DE LA PHYSIQUE STATISTIQUE
AUX SCIENCES SOCIALES

III. MICROSTRUCTURE DES MARCHES, IMPACT DES TRANSACTIONS

Chaire de l'Innovation L. Bettencourt

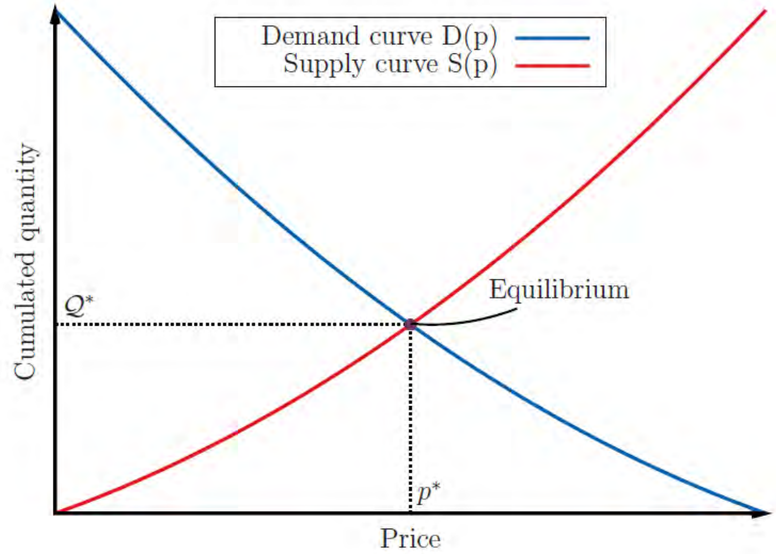
Jean-Philippe Bouchaud

Buyer: How much is it?
Seller: $1.50.
Buyer: OK, I'll take it.
Seller: It's $ 1.60.
Buyer: What? You just said $1.50.
Seller: That was before I knew you wanted it.
Buyer: You cannot do that!
Seller: It's my stuff.
Buyer: But I need a hundred of those!
Seller: A hundred? It's $1.70 apiece.
Buyer: This is insane!
Seller: It's the law of supply and demand, buddy. You want it or not?

A. Laumonier, « 6 »

1. Comment organiser les transactions ?

- Sans une organisation minimale, les transactions se font difficilement….au régal des intermédiaires
- <u>Plusieurs solutions</u>
- A) Enchères
- B) Teneurs de marché « discrétionnaires »
- C) Carnet d'ordre public et enchères continues



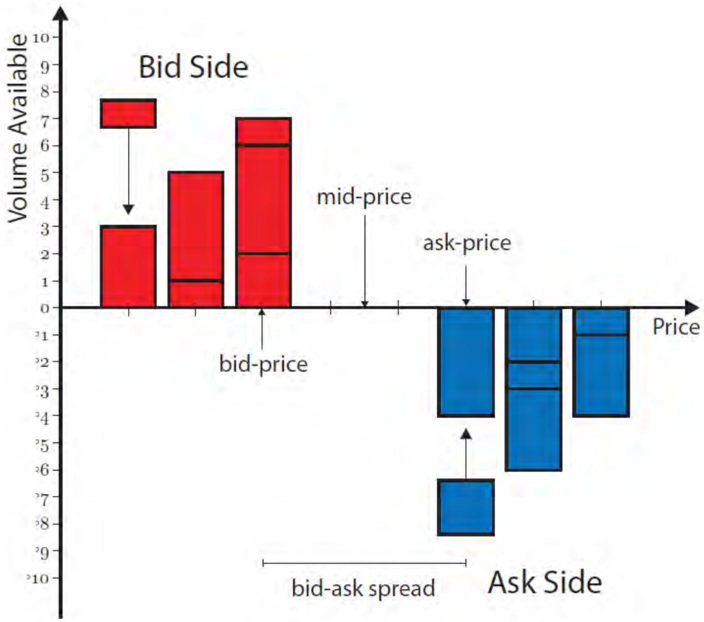
1. Comment organiser les transactions ?

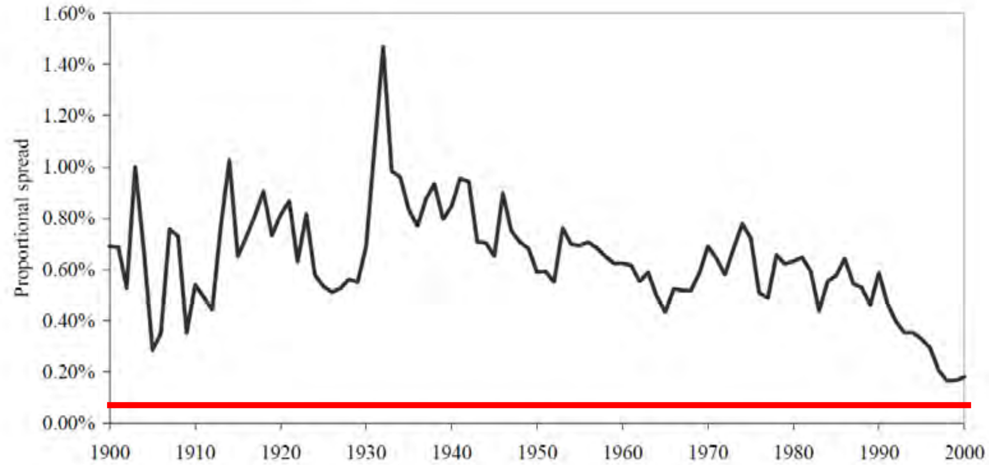
➢ <u>A) Enchères simples</u> :

- Offre et demande s'accumulent dans un carnet d'ordre avec des prix limites fermes
- D(p) : volume total des ordres d'achat à un prix ≥ p
- S(p) : volume total des ordres d'achat à un prix ≤ p
- A une certaine date, les ordres sont exécutés à un prix p^* qui maximise le volume de transaction, i.e. tel que $D(p^*)=S(p^*)$

1. Comment organiser les transactions ?

- **B) Teneurs de marché (MM) discrétionnaire :**
- Le MM affiche un prix et un volume fermes (mais révisables) à la fois à l'achat (bid) et à la vente (ask)
- Un aller-retour instantané coûte s = bid – ask (la « fourchette »)
- Dépendant des conditions de marché et de son inventaire, le MM augmente l'ask et/ou baisse le bid, et module les volumes offerts
- « Mid-point » m = (a+b)/2





1. Comment organiser les transactions ?

➢ <u>C) Carnet d'ordre public et enchères continues</u> :

- Tous les participants peuvent choisir entre ordres « marché » et « limites » dans le carnet d'ordre (pouvant être annulés/déplacés)
- Un ordre marché d'achat (resp. de vente) déclenche une (ou plusieurs) transaction à l'ask (resp. bid)
- s fixé par la compétition entre fournisseurs de liquidité : 60 → 5bp
- Volume dans le carnet ≈ 1 – 3 % du volume échangé quotidien

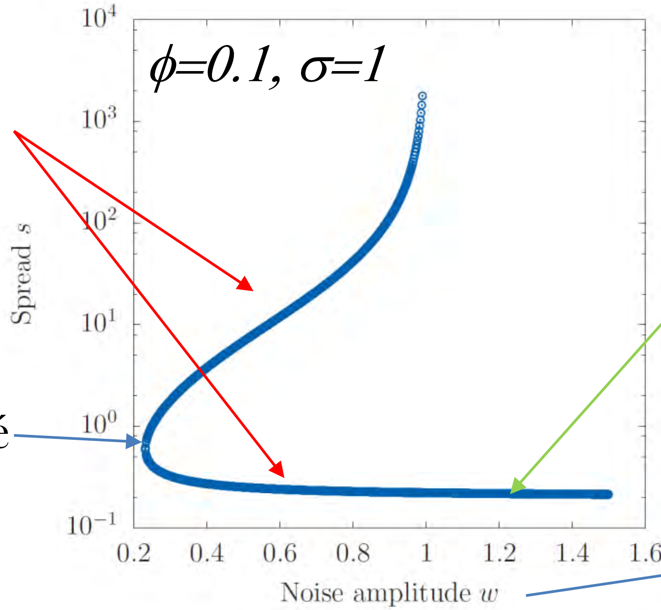
2. Bid-ask spread : la vision classique

➢ <u>Selection adverse : le modèle de Glosten-Milgrom (1985)</u>

- MM (Bob), spéculateurs informés (Alice) et « noise traders »
- Alice a une information partielle/totale sur la valeur fondamentale
- Bob fixe (a,b) pour ne pas avoir de regrets ex-post:

$$a = \mathbb{E}_{\mathrm{Bob}}[p_{\mathrm{F}} | \widehat{p} > a] \qquad \text{with} \qquad \mathbb{P}(\widehat{p}|p_{\mathrm{F}}) = \underbrace{(1-\phi) f(\widehat{p}-p_0)}_{\text{uninformed}} + \underbrace{\phi\delta(\widehat{p}-p_{\mathrm{F}})}_{\text{informed}}$$
$$b = \mathbb{E}_{\mathrm{Bob}}[p_{\mathrm{F}} | \widehat{p} < b]$$

Fortes fluctuations du spread



Crises de liquidité

Marché opérationnel $s \approx 2\phi\sigma$

$$\mathbb{P}(\widehat{p}|p_{\mathrm{F}}) = \underbrace{(1-\phi)f(\widehat{p}-p_0)}_{\text{uninformed}} + \underbrace{\phi\delta\left(\widehat{p}-p_{\mathrm{F}}\right)}_{\text{informed}}$$

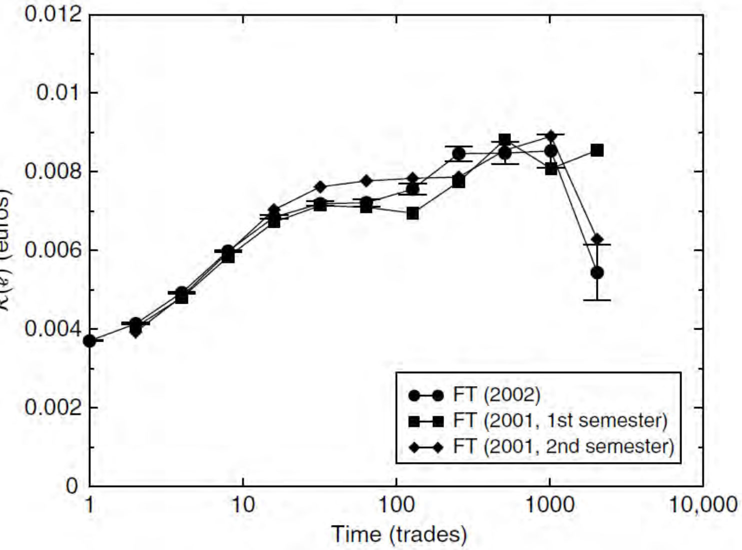
Glosten-Milgrom

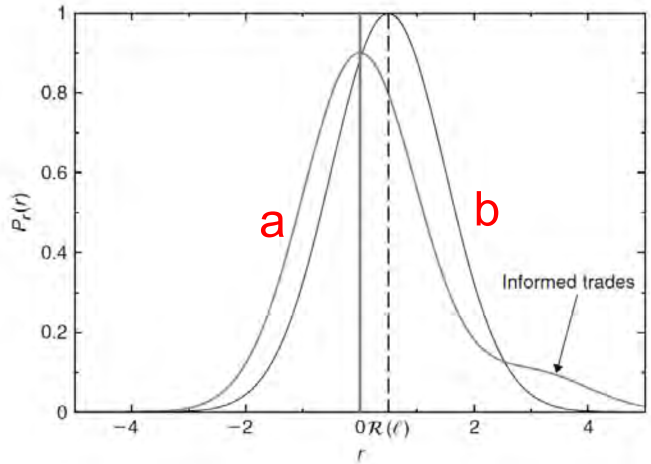
$$\mathbb{P}(p_{\mathrm{F}}|\widehat{p}) = \frac{\mathbb{P}(\widehat{p}|p_{\mathrm{F}})\mathbb{Q}_0(p_{\mathrm{F}})}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p_{\mathrm{F}}\, \mathbb{P}(\widehat{p}|p_{\mathrm{F}})\mathbb{Q}_0(p_{\mathrm{F}})}$$

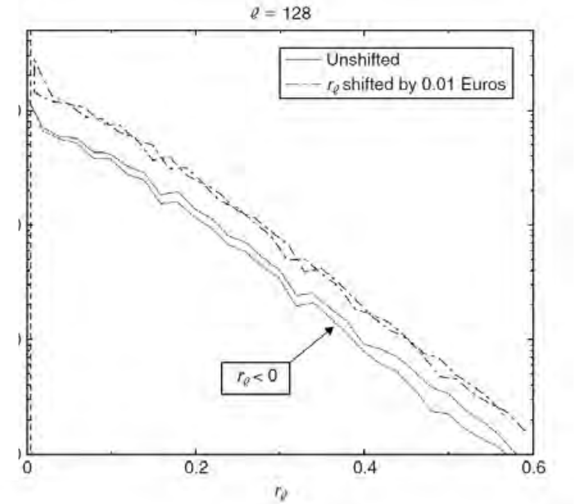
(Théorème de Bayes)

$$a = \mathbb{E}_{\mathrm{Bob}}[p_{\mathrm{F}}|\widehat{p} > a] = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p_{\mathrm{F}}\, p_{\mathrm{F}}\, \mathbb{P}(\widehat{p} > a|p_{\mathrm{F}})\mathbb{Q}_0(p_{\mathrm{F}})}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p_{\mathrm{F}}\, \mathbb{P}(\widehat{p} > a|p_{\mathrm{F}})\mathbb{Q}_0(p_{\mathrm{F}})}$$

$$b = \mathbb{E}_{\mathrm{Bob}}[p_{\mathrm{F}}|\widehat{p} < b] = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p_{\mathrm{F}}\, p_{\mathrm{F}}\, \mathbb{P}(\widehat{p} < b|p_{\mathrm{F}})\mathbb{Q}_0(p_{\mathrm{F}})}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p_{\mathrm{F}}\, \mathbb{P}(\widehat{p} < b|p_{\mathrm{F}})\mathbb{Q}_0(p_{\mathrm{F}})}$$







Impact vs. Information

- <u>Information révélée… ou impact « mécanique » ?</u>

- $r = (m_{t+\ell} - m_t) \cdot \varepsilon_t$ $\qquad \mathcal{R}(\ell) = \mathbb{E}[(m_{t+\ell} - m_t) \cdot \varepsilon_t]$ $\qquad$ (ε=±1 buy/sell)
- Glosten-Milgrom (a): $\mathscr{R} \sim \phi\ \sigma \sim s/2$ et r d'asymétrie > 0
- (b) : très peu de transactions « informées » ex-post, même HF
- Une vision alternative: chaque transaction, informée ou non, « impacte » les prix en fixant un nouveau niveau de référence pour un marché sans repère concernant la valeur fondamentale (cf. 2)

$$\mathcal{G}_T = \upsilon_0 \left[\sum_{t=0}^{T-1} \theta_t \varepsilon_t \left(m_t + \varepsilon_t \frac{s_t}{2} - m_T \right) + \theta_t \varpi \right]$$

θ=1 si executé

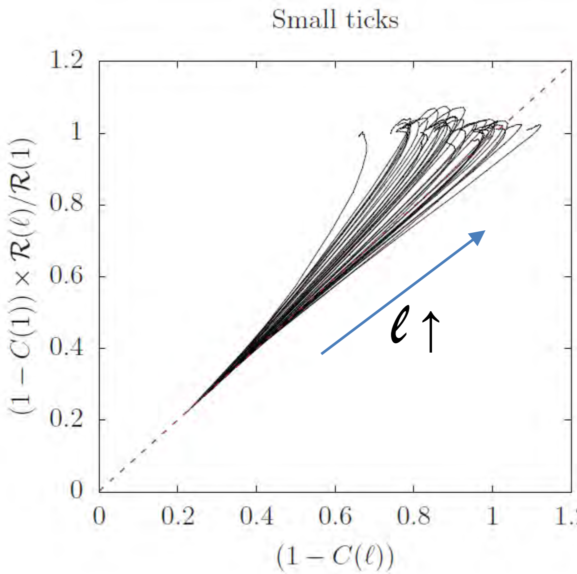
Inventaire valorisé au « mid »

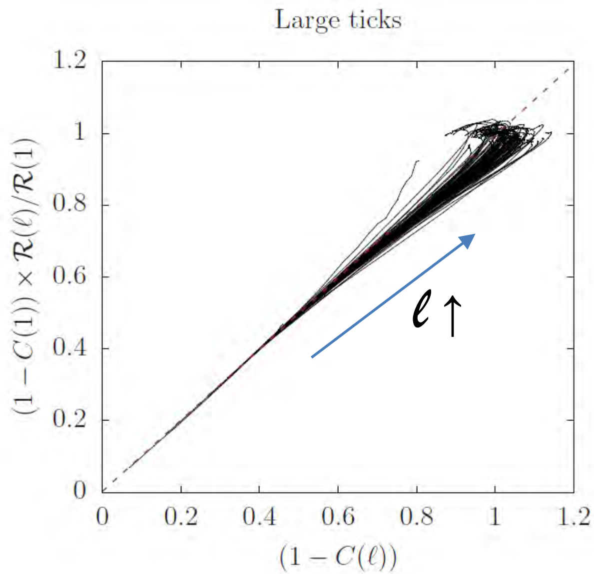
« maker-taker » fees

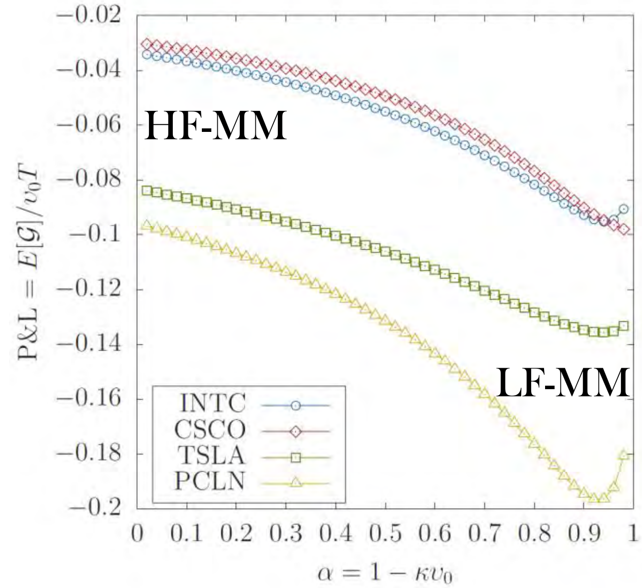
3. Bid-ask spread : une théorie agnostique

- <u>MM: selection adverse + risque d'inventaire vs. spread et fees</u>
- Le signe des ordres est à mémoire longue et l'inventaire ψ croit plus vite que $T^{1/2}$
- Un contrôle de type « Ornstein-Uhlenbeck » permet de limiter ψ
- α petit : MM rapide, ψ faible
- α proche de 1 : MM lent, ψ grand

$$\psi_t = -\upsilon_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha^{\ell} \varepsilon_{t-\ell}.$$







3. Bid-ask spread : une théorie agnostique

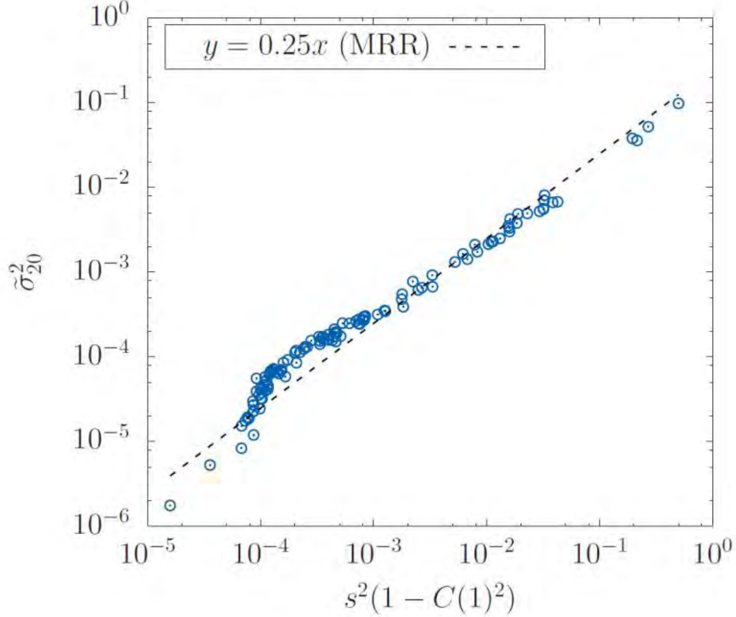
➢ <u>Profit moyen du MM</u>

$$\frac{\mathbb{E}[\mathcal{G}]}{v_0 T} \approx \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\mathbb{E}[s]\sum_{\ell=1}^{\infty}\alpha^{\ell}(1 - C(\ell)) - \sum_{\ell=1}^{\infty}\alpha^{\ell}\mathcal{R}(\ell)\right). \quad C(\ell) := \mathrm{Cov}[\varepsilon_t, \varepsilon_{t+\ell}].$$

$$\mathcal{R}(\ell) = \mathbb{E}[(m_{t+\ell} - m_t)\cdot\varepsilon_t]$$

➢ <u>Conditions de profit nul ∀α</u> (Mahadevan-Richardson-Roomans)

$$\boxed{\mathcal{R}(\ell) = \frac{s}{2}(1 - C(\ell)).}$$



Spread et volatilité : une relation simple

- <u>Argument qualitatif :</u>

  Chaque transaction change le prix de : $\pm\, \mathscr{R}(1) \sim \pm\, s$

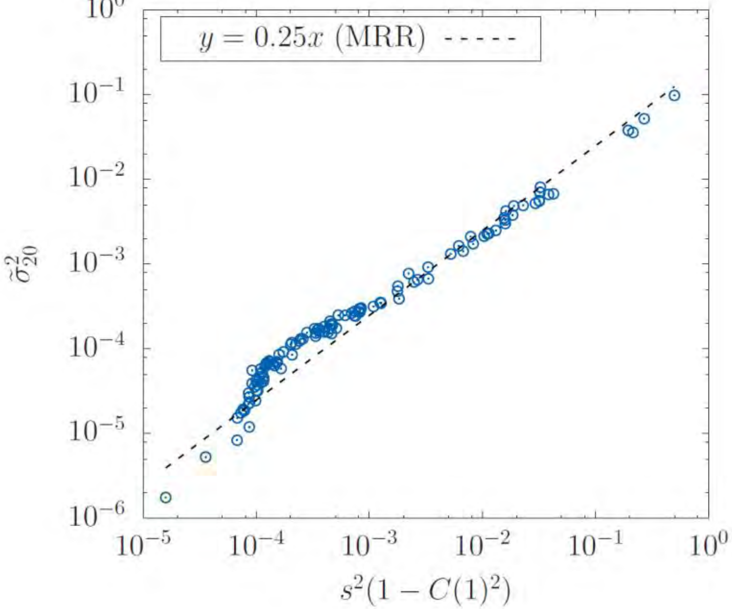
→ volatilité par transaction ~ s et volatilité usuelle ~ s √ fréquence tr.

- <u>Plus précisément :</u> la volatilité est (presque) entièrement expliquée par l'impact des transactions

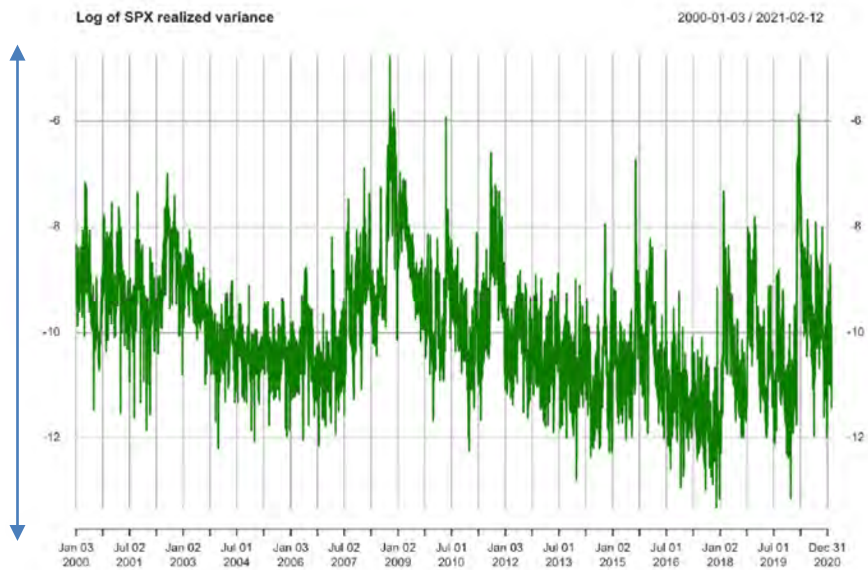
$$\boxed{\widetilde{\sigma}^2_\infty = \frac{1 - C(1)^2}{4} s^2 + \Sigma^2.}$$

Or seule une faible partie d'entre elles sont informées....

« News »



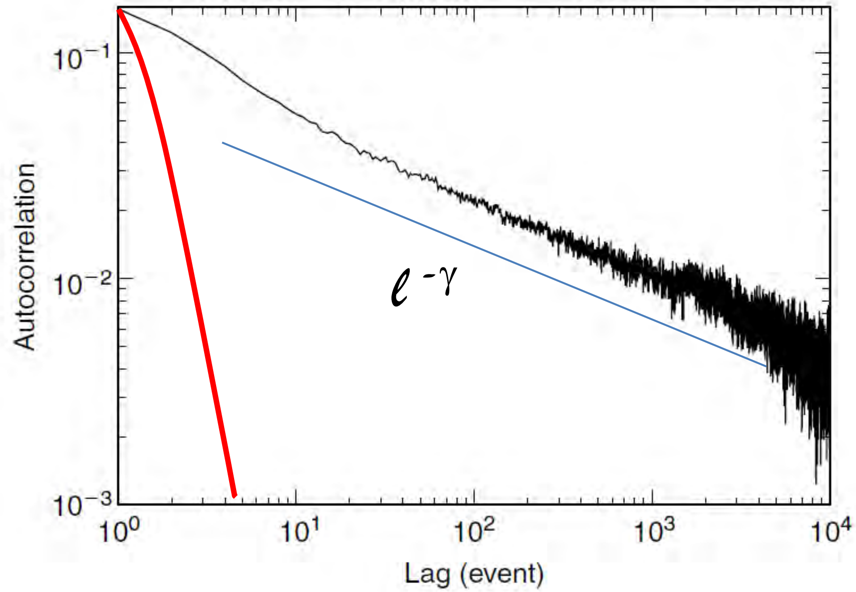
x 3000!



Spread et volatilité : l'œuf ou la poule ?

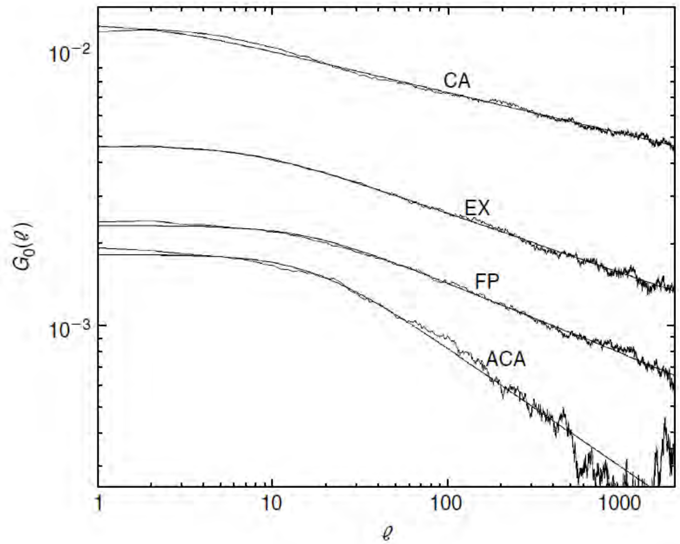
- Une augmentation de la volatilité conduit à une augmentation du spread
- Mais une augmentation du spread conduit à des mouvements élémentaires plus grands et donc une augmentation de la volatilité
- Un mode instable des marchés financiers → grandes fluctuations de la volatilité et crises de liquidité (cf. M. Benzaquen)

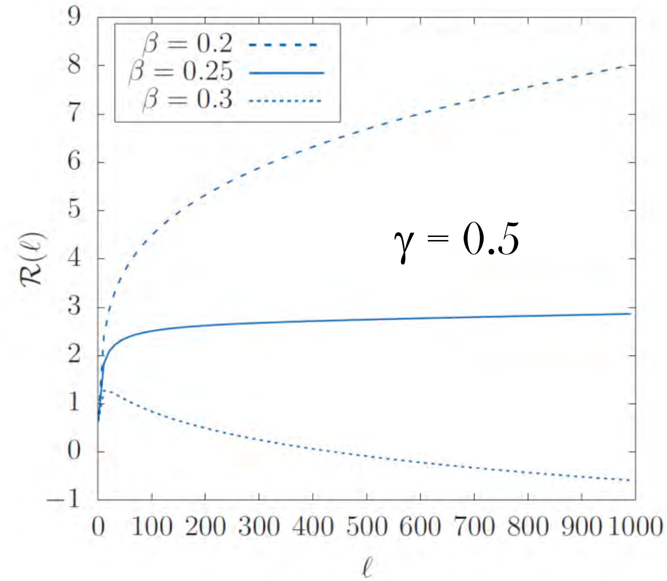
$$C(\ell) := \mathrm{Cov}[\varepsilon_t, \varepsilon_{t+\ell}].$$



4. Le modèle à « propagateur »

- **Paradoxe apparent :**
  - Les transactions impactent les prix
  - Le signe des transactions est à mémoire longue ($\gamma < 1$)
  - Les variations de prix sont quasiment décorrélées
- **Une solution** : l'impact des transactions passées décroît de manière à compenser exactement l'autocorrélation des prix





4. Le modèle à « propagateur »

- **Mathématiquement :**

$$\boxed{m_t = m_{t_0} + \sum_{t_0 \le n < t} G(t-n)\varepsilon_n + \sum_{t_0 \le n < t} \xi_n,}$$

$$\mathcal{R}(\ell) = G(\ell) + \sum_{0<n<\ell} G(\ell - n)C(n) + \sum_{n>0} [G(\ell+n) - G(n)]\, C(n).$$

$$\mathbb{E}[\varepsilon_{t+\ell}|\varepsilon_t = 1] = C(\ell) \sim \frac{c_\infty}{\ell^\gamma} \qquad G(\ell) \approx_{\ell \gg 1} \frac{\Gamma_\infty}{\ell^\beta}, \qquad \beta = \beta_c := (1-\gamma)/2,$$

- **Decroissance lente de l'impact et prix diffusifs**

4. Le modèle à « propagateur »

➢ <u>Point de vue équivalent :</u>

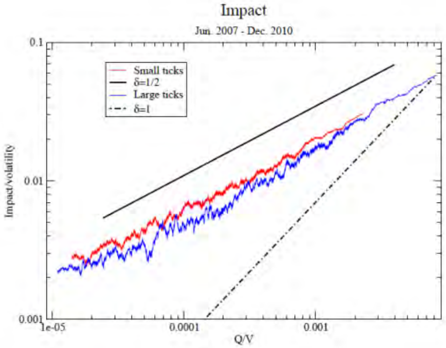
$$\boxed{r_t = G_{1,t} \times (\varepsilon_t - \widehat{\varepsilon_t}) + \xi_t. \quad \widehat{\varepsilon_t} := \mathbb{E}_{t-1}[\varepsilon_t].}$$

- Le prix réagit à la <u>surprise</u>: l'ordre le plus probable a moins d'impact que l'ordre le moins probable → rendements décorrélés
- Un ordre marché d'achat induit une augmentation de la liquidité à l'ask, et vice-versa : liquidité compétitive → prix HF diffusif
- Impact décroissant = impact permanent mais dépendant du passé

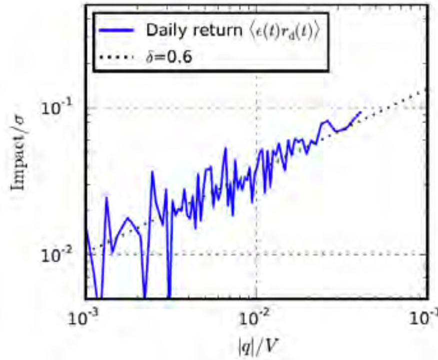
5. Impact des « métaordres »

➢ <u>Observation fondamentale</u>:

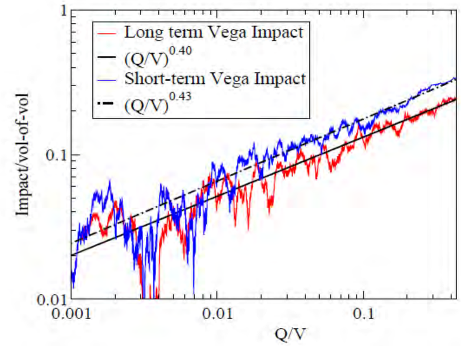
- Volume immédiatement accessible << volume typique des fonds d'investissement
- Les ordres doivent être fragmentés et exécutés séquentiellement sur plusieurs heures/jours ou même semaine → corrélation des ε
- Quel est l'impact total $I(Q)$ d'un « métaordre » de volume Q ?
- Kyle : $I(Q) = AQ$



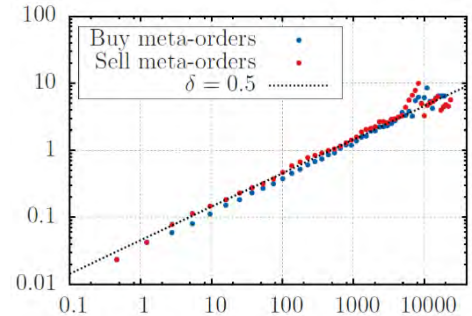
Futures



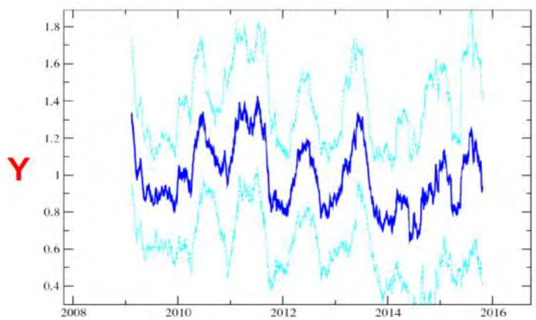
Actions



Options



Bitcoin

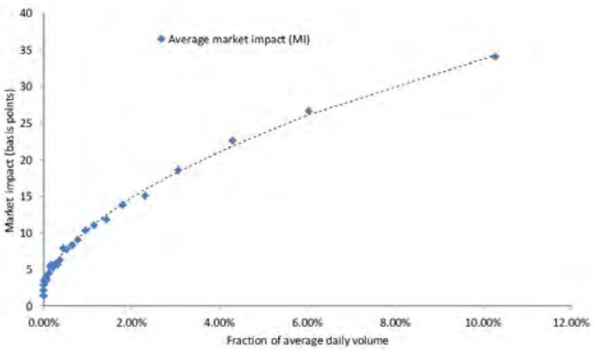


5. Impact des « métaordres »

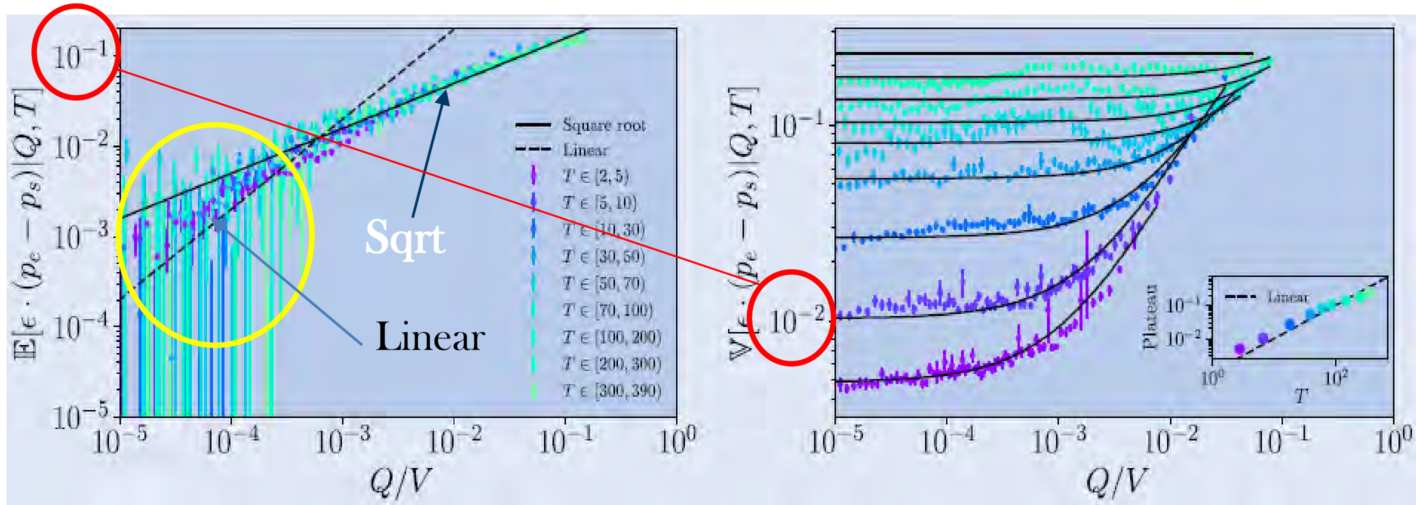
$$\boxed{I(Q) = Y\sigma_T \sqrt{\frac{Q}{V_T}}}$$

➢ <u>Un résultat surprenant</u> :

- Résultat <u>universel</u> (marchés, époque, stratégies, microstructure,…)
- Valable dans un régime « raisonnable » (Q << V_T, T intermédiaire)
- NB: Impact = f(Q/V) et non f(Q/Mktcap) !



Actions (AQR,
ordres limites)



5. Impact des « métaordres »

$$\boxed{I(Q) = Y\sigma_T \sqrt{\frac{Q}{V_T}}}$$

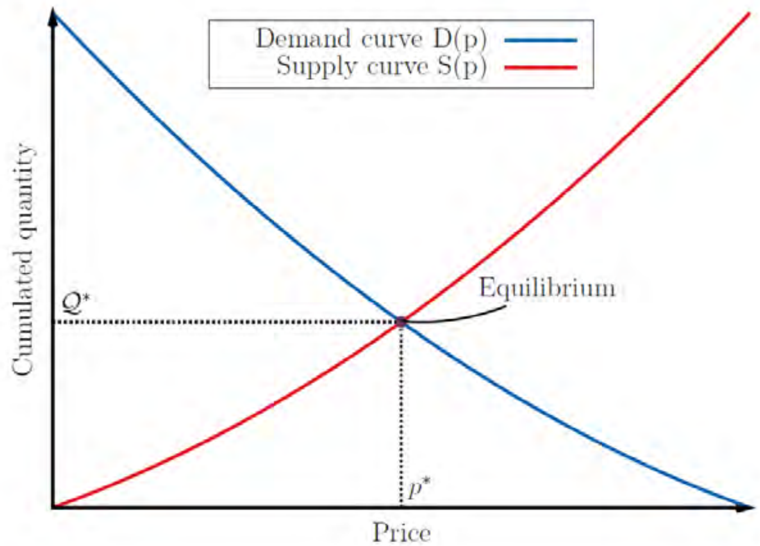
➢ <u>Un résultat surprenant</u> :

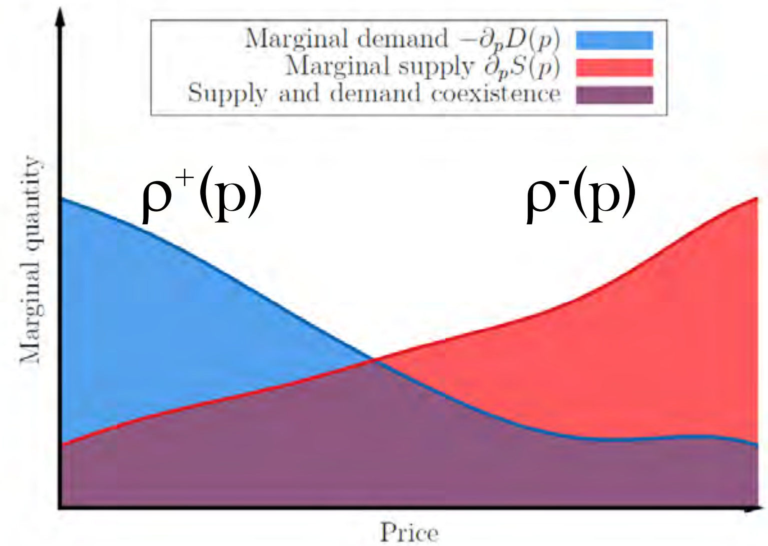
- Impact non-linéaire, approx. indépendant du temps d'execution T
- NB: I = impact <u>moyen</u> << σ_T

6. Une théorie de l'impact des « métaordres »

➢ Propagateurs et métaordres : $\quad I(Q,T) \approx \frac{\Gamma_\infty}{(1-\beta)} T^{-\beta} \frac{Q}{\upsilon}$

- Impact linéaire en Q et dépendant de la durée T
- Si $Q \sim T$, $I(Q) \sim Q^{1-\beta}$: pas assez concave
- Ingrédient manquant : une description explicite de la liquidité





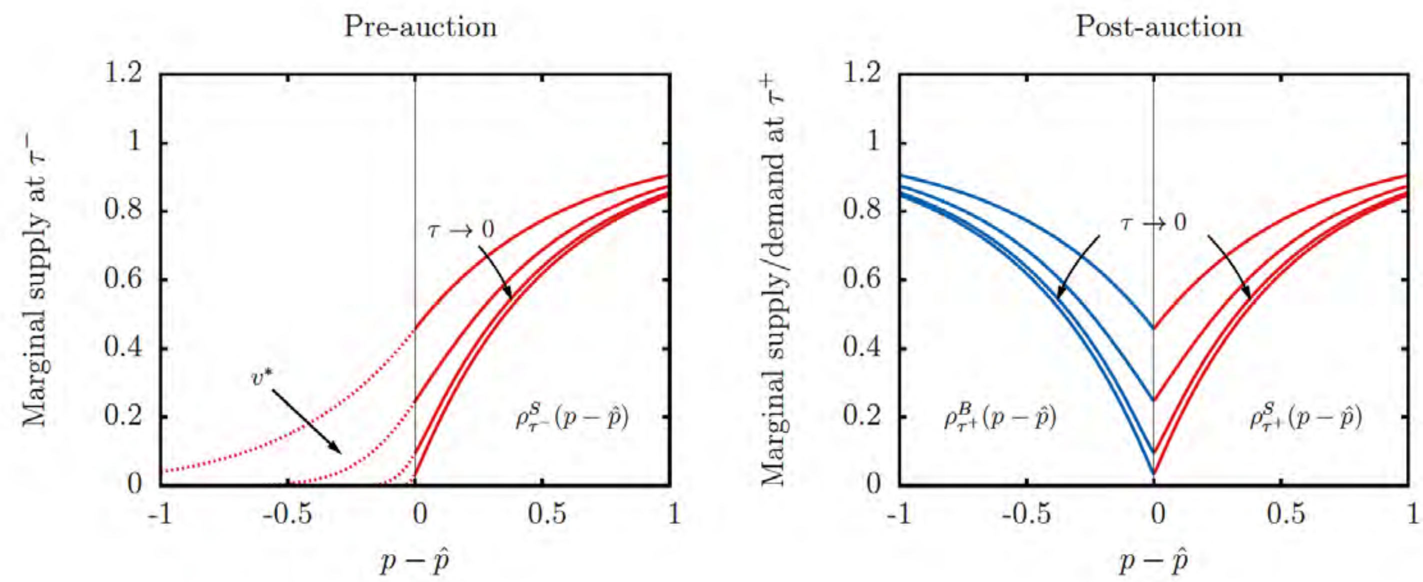
6. Une théorie de l'impact des « métaordres »

➢ Liquidité dynamique: un modèle phénoménologique

- Entre deux enchères:

$$\partial_t \rho^+(x,t) = D\,\partial^2_{xx}\rho^+(x,t) - \nu^+(x)\rho^+(x,t) + \lambda^+(x);$$
$$\partial_t \rho^-(x,t) = \underbrace{D\,\partial^2_{xx}\rho^-(x,t)}_{\text{revisions}} - \underbrace{\nu^-(x)\rho^-(x,t)}_{\text{cancellations}} + \underbrace{\lambda^-(x)}_{\text{new orders}}.$$

- Juste après la k$^{\text{ième}}$ enchère: $\rho^-(p, t \downarrow t_k) = \begin{cases} \rho^-(p,t_k), & \text{for } p > p_k^*, \\ 0, & \text{for } p \le p_k^* \end{cases}$



6. Une théorie de l'impact des « métaordres »

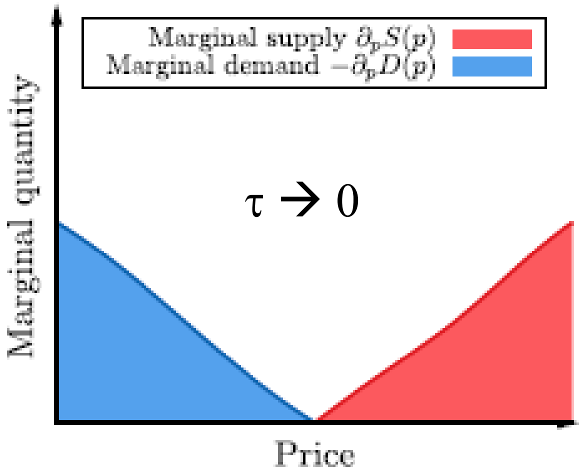
➢ <u>Liquidité dynamique: un modèle phénoménologique</u>

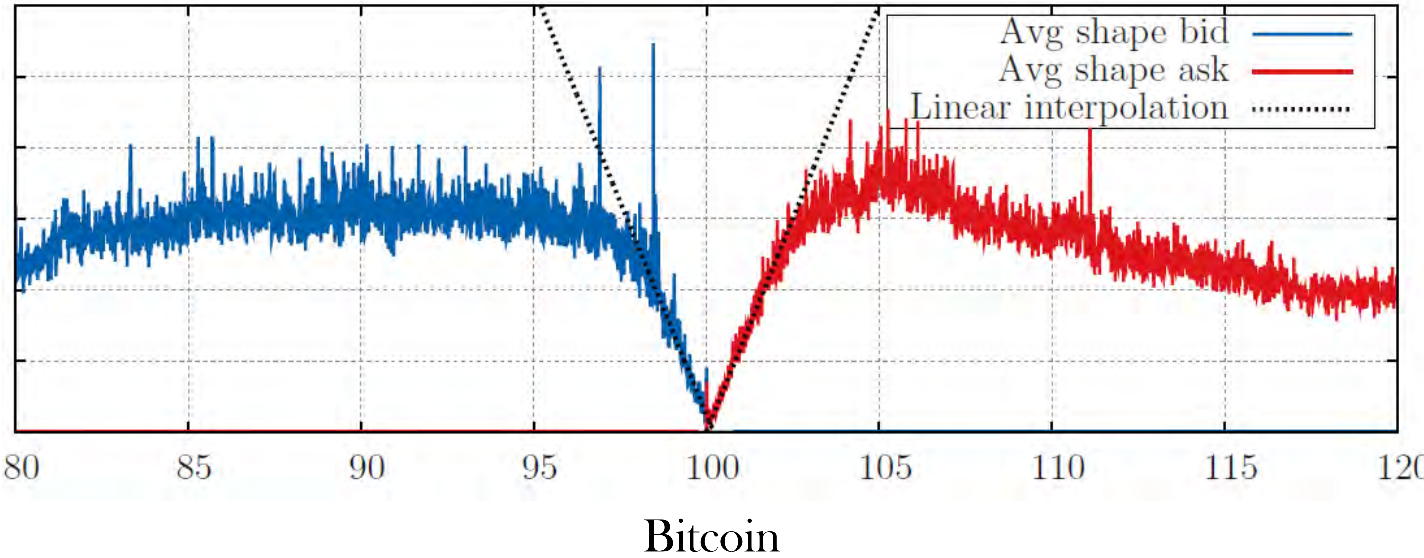
- τ : temps entre deux enchères

$$\mathfrak{I}(Q) = \sqrt{D\tau} \times \mathcal{Y}\left(\frac{Q}{V^*}\right); \qquad V^* = \mathcal{L}D\tau,$$

$$\mathcal{Y}(u) \approx_{u \ll 1} 0.555u;$$
$$\mathcal{Y}(u) \approx_{u \gg 1} \sqrt{2u}.$$

- Loi en racine pour Q >> V*
- Note: $V_T = V^*(\tau)T/\tau$ indépendant de τ (indépendant du THF)





6. Une théorie de l'impact des « métaordres »

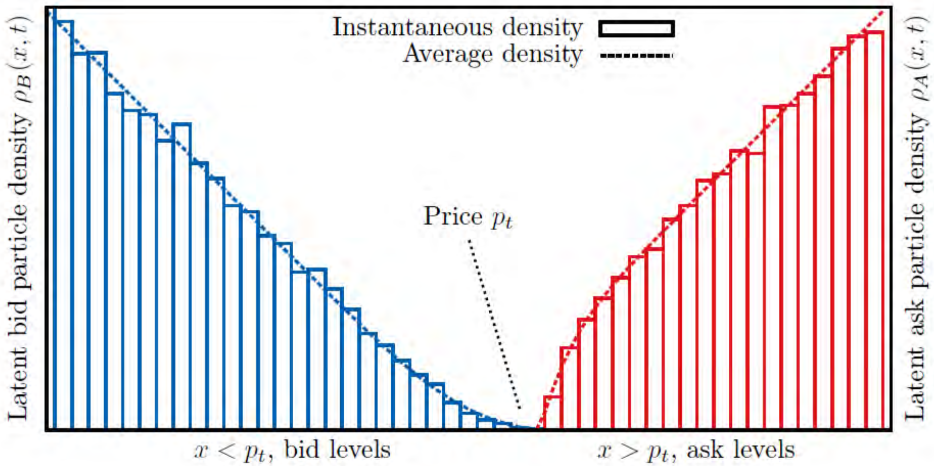
➢ <u>Liquidité dynamique: un modèle phénoménologique</u>

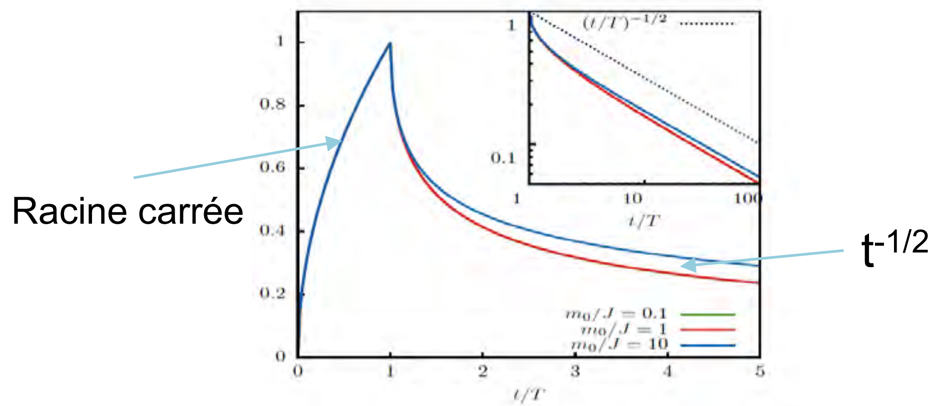
- τ : temps entre deux enchères

$$\Im(Q) = \sqrt{D\tau} \times \mathcal{Y}\left(\frac{Q}{V^*}\right); \qquad V^* = \mathcal{L}D\tau,$$

$$\mathcal{Y}(u) \approx_{u \ll 1} 0.555u;$$
$$\mathcal{Y}(u) \approx_{u \gg 1} \sqrt{2u}.$$

- Loi en racine pour Q >> V*
- Note: $V_T = V^*(\tau)T/\tau$ indépendant de τ (indépendant du THF)

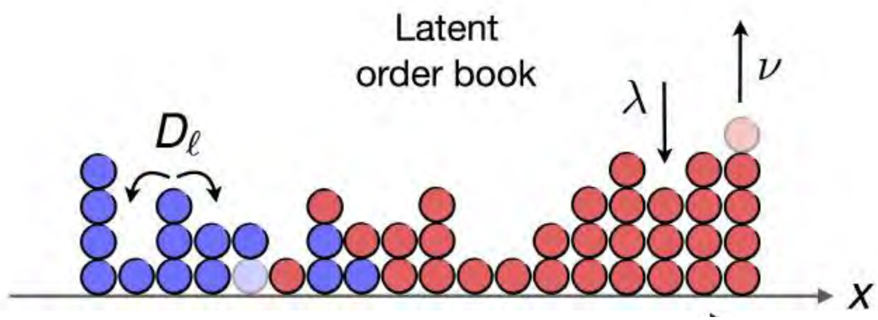




6. Une théorie de l'impact des « métaordres »

τ → 0 : une formulation « réaction-diffusion » commode : A+B → 0

→ Prédictions concernant la décroissance de l'impact, le coût de cycles, etc.

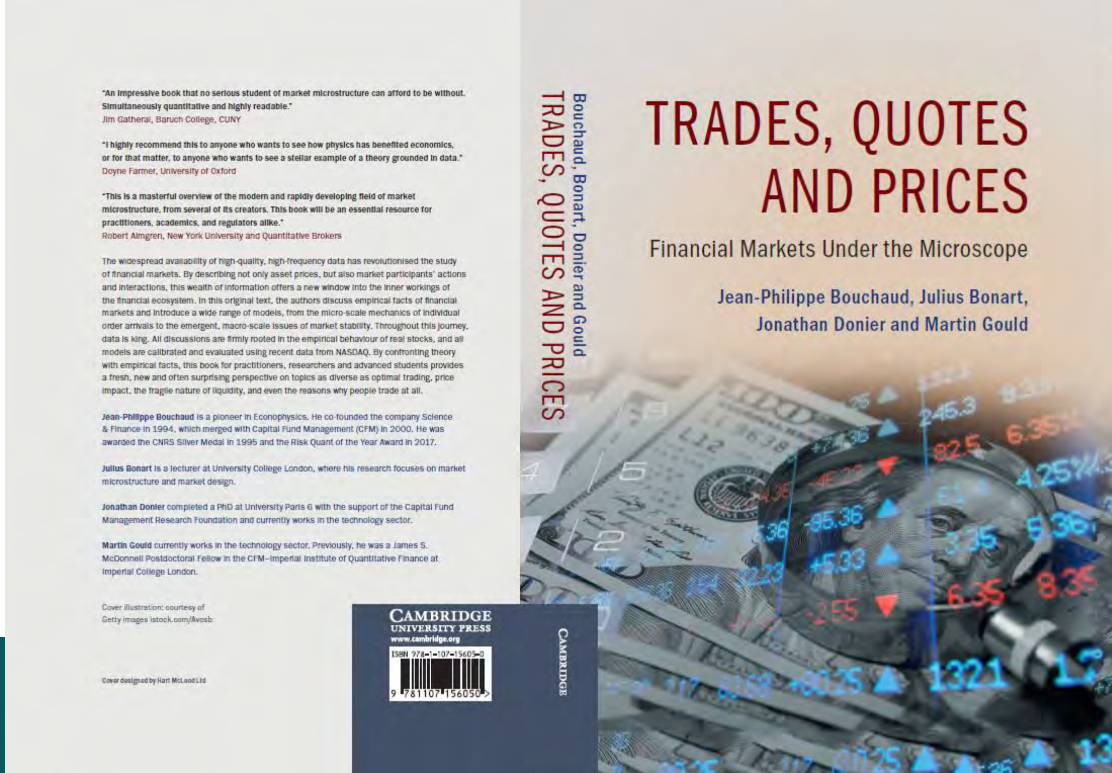


7. Conclusion : « Price Discovery » vs. « Price Formation »

- Vision économique classique: les transactions n'« impactent » pas les prix, elles les *prédisent* (en moyenne)
- Il semble plutôt que la majorité des transactions ne sont pas réellement informées, mais conduisent le marché dans son ensemble à réviser son estimation du prix → impact « mécanique »
- Découplage prix/valeur (cours 2); compétition MM → prix diffusif
- Boucle de rétroaction spread/volatilité et instabilité des marchés

7. Conclusion

- De nouvelles « surprises » empiriques :
  - Mémoire longue du signe des transactions
  - Impact non-linéaire des métaordres (loi en racine ≠ Kyle)
- Théories phénoménologiques :
  - Modèle à « propagateur » et décroissance lente de l'impact
  - Modèle dynamique (réaction-diffusion) de la liquidité
  - De la compréhension théorique à une régulation adaptée (TFF,…)



Pour aller plus loin

- Références: voir page d'accueil du cours
- Séminaire: Michael Benzaquen
  The Fragile Nature of Liquidity