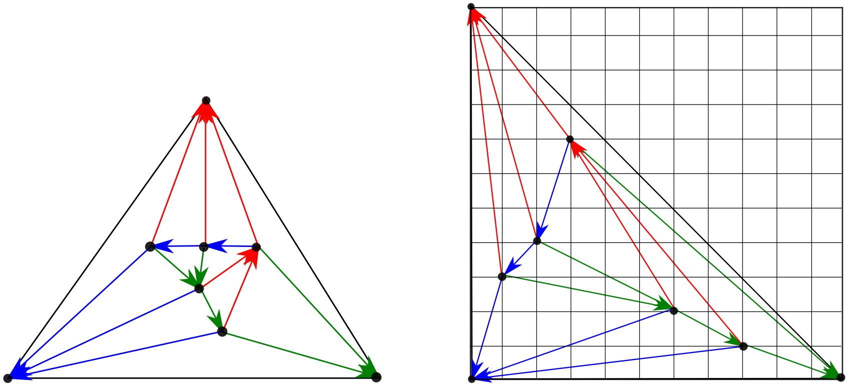
Notons $\phi_i(v) = \#$ faces dans $R_i(v)$, et placeons v en $(\phi_1(v), \phi_2(v))$.



Théorème

En reliant les sommets par des segments, on obtient un plongement de G sur une grille de taille $(f-1) \times (f-1)$, où f est le nombre de faces.

Exemple

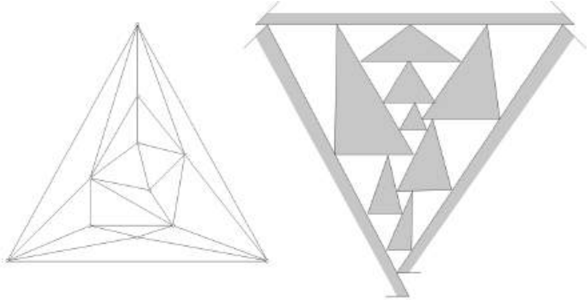


- Nombreuses autres applications (encodage, compression, génération aléatoire).

Graphes de contact

Théorème (de Fraysseix, Ossana de Mendez, Rosenstiehl '94)

Tout graphe planaire est un graphe de contact strict de triangles.

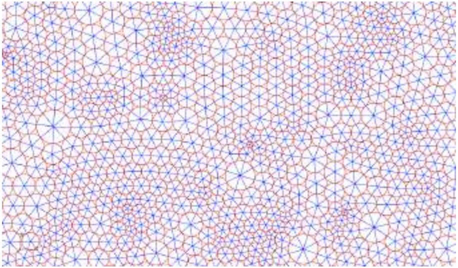


Et même plus : ces représentations sont en bijection avec les décompositions en bois de Schnyder.

Empilement de cercles

Théorème (Koebe-Andreev-Thurston)

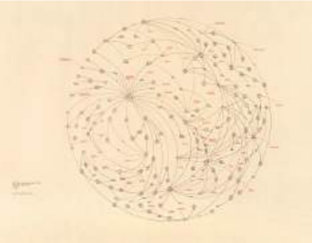
Tout graphe triangulé G peut être réalisé comme le graphe de contact de cercles dans le plan.

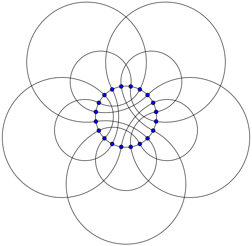


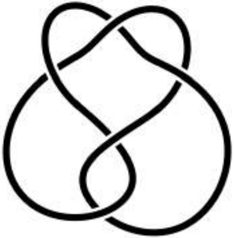
- Une autre preuve du théorème de Fáry-Wagner.
- On sait calculer les cercles efficacement mais il y a des problèmes d'approximation numérique et d'agglutinement.
- La famille de cercles est *unique* à une transformation conforme près.
- Nombreuses connexions avec la *géométrie complexe* et la *géométrie hyperbolique* en trois dimensions.

Dessins de Lombardi

Un *dessin de Lombardi* est un dessin de graphe où les arêtes sont représentées par des arcs circulaires et les arêtes autour d'un sommet sont espacées régulièrement.







Question

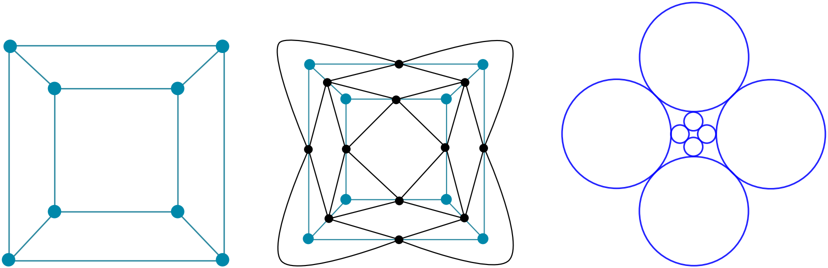
Quels graphes admettent des dessins de Lombardi planaires et comment les calculer ?

Certains graphes 4-réguliers

Théorème (David Eppstein '12,'13)

Les graphes médiaux de graphes 3-connexes planaires admettent des dessins de Lombardi planaires.

- Utilise un empilement de cercles *primal-dual*.

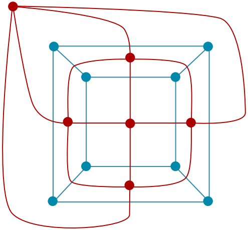


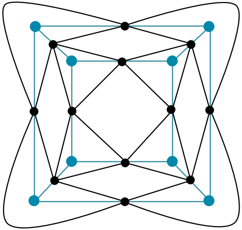
Certains graphes 4-réguliers

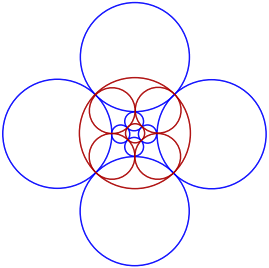
Théorème (David Eppstein '12,'13)

Les graphes médiaux de graphes 3-connexes planaires admettent des dessins de Lombardi planaires.

- Utilise un empilement de cercles *primal-dual*.





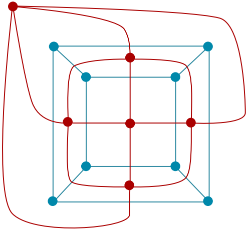


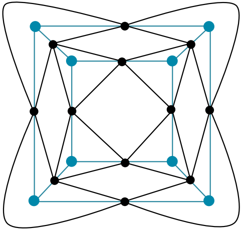
Certains graphes 4-réguliers

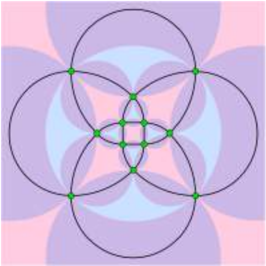
Théorème (David Eppstein '12,'13)

Les graphes médiaux de graphes 3-connexes planaires admettent des dessins de Lombardi planaires.

- Utilise un empilement de cercles *primal-dual*.



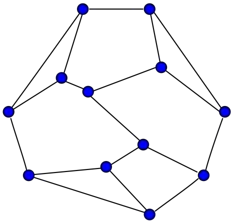


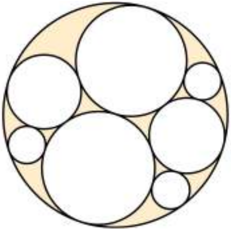


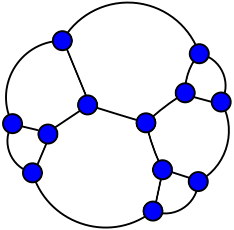
Graphes 3-réguliers

Théorème (David Eppstein '12,'13)

Les graphes 3-connexes 3-réguliers planaires admettent des dessins de Lombardi planaires.







- Calculer un circle-packing du graphe *dual*.
- Calculer le diagramme de Voronoi des cercles pour la fonction distance $d(x, C) = \frac{d^2 - r^2}{2r}$.

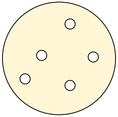
Quésaco ?

Cela s'interprète aussi comme un diagramme de Voronoi pour des sphères hyperboliques dans le demi-espace de Poincaré.

Connexions avec la théorie des bulles de savon [Eppstein'13].

Du plan aux surfaces

Les problématiques de dessin de graphes dans le plan se généralisent aux autres surfaces.



Question

Comment dessiner des graphes sur de telles surfaces ?

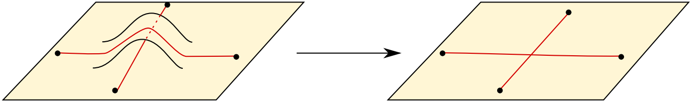
Théorème (Mohar '99)

Pour une surface donnée S, on peut décider en temps linéaire si un graphe donné est plongeable sur S.

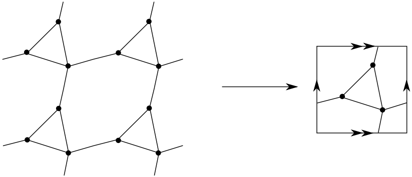
Motivations

- Tous les graphes ne sont pas planaires.

- Permet un contrôle sur le *nombre de croisements*.

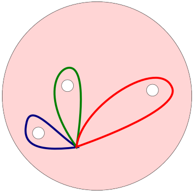


- Encapsule certaines *périodicités* et *symétries*.



Isotopies

Une *isotopie* est une déformation continue entre deux graphes plongés sur une même surface.



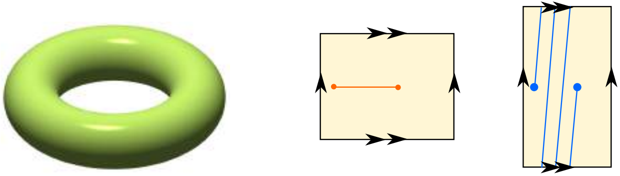
Théorème (Colin de Verdière, dM 2014)

On peut tester en temps linéaire s'il existe une isotopie entre deux graphes plongés sur une même surface.

Outil-clé: *Géométrie hyperbolique* !

Géométrie des surfaces

- Le plan est muni naturellement de la géométrie *euclidienne*, qu'en est-il des autres surfaces ?
- Le tore peut également être muni d'une métrique euclidienne (même d'une infinité).



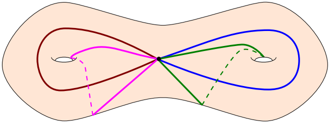
Théorème (Gonçalves, Lévêque'14, Castelli Aleardi, Devillers, Fusy'12)

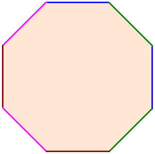
Tout graphe toroidal 3-connexe peut être plongé sur une grille toroidale de taille polynomiale.

Pour les surfaces de genre supérieur, les métriques régulières i.e., de courbure constante sont *hyperboliques*.

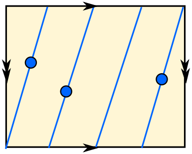
Dessins de graphes sur d'autres surfaces

- *Découpage de la surface* et dessin dans le plan [Duncan, Goodrich, Kobourov '14].





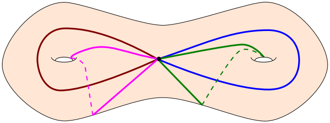
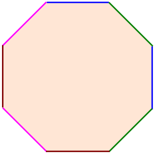
- *Techniques à base de ressort*: analogue du théorème de Tutte [Y. Colin de Verdière '91], implémentations [Kobourov,Wangler '05].



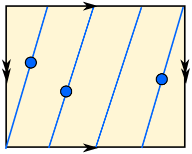
- *Bois de Schnyder* :
- *Empilements de cercles* : Se généralise mais la métrique obtenue dépend du graphe.

Dessins de graphes sur d'autres surfaces

- *Découpage de la surface* et dessin dans le plan [Duncan, Goodrich, Kobourov '14].

- *Techniques à base de ressort*: analogue du théorème de Tutte [Y. Colin de Verdière '91], implémentations [Kobourov,Wangler '05].

- *Bois de Schnyder* : ???
- *Empilements de cercles* : Se généralise mais la métrique obtenue dépend du graphe.

Un théorème de Fáry-Wagner en genre supérieur ?

Problème ouvert

Pour une surface donnée S, existe-t-il une métrique dite *universelle* telle que tout graphe plongeable sur S admette un plongement où les arêtes sont des *plus courts chemins* ?

Théorème (Hubard, Kaluža, dM, Tancer '16)

- *La sphère, le plan projectif, le tore et la bouteille de Klein admettent des métriques universelles.*
- *Avec une probabilité tendant vers 1 quand $g \to \infty$, une métrique hyperbolique aléatoire sur une surface de genre g n'est* pas *universelle.*

Conclusions

- Extrême *diversité* de problématiques et de techniques.
- Nombreuses connexions avec la *théorie des graphes*, la *topologie* et la *géométrie* (euclidienne ou non), et leurs aspects *algorithmiques*.

Conclusions

- Extrême *diversité* de problématiques et de techniques.
- Nombreuses connexions avec la *théorie des graphes*, la *topologie* et la *géométrie* (euclidienne ou non), et leurs aspects *algorithmiques*.

Merci !