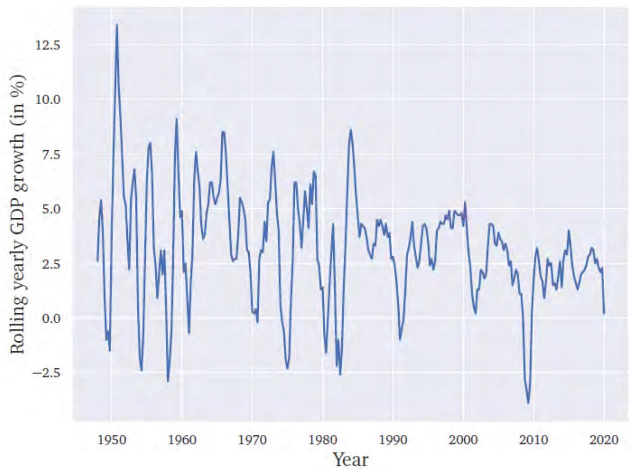
DE LA PHYSIQUE STATISTIQUE
AUX SCIENCES SOCIALES

VII. RESEAUX D'ENTREPRISES, CRISES ET ECONOMIES HORS-EQUILIBRE

Chaire de l'Innovation L. Bettencourt

Jean-Philippe Bouchaud



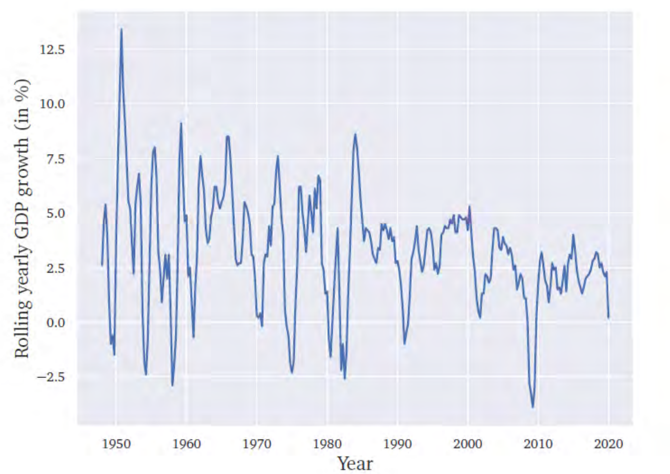
US GDP Growth

What shocks are responsible for economic fluctuations? Despite at least two hundred years in which economists have observed fluctuations in economic activity, we still are not sure.
(J Cochrane,1994)

Models failed to predict the crisis and seemed incapable of explaining what was happening [...] in the face of the crisis, we felt abandoned by conventional tools.
(JC Trichet, 2010)

1. Cycles économiques et fluctuations en excès

- ➢ « Small shocks, large business cycle » puzzle (Ben Bernanke)
- • US depuis 1950 : ~ 3 % ± 2.5 % /an
- ➢ Fluctuations exogènes ou endogènes ?
- • 2020 (COVID) vs. 2008 (Subprimes)
- • Cf. cours 1 : Volatilité en excès des marchés financiers (2%/jour), rétroaction type Hawkes (> 80%) + sauts de prix endogènes (> 90%)
- • Modèles DSGE mal équipés pour décrire les crises endogènes, cf. 5

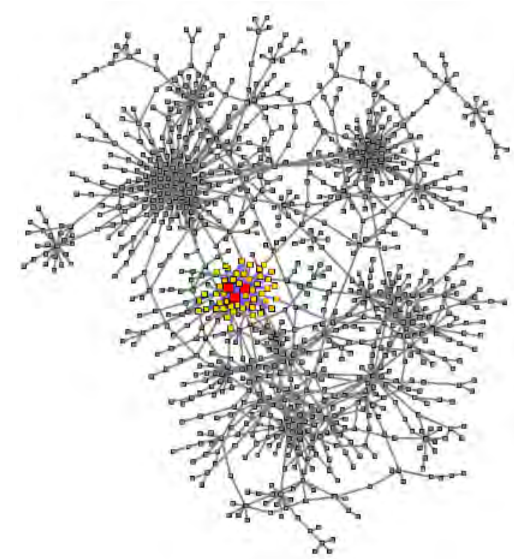


US GDP Growth

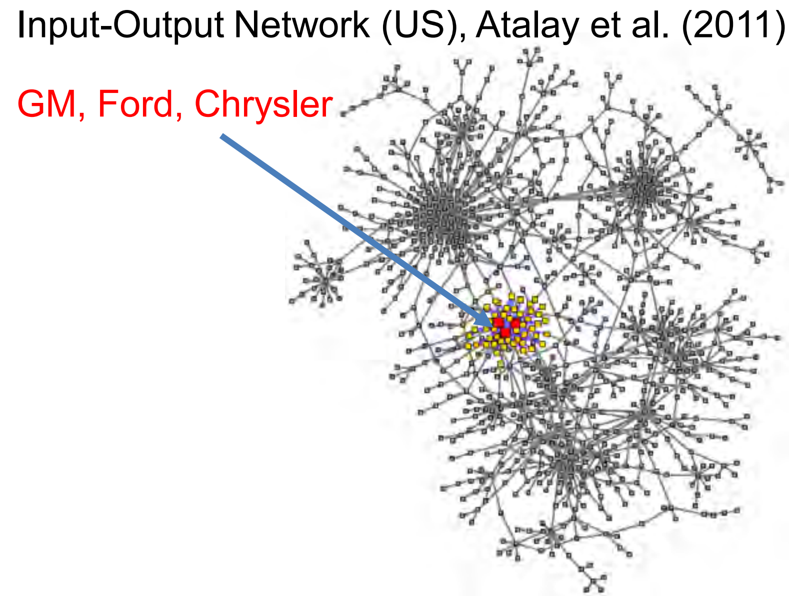
Prices (in 2008) started to decline in advance of when people recognized that it was a recession... That's exactly what you would expect if markets were efficient. (E. Fama, 2009)

1. Cycles économiques et fluctuations en excès

➢ <u>Hypothèses</u> (comment échapper à $\sigma \sim N^{-1/2}$?)
- Choc macroéconomique « latent », connu du seul marché démiurge (?)
- « Granularité » (i.e. dominance de quelques firmes individuelles, cf. Gabaix)
- Effet de réseau, contagion, faillites en cascades : crises bancaires, spirales de liquidation, etc. (cf. RFIM (cours 6), « Mark 0 » (cours 5), etc.)
- Proximité d'une instabilité systémique, « auto-organisation critique » ? (SOC: Bak, Chen, Scheinkman, Woodford, 1993)
- Economie hors-équilibre et « turbulente » ?



2. Réseau d’entreprises : un modèle classique



2. Réseau d'entreprises : un modèle classique

- <u>Le modèle de Long-Plosser</u> (+ Acemoglu, Carvalho et al.)
- Le ménage représentatif travaille et consomme les produits i=1,. . .,N
- La firme **i** produit en utilisant travail + autres produits **j**
- La fonction de production est de type « Cobb-Douglas » ($\alpha \approx 1/3$)

$$y_i = z_i \ell_i^{1-\alpha} \prod_{j \in S_i} (Q_{ij})^{\alpha J_{ij}}; \qquad \sum_{j \in S_i} J_{ij} = 1$$

2. Réseau d'entreprises : un modèle classique

- <u>Le modèle de Long-Plosser</u> (+ Acemoglu, Carvahlo et al.)

- Le ménage représentatif optimise sa fonction d'utilité → $C_i = \frac{\mu \theta_i}{p_i}$
- Les firmes maximisent leur profits $\mathscr{P}_i = y_i p_i - w\ell_i - \sum_{j \in S_i} Q_{ij} p_j$
- Offre et demande s'équilibrent (biens et travail)

$$\sum_{i=1}^{N} \ell_i = L; \qquad \sum_j Q_{ji} + C_i = y_i$$

Maximisation du profit → $(1-\alpha)y_i p_i = w\ell_i; \quad \alpha J_{ij} y_i p_i = Q_{ij} p_j; \quad \longrightarrow \quad \mathscr{P}_i^\star = 0$

Equilibre offre/demande → $\mathscr{S}_i - \alpha \sum_j J_{ji} \mathscr{S}_j = \mu\theta_i \qquad \mathscr{S}_i := y_i p_i$

$$(\mathbb{I} - \alpha\mathbb{J}^\top)\vec{\mathscr{S}} = \mu\vec{\theta} \longrightarrow \vec{\mathscr{S}} = \mu\left[\vec{\theta} + \alpha\mathbb{J}^\top\vec{\theta} + \alpha^2\mathbb{J}^{\top 2}\vec{\theta} + \ldots\right]$$

Interprétation
Marche Aléatoire
($\mathscr{S}$ = centralité)

Production d'équilibre → $1 = A_i z_i p_i \prod_{j\in S_i} p_j^{-\alpha J_{ij}} \longrightarrow (\mathbb{I} - \alpha\mathbb{J})\vec{\mathscr{L}} = \vec{K}, \qquad \vec{\mathscr{L}} := \log \vec{p}$

2. Solution du modèle

- <u>Le modèle de Long-Plosser </u>(+ Acemoglu, Carvahlo et al.)
- Le ménage représentatif optimise sa fonction d'utilité
- Les firmes maximisent leur profits à prix fixés
- Les prix sont tels que offre et demande s'équilibrent (biens+travail)

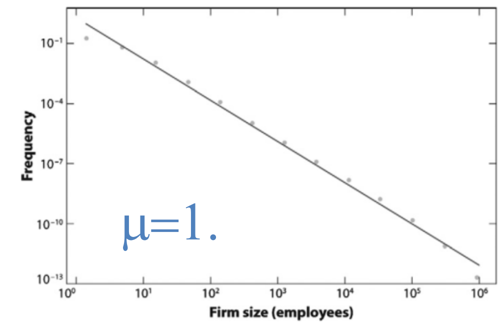
→ Une solution <u>bien définie</u> pour tout réseau **J** et pour toutes productivités **z** > 0 (prix et productions tous positifs)

(Résultat général)

$$\boxed{\mathbb{V}\left[\frac{\text{GDP}}{N}\right] \propto \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\mathcal{S}_i^{\,2} \propto \mathscr{H}}$$

Cf cours 4

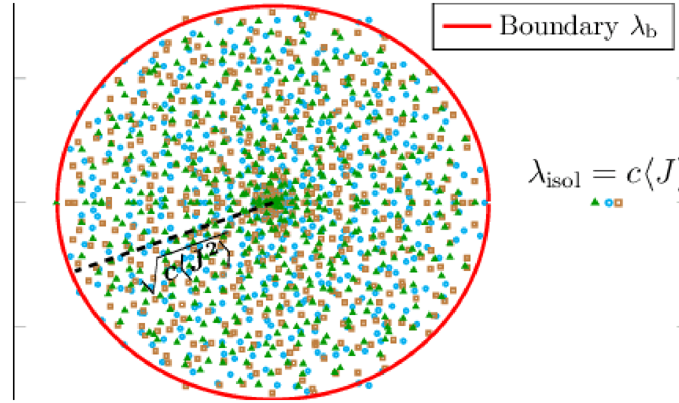
$$\mathscr{H} \sim \begin{cases} N^{-1} & (\mu > 2) \\ N^{2(1-\mu)/\mu} & (1 < \mu < 2) \\ N^{0} & (\mu < 1) \end{cases}$$



Taille des firmes (« Zipf »)

2. Fluctuations dans le modèle Long-Plosser

- Fluctuations induites par des chocs de productivité **z**, en supposant qu'un nouvel équilibre est immédiatement atteint (?: cf. plus loin)
- Variance du PIB = Herfindahl $\mathscr{H}$ du chiffre d'affaire des firmes
- Décroissance lente de $\mathscr{H}$ pour des réseaux « scale-free » → Scenario « granulaire »
- Mais pas d'effet de contagion ou d'avalanches malgré le réseau
- Réseaux I/O empiriques ni « scale-free » ni compatibles avec Zipf



3. Généralisation : instabilités et cascades

$$y_i = z_i \left[\sum_{j=0}^{N} J_{ij} \left(\frac{G_{ij}}{Q_{ij}} \right)^{\frac{1}{q}} \right]^{-q} = \begin{cases} z_i \min_j \left(\frac{Q_{ij}}{G_{ij}} \right) & (q \to 0) \\ z_i \prod_j \left(\frac{Q_{ij}}{G_{ij}} \right)^{J_{ij}} & (q \to \infty) \end{cases}$$

Constant Elasticity of Substitution (CES)

Note: le travail est inclus dans la somme (j=0)

3. Généralisation : instabilités et cascades

- <u>Modèle de Long-Plosser</u> avec une fonction de production généralisée (« CES »)
  - q = +∞ : « Cobb-Douglas » (équilibre toujours bien défini)
  - q = 0 : « Leontief » (biens strictement non substituables)
  - q = -1 : production additive (commerce de détail)

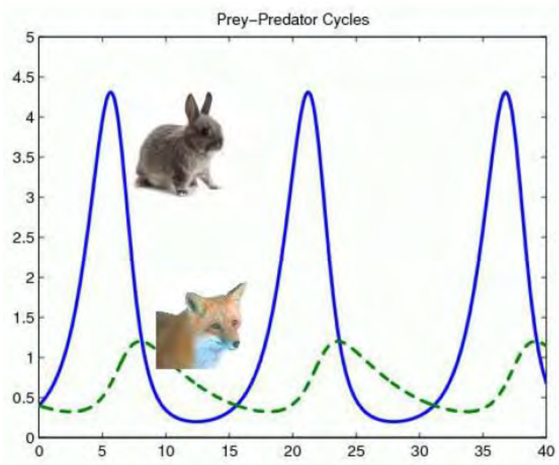
- $0 \leq q < +\infty$: Eq. → contraintes sur les z_i et les G_{ij}

$$\begin{cases} (\mathbf{z}\mathbb{I}-\mathbb{G})\,\vec{p}=\vec{K} \\ \left(\mathbf{z}\mathbb{I}-\mathbb{G}^{\top}\right)\vec{\gamma}=\vec{C}; \qquad (y_i = z_i\gamma_i) \end{cases}$$

3. Généralisation : instabilités et cascades

- <u>Limite Leontief</u> (mais résultats génériques $\forall \mathbf{q} < +\infty$)
- Equations linéaires dont les solutions doivent être non-négatives
- Critère*: la plus petite valeur propre de $\mathbb{M} := \mathbf{z}\mathbb{I} - \mathbb{G}$ doit être de partie réelle ≥ 0 (« M-matrices » dont les éléments h.d. sont < 0)
- Note: Equations formellement similaires à celles déterminant les équilibres écologiques de Lotka-Volterra

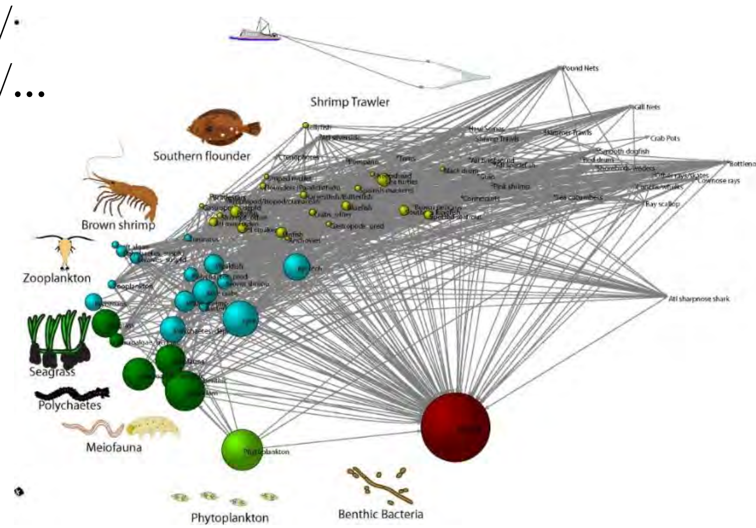
* Hawkins-Simon, 1949



Fitness Saturation Compétition/ Coopération/...

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = N_i \left(F_i - z_i N_i + \sum_j G_{ij} N_j \right)$$

$$(\mathbf{z}\mathbb{I} - \mathbb{G})\vec{N} = \vec{F}$$

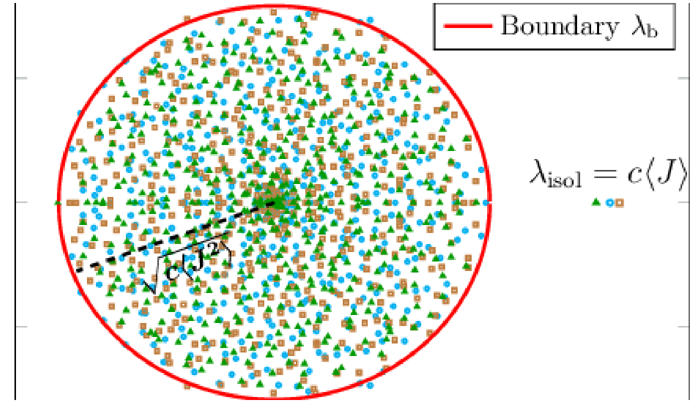


Intermezzo : le modèle de Lotka-Volterra

- Compétition/cooperation $G_{ij}\, G_{ji} > 0$ ou prédateur/proie $G_{ij}\, G_{ji} < 0$
- Génériquement (cf. Biroli, Bun, Cammarotta) :
- $N_i \geq 0\ \forall i$ requiert la disparition de certaines espèces
- Le nombre d'équilibres est exp(# espèces)
- L'équilibre assurant la plus grande diversité écologique est aussi <u>marginalement stable</u> (Robert May 72: Will a complex system be stable?)
- Cf. : portefeuille optimal avec contraintes de non-vente à découvert

$$\lambda_{\min} = z - cG$$

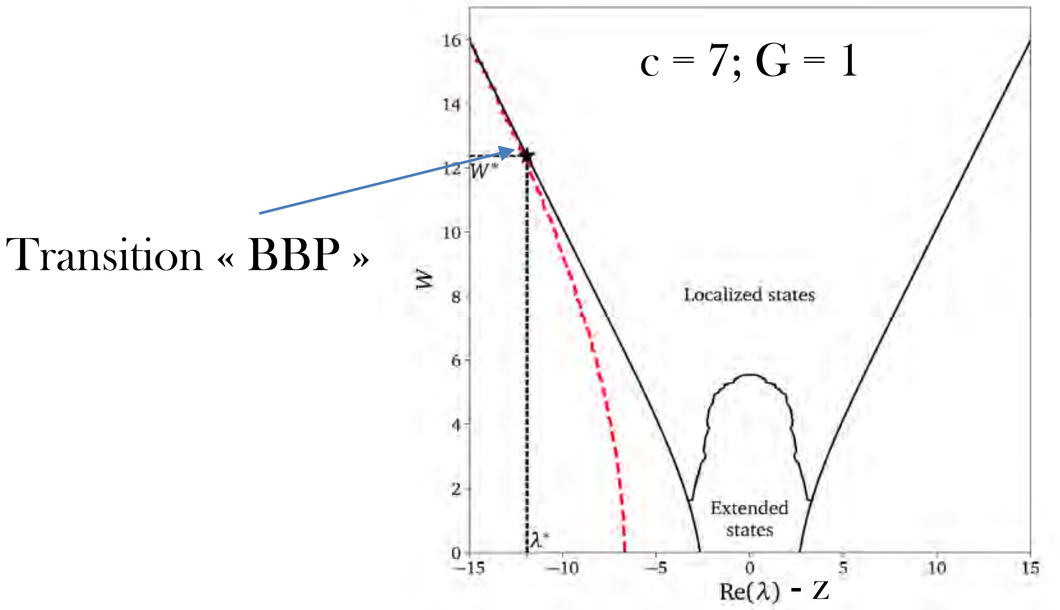
$$\lambda = z + re^{i\theta}, \qquad r \in [0, G\sqrt{c}] \quad \theta \in [0, 2\pi]$$



Spectre de $-\mathbb{M}$ (J = G)

3. Généralisation : instabilités et cascades

- <u>Critère de Hawkins-Simon: un cas simple</u>
- Chaque firme a exactement **c** clients et **c** fournisseurs, choisis aléatoirement parmi N (>> 1); $G_{ij} = 0$ ou $G_{ij} = G$ (« RRN »)
- Les productivités sont toutes égales à **z**
- Spectre de $\mathbb{M}$ connu exactement: une v.p. isolée + disque dans $\mathbb{C}$
- L'économie devient instable quand **z** < **c** $\mathbb{E}[G]$ (faible productivité **z** /forte connectivité **c** /fort besoin de biens intermédiaires G)



Moran, JPB (2019)

3. Généralisation : instabilités et cascades

- ➢ <u>Critère de Hawkins-Simon</u> : firmes de productivité hétérogènes
- Chaque firme a exactement **c** clients et **c** fournisseurs, choisis aléatoirement parmi N ($>> 1$); $G_{ij} = 0$ ou $G_{ij} = G$(« RRN »)
- Productivité aléatoire, uniforme $\in [z - W/2, z + W/2]$
- ➢ La valeur propre isolée (délocalisée) est absorbée par le spectre continu (localisé) pour $W > W^*$ -- un scenario générique
- Proche de l'instabilité, chocs systémiques ou localisés $W </> W^*$

Ricerche Economiche (1993) 47, 3–30

Aggregate fluctuations from independent sectoral shocks: self-organized criticality in a model of production and inventory dynamics

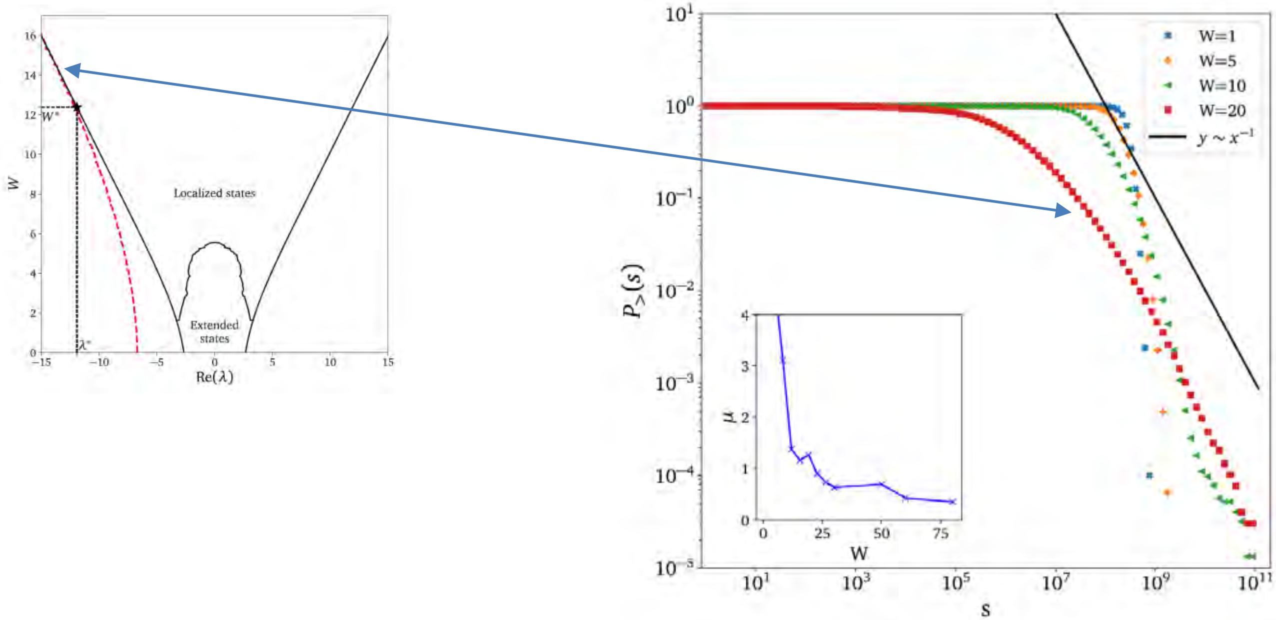
PER BAK AND KAN CHEN
Brookhaven National Laboratory

JOSÉ SCHEINKMAN AND MICHAEL WOODFORD
Department of Economics, University of Chicago, IL, U.S.A.

(Received 19 May 1992, accepted for publication 1 December 1992)

4. Le scenario de criticalité « auto-organisée »

- <u>Critère de Hawkins-Simon</u>: considérations générales
- Le système se rapproche de l'instabilité ($\lambda_{\min} \rightarrow 0$) quand :
  - Le nombre de firmes augmente (cf. instabilité de May en écologie)
  - La connectivité du réseau augmente (complexification)
  - Les biens sont moins substituables/redondants (q diminue)
  - Les firmes augmentent leurs marges
- Il est plausible que l'économie se dirige naturellement vers $\lambda_{\min} = 0$



Moran, JPB (2019)
Note : résultats numériques uniquement

4. Le scenario de criticalité « auto-organisée »

- <u>Proche du point critique</u> $\lambda_{min} = 0$:
- Economie « fragile », amplification des fluctuations (cf. infra)
- Dans la phase « localisée » : distribution à queue épaisse de la taille des firmes et de la taille des « avalanches » (nombre de firmes en faillite lorsque l'une d'elles défaille) → cf. extinctions de masse
- Modèle d'équilibre « adiabatique » ; que se passe-t-il quand $\lambda_{min} < 0$?
- Une extension <u>dynamique</u> est nécessaire

$$
\boxed{\begin{cases} \dfrac{1}{p_i(t)}\dfrac{dp_i}{dt} = -a\dfrac{\mathscr{E}_i(t)}{y_i(t)} - a'\dfrac{\mathscr{P}_i(t)}{p_i(t)y_i(t)} \\[2em] \dfrac{1}{y_i(t)}\dfrac{dy_i}{dt} = -b\dfrac{\mathscr{E}_i(t)}{y_i(t)} + b'\dfrac{\mathscr{P}_i(t)}{p_i(t)y_i(t)} \end{cases}}
$$

$$
\begin{cases} \mathscr{E}_i(t) := y_i(t) - C_i(t) \\ \mathscr{P}_i(t) := y_i(t)p_i(t) - w(t)\ell_i(t) - \sum_{j\in S_i} Q_{ij}(t)p_j(t) \end{cases}
$$

Dessertaine et al. (2020)
Cf. Hawkins (1948)

5. Un modèle dynamique « naif »

- Le postulat d’une économie toujours à l’équilibre n’est justifié que si le temps de convergence vers l’équilibre est court par rapport au temps pendant lequel les « fondamentaux » sont constants
- Combien de temps les déséquilibres (offre/demande, profits, surplus) mettent-ils à disparaître ?
- Une approche « phénoménologique » : équations d’évolution des prix/productions <u>linéaires</u> par rapport aux déséquilibres relatifs

$$\boxed{\frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\mathbb{D}\,\mathbf{U} + \xi}$$

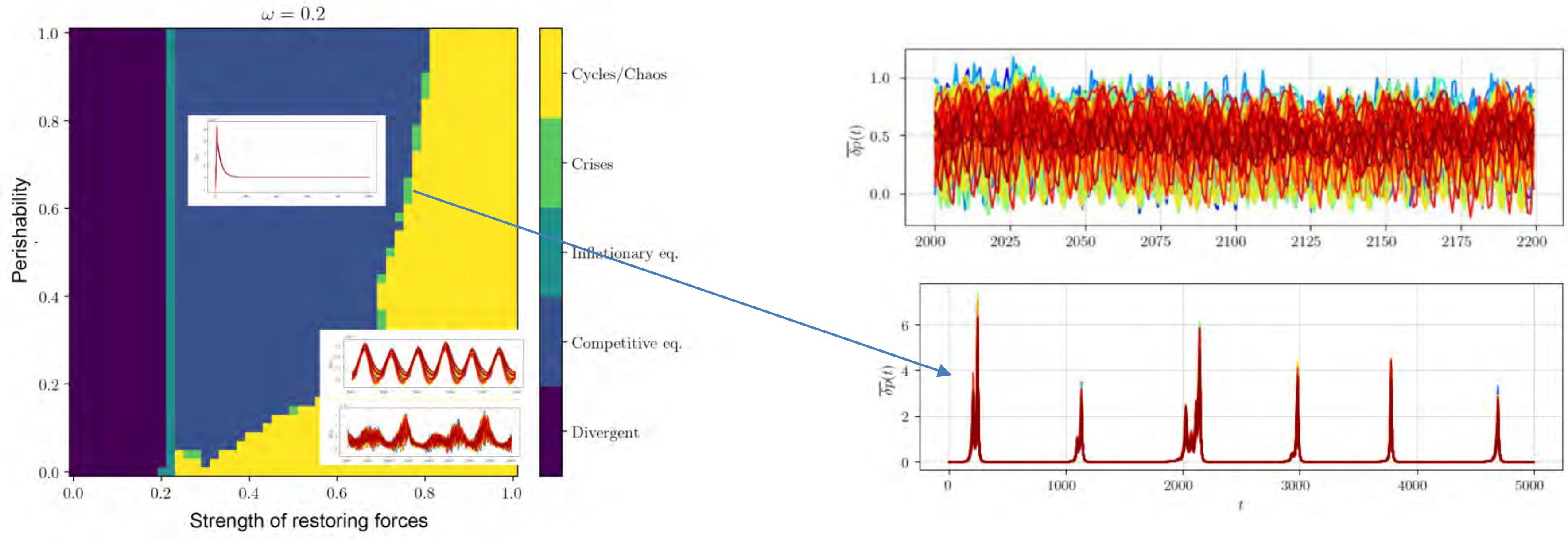
Chocs exogènes

5. Relaxation vers l'équilibre

- Proche de l'équilibre, les équations sont linéaires en $\mathbf{U} = (\delta \mathbf{p}, \delta \mathbf{y})$
- La plus petite valeur propre de $\mathbb{D}$ est proportionnelle à celle de $\mathbb{M}$
- Le temps de relaxation proche de l'instabilité diverge comme $1/\lambda_{\min}$
  → Hypothèse adiabatique injustifiée proche du point critique
- La variance de U est amplifiée par rapport à celle de ξ par un facteur $1/\lambda_{\min}$; les chocs sont persistants
  → « small shocks, large business cycle » = SOC ?

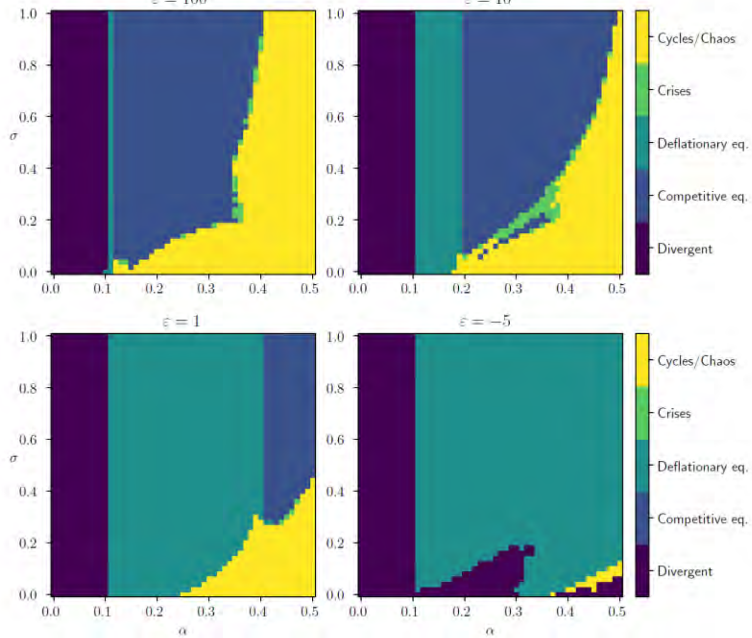
6. Un modèle dynamique « moins naif »

- <u>Mais</u> l'approche phénoménologique glisse sous le tapis plusieurs difficultés :
- Causalité (la quantité à produire doit être décidée <u>avant</u> de connaître la consommation)
- La consommation ne peut excéder la production (+ stocks)
- Dans le cas contraire, les stocks augmentent (et se périment)
- Même proche de l'équilibre, l'évolution est non-linéaire ($\delta \mathbf{y} \gtreqless \delta \mathbf{c}$)



6. Un modèle dynamique « moins naif »

- Même quand l'équilibre existe, il peut ne <u>jamais</u> être atteint dynamiquement
- Un diagramme des phases très riche : convergence vers l'équilibre, ou cycles, chaos, synchronisation, crises….
- Un autre scenario possible pour résoudre le paradoxe « small shocks, large business cycle » : dynamique non-linéaire endogène et turbulence spontanée



Dessertaine et al. (2020)

6. Un modèle dynamique « moins naif »

- Même quand l'équilibre existe, il peut ne <u>jamais</u> être atteint dynamiquement
- Un autre scenario possible pour résoudre le paradoxe « small shocks, large business cycle » : dynamique non-linéaire endogène et turbulence spontanée
- Un ingrédient manquant mais crucial : description explicite de la faillite de certaines firmes et de l'apparition de nouvelles

7. Conclusion

- Le paradoxe « small shocks, large business cycle » : granularité, SOC, dynamique non-linéaire endogène ?
- L'équilibre de réseaux d'entreprises avec biens non parfaitement substituables devient instables dans une région de paramètres – et cette instabilité semble générique (e.g. lorsque N augmente, cf. May)
- Peut-on se mettre d'accord sur un modèle dynamique « raisonnable », s'appuyant sur des considérations phénoménologique et/ou sur des données, s'affranchissant du joug de la rationalité ? (cf. e.g. S. Smale)

We in the field did think of the economy as roughly “linear”, constantly subject to different shocks, constantly fluctuating, but naturally returning to equilibrium over time. […]
*The main lesson of the crisis is that we were much closer to **“dark corners”** —situations in which the economy could badly malfunction — than we thought.*

Olivier Blanchard, « Where Danger Lurks » (2014)

7. Conclusion

- ➢ Le paradoxe « small shocks, large business cycle » : granularité, SOC, dynamique non-linéaire endogène ?
- ➢ 2 scenarios possibles
- • Dynamique linéaire près d’une instabilité → temps d’équilibre long et fluctuations amplifiées
- • Dynamique non-linéaire loin de l’instabilité → économie turbulente dans certains régimes
- ➢ Stabilité marginale : un concept générique des systèmes complexes, cf. cours 8

Pour aller plus loin

- Références: voir page d'accueil du cours
- Séminaire: Francesco Zamponi
  Constraint Satisfaction Problems : A Unifying Concept