

DE LA PHYSIQUE STATISTIQUE
AUX SCIENCES SOCIALES

III. MICROSTRUCTURE DES MARCHES, IMPACT DES TRANSACTIONS

Chaire de l'Innovation L. Bettencourt

Jean-Philippe Bouchaud

Buyer: How much is it?

Seller: \$1.50.

Buyer: OK, I'll take it.

Seller: It's \$ 1.60.

Buyer: What? You just said \$1.50.

Seller: That was before I knew you wanted it.

Buyer: You cannot do that!

Seller: It's my stuff.

Buyer: But I need a hundred of those!

Seller: A hundred? It's \$1.70 apiece.

Buyer: This is insane!

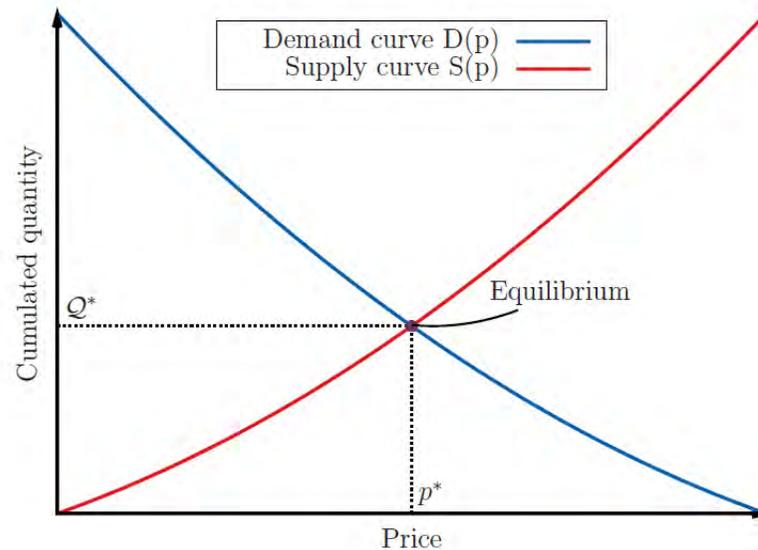
Seller: It's the law of supply and demand, buddy. You want it or not?



A. Laumonier, « 6 »

1. Comment organiser les transactions ?

- Sans une organisation minimale, les transactions se font difficilement...au régal des intermédiaires
- Plusieurs solutions
 - A) Enchères
 - B) Teneurs de marché « discrétionnaires »
 - C) Carnet d'ordre public et enchères continues



1. Comment organiser les transactions ?

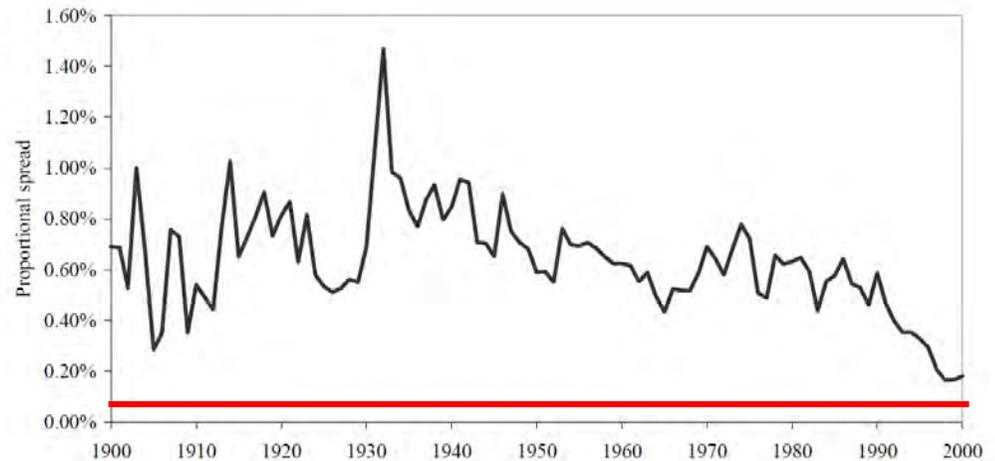
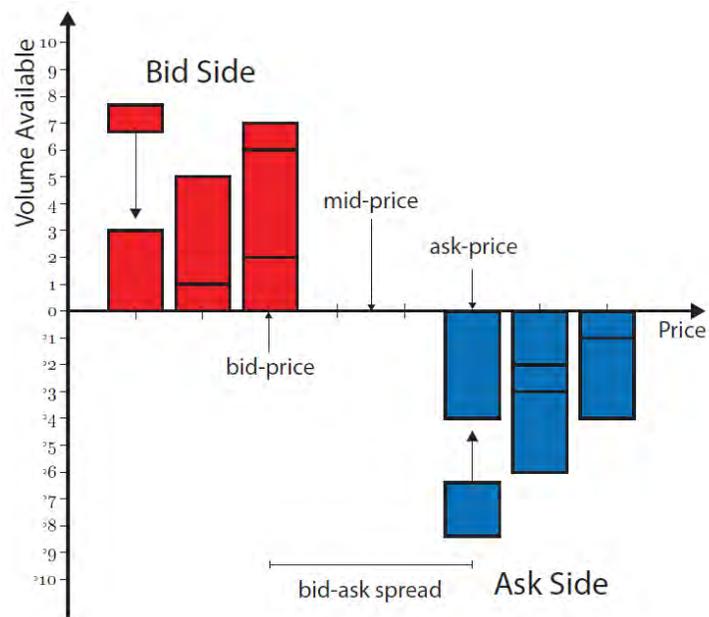
➤ A) Enchères simples :

- Offre et demande s'accumulent dans un carnet d'ordre avec des prix limites fermes
- $D(p)$: volume total des ordres d'achat à un prix $\geq p$
- $S(p)$: volume total des ordres d'achat à un prix $\leq p$
- A une certaine date, les ordres sont exécutés à un prix p^* qui maximise le volume de transaction, i.e. tel que $D(p^*)=S(p^*)$



1. Comment organiser les transactions ?

- B) Teneurs de marché (MM) discrétionnaire :
 - Le MM affiche un prix et un volume fermes (mais révisables) à la fois à l'achat (bid) et à la vente (ask)
 - Un aller-retour instantané coûte $s = \text{bid} - \text{ask}$ (la « fourchette »)
 - Dépendant des conditions de marché et de son inventaire, le MM augmente l'ask et/ou baisse le bid, et module les volumes offerts
 - « Mid-point » $m = (a+b)/2$



1. Comment organiser les transactions ?

➤ C) Carnet d'ordre public et enchères continues :

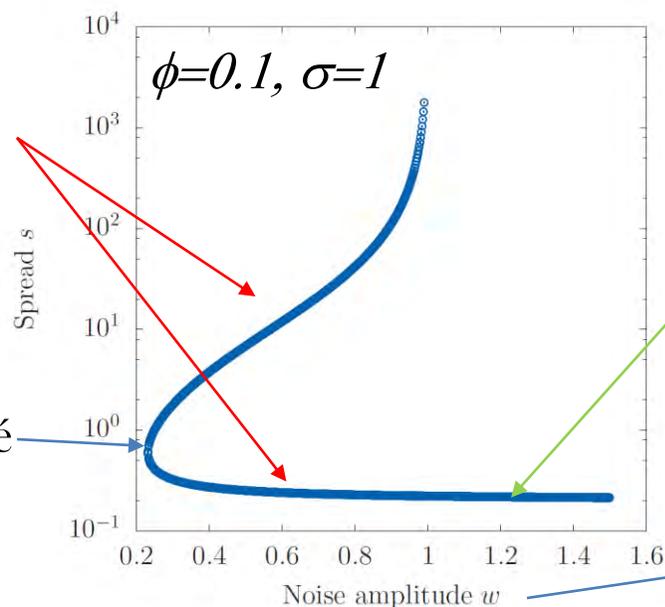
- Tous les participants peuvent choisir entre ordres « marché » et « limites » dans le carnet d'ordre (pouvant être annulés/déplacés)
- Un ordre marché d'achat (resp. de vente) déclenche une (ou plusieurs) transaction à l'ask (resp. bid)
- s fixé par la compétition entre fournisseurs de liquidité : 60 → 5bp
- Volume dans le carnet $\approx 1 - 3 \%$ du volume échangé quotidien

2. Bid-ask spread : la vision classique

- Selection adverse : le modèle de Glosten-Milgrom (1985)
- MM (Bob), spéculateurs informés (Alice) et « noise traders »
- Alice a une information partielle/totale sur la valeur fondamentale
- Bob fixe (a,b) pour ne pas avoir de regrets ex-post:

$$a = \mathbb{E}_{\text{Bob}}[p_{\text{F}} | \hat{p} > a] \quad \text{with} \quad \mathbb{P}(\hat{p} | p_{\text{F}}) = \underbrace{(1 - \phi) f(\hat{p} - p_0)}_{\text{uninformed}} + \underbrace{\phi \delta(\hat{p} - p_{\text{F}})}_{\text{informed}}$$
$$b = \mathbb{E}_{\text{Bob}}[p_{\text{F}} | \hat{p} < b]$$

Fortes fluctuations du spread



Crises de liquidité

Marché opérationnel $s \approx 2\phi\sigma$

$$\mathbb{P}(\widehat{p}|p_F) = \underbrace{(1 - \phi)f(\widehat{p} - p_0)}_{\text{uninformed}} + \underbrace{\phi\delta(\widehat{p} - p_F)}_{\text{informed}}$$

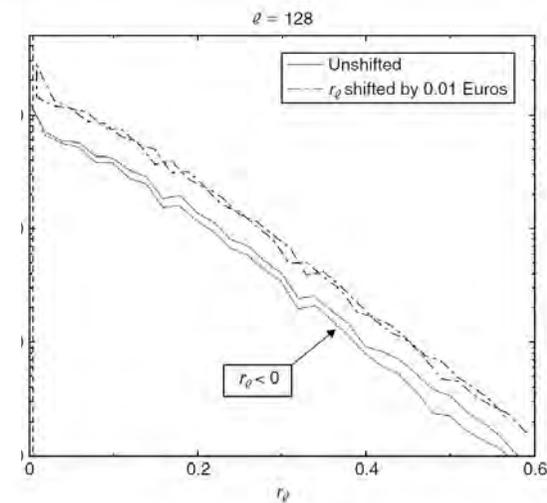
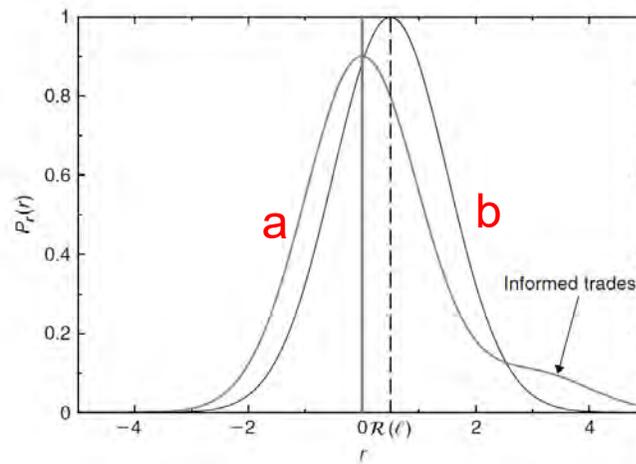
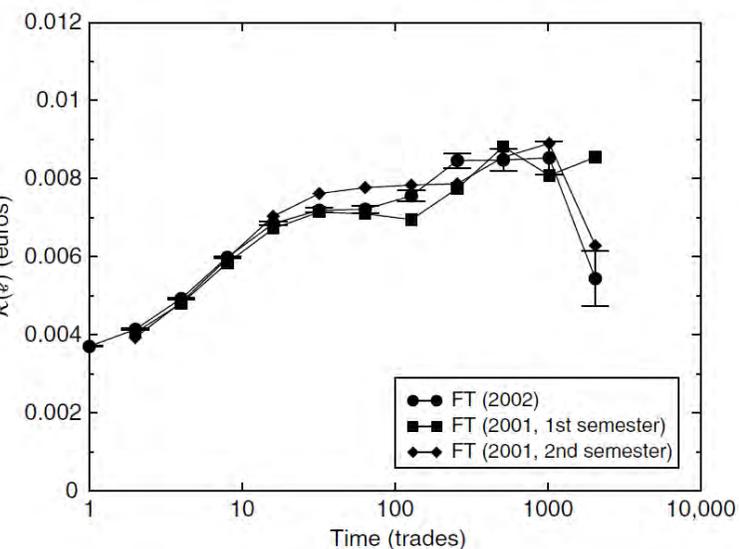
Glosten-Milgrom

$$\mathbb{P}(p_F|\widehat{p}) = \frac{\mathbb{P}(\widehat{p}|p_F)Q_0(p_F)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dp_F \mathbb{P}(\widehat{p}|p_F)Q_0(p_F)}$$

(Théorème de Bayes)

$$a = \mathbb{E}_{\text{Bob}}[p_F|\widehat{p} > a] = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dp_F p_F \mathbb{P}(\widehat{p} > a|p_F)Q_0(p_F)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dp_F \mathbb{P}(\widehat{p} > a|p_F)Q_0(p_F)}$$

$$b = \mathbb{E}_{\text{Bob}}[p_F|\widehat{p} < b] = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dp_F p_F \mathbb{P}(\widehat{p} < b|p_F)Q_0(p_F)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dp_F \mathbb{P}(\widehat{p} < b|p_F)Q_0(p_F)}$$



Impact vs. Information

➤ Information révélée... ou impact « mécanique » ?

- $r = (m_{t+\ell} - m_t) \cdot \varepsilon_t$ $\mathcal{R}(\ell) = \mathbb{E}[(m_{t+\ell} - m_t) \cdot \varepsilon_t]$ ($\varepsilon = \pm 1$ buy/sell)
- Glosten-Milgrom (a): $\mathcal{R} \sim \phi$ $\sigma \sim s/2$ et r d'asymétrie > 0
- (b) : très peu de transactions « informées » ex-post, même HF
- Une vision alternative: chaque transaction, informée ou non, « impacte » les prix en fixant un nouveau niveau de référence pour un marché sans repère concernant la valeur fondamentale (cf. 2)

$$\mathcal{G}_T = v_0 \left[\sum_{t=0}^{T-1} \theta_t \varepsilon_t \left(m_t + \varepsilon_t \frac{s_t}{2} - m_T \right) + \theta_t \varpi \right]$$

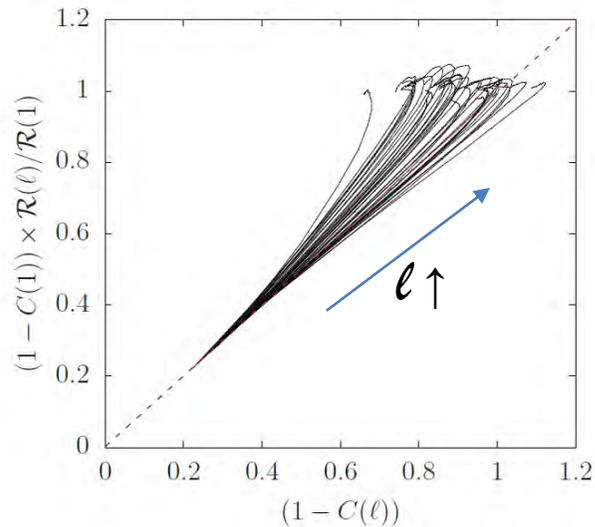
$\theta=1$ si exécuté
Inventaire valorisé au « mid »
« maker-taker » fees

3. Bid-ask spread : une théorie agnostique

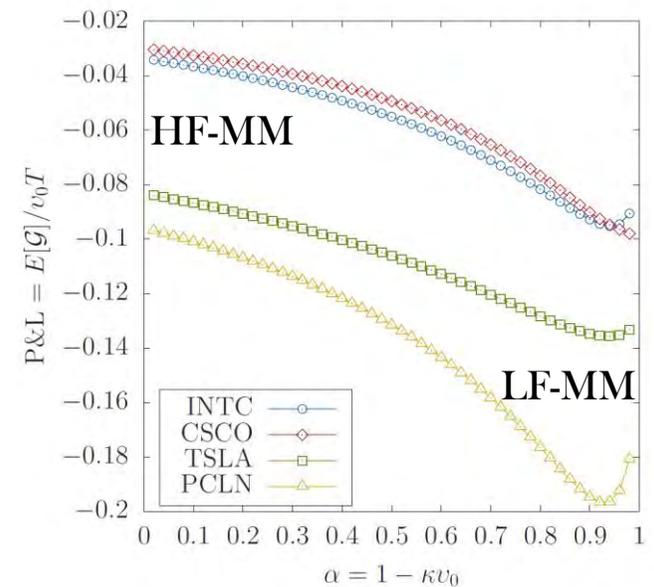
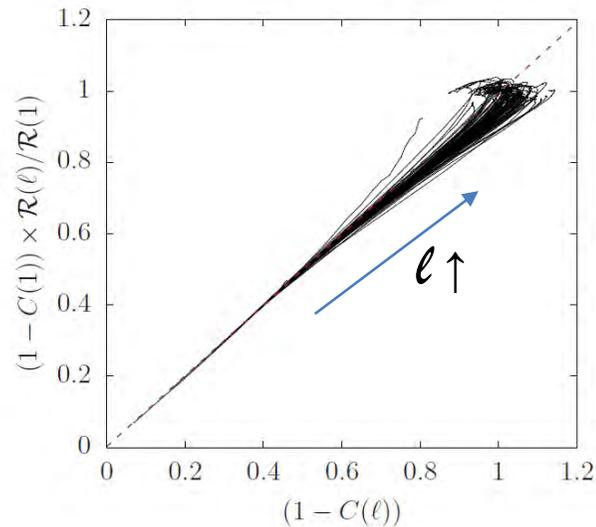
- MM: selection adverse + risque d'inventaire vs. spread et fees
- Le signe des ordres est à mémoire longue et l'inventaire ψ croit plus vite que $T^{1/2}$
- Un contrôle de type « Ornstein-Uhlenbeck » permet de limiter ψ
- α petit : MM rapide, ψ faible
- α proche de 1 : MM lent, ψ grand

$$\psi_t = -v_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha^\ell \varepsilon_{t-\ell}.$$

Small ticks



Large ticks



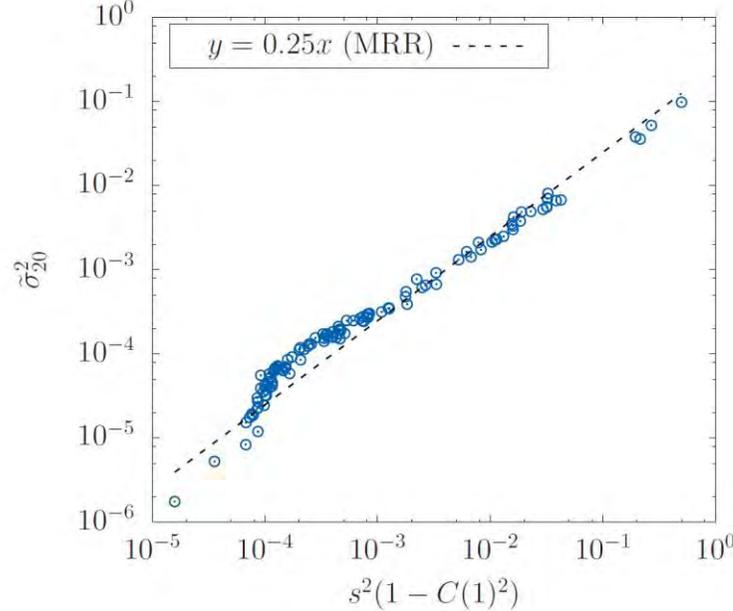
3. Bid-ask spread : une théorie agnostique

➤ Profit moyen du MM

$$\frac{\mathbb{E}[\mathcal{G}]}{v_0 T} \approx \frac{1-\alpha}{\alpha} \left(\frac{1}{2} \mathbb{E}[s] \sum_{\ell=1}^{\infty} \alpha^{\ell} (1-C(\ell)) - \sum_{\ell=1}^{\infty} \alpha^{\ell} \mathcal{R}(\ell) \right). \quad \begin{aligned} C(\ell) &:= \text{Cov}[\varepsilon_t, \varepsilon_{t+\ell}]. \\ \mathcal{R}(\ell) &= \mathbb{E}[(m_{t+\ell} - m_t) \cdot \varepsilon_t] \end{aligned}$$

➤ Conditions de profit nul $\forall \alpha$ (Mahadevan-Richardson-Roomans)

$$\mathcal{R}(\ell) = \frac{s}{2} (1 - C(\ell)).$$



Spread et volatilité : une relation simple

➤ Argument qualitatif :

Chaque transaction change le prix de : $\pm \mathcal{R}(1) \sim \pm s$

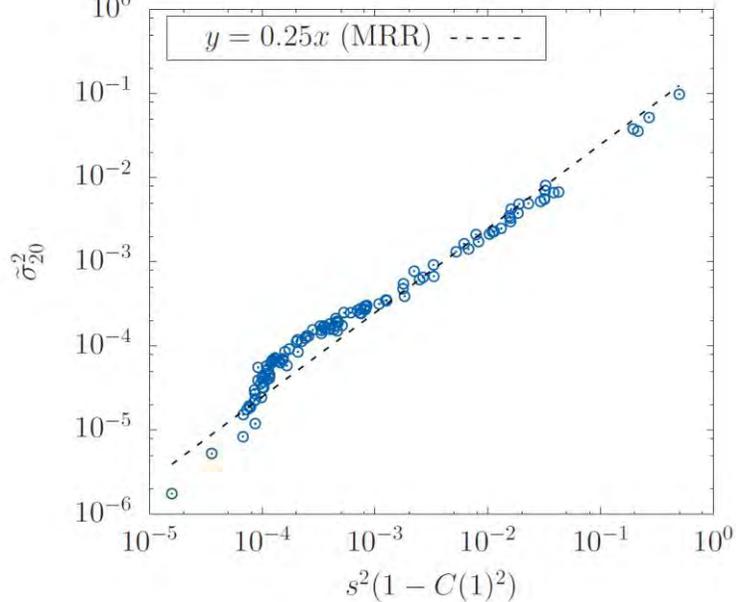
➔ volatilité par transaction $\sim s$ et volatilité usuelle $\sim s \sqrt{\text{fréquence tr.}}$

➤ Plus précisément : la volatilité est (presque) entièrement expliquée par l'impact des transactions

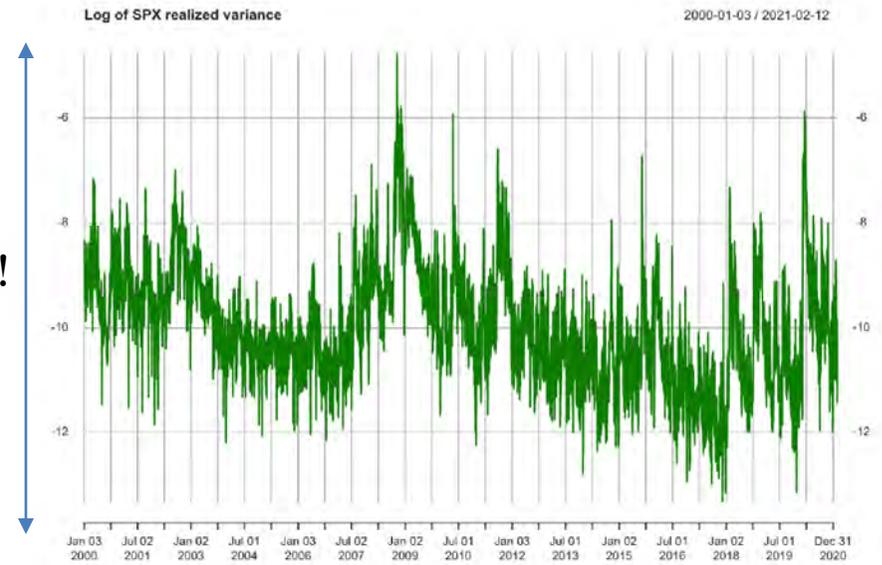
$$\tilde{\sigma}_{\infty}^2 = \frac{1 - C(1)^2}{4} s^2 + \Sigma^2$$

Or seule une faible partie d'entre elles sont informées....

« News »



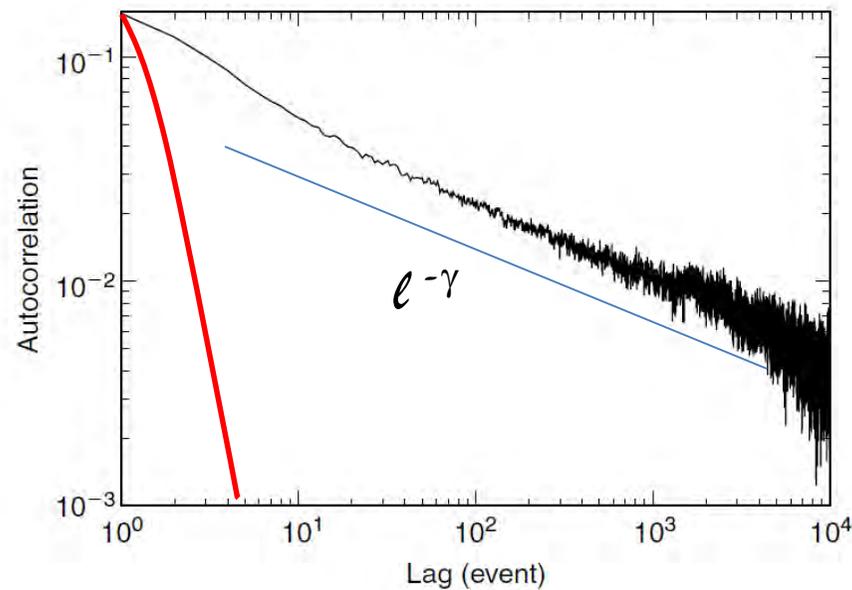
x 3000!



Spread et volatilité : l'œuf ou la poule ?

- Une augmentation de la volatilité conduit à une augmentation du spread
- Mais une augmentation du spread conduit à des mouvements élémentaires plus grands et donc une augmentation de la volatilité
- Un mode instable des marchés financiers → grandes fluctuations de la volatilité et crises de liquidité (cf. M. Benzaquen)

$$C(\ell) := \text{Cov}[\varepsilon_t, \varepsilon_{t+\ell}].$$

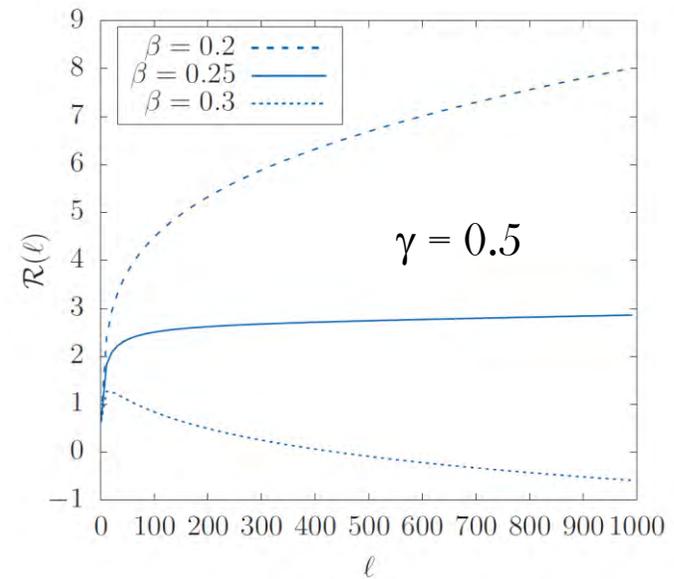
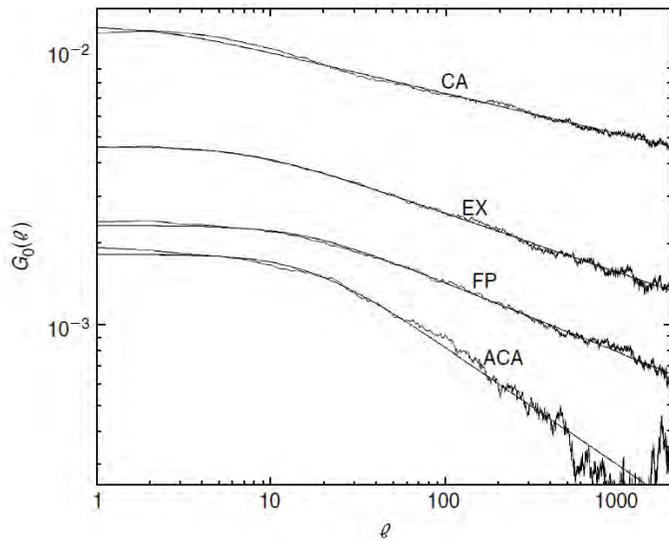


4. Le modèle à « propagateur »

➤ Paradoxe apparent :

- Les transactions impactent les prix
- Le signe des transactions est à mémoire longue ($\gamma < 1$)
- Les variations de prix sont quasiment décorrélées

➤ Une solution : l'impact des transactions passées décroît de manière à compenser exactement l'autocorrélation des prix



4. Le modèle à « propagateur »

➤ Mathématiquement :

$$m_t = m_{t_0} + \sum_{t_0 \leq n < t} G(t-n)\varepsilon_n + \sum_{t_0 \leq n < t} \xi_n,$$

$$\mathcal{R}(\ell) = G(\ell) + \sum_{0 < n < \ell} G(\ell-n)C(n) + \sum_{n > 0} [G(\ell+n) - G(n)]C(n).$$

$$\mathbb{E}[\varepsilon_{t+\ell} | \varepsilon_t = 1] = C(\ell) \sim \frac{c_\infty}{\ell^\gamma} \quad G(\ell) \approx_{\ell \gg 1} \frac{\Gamma_\infty}{\ell^\beta}, \quad \beta = \beta_c := (1-\gamma)/2,$$

➤ Decroissance lente de l'impact et prix diffusifs

4. Le modèle à « propagateur »

➤ Point de vue équivalent :

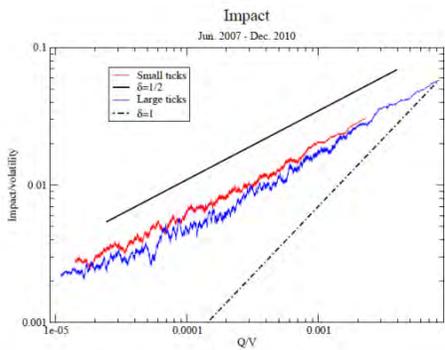
$$r_t = G_{1,t} \times (\varepsilon_t - \widehat{\varepsilon}_t) + \xi_t. \quad \widehat{\varepsilon}_t := \mathbb{E}_{t-1}[\varepsilon_t].$$

- Le prix réagit à la surprise: l'ordre le plus probable a moins d'impact que l'ordre le moins probable → rendements décorrélés
- Un ordre marché d'achat induit une augmentation de la liquidité à l'ask, et vice-versa : liquidité compétitive → prix HF diffusif
- Impact décroissant = impact permanent mais dépendant du passé

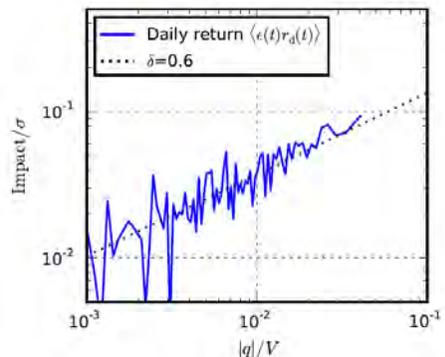
5. Impact des « métaordres »

➤ Observation fondamentale:

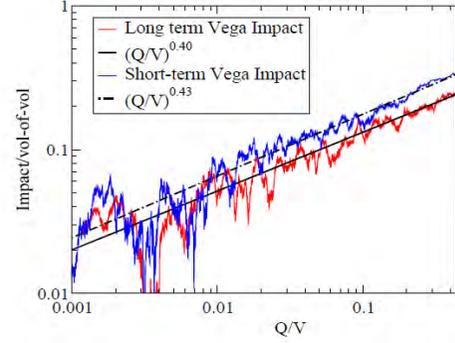
- Volume immédiatement accessible \ll volume typique des fonds d'investissement
- Les ordres doivent être fragmentés et exécutés séquentiellement sur plusieurs heures/jours ou même semaine \rightarrow corrélation des ε
- Quel est l'impact total $I(Q)$ d'un « métaordre » de volume Q ?
- Kyle : $I(Q) = AQ$



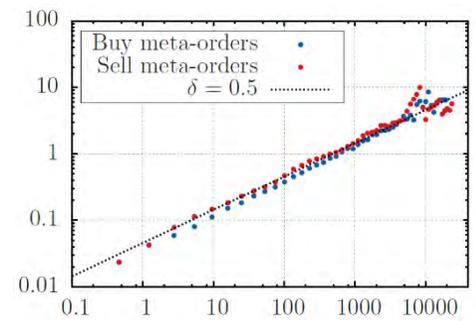
Futures



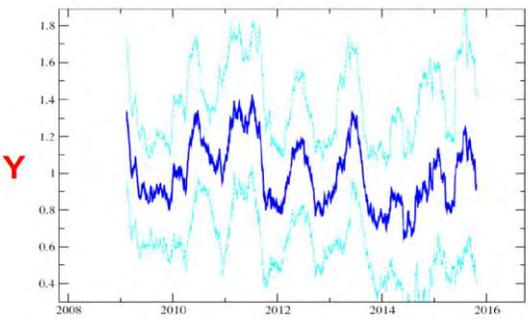
Actions



Options



Bitcoin

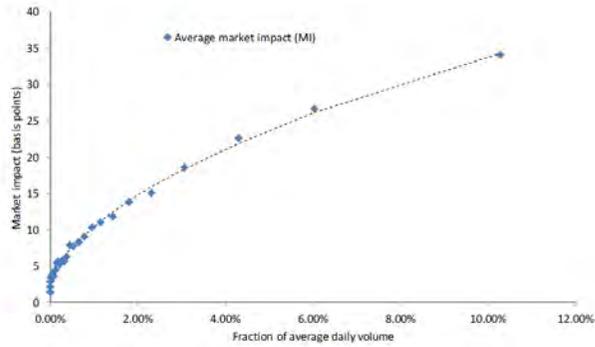


5. Impact des « métaordres »

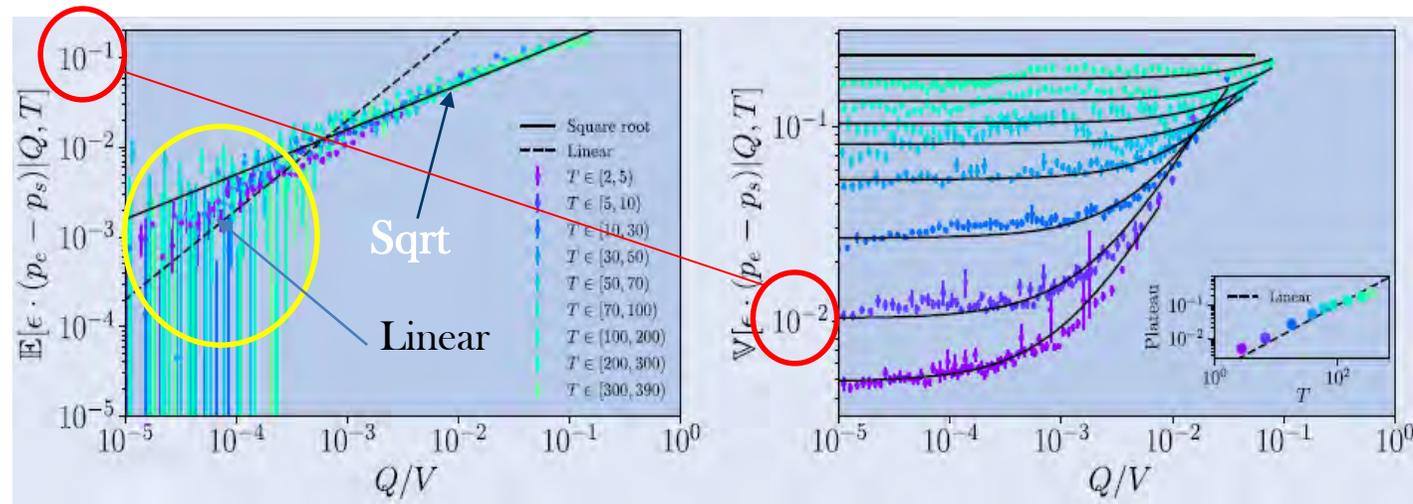
$$I(Q) = Y \sigma_T \sqrt{\frac{Q}{V_T}}$$

➤ Un résultat surprenant :

- Résultat universel (marchés, époque, stratégies, microstructure,...)
- Valable dans un régime « raisonnable » ($Q \ll V_T$, T intermédiaire)
- NB: Impact = $f(Q/V)$ et non $f(Q/Mktcap)$!



Actions (AQR,
ordres limites)



5. Impact des « métaordres »

$$I(Q) = Y \sigma_T \sqrt{\frac{Q}{V_T}}$$

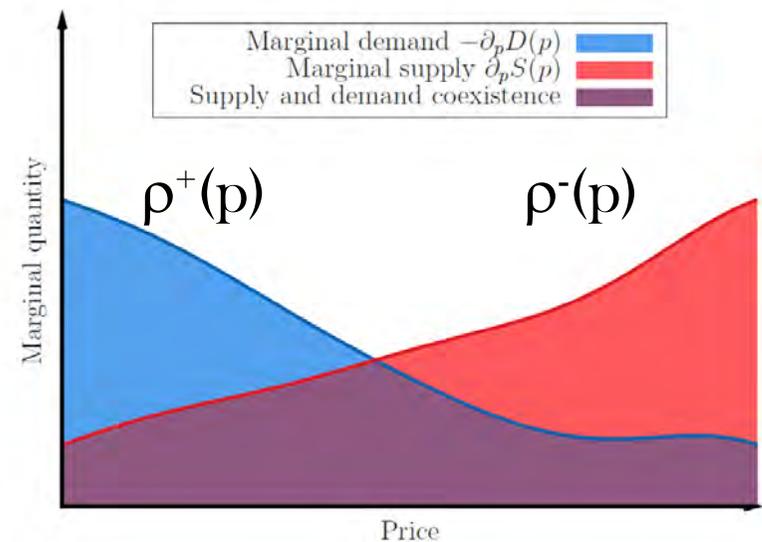
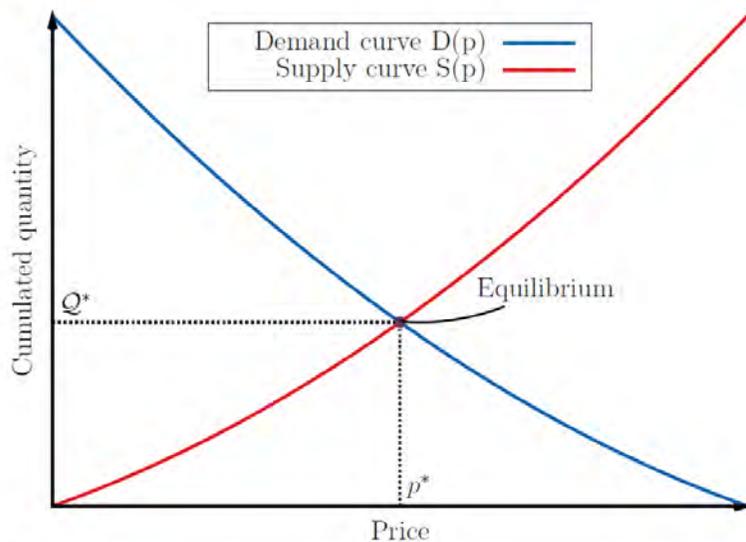
➤ Un résultat surprenant :

- Impact non-linéaire, approx. indépendant du temps d'exécution T
- NB: $I = \text{impact } \underline{\text{moyen}} \ll \sigma_T$

6. Une théorie de l'impact des « métaordres »

➤ Propagateurs et métaordres : $I(Q,T) \approx \frac{\Gamma_\infty}{(1-\beta)} T^{-\beta} \frac{Q}{v}$

- Impact linéaire en Q et dépendant de la durée T
- Si $Q \sim T$, $I(Q) \sim Q^{1-\beta}$: pas assez concave
- Ingrédient manquant : une description explicite de la liquidité



6. Une théorie de l'impact des « métaordres »

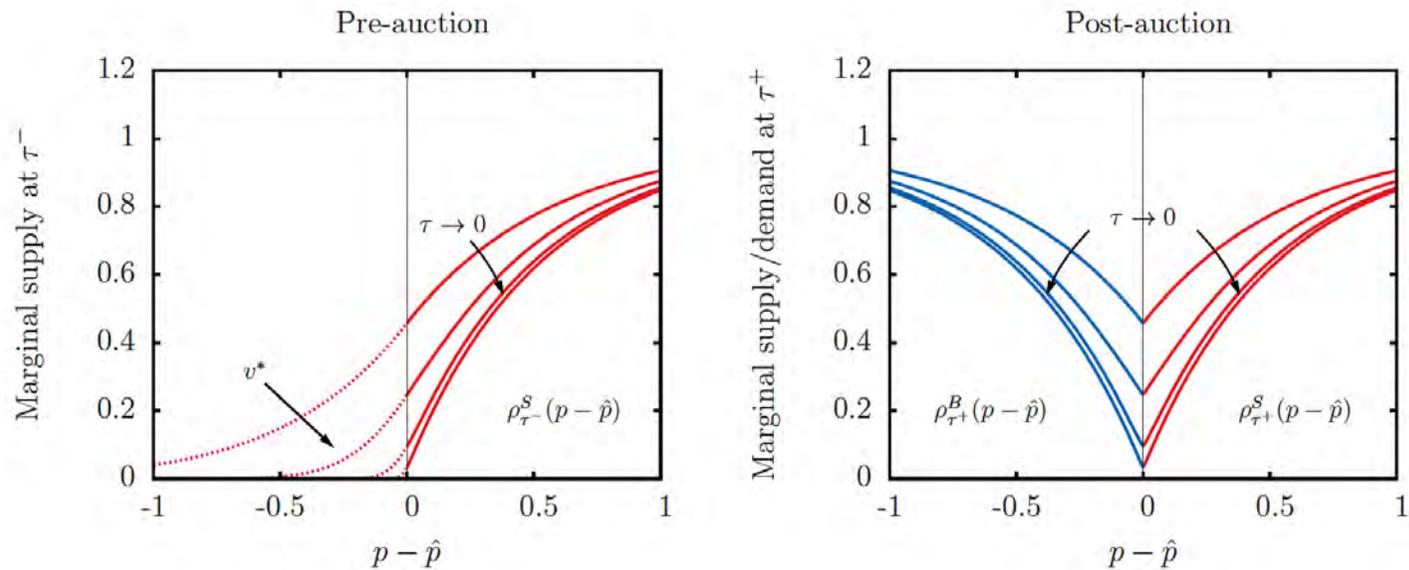
➤ Liquidité dynamique: un modèle phénoménologique

- Entre deux enchères:

$$\partial_t \rho^+(x, t) = D \partial_{xx}^2 \rho^+(x, t) - v^+(x) \rho^+(x, t) + \lambda^+(x);$$

$$\partial_t \rho^-(x, t) = \underbrace{D \partial_{xx}^2 \rho^-(x, t)}_{\text{revisions}} - \underbrace{v^-(x) \rho^-(x, t)}_{\text{cancellations}} + \underbrace{\lambda^-(x)}_{\text{new orders}} .$$
- Juste après la $k^{\text{ième}}$ enchère:

$$\rho^-(p, t \downarrow t_k) = \begin{cases} \rho^-(p, t_k), & \text{for } p > p_k^*, \\ 0, & \text{for } p \leq p_k^* \end{cases}$$



6. Une théorie de l'impact des « métaordres »

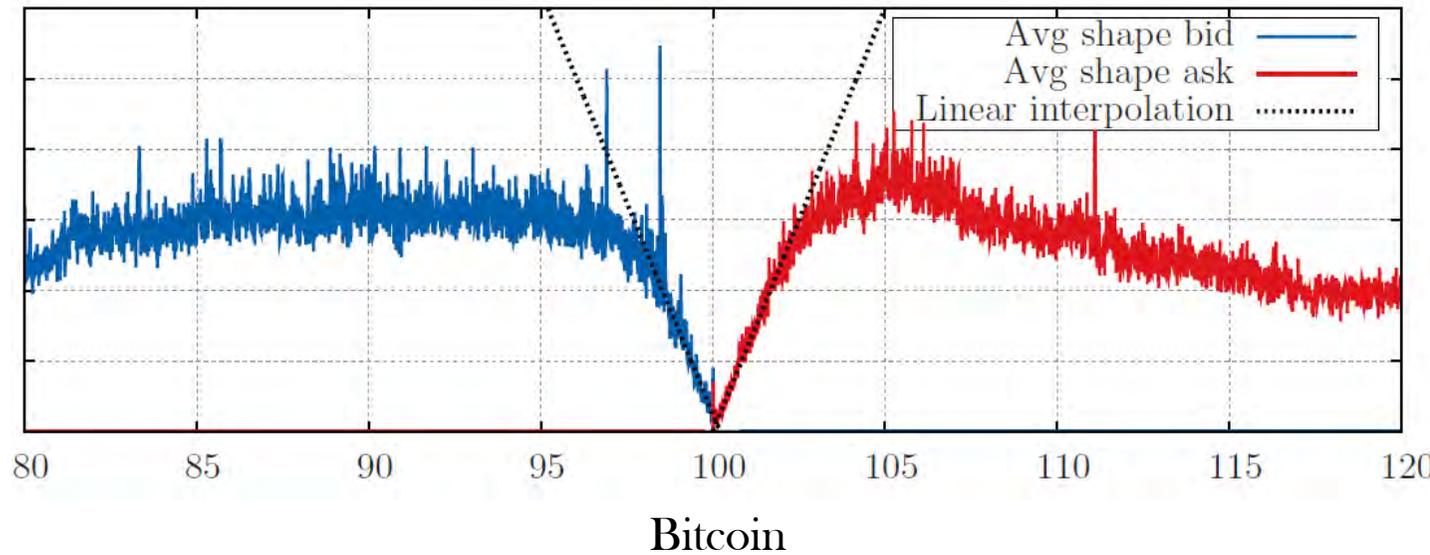
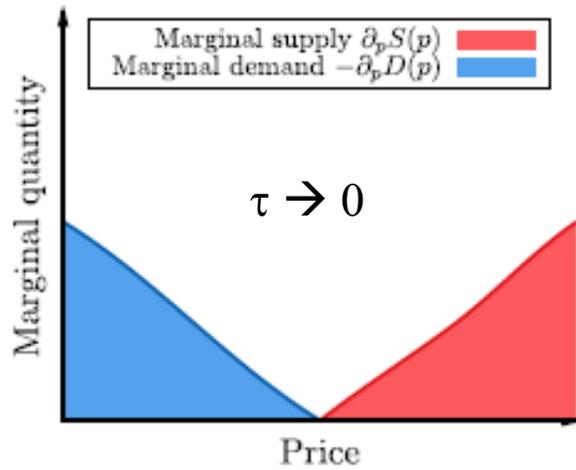
➤ Liquidité dynamique: un modèle phénoménologique

- τ : temps entre deux enchères

$$\mathfrak{I}(Q) = \sqrt{D\tau} \times \mathcal{Y}\left(\frac{Q}{V^*}\right); \quad V^* = \mathcal{L}D\tau, \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{Y}(u) \approx_{u \ll 1} 0.555u; \\ \mathcal{Y}(u) \approx_{u \gg 1} \sqrt{2u}. \end{array} \right.$$

- Loi en racine pour $Q \gg V^*$

- Note: $V_T = V^*(\tau)T/\tau$ indépendant de τ (indépendant du THF)



6. Une théorie de l'impact des « métaordres »

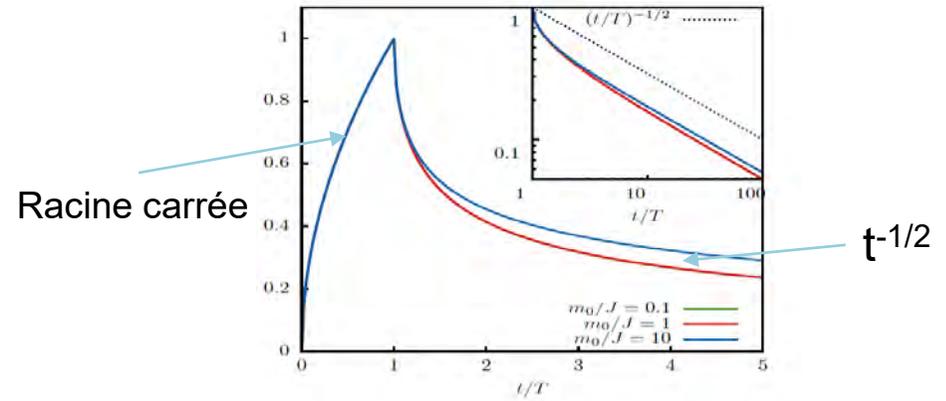
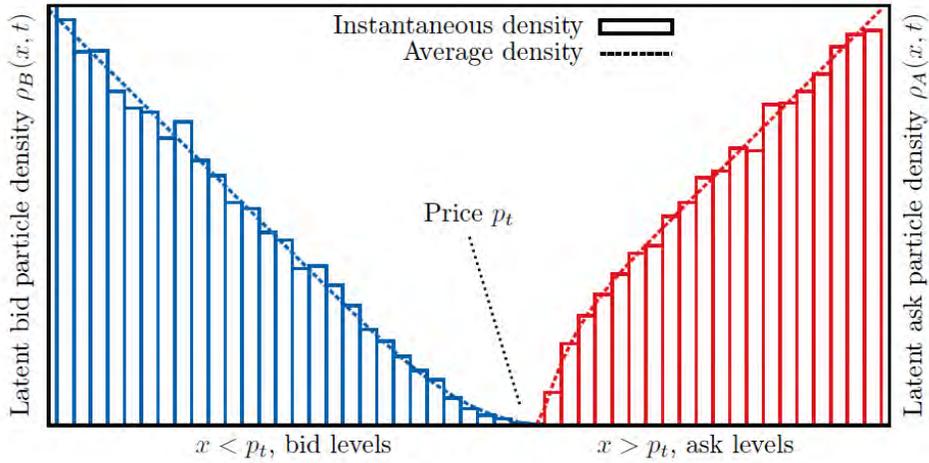
➤ Liquidité dynamique: un modèle phénoménologique

- τ : temps entre deux enchères

$$\mathfrak{I}(Q) = \sqrt{D\tau} \times \mathcal{Y}\left(\frac{Q}{V^*}\right); \quad V^* = \mathcal{L}D\tau, \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{Y}(u) \approx_{u \ll 1} 0.555u; \\ \mathcal{Y}(u) \approx_{u \gg 1} \sqrt{2u}. \end{array} \right.$$

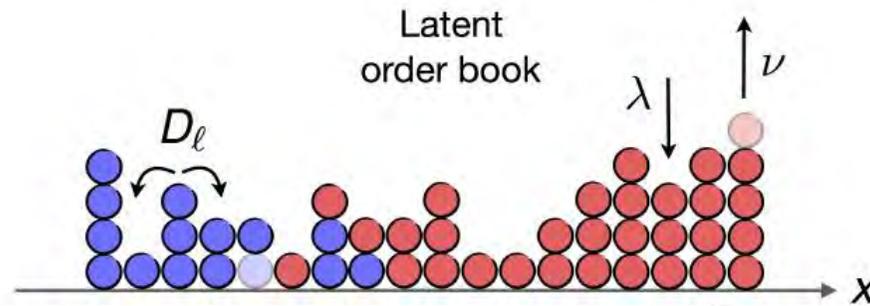
- Loi en racine pour $Q \gg V^*$

- Note: $V_T = V^*(\tau)T/\tau$ indépendant de τ (indépendant du THF)



6. Une théorie de l'impact des « métaordres »

$\tau \rightarrow 0$: une formulation « réaction-diffusion » commode : $A+B \rightarrow 0$
 \rightarrow Prédiction concernant la décroissance de l'impact, le coût de cycles, etc.



7. Conclusion : « Price Discovery » vs. « Price Formation »

- Vision économique classique: les transactions n'« impactent » pas les prix, elles les *prédissent* (en moyenne)
- Il semble plutôt que la majorité des transactions ne sont pas réellement informées, mais conduisent le marché dans son ensemble à réviser son estimation du prix → impact « mécanique »
- Découplage prix/valeur (cours 2); compétition MM → prix diffusif
- Boucle de rétroaction spread/volatilité et instabilité des marchés

7. Conclusion

- De nouvelles « surprises » empiriques :
 - Mémoire longue du signe des transactions
 - Impact non-linéaire des métaordres (loi en racine \neq Kyle)
- Théories phénoménologiques :
 - Modèle à « propagateur » et décroissance lente de l'impact
 - Modèle dynamique (réaction-diffusion) de la liquidité
 - De la compréhension théorique à une régulation adaptée (TFF,...)

"An impressive book that no serious student of market microstructure can afford to be without. Simultaneously quantitative and highly readable."
Jim Gatheral, Baruch College, CUNY

"I highly recommend this to anyone who wants to see how physics has benefited economics, or for that matter, to anyone who wants to see a stellar example of a theory grounded in data."
Doyle Farmer, University of Oxford

"This is a masterful overview of the modern and rapidly developing field of market microstructure, from several of its creators. This book will be an essential resource for practitioners, academics, and regulators alike."
Robert Altshuler, New York University and Quantitative Brokers

The widespread availability of high-quality, high-frequency data has revolutionised the study of financial markets. By describing not only asset prices, but also market participants' actions and interactions, this wealth of information offers a new window into the inner workings of the financial ecosystem. In this original text, the authors discuss empirical facts of financial markets and introduce a wide range of models, from the micro-scale mechanics of individual order arrivals to the emergent, macro-scale issues of market stability. Throughout this journey, data is king. All discussions are firmly rooted in the empirical behaviour of real stocks, and all models are calibrated and evaluated using recent data from NASDAQ. By confronting theory with empirical facts, this book for practitioners, researchers and advanced students provides a fresh, new and often surprising perspective on topics as diverse as optimal trading, price impact, the fragile nature of liquidity, and even the reasons why people trade at all.

Jean-Philippe Bouchaud is a pioneer in Econophysics. He co-founded the company Science & Finance in 1994, which merged with Capital Fund Management (CFM) in 2000. He was awarded the CNRS Silver Medal in 1996 and the Risk Quant of the Year Award in 2017.

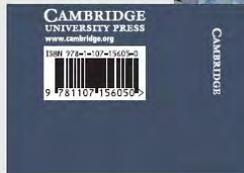
Julius Bonart is a lecturer at University College London, where his research focuses on market microstructure and market design.

Jonathan Donier completed a PhD at University Paris 6 with the support of the Capital Fund Management Research Foundation and currently works in the technology sector.

Martin Gould currently works in the technology sector. Previously, he was a James S. McDonnell Postdoctoral Fellow in the CFM-Imperial Institute of Quantitative Finance at Imperial College London.

Cover illustration: courtesy of
Getty images istock.com/kevab

Cover design by Iain McLean Ltd



Bouchaud, Bonart, Donier and Gould
TRADES, QUOTES AND PRICES

TRADES, QUOTES AND PRICES

Financial Markets Under the Microscope

Jean-Philippe Bouchaud, Julius Bonart,
Jonathan Donier and Martin Gould

Pour aller plus loin

- Références: voir page d'accueil du cours
- Séminaire: Michael Benzaquen
The Fragile Nature of Liquidity