

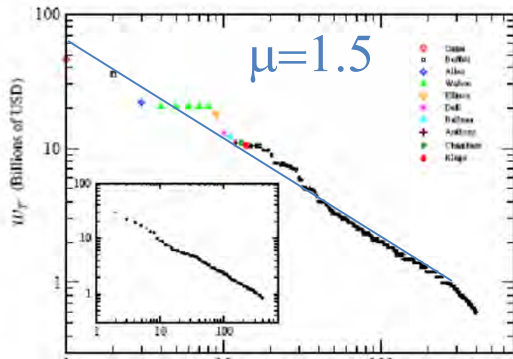
DE LA PHYSIQUE STATISTIQUE

AUX SCIENCES SOCIALES

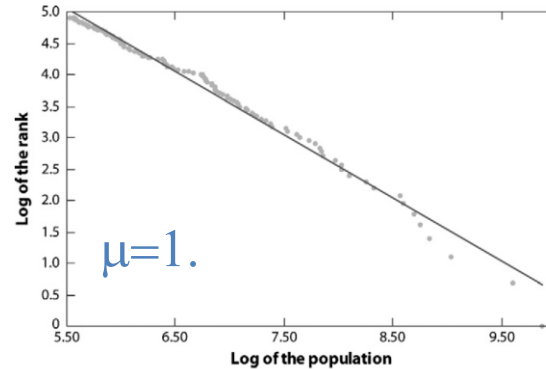
# IV. CROISSANCE MULTIPLICATIVE, INEGALITES, CONCENTRATION

Chaire de l'Innovation L. Bettencourt

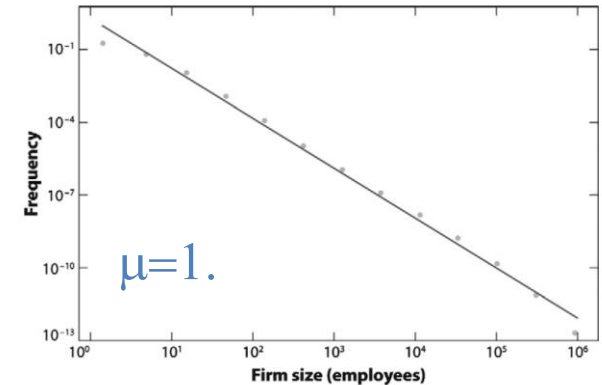
Jean-Philippe Bouchaud



Revenus, Fortunes (Pareto)  
 Note: 7M individus > 1M\$  
 → 7 individus > 10B\$ (2005)



Taille des villes  
 (« Zipf »)



Taille des firmes  
 (« Zipf »)

# 1. Distributions en loi de puissance (« scale-free »)

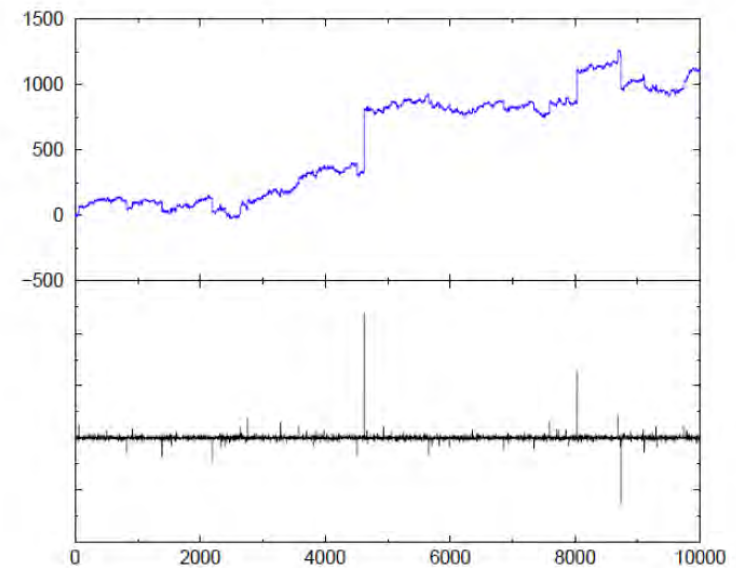
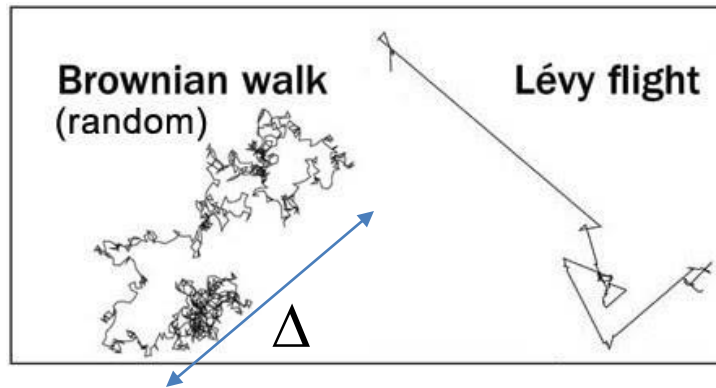
## ➤ Queue en loi de puissance :

$$P_{>}(x) \sim \frac{C}{x^\mu}$$

← amplitude  
 ← exposant

**Catastrophes industrielles:**  $\mu=1$ .  
**Vente livres:**  $\mu=2.5$   
**Box office:**  $\mu=1.6$

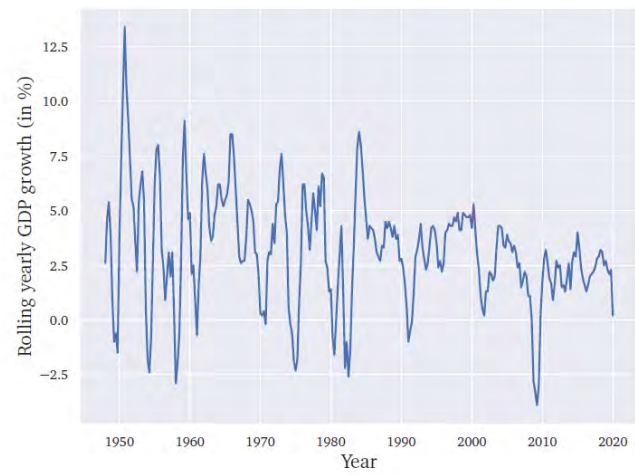
- $\mu > 2$  : moyenne et variance finies → TLC
- $1 < \mu \leq 2$  : moyenne finie et variance infinie → TLC généralisé
- $\mu \leq 1$  : moyenne et variance infinies → TLC généralisé



# 1. Distributions en loi de puissance (« scale-free »)

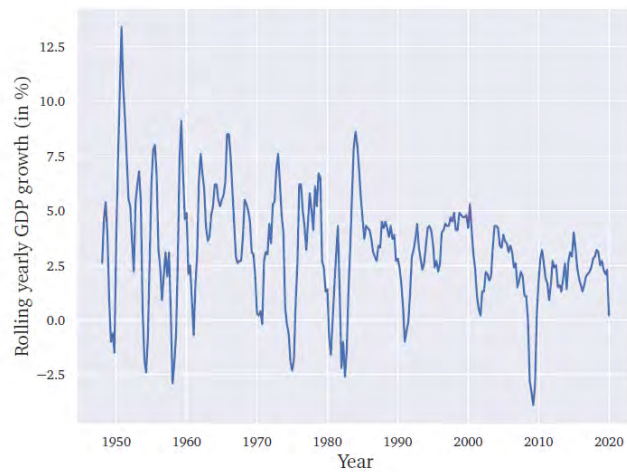
➤ Fluctuations anormales, dominées par les extrêmes :

- $\mu > 2$  :  $\Delta \sim N^{1/2} \gg x_{\max} \sim N^{1/\mu}$  – TLC classique
- $\mu < 2$  :  $\Delta \sim N^{1/\mu} \sim x_{\max} \sim N^{1/\mu}$  – TLC généralisé (P. Lévy)

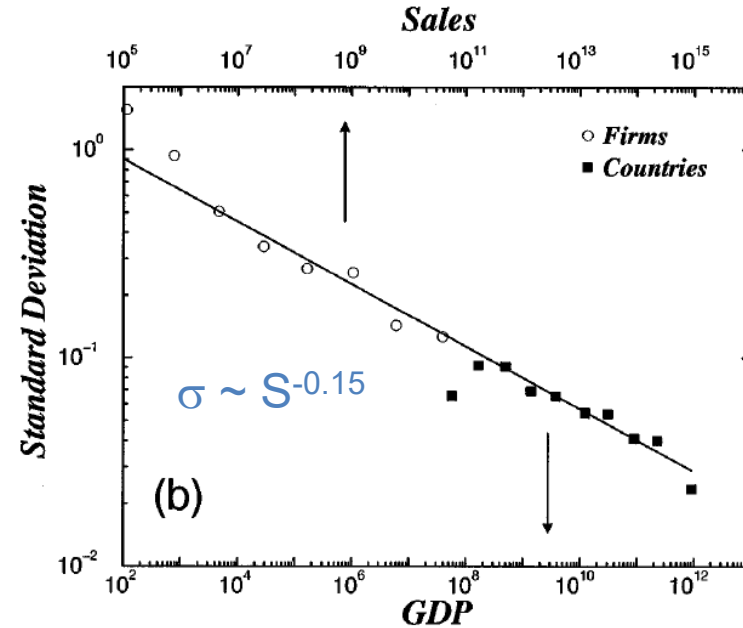


US GDP Growth

## 2. Fluctuations en excès et « granularité »

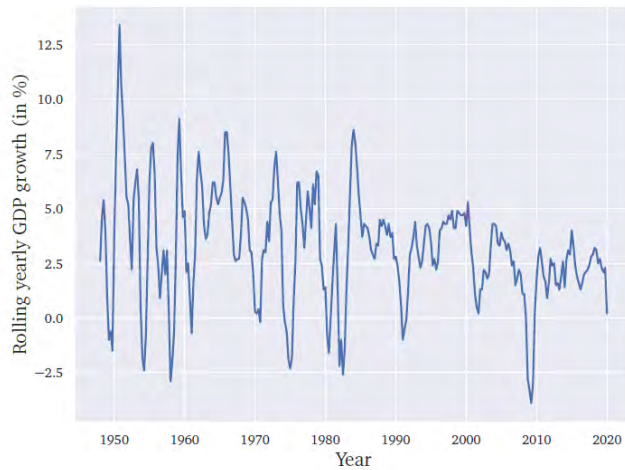


US GDP Growth

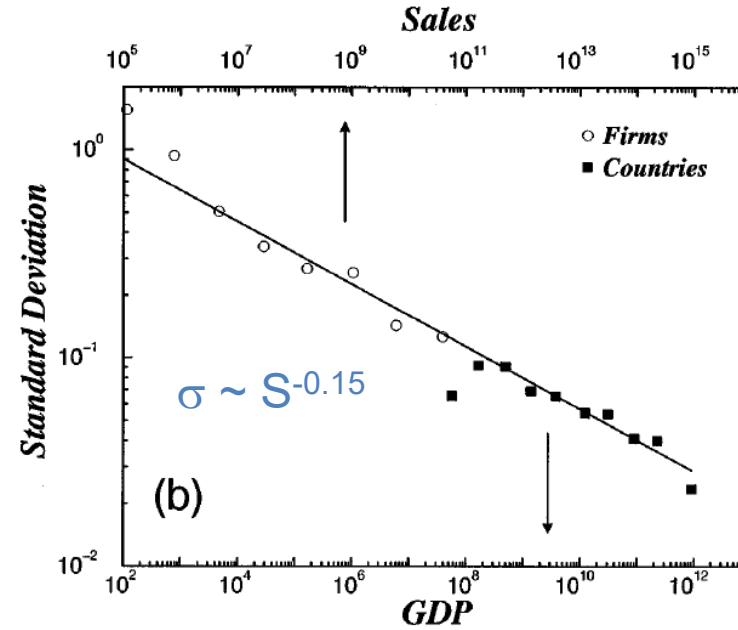


## 2. Fluctuations en excès et « granularité »

- La volatilité des grandes économies/grandes entreprises est forte et décroît « trop lentement » avec la taille
- « *Small shocks, large business cycle* » (Bernanke)
- Hypothèse « granulaire » (Gabaix 2011, Wyart-JPB 2003) : la distribution à queue épaisse de la taille des firmes induit une décroissance anormale de la variance des fluctuations



US GDP Growth



## 2. Fluctuations en excès et « granularité »

- Hypothèse granulaire: chocs indépendants,  $N$  secteurs de taille  $S_i$

$$\Delta \text{GDP} = \sum_{i=1}^N S_i \eta_i \quad \mathbb{V} \left[ \frac{\Delta \text{GDP}}{\text{GDP}} \right] = \frac{\sum_{i=1}^N S_i^2}{\left( \sum_{i=1}^N S_i \right)^2}$$

- Indice de concentration (Herfindahl index, Participation ratio)

$$\mathcal{H} := \sum_i w_i^2 \quad w_i = \frac{S_i}{\sum_{i=1}^N S_i}$$

- Rq: Herfindahl = entropie généralisée  $\mathcal{H}_q := \sum_i w_i^q \approx_{q \rightarrow 1} 1 + (1-q)S + \dots$

$$\mathcal{H} := \sum_i w_i^2$$

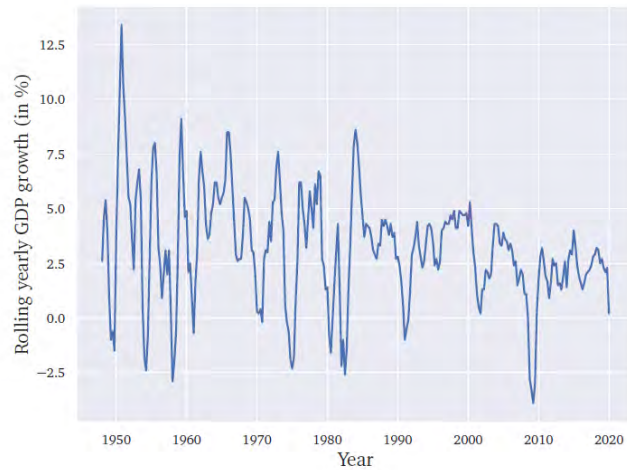
## 2. Concentration

➤ Indice de concentration (Herfindahl) pour  $P_\mu(S) \sim S^{-\mu}$

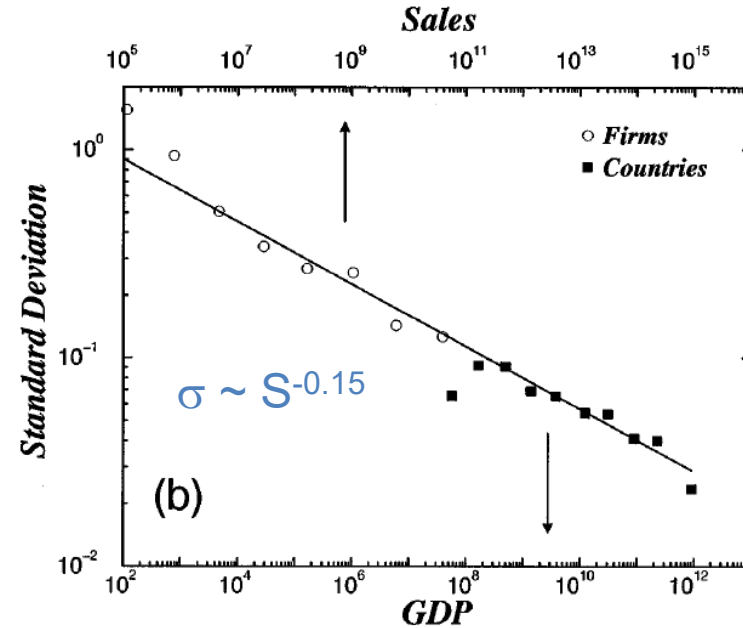
$$\mathcal{H} \sim \begin{cases} N^{-1} & (\mu > 2) \\ N^{2(1-\mu)/\mu} & (1 < \mu < 2) \\ N^0 & (\mu < 1) \end{cases}$$

➤ Note : pour  $1 < \mu \leq 2$  on a en fait  $\mathbb{E}[\mathcal{H}] \sim N^{1-\mu} \gg$  valeur typ.

➤  $\mu < 1$  : « condensation » ou « localisation »



US GDP Growth



## 2. Scaling anormal

- Modèle: chaque firme/pays est composée de  $N$  « branches d'activité » dont le chiffre d'affaire est à queue épaisse, avec  $\mu \approx 1.15 \in [1,2]$

$$\Delta S = \sum_{i=1}^N s_i \eta_i$$

$$\mathbb{E} \left[ \mathbb{V} \left[ \frac{\Delta S}{S} \right] \middle| S \right] = AS^{1-\mu}$$

- Fluctuations en excès, mais absence d'effets d'« avalanche » (cf. 9)



$$\frac{\partial Z_i}{\partial t} = \eta_i(t)Z_i$$

### 3. Croissance multiplicative et concentration

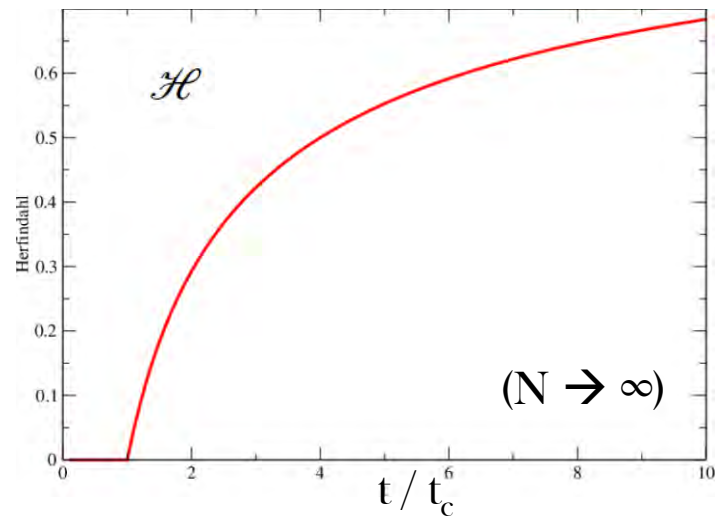
### 3. Croissance multiplicative et concentration

- N éléments dont les taux de croissance sont aléatoires

$$\frac{\partial Z_i}{\partial t} = \eta_i(t)Z_i$$

$$\mathbb{E}[\eta_i] = 0, \quad \mathbb{E}[\eta_i(t)\eta_j(t')] = \delta_{ij} \frac{\sigma^2}{2\tau} \exp\left[-\frac{|t-t'|}{\tau}\right]$$

- $Z_i(t)$  : population de la ville i, ou de l'espèce i, ou du variant i
- $Z_i(t)$  : fortune de l'individu i, montant investi dans l'actif i, taille de l'entreprise i, etc.



### 3. Croissance multiplicative, concentration: le « REM »

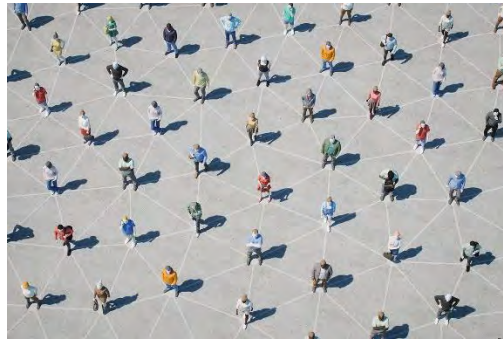
B. Derrida

$$\triangleright \quad \frac{\partial Z_i}{\partial t} = \eta_i(t) Z_i \quad \rightarrow \quad Z_i(t) \approx \exp[\xi_i \sigma \sqrt{t}]$$

$$\mathcal{L}(t) = \sum_i Z_i(t) \approx \begin{cases} N \exp[\sigma^2 t/2], & \log N \gg \sigma^2 t/2 \\ \exp[\sqrt{2 \log N} \sigma \sqrt{t}] & \log N \ll \sigma^2 t/2 \end{cases} \quad \text{Gaussien}$$

$\triangleright$  Condensation (universelle) pour  $t > t_c$   $\mathbb{E}[\mathcal{H}] = 1 - \mu$ ,  $\mu = \sqrt{\frac{2 \log N}{\sigma^2 t}}$

$\triangleright$  Note : taux de croissance asymptotique nul :  $t^{-1} \log \mathcal{L} \rightarrow 0$



## 4. Effets redistributifs

- Condensation ?
- Taux de croissance asymptotique ?

$$\frac{\partial Z_i(t)}{\partial t} = \sum_{j \neq i} J_{ij} Z_j(t) - \sum_{j \neq i} J_{ji} Z_i(t) + \eta_i(t) Z_i(t)$$



## 4. Effets redistributifs

Situation	Z	J	$\eta$
Dynamique de population (dans l'espace réel/ génétique)	Nombre d'individus en i	Taux de migration/ mutation	Taux de reproduction
Dynamique de fortune	Fortune de l'individu i	Transactions/taxes	Rentabilité des investissements
Dynamique de portefeuille	Part de l'actif i	Re-balancement	Rendements
Polymères dirigés	Fonction de partition des chemins arrivant en i	Liens du graphe	Potentiel d'accrochage dû aux défauts

$$\frac{\partial Z_i(t)}{\partial t} = \sum_{j \neq i} J_{ij} Z_j(t) - \sum_{j \neq i} J_{ji} Z_i(t) + \eta_i(t) Z_i(t)$$

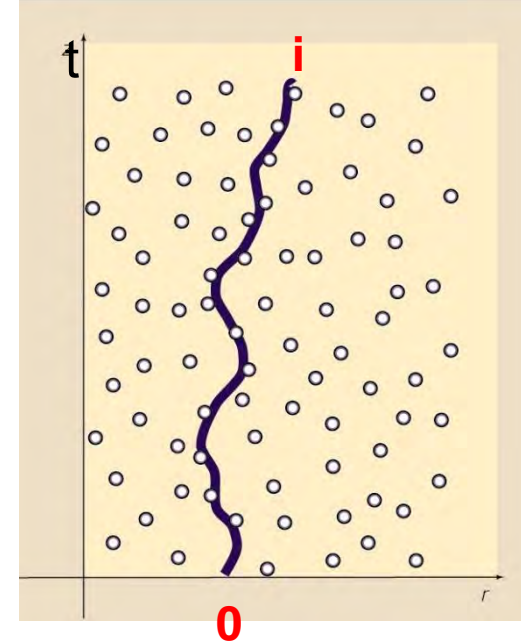
## 4. Effets redistributifs

- Example: Dynamique de population (villes)
- ➔ N villes  $i=1, \dots, N$ , de population  $Z_i(t)$  au temps  $t$
- ➔ Entre  $t$  et  $t+dt$ , une fraction  $J_{ji} dt$  d'individus de  $i$  décide de déménager vers  $j$
- ➔ Entre  $t$  et  $t+dt$ , la population se reproduit/meurt, avec un taux net  $\eta_i(t) dt$  aléatoire, qui décrit les idiosyncraties locales et instantanées (économie, climat, santé, culture,...)

14 ➤ Note: même taux de croissance *moyen* pour toutes les villes (cf plus bas)

$$\frac{\partial Z(\vec{r}, t)}{\partial t} = J \nabla^2 Z(\vec{r}, t) + \eta(\vec{r}, t) Z(\vec{r}, t)$$

( $J_{ij} = J$  ssi plus proches voisins, 0 sinon )



## Intermezzo: Polymères dirigés

### ➤ Chemins dirigés en milieu aléatoire (optimisation)

➔ Vortex, dislocations, polymères interagissant avec des impuretés locales attractives qui créent un potentiel  $\eta_i(t)$

➔  $Z_i(t)$ : fonction de partition de toutes les marches aléatoires de longueur  $t$  partant de “0” et arrivant à “i”

$$Z_i(t) = \sum_{(0,0) \rightarrow (i,t)} \exp \left[ \beta \sum_{t'=0}^t \eta_j(t') \right]$$

➔ A la limite continue: l'équation d'Anderson parabolique/KPZ/Burgers, dont la solution est donnée par la représentation en chemins de Feynman-Kac

$$\frac{\partial Z_i(t)}{\partial t} = \sum_{j \neq i} J_{ij} Z_j(t) - \sum_{j \neq i} J_{ji} Z_i(t) + \eta_i(t) Z_i(t)$$

## 4. Effets redistributifs

➤ Quantités intéressantes: ( $\mathbb{E}[\eta_i] = 0$ )

• Taux de croissance asymptotique  $c := \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \log \mathcal{Z}(t)$ ,  $\mathcal{Z} = \sum_i Z_i$   
 ➔ Naïvement  $c=0$ , mais la redistribution ( $J > 0$ ) conduit à un  $c > 0$  !

• Loi de distribution asymptotique des « abondances »  $w_i = \frac{Z_i}{\mathcal{Z}}$

➔ Queues en loi de puissance,  $\mu = f(J/\sigma^2)$  non universel

➔ Transition de condensation pour  $J < J^*$  (ou  $\sigma > \sigma^*$ , ou  $\beta > \beta^*$ )

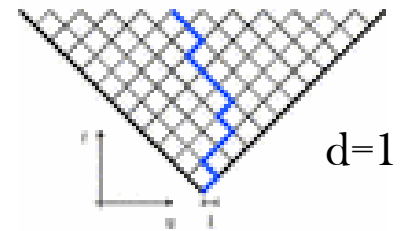


$$\frac{\partial Z_i(t)}{\partial t} = \sum_{j \neq i} J_{ij} Z_j(t) - \sum_{j \neq i} J_{ji} Z_i(t) + \eta_i(t) Z_i(t)$$

## 4. Quelques résultats connus

### ➤ Réseaux réguliers

- $d=1,2$  : phase hyper-condensée ( $\mu \rightarrow 0, \forall J$ )
- $d > 2$  : transition non-triviale telle que  $\mu(J^*)=1$



### ➤ Réseaux en arbres

- Solution exacte, avec transition de phase pour  $J=J^*$  (Derrida-Spohn)

### ➤ Champ moyen ( $J=J_0/N$ ): $\mu=1+2J_0/\sigma^2 > 1$ ( $J^* = \infty$ ; Zipf pour $J_0 \rightarrow 0$ )

- Note: phénoménologie très sensible aux extrêmes de  $\eta$  !

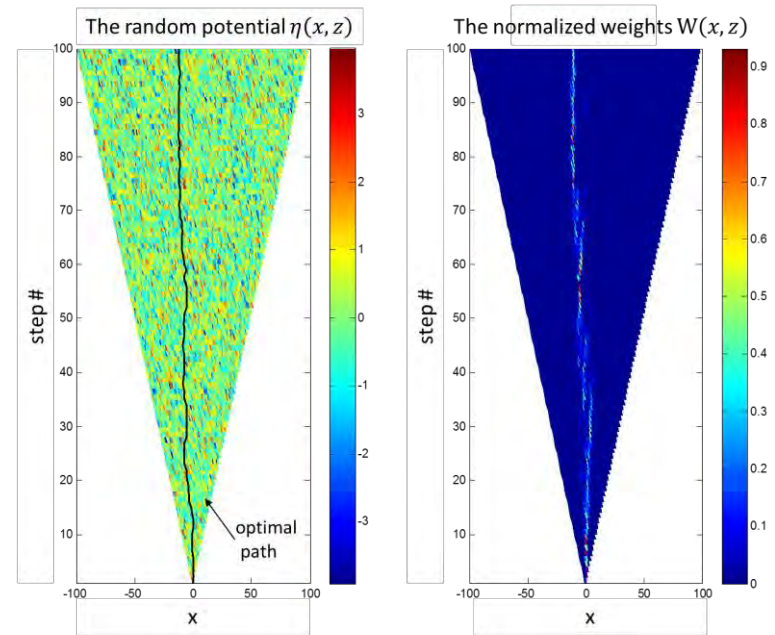
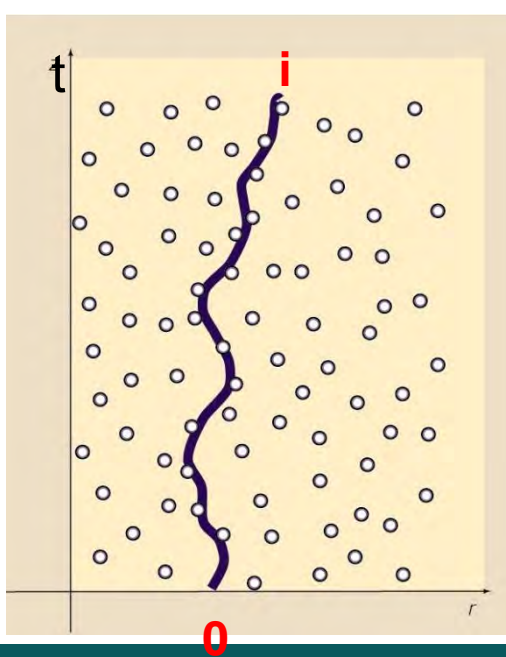
$$\frac{\partial Z_i(t)}{\partial t} = \sum_{j \neq i} J_{ij} Z_j(t) - \sum_{j \neq i} J_{ji} Z_i(t) + \eta_i(t) Z_i(t)$$

## 4. Effets redistributifs

### ➤ Résumé

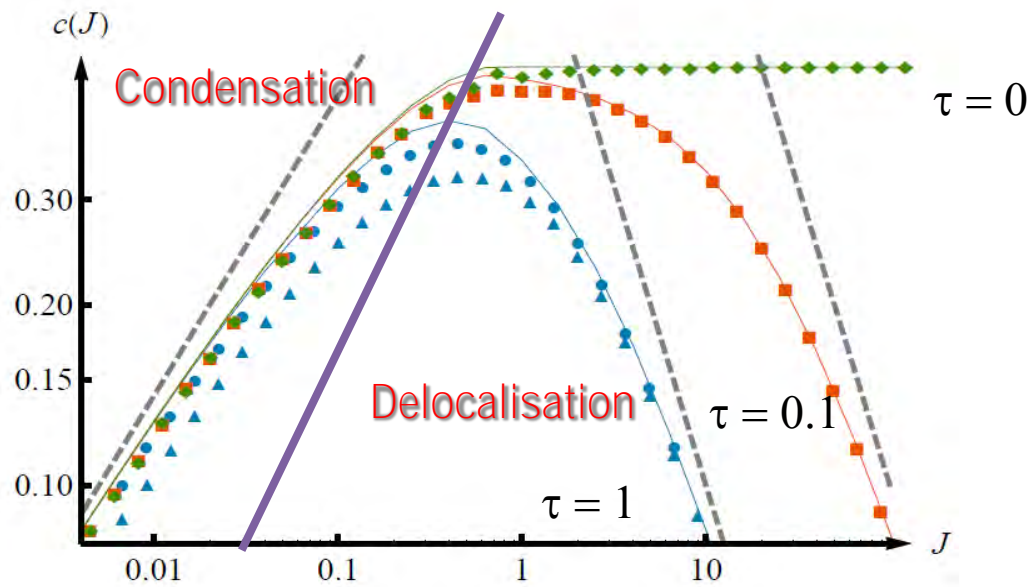
- $J=0$ : toujours condensé à temps longs, mais taux de croissance  $c=0$
- $J>0$ : résultat fonction de la topologie du graphe de redistribution
  - ➔ Basse dimension: toujours (hyper-)condensé
  - ➔ Haute dimension, arbres: condensation pour  $J < J^*$
  - ➔ Champ moyen (redistribution uniforme): jamais condensé
  - ➔  $c>0$ : la diversification dynamique favorise la croissance

## 5. Hyper-condensation en $d=1$

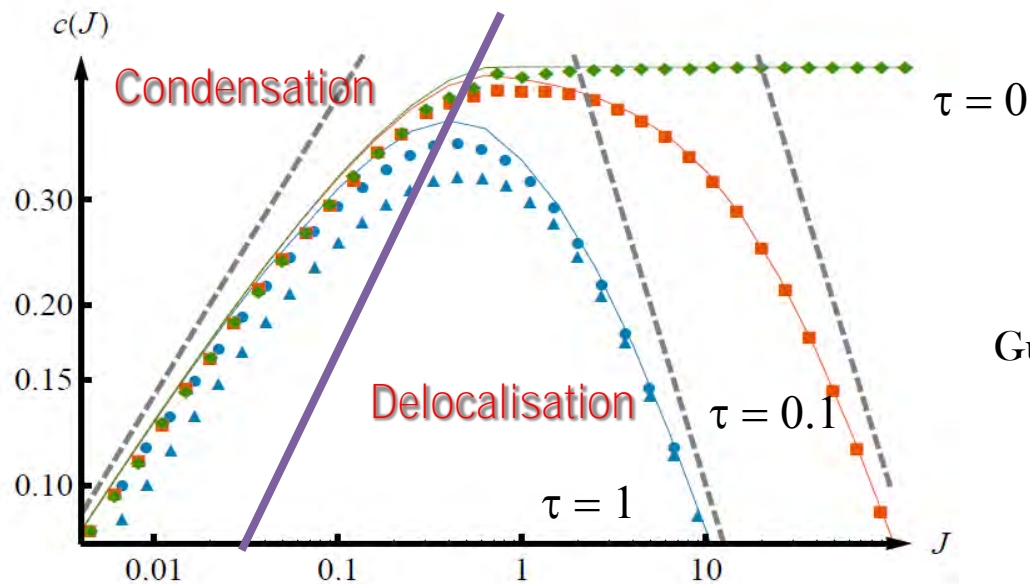


## 5. Hyper-condensation en $d=1$

- Un seul chemin dominant (phase gelée, ou accrochée en physique)
- Une seule « histoire » dominante en dynamique de population
- Mais ce chemin « optimal » est très sensible à la réalisation du désordre (« chaos »): pour  $t > \varepsilon^{-6}$  les chemins bifurquent
- Un exemple d'optimisation « fragile » (cf. cours 6 & 9)
- Note: le chemin optimal s'éloigne en  $t^{2/3}$  de son point de départ



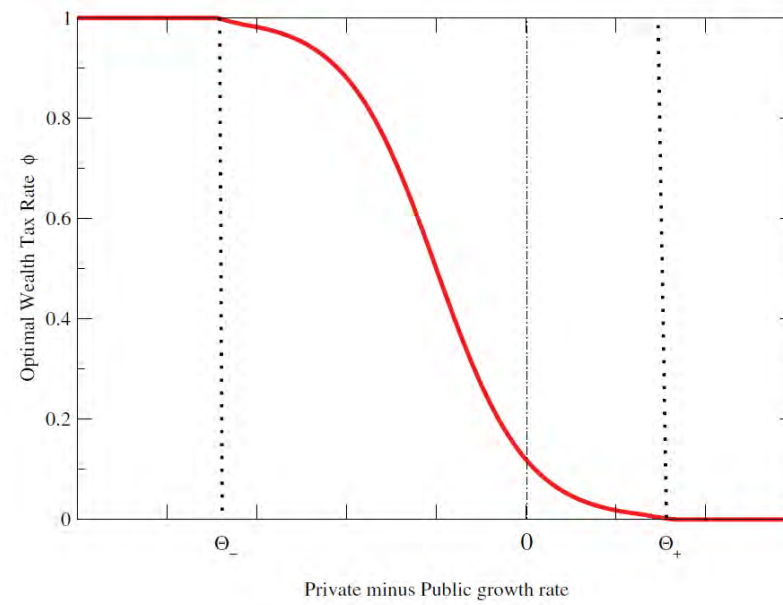
## 6. Exploration-exploitation



## 6. Exploration-exploitation

### ➤ Comment le taux de croissance $c$ dépend-il de $J$ ?

- $J=0 : c=0$
- $J \gg 1$ : pas le temps de profiter des fluctuations favorables de  $\eta_i(t)$
- Compromis « exploration/exploitation » :  $\exists J$  optimal à  $\tau > 0$  fixé
- Calcul exact dans le cas de graphes en arbres (à la Derrida-Spohn)



## 7. Taux de croissance hétérogènes

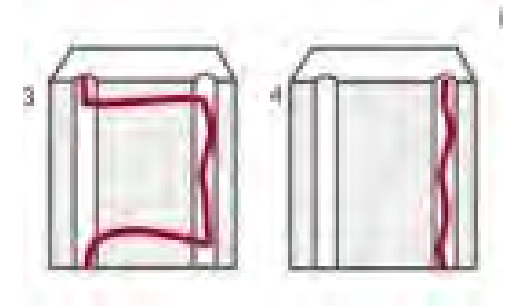
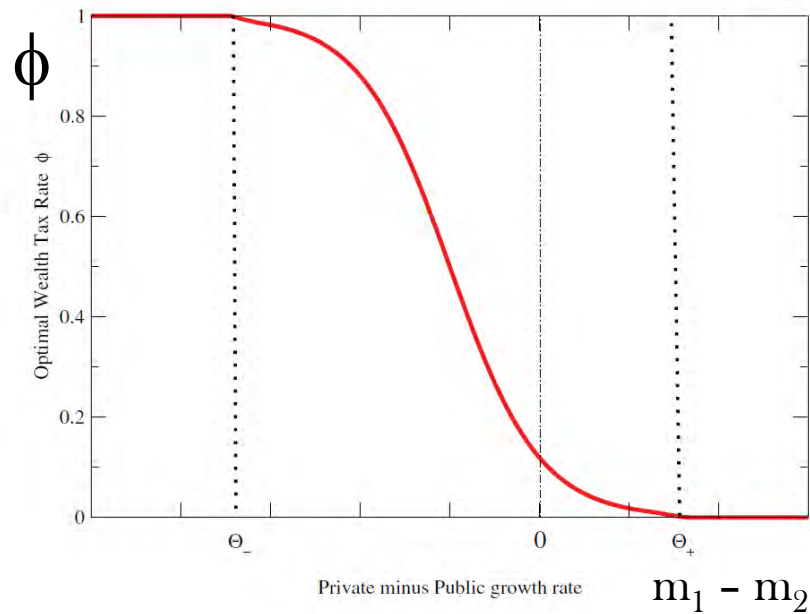
$$\begin{cases} \frac{\partial Z_1}{\partial t} &= \phi(Z_2 - Z_1) + m_1 Z_1 + \eta_1 Z_1 \\ \frac{\partial Z_2}{\partial t} &= \phi(Z_1 - Z_2) + m_2 Z_2 + \eta_2 Z_2 \end{cases}$$

## 7. Taux de croissance hétérogènes

### ➤ Diversification et croissance optimale

- Supposons deux entités dont les taux de croissance moyens sont différents  $\mathbb{E}[\eta_1] \neq \mathbb{E}[\eta_2]$
- Ex 1 : deux habitats (1,2) pour une espèce animale
- Ex 2 : investissement privé (1) vs. Etat (2) (/actions vs. obligations)
- $\phi$  : taux de transfert de 1 vers 2 (migration ou impôt sur la fortune + redistribution ou rebalancement)





## 7. Taux de croissance hétérogènes

- **Solution analytique** pour  $\phi$  petit et  $\phi$  grand

$$\begin{cases} \frac{\partial Z_1}{\partial t} = \phi(Z_2 - Z_1) + m_1 Z_1 + \eta_1 Z_1 \\ \frac{\partial Z_2}{\partial t} = \phi(Z_1 - Z_2) + m_2 Z_2 + \eta_2 Z_2 \end{cases}$$

- **Résultat** : même si  $m_1 > m_2$  il est optimal de « taxer » 1 afin de bénéficier d'une croissance exceptionnelle de 2 (diversification)

➤ Cf.:  $c(\mathbf{J}) > 0$  grâce à l'effet délocalisation (exploite fluct. favorables)

## 8. Conclusion

- Croissance multiplicative + redistribution = loi de puissance non universelle (avec  $\mu=1$  - Zipf - comme cas particulier)
- Granularité : un effet réel mais insuffisant pour expliquer les fluctuations macroéconomiques
- Transition de condensation/accrochage/vitreuse (REM)
- Autres canaux de redistribution : disparition + redistribution
- Exploration/exploitation : effets non intuitifs

## Pour aller plus loin

- Références: voir page d'accueil du cours
- Séminaire: Bruce Boghosian  
Recent progress in modelling wealth inequality  
and upward mobility