DE LA PHYSIQUE STATISTIQUE
AUX SCIENCES SOCIALES

I. MODELISATION DES SERIES FINANCIERES: UNE LONGUE HISTOIRE

Chaire de l'Innovation L. Bettencourt

Jean-Philippe Bouchaud

THÉORIE

DE

LA SPÉCULATION,

PAR M. L. BACHELIER.

Thèse encadrée par
H. Poincaré (1900)

1 . Le modèle de Bachelier

Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier (1870-1946): un pionnier

- Invention du Mouvement Brownien (5 ans avant Einstein)
- Plusieurs propriétés originales du Mouvement Brownien
- Formule de valorisation des options (72 ans avant Black-Scholes)

INTRODUCTION.

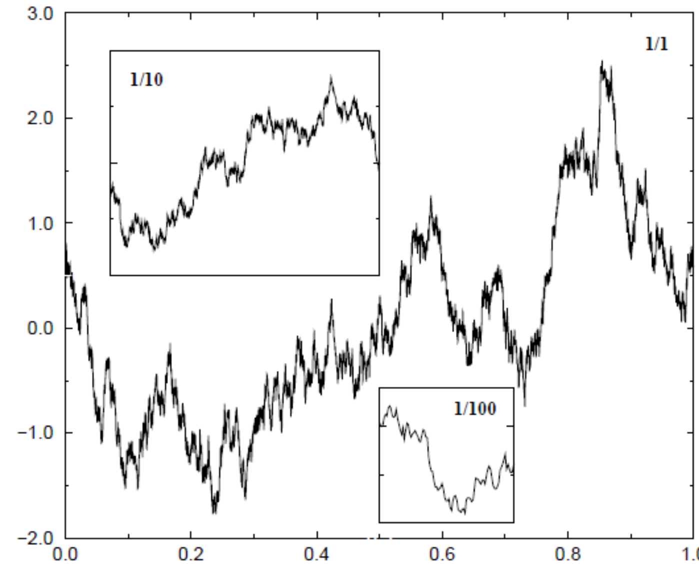
Les influences qui déterminent les mouvements de la Bourse sont innombrables, des événements passés, actuels ou même escomptables, ne présentant souvent aucun rapport apparent avec ses variations, se répercutent sur son cours.

1 . Le modèle de Bachelier

Il semble que le marché, c'est-à-dire l'ensemble des spéculateurs, ne doit croire *à un instant donné* ni à la hausse. ni à la baisse. puisque, pour chaque cours coté, il y a autant d'acheteurs que de vendeurs.

- Les mouvements de prix sont « aléatoires » (imprévisibles)
- Les marchés sont statistiquement « efficients », mais ne reflètent peut-être pas la valeur « fondamentale » (cf. cours 2)

- La manière dont M. Bachelier tire la loi de Gauss est fort originale [...]. C'est en effet à une comparaison avec la théorie analytique de la propagation de la chaleur que l'auteur a eu recours. On peut regretter que M. Bachelier n'ait pas développé davantage cette partie de sa thèse. (Henri Poincaré)



1 . Le modèle de Bachelier

- Mouvements de prix aléatoires + TLC

→ Mouvement Brownien, Equation de la chaleur
→ Le modèle de Black-Scholes (1973) : prix = exp(Brownien)
→ Stratégie de couverture des options et risque nul (hasard bénin)

THE
DOCTRINE
OF
CHANCES:
OR,
A Method of Calculating the Probability
of Events in Play.

By *A. De Moivre*. F. R. S.

LONDON:
Printed by *W. Pearson*, for the Author. MDCCXVIII.

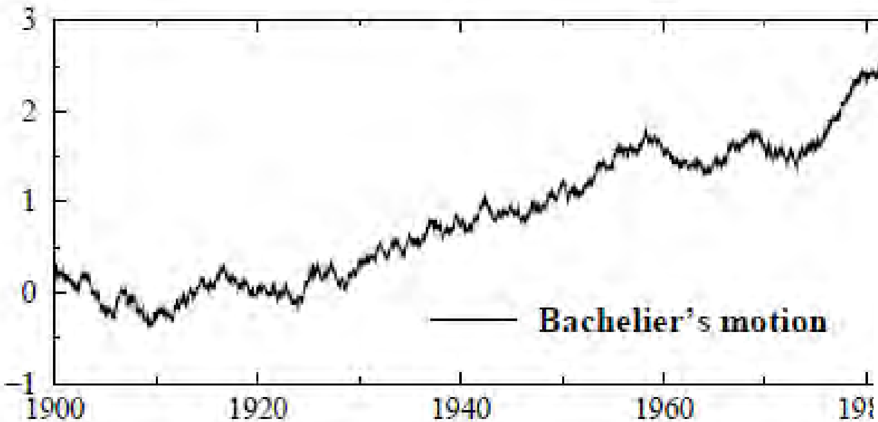
Problèmes pratiques et mathématiques

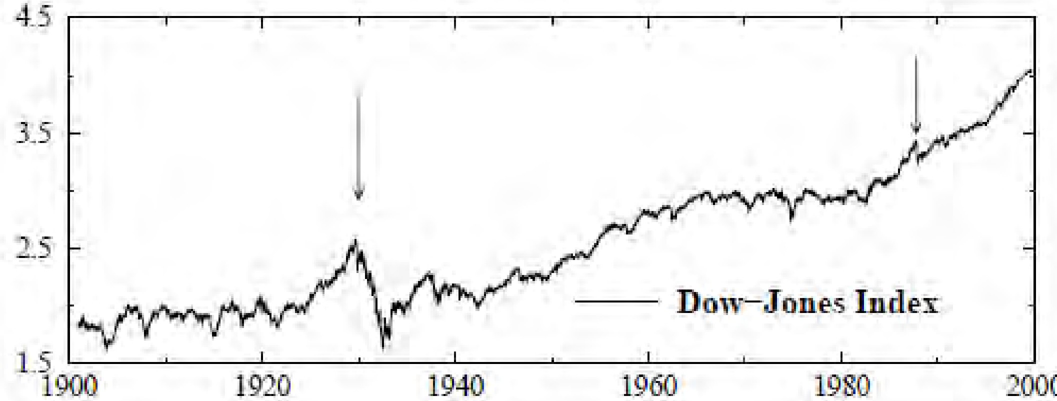
666· MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

MÉMOIRE
SUR LA
THÉORIE DES DÉBLAIS
ET DES REMBLAIS.

Par M. MONGE.

LORSQU'ON doit tranſporter des terres d'un lieu dans un autre, on a coutume de donner le nom de *Déblai* au volume des terres que l'on doit tranſporter, & le nom de *Remblai* à l'eſpace qu'elles doivent occuper après le tranſport.





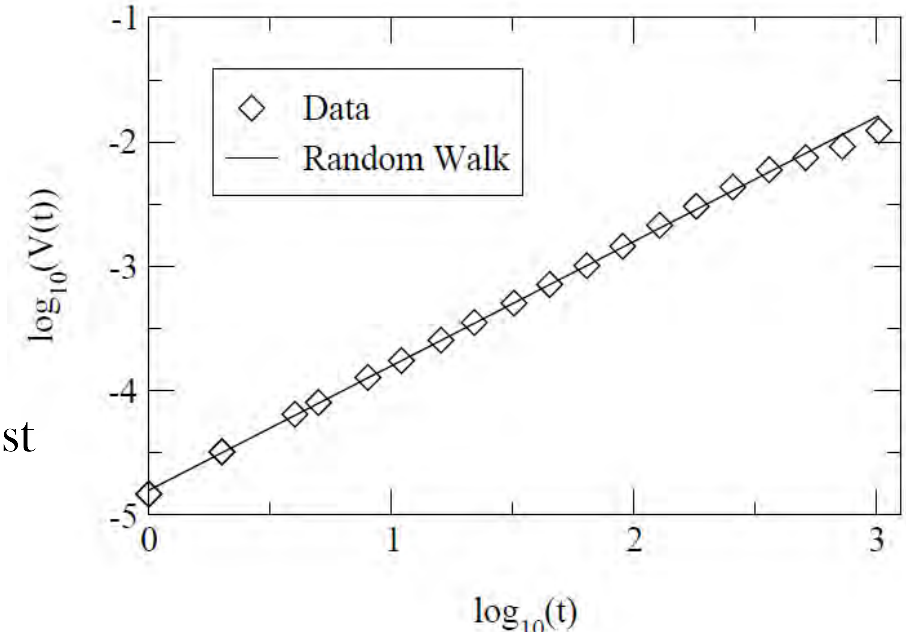
2. Succès et « anomalies »

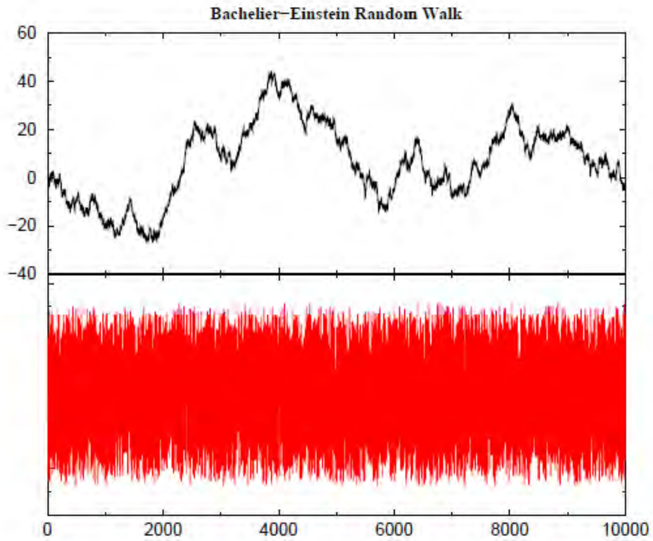
- $\mathrm{Var}(\Delta \log p) = \sigma^2 t$

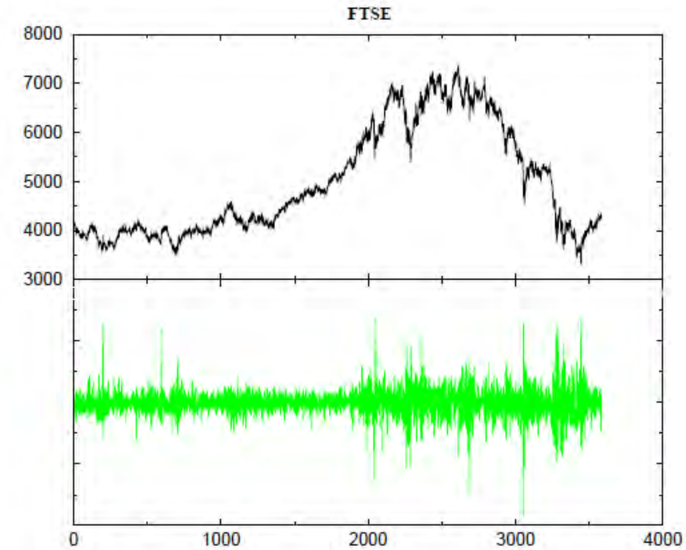
  \+ petits écarts, cf. infra

- Cf. Jules Regnault (1863)

"l'écart pris sur un grand nombre d'opérations est en raison directe de la racine carrée du temps".





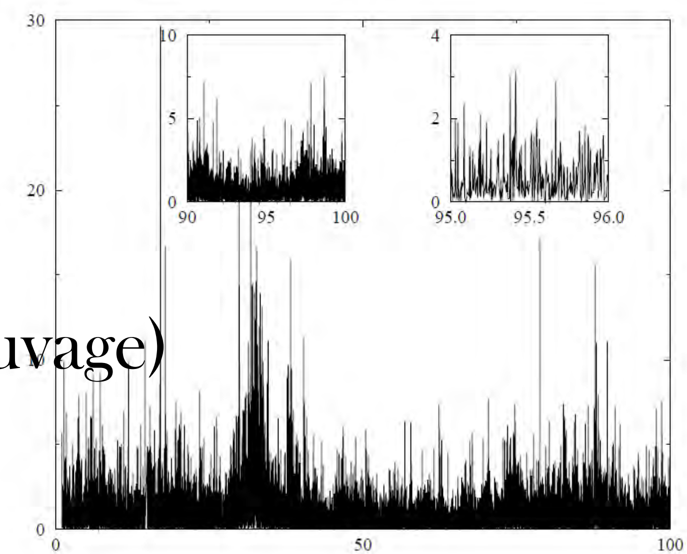


2. Succès et « anomalies »

- 2 premières anomalies non-Gaussiennes <u>universelles</u> (Mandelbrot 1963) :

➢ Sauts de prix, loi de puissance (hasard sauvage)

➢ Volatilité intermittente



...large changes tend to be followed by large changes, of either sign, and small changes tend to be followed by small changes...

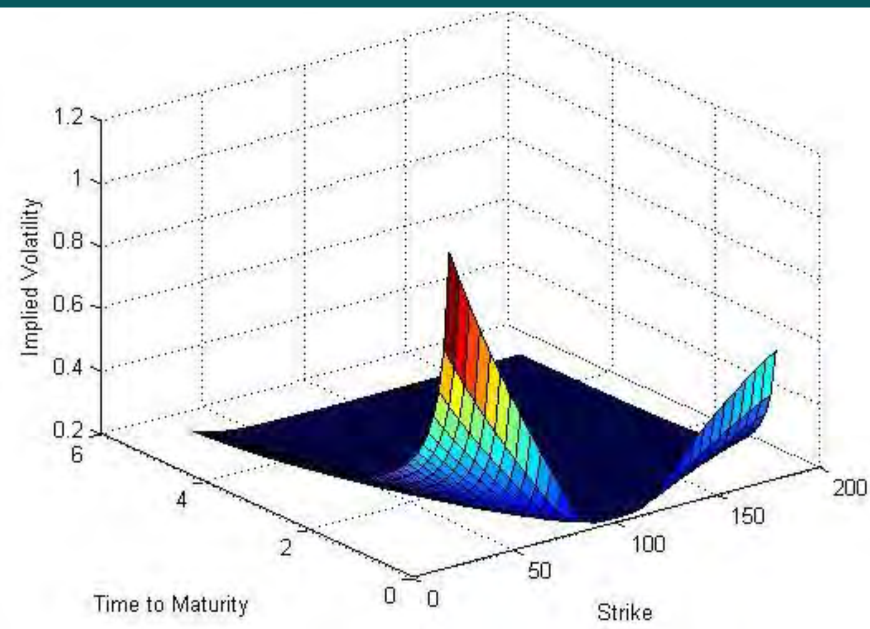
Primes dont 25.

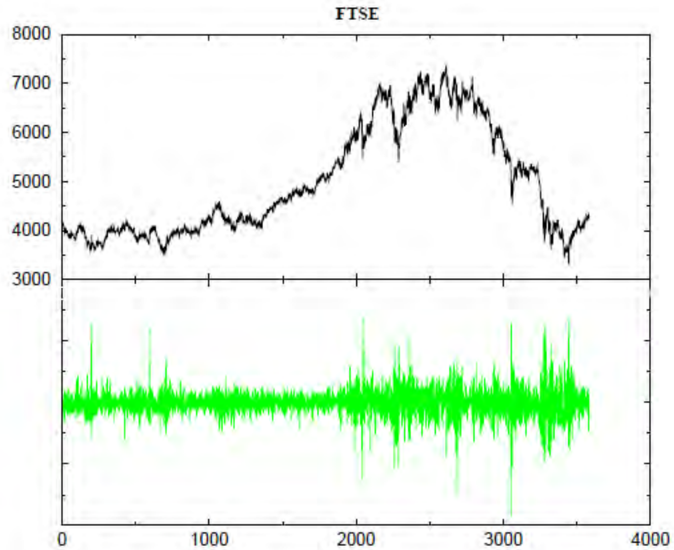
	Écart coté calculé.	Écart coté observé.
A 45 jours..............	72,70	72,80
30 »	37,78	37,84
20 »	25,17	27,39
10 »	12,24	17,40

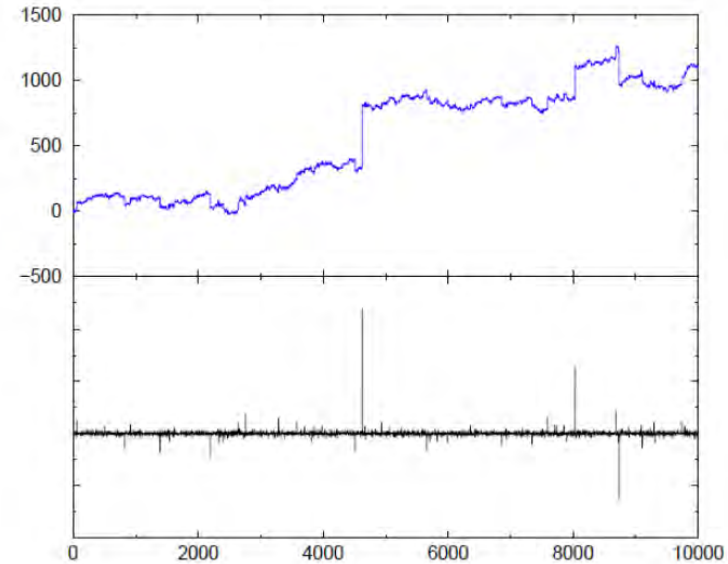
2. Succès et « anomalies »

- « Smile » de volatilité
- Gaussiannité restaurée à temps longs

(Bachelier 1900!)







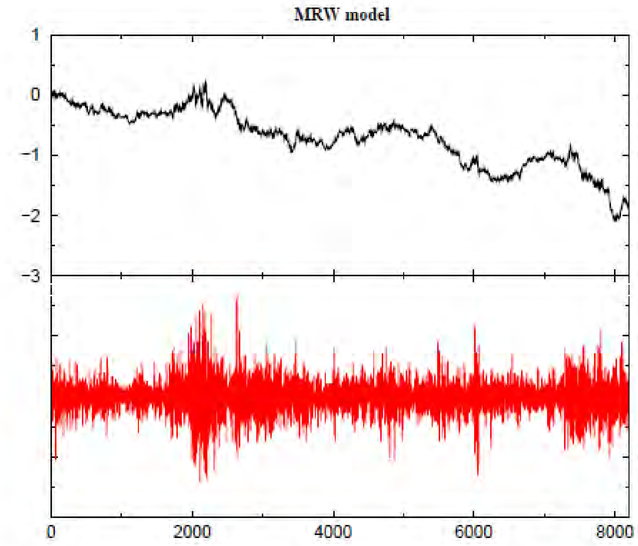
2. Les idées de Mandelbrot

- 2 anomalies <u>universelles</u> (Mandelbrot) :

- ➢ Sauts de prix en loi de puissance → Processus « Lévy-stables »
- ➢ Volatilité intermittente, à mémoire longue → Modèles « multi-fractals »
- ➢ Des modèles aux applications multiples

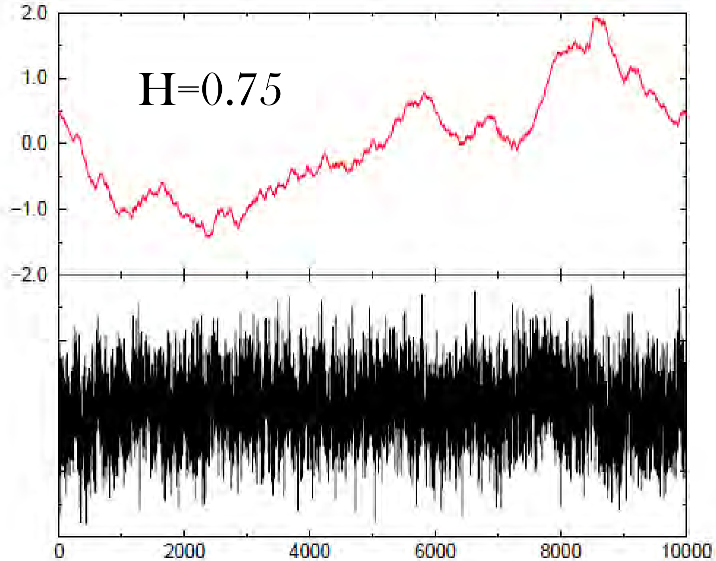
Fluctuations <u>multi-échelles</u>

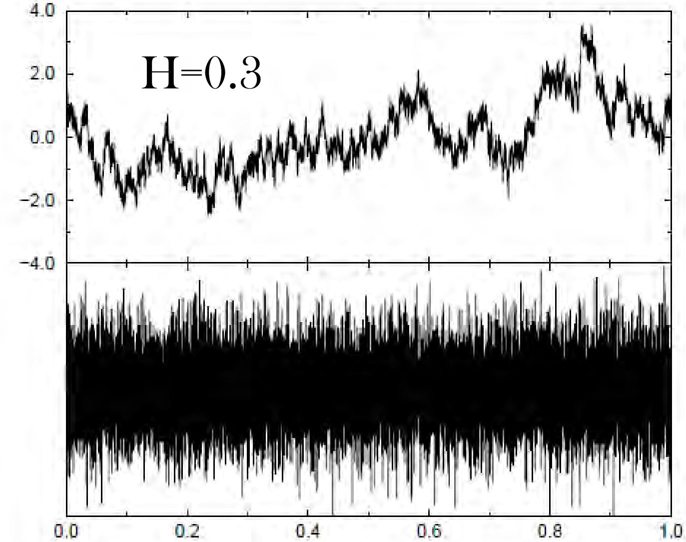
Turbulence



2. Les idées de Mandelbrot

- ➢ Activité intermittente → Modèles « multi-fractals »
- Mandelbrot 1974, *Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier*
- Frisch & Parisi 1980, *Fully developed turbulence and intermittency*
- Mandelbrot, Calvet, Fisher 1997, *A multi-fractal model of asset returns*
- Muzy, Delour, Bacry 2000, *Modelling fluctuations of financial time series: from cascade process to stochastic volatility model (the "MRW")*



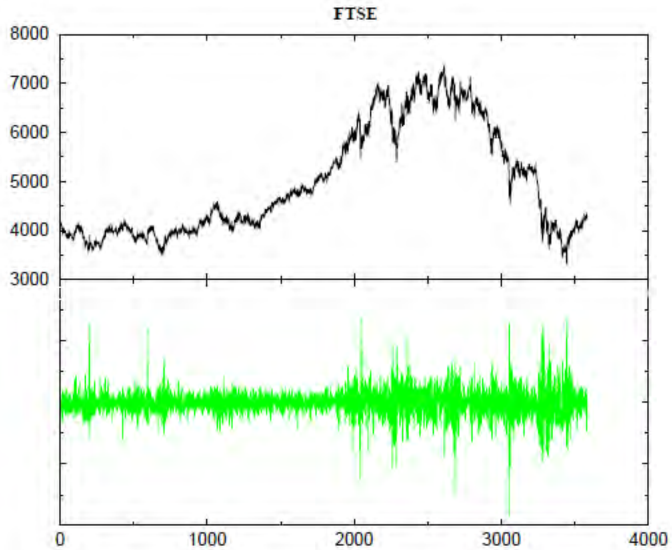


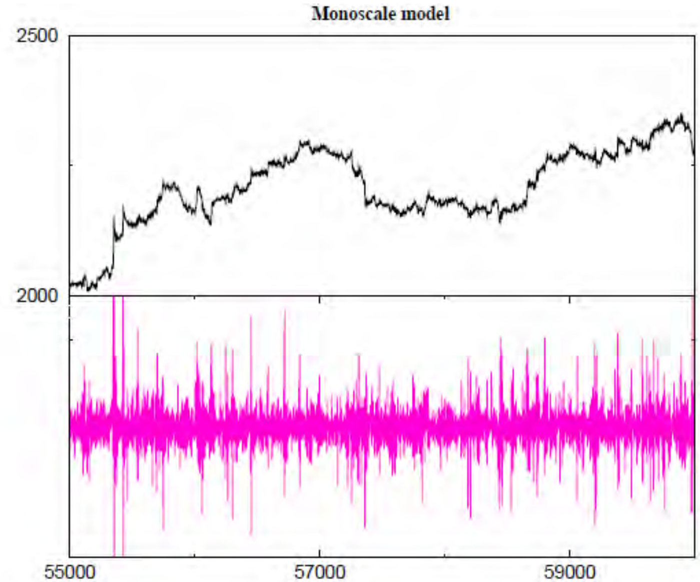
2. Les idées de Mandelbrot

→ Les mouvements Browniens fractionnaires (Mandelbrot 1967):

$$\mathrm{Var}(\Delta \log p) = \sigma^2 t^{2H}$$

- H =1/2 : Mouvement Brownien (décorrélé)
- H >1/2 : Brownien persistant (tendances, « lisse »)
- H <1/2 : Brownien anti-persistant (mean reversion, « rugueux »)
- H = 0 : Cascades et « champ libre » à 2 dimensions (→ MRW, RMT, gravité quantique,…)



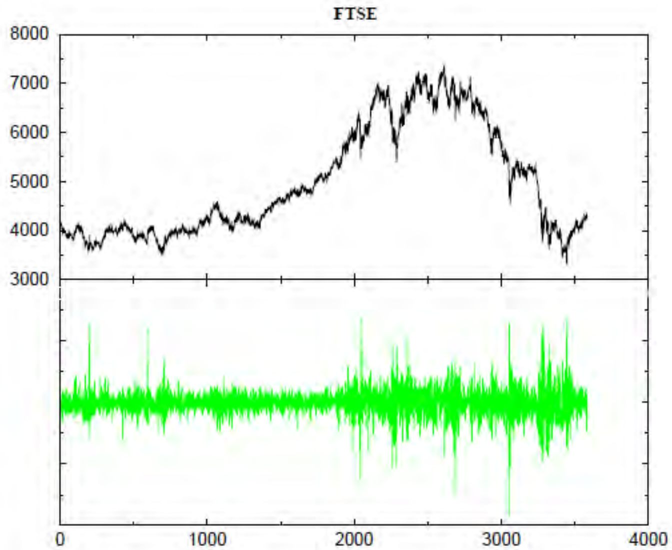


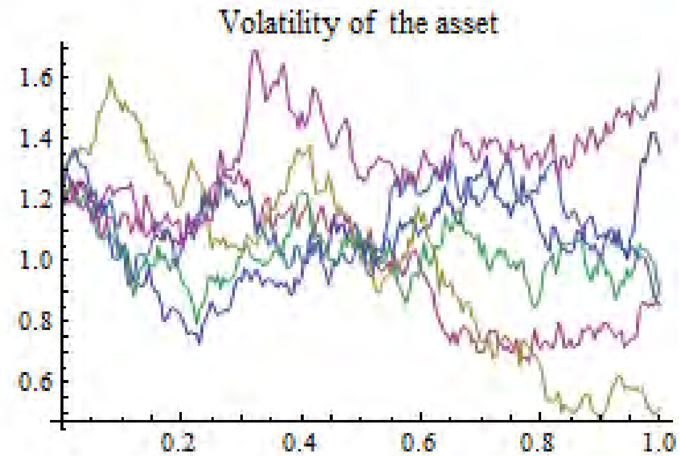
3. Modèles classiques de volatilité stochastique

$$\ln p_t - \ln p_{t-1} = r_t = \sigma_t \xi_t$$

Gaussien N(0,1)

- (G)ARCH (Engle 1980) $\sigma_t^2 = s^2 + \sum_{\tau=1}^{\infty} k(\tau) r_{t-\tau}^2$
- Rétroaction explicite
- +: Intermittence + queues épaisses + non invariance t → - t
- -: Volatilité mono-échelle pour k(τ) exponentiel ou queues pas assez épaisses, échelle de temps « τ = 1 » arbitraire



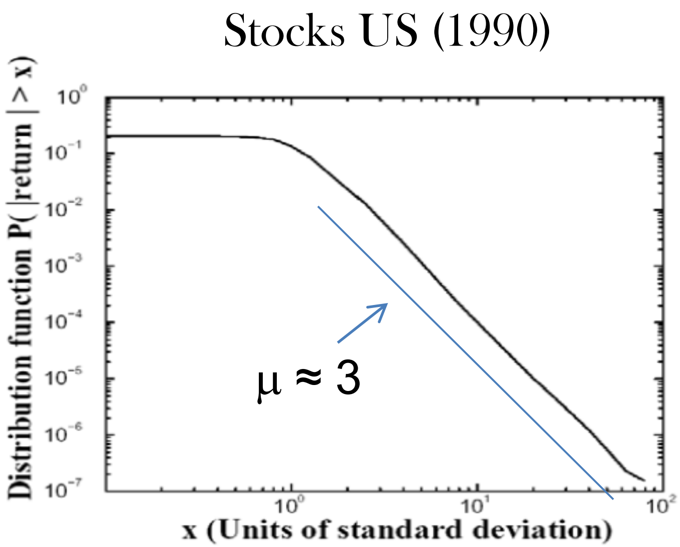


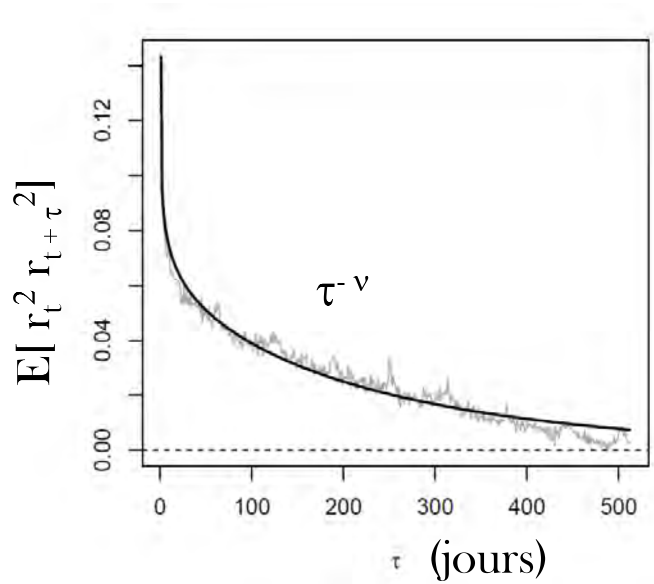
3. Modèles classiques de volatilité stochastique

- Le Modèle de Heston (1993)

  ($V = \sigma^2$) $$dV_t = \lambda(\theta - V_t)dt + \lambda\nu\sqrt{V_t}dB_t$$ (~ Bessel)

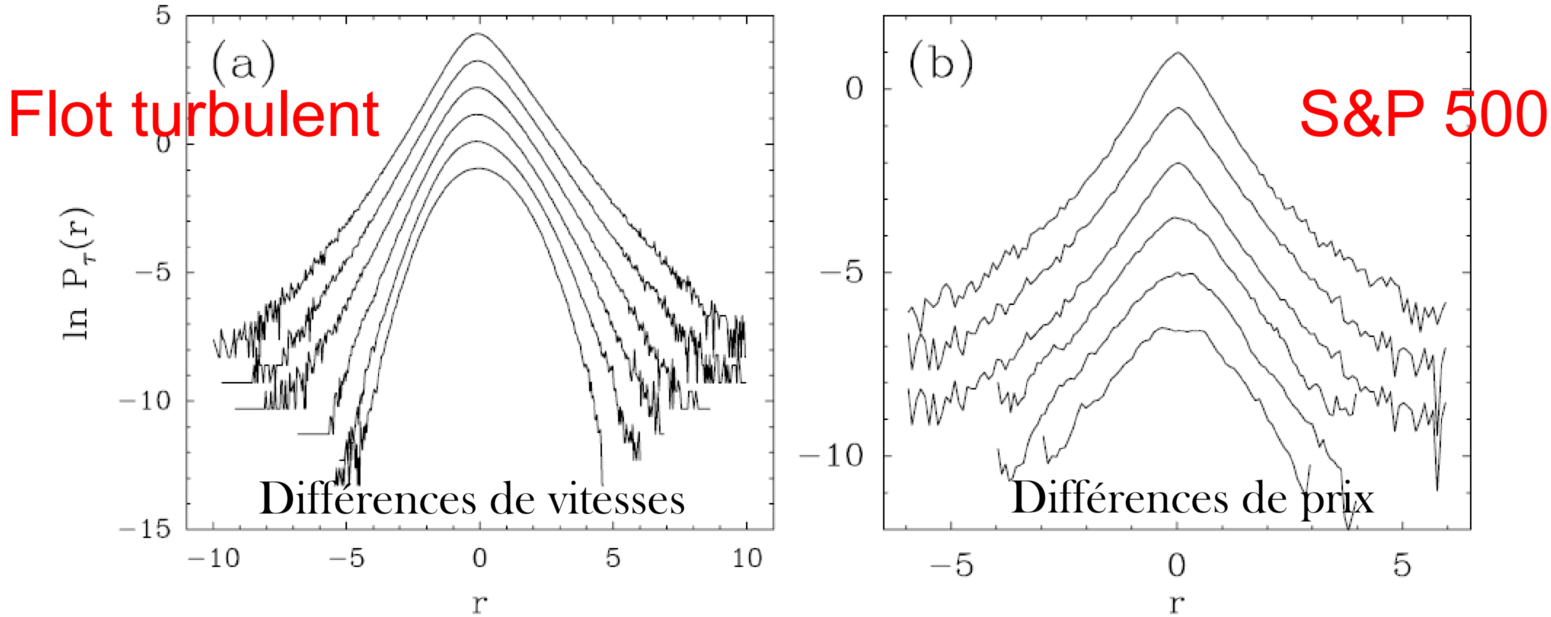
- +: Modèle soluble analytiquement, « micro-fondé » (cf. Hawkes)
- -: Volatilité mono-échelle et pas assez « rugueuse » (H=1/2), queues pas assez épaisses (exponentielles), invariance t → -t





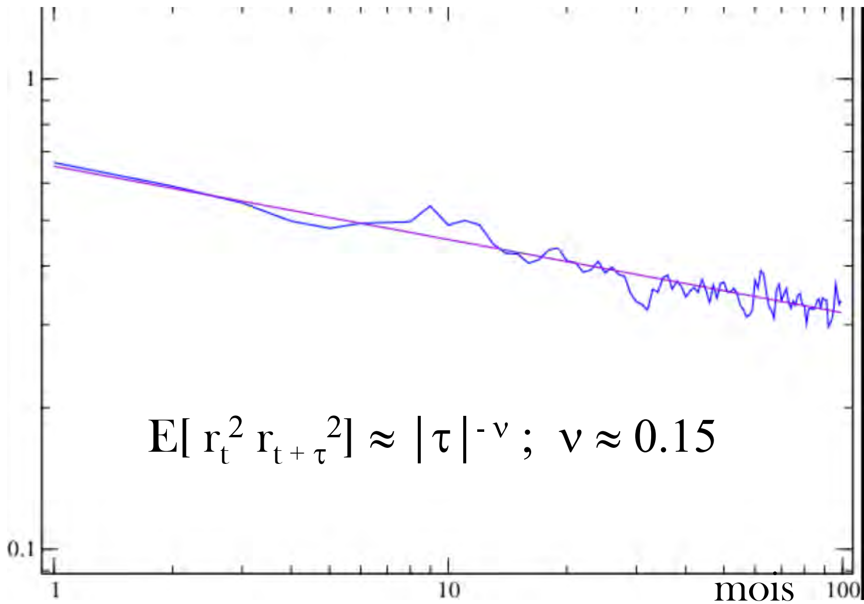
4. Lois de puissance et universalité

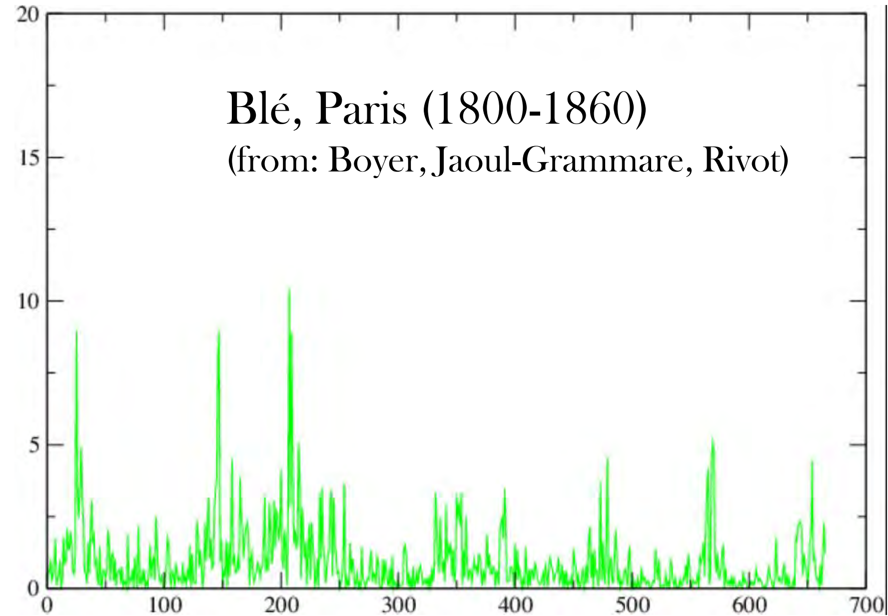
- ➢ Sauts de prix au temps courts : $P_>(|r|) \approx |r|^{-\mu}$; $\mu \approx 3$
- ➢ Volatilité à mémoire longue : $E[\, r_t^2\, r_{t+\tau}^2] \approx |\tau|^{-\nu}$; $\nu \approx 0.2$
- ➢ Plus précisément : $\log \sigma_t$ proche d'un fBM avec H faible:
- « Volatilité rugueuse » ($H \approx 0.1$) ou « multi-fractal » ($H \rightarrow 0$) ?
  (Gatheral, Jaisson, Rosenbaum) (Bacry-Muzy-Delour)



4. Un Théorème Central Limite « retardé »

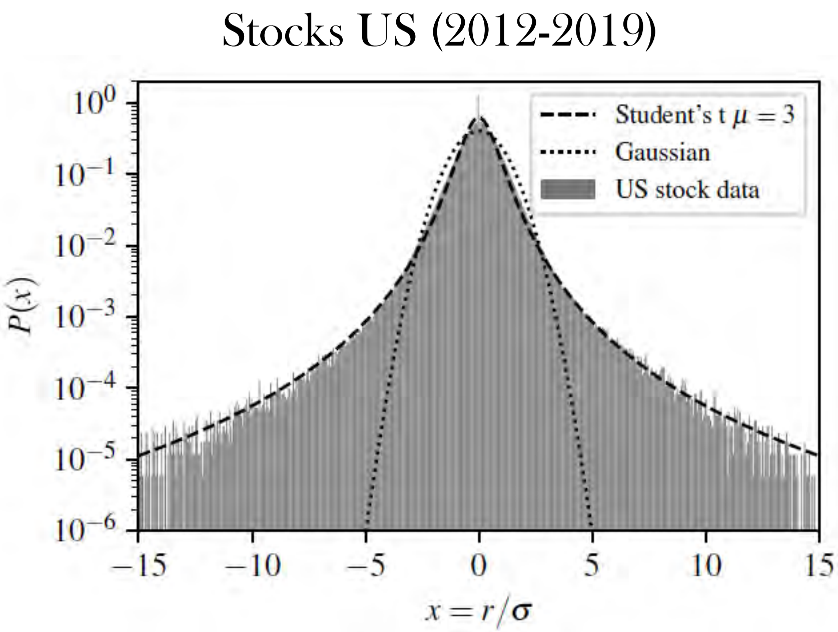
- Statistique non-Gaussienne à temps courts
- Variations de prix décorrélées mais non indépendantes (mémoire longue)
- Convergence vers la Gaussienne à T grand, mais <u>ultra-lente</u> ($T^{-\nu}$)

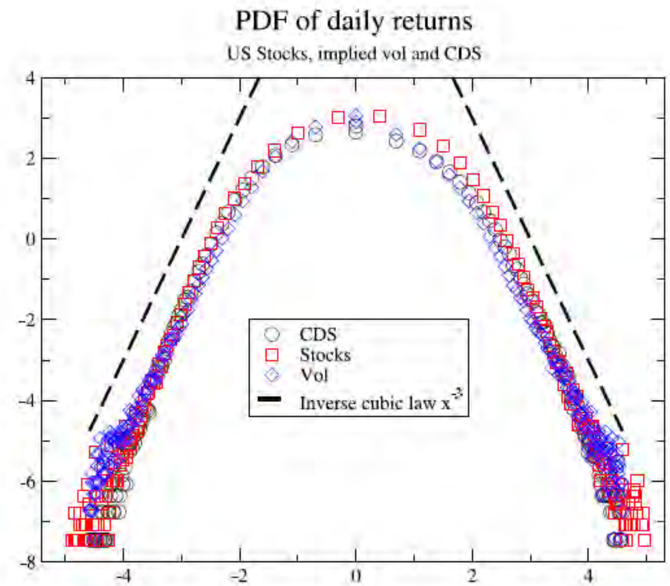




4. Lois de puissance et universalité

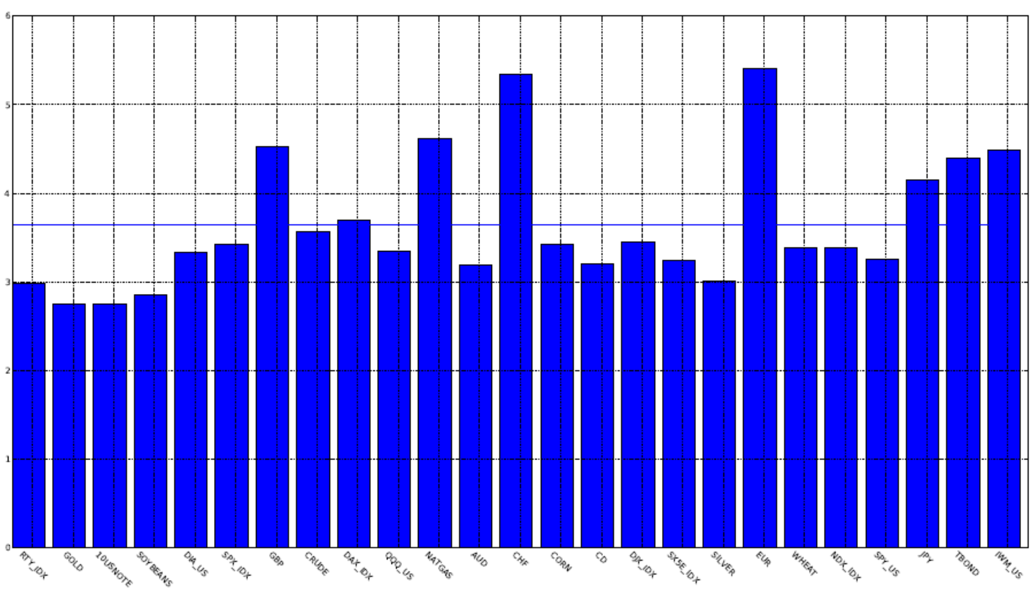
- Résultats remarquablement stables (époques, marchés) !
- Lois de puissances et universalité : proximité d'un point critique ?
- Une question fondamentale particulièrement importante, pour laquelle la physique statistique devrait pouvoir contribuer





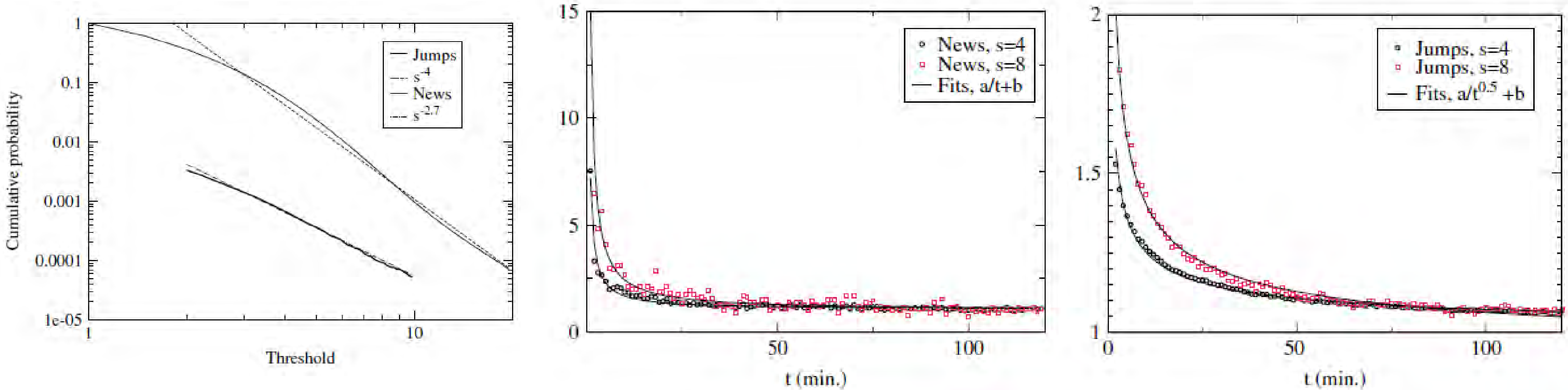
4. Universalité?

$\mu \approx 3$



<u>Notes:</u>

- Normalisation: σ moyen
- Normalisation par le meilleur prédicteur de σ local n'élimine pas les sauts, μ ↑
- KS test et mémoire longue: l'hypothèse d'universalité ne peut être rejetée (actions)

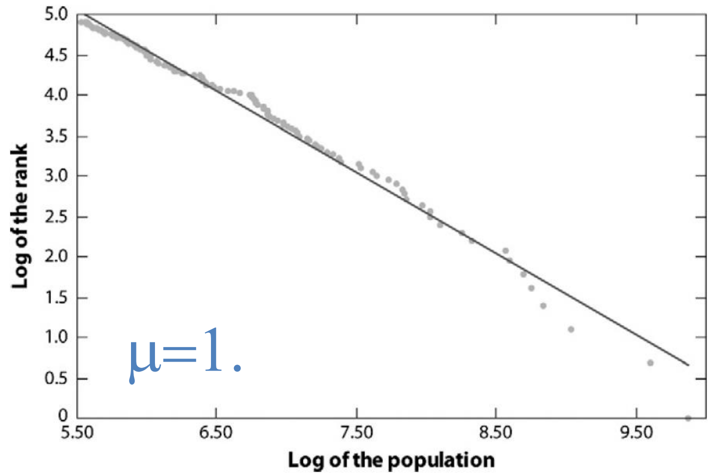


5. Nature endogène des sauts

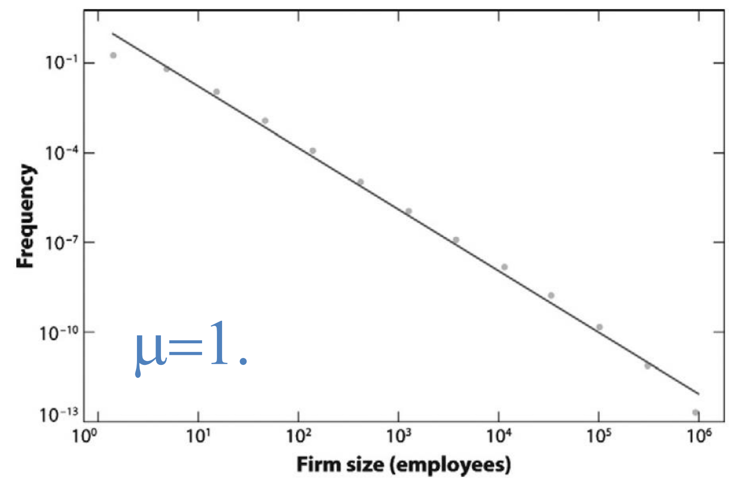
- ➢ Une grande majorité des sauts de prix semble de nature **endogène** (pas de nouvelles contemporaines) : « excess volatility »
- • 1 jour : Cutler, Poterba, Summers (1988) *What moves stock prices?* →
- • 1 minute : Joulin et al. 2008, Marcaccioli et al. 2021
- ➢ Peu de volume avant un saut endogène, beaucoup <u>ensuite</u>
- ➢ Marchés proches d'une instabilité ? Un scénario universel ?
- ➢ NB: Volatilité en excès du PIB (« small shocks, large business cycle, cours 6)

Table 4: Fifty Largest Postwar Movements in S&P Index and Their "Causes"

	Date	Percent Change	New York Times Explanation
1	Oct. 19, 1987	-20.47%	Worry over dollar decline and trade deficit; Fear of US not supporting dollar.
2	Oct. 21, 1987	9.10%	Interest rates continue to fall; deficit talks in Washington; bargain hunting.
3	Oct. 26, 1987	-8.28%	Fear of budget deficits; margin calls; reaction to falling foreign stocks
4	Sep. 3, 1946	-6.73%	"...no basic reason for the assault on prices."
5	May 28, 1962	-6.68%	Kennedy forces rollback of steel price hike.
6	Sep. 26, 1955	-6.62%	Eisenhower suffers heart attack.
7	Jun. 26, 1950	-5.38%	Outbreak of Korean War.
8	Oct. 20, 1987	5.33%	Investors looking for "quality stocks".
9	Sep. 9, 1946	-5.24%	Labor unrest in maritime and trucking industries.
10	Oct. 16, 1987	-5.16%	Fear of trade deficit; fear of higher interest rates; tension with Iran.
11	May 27, 1970	5.02%	Rumors of change in economic policy. "...the stock surge happened for no fundamental reason."



Taille des villes

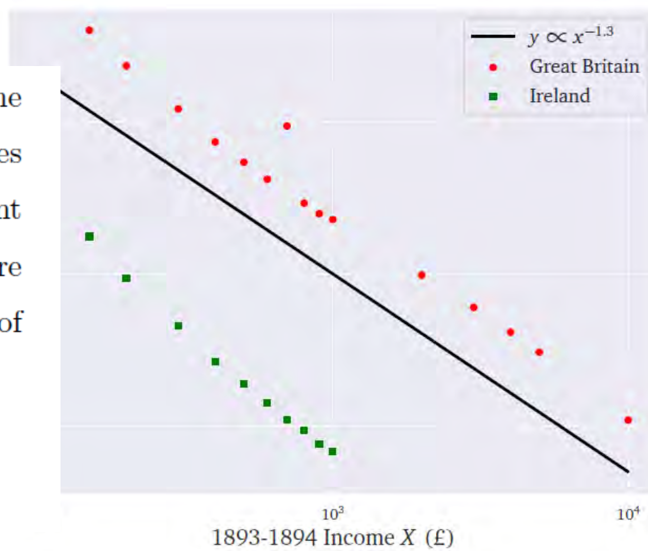


Taille des firmes

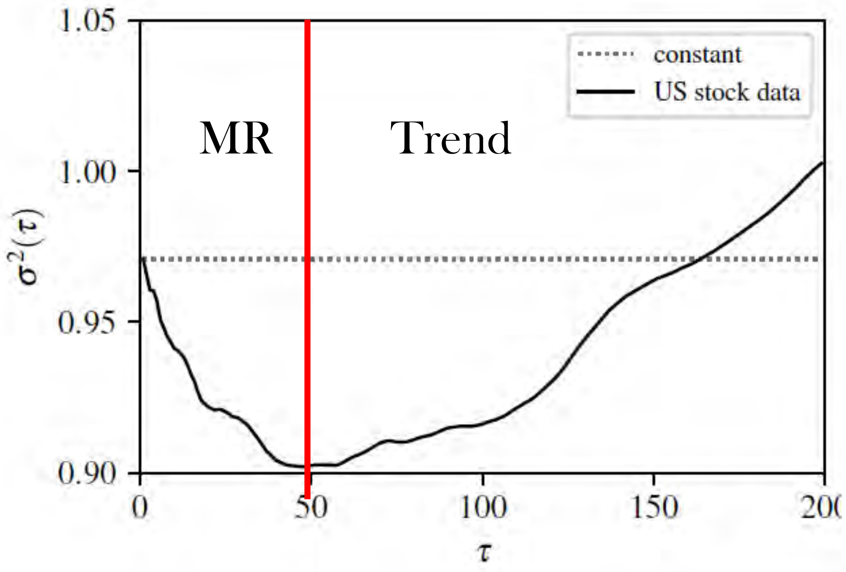
5. D'autres lois de puissances universelles ?

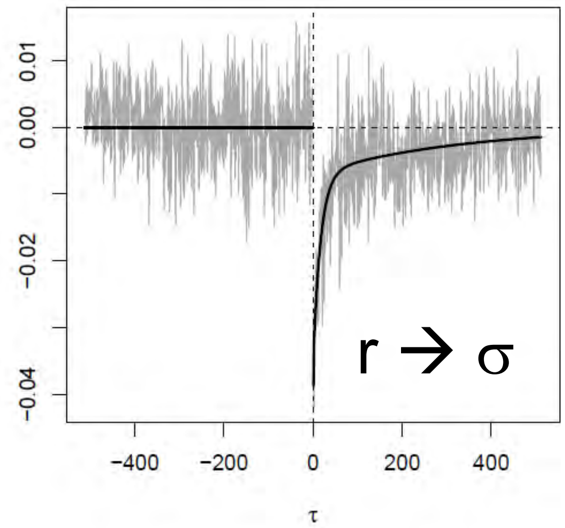
These results are most remarkable. It is absolutely impossible to admit that they are only the result of chance. There must without doubt be a *cause* which produces the tendency for incomes to lie according to a certain curve. The shape of this curve seems to depend to a very small extent on the different economic conditions of the countries under consideration because the results are more or less the same for those countries whose economic conditions are as varied as those of England, Germany, the Italian towns, and even those of Peru.

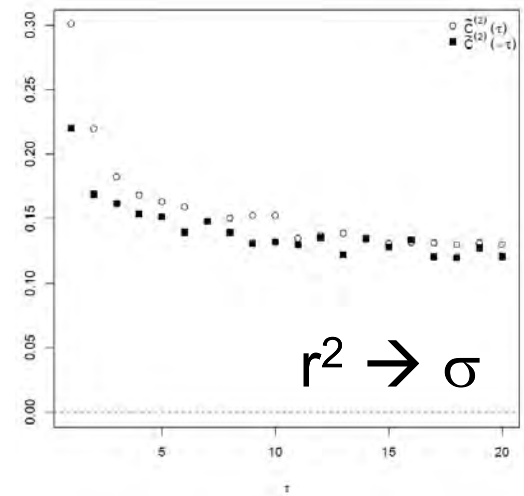
(Pareto, 1896)



Revenus, Fortunes (Pareto)





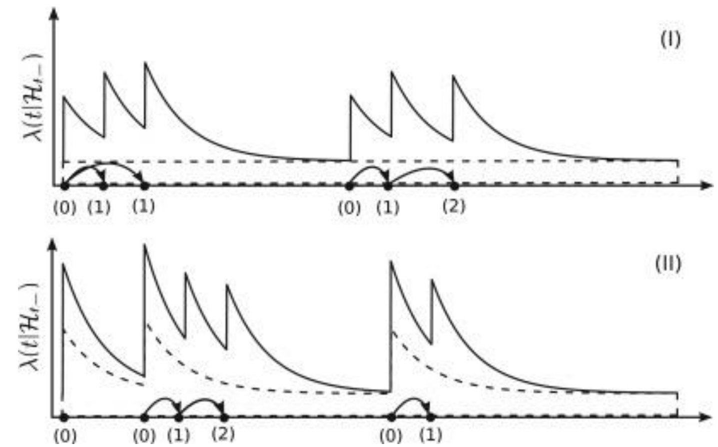


6. Autres observations univariées (« stylized facts »)

- ➢ Corrélations linéaires faibles mais persistantes (« signature plot »)
- • MR court terme, tendance moyen terme, MR long terme (cours 2)
- ➢ Corrélations rendements passés → volatilité future (« Leverage »)
- • r + (-r) restaure la symétrie t → - t
- ➢ Corrélations (rendements passés)^2 → volatilité future (Zumbach)
- • r + (-r) ne restaure pas la symétrie t → - t

$$\lambda_t = \lambda_\infty + \int_{-\infty}^{t} \phi(t-s)\,\mathrm{d}N_s$$

Rétroaction

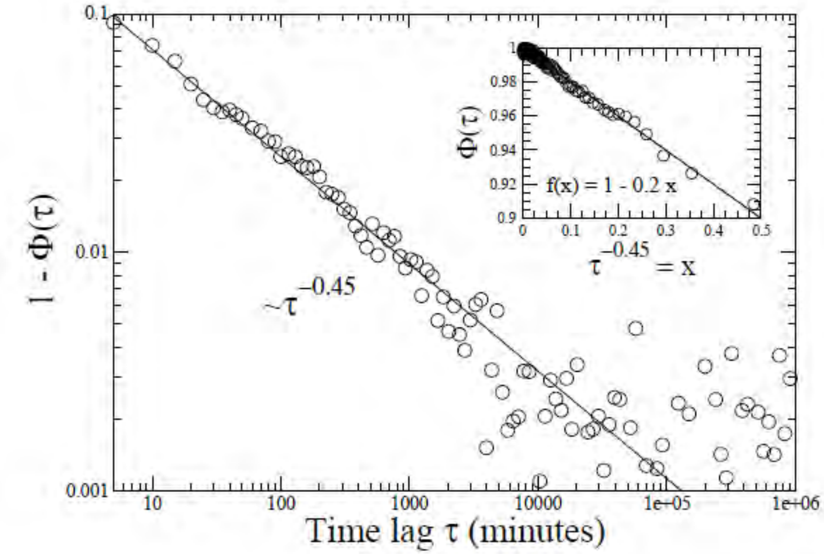


Hawkes et Q-Hawkes: modèles « micro » unificateurs

- Hawkes : processus de Poisson subordonné à son propre passé
- $dN_t \sim \lambda_t\, dt$ (exemple: dN=1 à chaque changement de prix)
- Stabilité : $n \equiv \int_0^\infty \phi(\tau) d\tau < 1$ (c.f. processus de branchement)
- Fraction d'évènements exogènes $f = 1 - n$

$$\lambda_t = \lambda_\infty + \int_{-\infty}^{t} \phi(t - s)\ \mathrm{d}N_s$$

Rétroaction



Hawkes et Q-Hawkes: modèles « micro » unificateurs

- ➢ Calibration aux données financières -- avec $dP_t = \xi_t\, dN_t$, $\xi_t = \pm\psi$
- Noyau en loi de puissance $\phi(\tau) \sim \tau^{-(1+\alpha)}$ (mémoire longue)
- α proche de ½
- f << 1 (i.e. $n \equiv \int_0^\infty \phi(\tau) d\tau \approx 1$) : « excess volatility puzzle »
- D'où vient la mémoire longue de $\phi(\tau)$?

$$\lambda_t = \lambda_\infty + \int_{-\infty}^{t} \phi(t-s)\, \mathrm{d}N_s$$

Hawkes et Q-Hawkes: modèles « micro » unificateurs

- Limite continue de Hawkes quasi-critiques (Jaisson-Rosenbaum):

- Noyau à courte portée → Modèle de Heston classique (α > 1)
- Noyau à longue portée → Modèle de Heston rugueux H = α – ½ ≈ 0

$$V_t = V_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \lambda(\theta - V_s) ds + \frac{\lambda\nu}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sqrt{V_s} dB_s.$$

$$\lambda_t = \lambda_\infty + \int_{-\infty}^{t} \phi(t-s)\, \mathrm{d}N_s$$

Hawkes et Q-Hawkes: modèles « micro » unificateurs

- Limite continue de Hawkes quasi-critiques (Jaisson-Rosenbaum):
- Noyau à longue portée → Modèle de Heston rugueux $H = \alpha - ½ \approx 0$
- Mais :
- Pas de queues épaisses
- Invariance par renversement du temps, sauf avec un terme qui rompt la symétrie r → -r : Effet Leverage mais pas d'effet Zumbach

$$dN_t \sim \lambda_t\, dt \quad dP_t = \xi_t\, dN_t,\ \xi_t = \pm\psi$$

$$\lambda_t = \lambda_\infty + \frac{1}{\psi}\int_{-\infty}^{t} L(t-s)\, \mathrm{d}P_s + \frac{1}{\psi^2}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} K(t-s, t-u)\, \mathrm{d}P_s\, \mathrm{d}P_u$$

« Leverage »

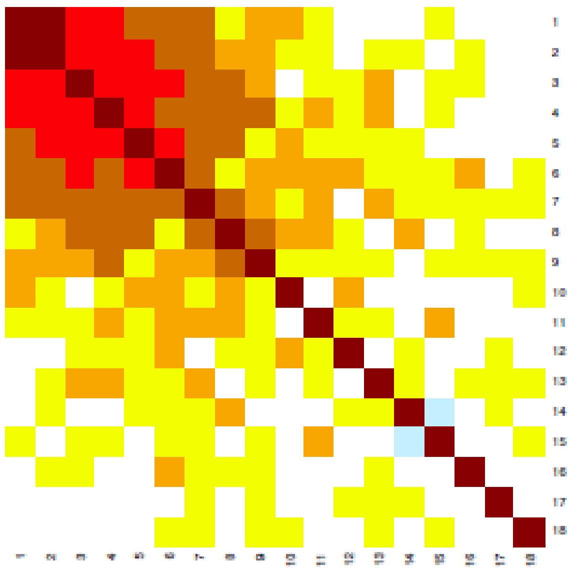
Blanc, Donier, JPB, 2016

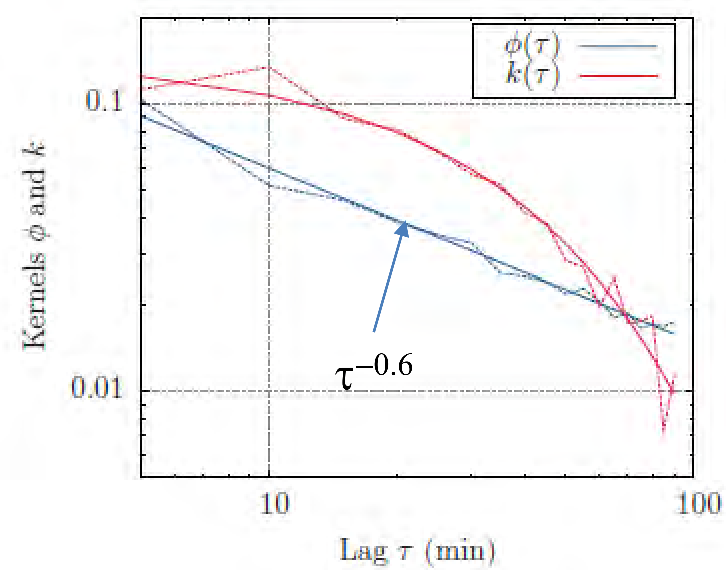
Processus de Hawkes « Quadratiques »

- Généralisation de Hawkes avec rétroaction quadratique
- Développement de « Landau » en fonction des rendements passés
- $K(t,t)=\phi(t)$ est le noyau de Hawkes ($dP^2 = \psi^2\, dN$)
- Condition de stabilité (pour $L(.)=0$):

$$\overline{\lambda} = \frac{\lambda_\infty}{1-\mathrm{Tr}(K)} \qquad \begin{array}{c} \lambda_\infty > 0 \text{ and } \mathrm{Tr}(K) < 1 \\ \text{or } \lambda_\infty = 0 \text{ and } \mathrm{Tr}(K) = 1. \end{array}$$

K



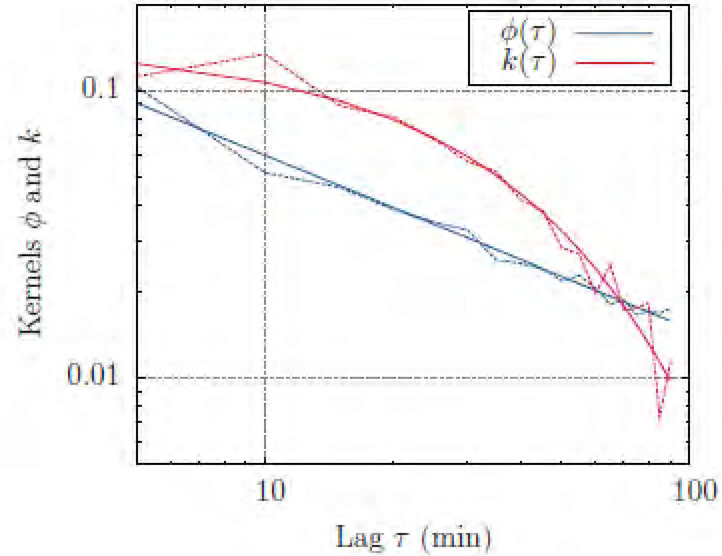


Processus de Hawkes « Quadratiques »

- Calibration sur rendements 5 minutes des actions US (2000-09)
- K(t,t’) est bien approximé par Diag + Rang 1

$$K(\tau,\tau') \;\approx\; \phi(\tau)\delta_{\tau-\tau'} + k(\tau)k(\tau')$$

- Tr(K) (intraday) = 0.74 (Diag) + 0.06 (Rank 1) = 0.8 (+ τ > 1 jour)
- Termes cubiques, quartiques, etc ? Théorie générale ?

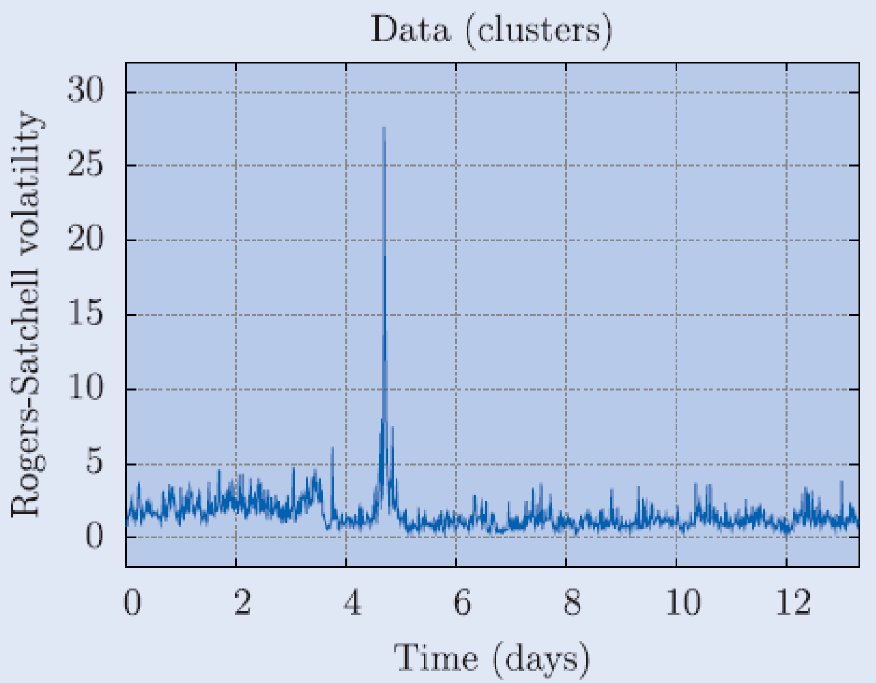


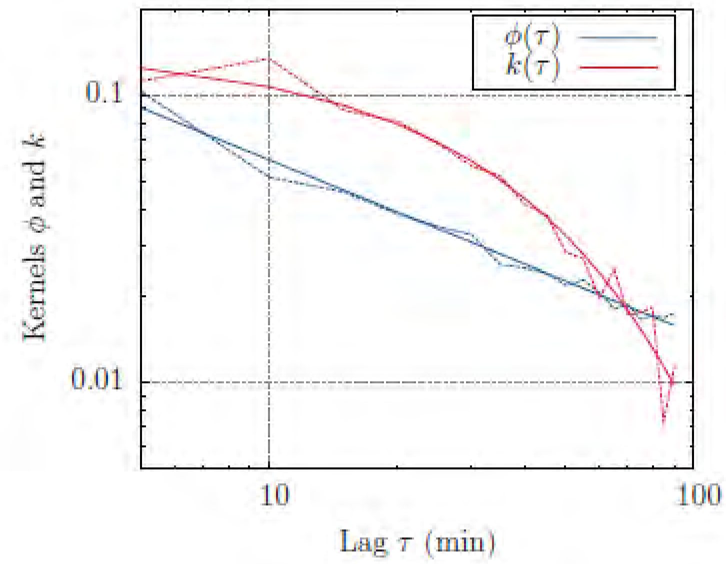
Effet Zumbach

➢ <u>Interprétation</u> : couplage de la volatilité au « trend » passé

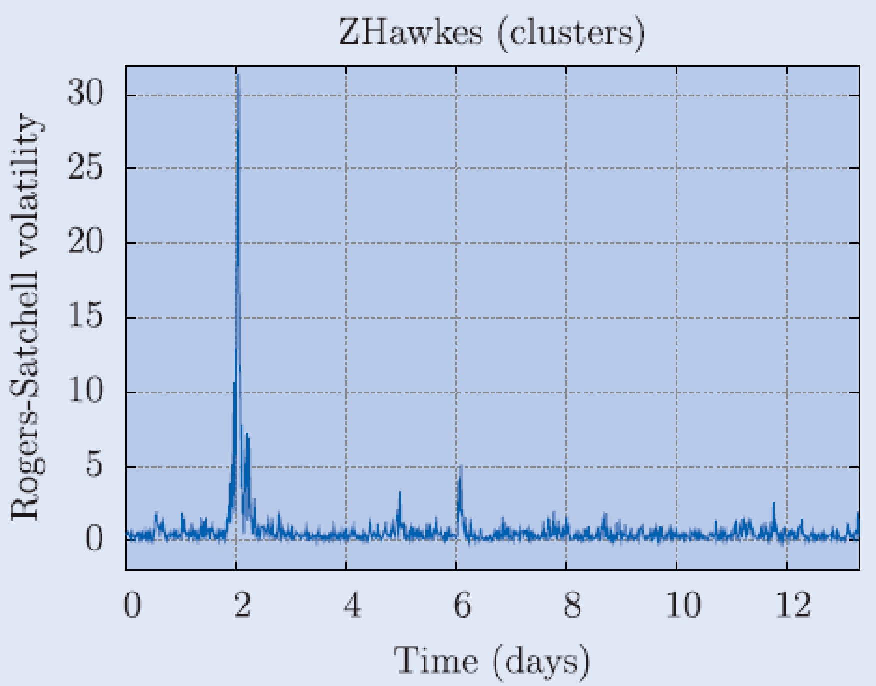
$$K(\tau,\tau') \approx \phi(\tau)\delta_{\tau-\tau'} + k(\tau)k(\tau') \qquad \lambda_t = \lambda_\infty + H_t + Z_t^2,$$

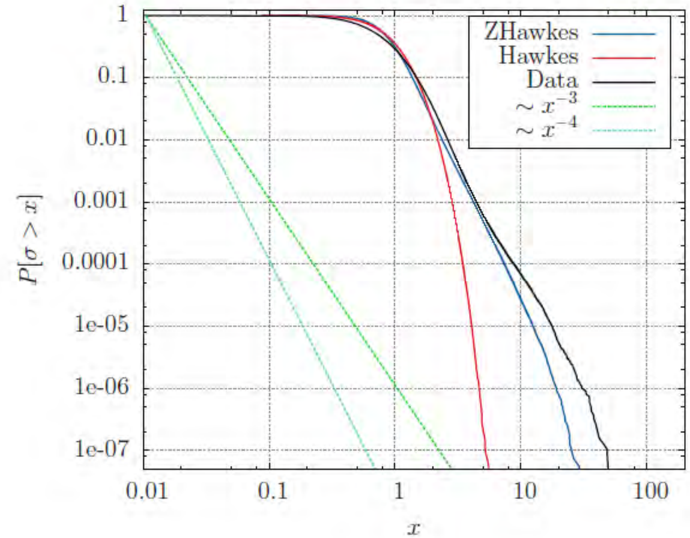
$$H_t := \int_{-\infty}^{t} \phi(t-s)\, \mathrm{d}N_s, \qquad Z_t = \frac{1}{\psi}\int_{-\infty}^{t} k(t-s)\, \mathrm{d}P_s.$$ (« trend »)


Data (clusters)
Rogers-Satchell volatility
0
5
10
15
20
25
30
0
2
4
6
8
10
12
Time (days)


$\phi(\tau)$
$k(\tau)$
Kernels ϕ and k
0.1
0.01
10
100
Lag τ (min)

Z-Hawkes


ZHawkes (clusters)
Rogers-Satchell volatility
0
5
10
15
20
25
30
0
2
4
6
8
10
12
Time (days)

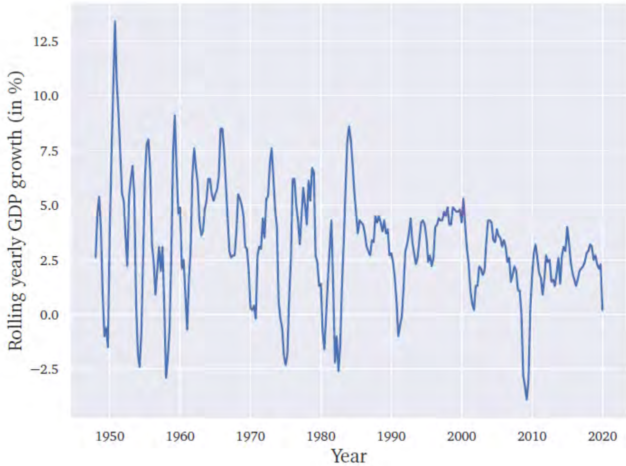


$$k(t) = \sqrt{2n_Z\omega}\,\exp(-\omega t) \text{ and } \phi(t) = n_H\beta\exp(-\beta t)$$

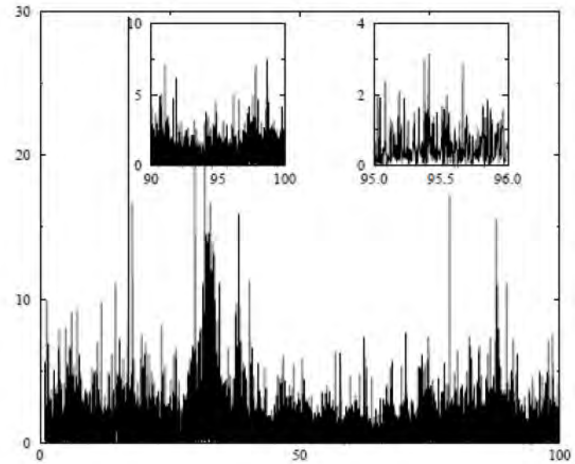
$n_Z = 0.06$, $dP_t = \pm\psi\, dN_t$

Effet Zumbach et lois de puissance

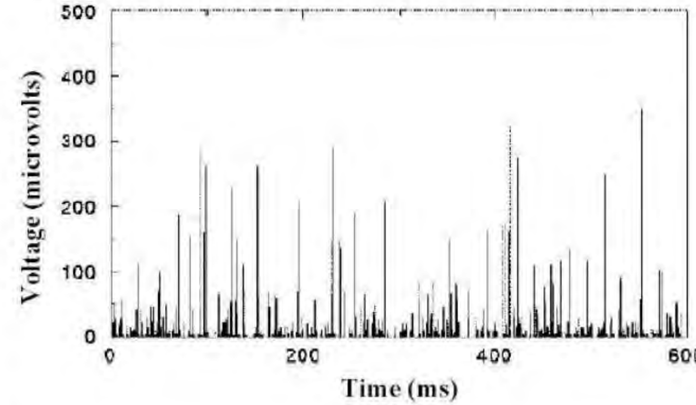
- Dans le cas ou les deux noyaux $\phi(\tau)$ et $k(\tau)$ sont exponentiels, la distribution de la volatilité est calculable analytiquement
- Une loi de puissance pour la distribution des rendements
- $n_Z \ll 1 \rightarrow \mu = 1 + f(\omega/\beta, n_H)/n_Z$ (<u>non universel</u>)
- L'interaction entre les noyaux H et Z conduit à un μ réaliste
- La corrélation $r^2 \rightarrow \sigma$ est quantitativement reproduite



US GDP Growth



Dow Jones



Bruit Barkhausen

Conclusion – Questions ouvertes

- Endogénéité, instabilité, lois de puissance, mémoire, universalité
- Une phénoménologie uni-variée complexe, qui a inspiré de nombreux développements mathématiques (fBM, multifractals,…)
- Généralisation multi-variée : de nombreux faits stylisés supplémentaires (corrélations linéaires, non-linéaires, co-sauts,..)
- Comment justifier les « bons » modèles à partir du comportement d’agents ? Est-on proche d’un point critique ? Mécanisme ?

Pour aller plus loin

- Références: voir page d'accueil du cours
- Séminaire: Jim Gatheral
  The Complex Dynamics of Financial Prices