Modélisation numérique de fibres en contact

Application à la synthèse de chevelures réalistes

Florence Bertails-Descoubes

Inria, équipe BiPop - Laboratoire Jean Kuntzmann (Grenoble)

17 avril 2015, Collège de France

Thématique de recherche

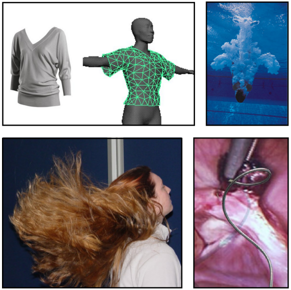
"Modélisation numérique d'objets mécaniques complexes appliquée à la synthèse d'images"

Caractéristiques

- Phénomènes visuellement riches

  Forme, mouvement complexes

- Modélisation à deux niveaux
  - Mécanique (équations continues)
  - Numérique (équations discrètes)



[Pai 2002]

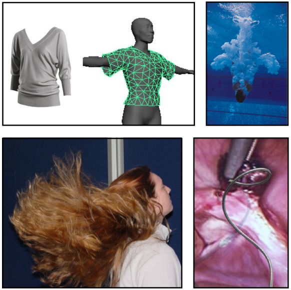
Thématique de recherche

“Modélisation numérique d’objets mécaniques complexes appliquée à la synthèse d’images”

Caractéristiques

- Phénomènes visuellement riches

  Forme, mouvement complexes
- Modélisation à deux niveaux
  - Mécanique (équations continues)
  - Numérique (équations discrètes)



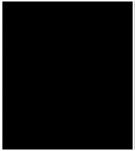
[Pai 2002]

Propriétés requises pour les modèles

Réalisme, robustesse, efficacité, et contrôle utilisateur

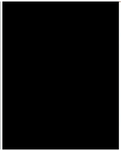
En plein essor dans l'industrie du loisir numérique

Final Fantasy (2000)



Les Indestructibles (2005)

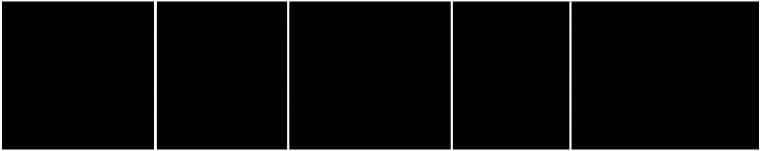
Avatar (2009)



Raiponce (2010)

Rebelle (2012)

En plein essor dans l'industrie du loisir numérique



Final Fantasy (2000) Les Indestructibles (2005) Avatar (2009) Raiponce (2010) Rebelle (2012)

Difficultés

- Système complexe
- Aucun modèle de référence, peu de résultats expérimentaux

I. Modélisation directe

Phénomène physique

I. Modélisation directe

Phénomène physique

Modélisation directe →

Simulateur direct

I. Modélisation directe

Phénomène physique

Modélisation directe →

Simulateur direct

1. Modèle réduit de fibre
2. Modèle de contact frottant

I. Modélisation directe

Phénomène physique

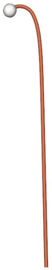
Modélisation directe →

Simulateur direct

1. Modèle réduit de fibre
2. Modèle de contact frottant

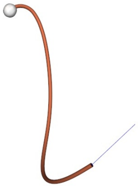
Propriétés requises

- Fibre : structure longue et très fine
- Un bord encastré et l'autre libre



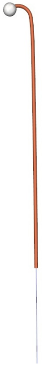
Propriétés requises

- Fibre : structure longue et très fine
- Un bord encastré et l'autre libre
- Élastique en flexion et torsion



Propriétés requises

- Fibre : structure longue et très fine
- Un bord encastré et l'autre libre
- Élastique en flexion et torsion
- Inextensible



Modèle dynamique de fibre

Propriétés requises

- Fibre : structure longue et très fine
- Un bord encastré et l'autre libre
- Élastique en flexion et torsion
- Inextensible
- Grands déplacements

Propriétés requises

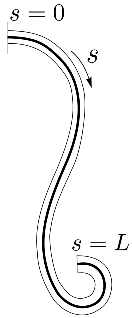
- Fibre : structure longue et très fine
- Un bord encastré et l'autre libre
- Élastique en flexion et torsion
- Inextensible
- Grands déplacements
- “Frisure” naturelle

Propriétés requises

- Fibre : structure longue et très fine
- Un bord encastré et l'autre libre
- Élastique en flexion et torsion
- Inextensible
- Grands déplacements
- "Frisure" naturelle

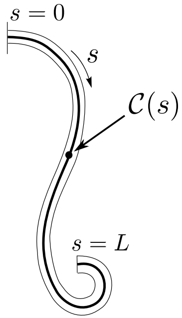
→ Choix du modèle mécanique de tige de Kirchhoff

Géométrie d'une tige de Kirchhoff



Géométrie d'une tige de Kirchhoff

- Ligne moyenne $\mathcal{C}(s)$

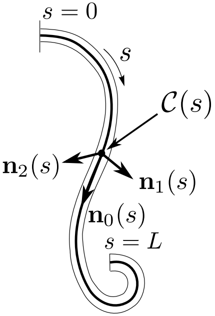


Géométrie d'une tige de Kirchhoff

- Ligne moyenne $\mathcal{C}(s)$
- Repère matériel $\mathcal{R}(s)$

  $\mathcal{R}(s) = \{\mathbf{n}_0(s), \mathbf{n}_1(s), \mathbf{n}_2(s)\}$

  avec $\mathbf{n}_0(s) = \mathcal{C}'(s)$



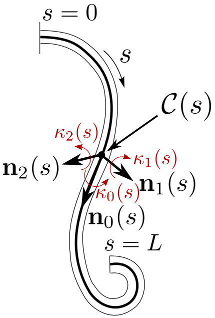
Géométrie d'une tige de Kirchhoff

- Ligne moyenne $\mathcal{C}(s)$

- Repère matériel $\boldsymbol{\mathcal{R}}(s)$
  $\boldsymbol{\mathcal{R}}(s) = \{\mathbf{n}_0(s), \mathbf{n}_1(s), \mathbf{n}_2(s)\}$

  avec $\mathbf{n}_0(s) = \mathcal{C}'(s)$

- Degrés de liberté :
  - torsion $\kappa_0(s)$
  - courbures $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$



Géométrie d'une tige de Kirchhoff

- Ligne moyenne $\mathcal{C}(s)$

- Repère matériel $\mathcal{R}(s)$

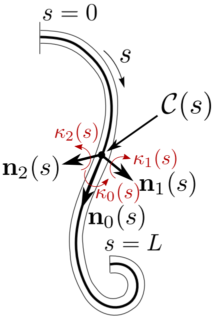
  $\mathcal{R}(s) = \{\mathbf{n}_0(s), \mathbf{n}_1(s), \mathbf{n}_2(s)\}$

  avec $\mathbf{n}_0(s) = \mathcal{C}'(s)$

- Degrés de liberté :
  - torsion $\kappa_0(s)$
  - courbures $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$

- Vecteur de Darboux :

  $\boldsymbol{\Omega}(s) = \kappa_0(s)\,\mathbf{n}_0(s) + \kappa_1(s)\,\mathbf{n}_1(s) + \kappa_2(s)\,\mathbf{n}_2(s)$



- Ligne moyenne $\mathcal{C}(s)$

- Repère matériel $\boldsymbol{\mathcal{R}}(s)$

  $\boldsymbol{\mathcal{R}}(s) = \{\mathbf{n}_0(s), \mathbf{n}_1(s), \mathbf{n}_2(s)\}$

  avec $\mathbf{n}_0(s) = \mathcal{C}'(s)$

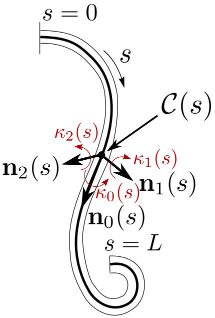
- Degrés de liberté :
  - torsion $\kappa_0(s)$
  - courbures $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$

- Vecteur de Darboux :

  $$\boldsymbol{\Omega}(s) = \kappa_0(s)\,\mathbf{n}_0(s) + \kappa_1(s)\,\mathbf{n_1}(s) + \kappa_2(s)\,\mathbf{n_2}(s)$$

- Évolution du repère matériel

  $$\forall i = 0, 1, 2 \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}_i}{\mathrm{d}s}(s) = \boldsymbol{\Omega}(s) \wedge \mathbf{n}_i(s)$$



- Ligne moyenne $\mathcal{C}(s)$

- Repère matériel $\boldsymbol{\mathcal{R}}(s)$

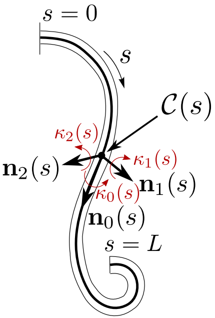
  $\boldsymbol{\mathcal{R}}(s) = \{\mathbf{n}_0(s), \mathbf{n}_1(s), \mathbf{n}_2(s)\}$

  avec $\mathbf{n}_0(s) = \mathcal{C}'(s)$

- Degrés de liberté :
  - torsion $\kappa_0(s)$
  - courbures $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$

- Vecteur de Darboux :

  $\boldsymbol{\Omega}(s) = \kappa_0(s)\,\mathbf{n}_0(s) + \kappa_1(s)\,\mathbf{n_1}(s) + \kappa_2(s)\,\mathbf{n_2}(s)$



- Évolution du repère matériel

$$\boxed{\forall i = 0, 1, 2 \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}_i}{\mathrm{d}s}(s) = \boldsymbol{\Omega}(s) \wedge \mathbf{n}_i(s)}$$

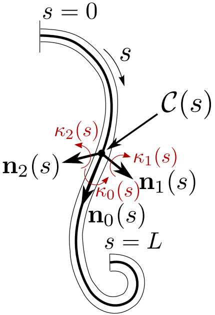
Géométrie d'une tige de Kirchhoff

- Ligne moyenne $\mathcal{C}(s)$
- Repère matériel $\mathcal{R}(s)$

  $\mathcal{R}(s) = \{\mathbf{n}_0(s), \mathbf{n}_1(s), \mathbf{n}_2(s)\}$

  avec $\boxed{\mathbf{n}_0(s) = \mathcal{C}'(s)}$
- Degrés de liberté :
  - torsion $\kappa_0(s)$
  - courbures $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$
- Vecteur de Darboux :

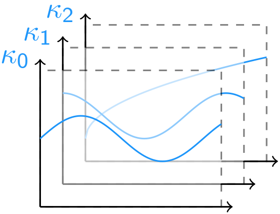
  $\boldsymbol{\Omega}(s) = \kappa_0(s)\,\mathbf{n}_0(s) + \kappa_1(s)\,\mathbf{n}_1(s) + \kappa_2(s)\,\mathbf{n}_2(s)$



- Évolution du repère matériel

$$\boxed{\forall i = 0, 1, 2 \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}_i}{\mathrm{d}s}(s) = \boldsymbol{\Omega}(s) \wedge \mathbf{n}_i(s)}$$

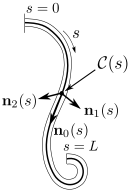
Géométrie : problème de Darboux



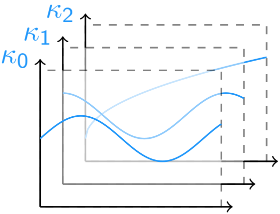
$\longrightarrow$

$$\forall i \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}_i}{\mathrm{ds}}(s) = \boldsymbol{\Omega}(s) \wedge \mathbf{n}_i(s)$$
$$\boldsymbol{\mathcal{R}}(0) = \boldsymbol{\mathcal{R}}_0$$

$\longrightarrow$



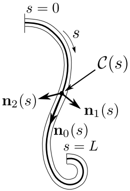
Géométrie : problème de Darboux



$\longrightarrow$

$$\forall i \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}_i}{\mathrm{d}s}(s) = \mathbf{\Omega}(s) \wedge \mathbf{n}_i(s)$$
$$\boldsymbol{\mathcal{R}}(0) = \boldsymbol{\mathcal{R}}_0$$

$\longrightarrow$



Solution exacte

- Existence d'une unique solution
- Mais pas d'expression explicite dans le cas général
  $\rightarrow$ Intégration numérique coûteuse ☹

Bilan des forces et des moments

$$\begin{aligned}
\rho S \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}(s,t) &= \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s}(s,t) + \mathbf{F}(s,t) \\
\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s}(s,t) + \mathbf{n}_0(s,t) \wedge \mathbf{T}(s,t) &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

avec ρS la masse linéique, $\mathbf{T}$ la force interne, $\mathbf{M}$ le moment interne, et $\mathbf{F}$ la densité linéique de force externe.

Équations dynamiques de Kirchhoff

Bilan des forces et des moments

$$\begin{aligned} \rho S \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}(s,t) &= \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s}(s,t) + \mathbf{F}(s,t) \\ \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s}(s,t) + \mathbf{n}_0(s,t) \wedge \mathbf{T}(s,t) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

avec ρS la masse linéique, $\mathbf{T}$ la force interne, $\mathbf{M}$ le moment interne, et $\mathbf{F}$ la densité linéique de force externe.

Loi de comportement élastique

$$\mathbf{M}(s) = EI\left(\kappa(s) - \kappa^0(s)\right)$$

avec K la raideur et κ^0 les courbures/torsion naturelles.

Équations dynamiques de Kirchhoff

Bilan des forces et des moments

$$
\begin{aligned}
\rho S \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}(s,t) &= \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s}(s,t) + \mathbf{F}(s,t) \\
\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s}(s,t) + \mathbf{n}_0(s,t) \wedge \mathbf{T}(s,t) &= \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

avec ρS la masse linéique, $\mathbf{T}$ la force interne, $\mathbf{M}$ le moment interne, et $\mathbf{F}$ la densité linéique de force externe.

Loi de comportement élastique

$$
\mathbf{M}(s) = EI\left(\kappa(s) - \kappa^0(s)\right)
$$

avec K la raideur et κ^0 les courbures/torsion naturelles.

Conditions aux limites

$$
\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}_0,\ \boldsymbol{\mathcal{R}}(0) = \boldsymbol{\mathcal{R}}_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{T}(L) = \mathbf{M}(L) = 0
$$

Discrétisation en espace et en temps

Difficultés

- EDP non-linéaire avec conditions aux limites
- Problèmes de stabilité en différences finies

  Les fortes courbures imposent une discrétisation spatiale très fine

Discrétisation en espace et en temps

Difficultés

- EDP non-linéaire avec conditions aux limites
- Problèmes de stabilité en différences finies

  Les fortes courbures imposent une discrétisation spatiale très fine

Mieux : discrétisation spatiale préalable

- Choix d'un nombre fini de coordonnées en espace

  Exemple : méthode des éléments finis
- Système d'EDO en temps, résolu par différences finies

Discrétisation en espace et en temps

Difficultés

- EDP non-linéaire avec conditions aux limites
- Problèmes de stabilité en différences finies

  Les fortes courbures imposent une discrétisation spatiale très fine

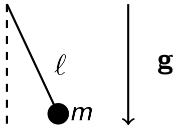
Mieux : discrétisation spatiale préalable

- Choix d'un nombre fini de coordonnées en espace

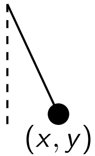
  Exemple : méthode des éléments finis
- Système d'EDO en temps, résolu par différences finies

$\rightarrow$ Quel choix de coordonnées spatiales ?

Deux familles de choix de coordonnées



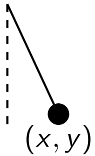
Deux familles de choix de coordonnées



Modèle nodal

$$\text{coordonnées } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \left\{ \begin{array}{c} m\ddot{\mathbf{X}} = m\,\mathbf{g} \\ \|\mathbf{X}\| = \ell \end{array} \right.$$

Deux familles de choix de coordonnées



Modèle nodal

$$\text{coordonnées } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \left\{ \begin{array}{c} m\ddot{\mathbf{X}} = m\,\mathbf{g} \\ \|\mathbf{X}\| = \ell \end{array} \right.$$

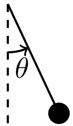
- Équations simples à formuler
- Ajout de contraintes

Deux familles de choix de coordonnées

Modèle réduit

coordonnée θ $\qquad$ $m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$

Deux familles de choix de coordonnées



Modèle réduit

coordonnée θ $\qquad$ $m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin\theta$

Inextensibilité intrinsèque

Plus généralement : discrétisation spatiale

Nombre fini de coordonnées

$q \in \mathbb{R}^m$: coordonnées généralisées

$$\mathbb{M}(q) \quad \cdot \ddot{q} \quad + \quad \mathbf{K}(q) \quad + \quad \mathbf{A}(q,\dot{q}) \quad = \quad \mathbf{F}(q,\dot{q},t)$$

$$\text{sous} \quad C(q) = 0$$

Plus généralement : discrétisation spatiale

Nombre fini de coordonnées

$q \in \mathbb{R}^m$: coordonnées généralisées

- Matrice d'inertie

$$\boxed{\mathbb{M}(q)} \cdot \ddot{q} \quad + \quad \mathbf{K}(q) \quad + \quad \mathbf{A}(q,\dot{q}) \quad = \quad \mathbf{F}(q,\dot{q},t)$$

$$\text{sous} \quad C(q) = 0$$

Plus généralement : discrétisation spatiale

Nombre fini de coordonnées

$q \in \mathbb{R}^m$: coordonnées généralisées

- Matrice d'inertie
- Forces élastiques internes

$$\mathbb{M}(q) \cdot \ddot{q} + \boxed{\mathbf{K}(q)} + \mathbf{A}(q, \dot{q}) = \mathbf{F}(q, \dot{q}, t)$$

$$\text{sous} \quad C(q) = 0$$

Plus généralement : discrétisation spatiale

Nombre fini de coordonnées

$q \in \mathbb{R}^m$: coordonnées généralisées

- Matrice d'inertie
- Forces élastiques internes
- Termes d'inertie non-linéaires

$$\mathbb{M}(q) \cdot \ddot{q} + \mathbf{K}(q) + \boxed{\mathbf{A}(q,\dot{q})} = \mathbf{F}(q,\dot{q},t)$$

$$\text{sous} \quad C(q) = 0$$

Plus généralement : discrétisation spatiale

Nombre fini de coordonnées

$q \in \mathbb{R}^m$: coordonnées généralisées

- Matrice d'inertie
- Forces élastiques internes
- Termes d'inertie non-linéaires
- Forces extérieures

$$\mathbb{M}(q) \cdot \ddot{q} + \mathbf{K}(q) + \mathbf{A}(q,\dot{q}) = \boxed{\mathbf{F}(q,\dot{q},t)}$$

$$\text{sous} \quad C(q) = 0$$

Plus généralement : discrétisation spatiale

Nombre fini de coordonnées

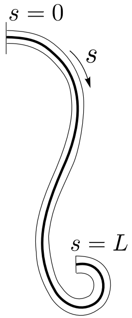
$q \in \mathbb{R}^m$: coordonnées généralisées

- Matrice d'inertie
- Forces élastiques internes
- Termes d'inertie non-linéaires
- Forces extérieures

$$\mathbb{M}(q) \cdot \ddot{q} + \mathbf{K}(q) + \mathbf{A}(q,\dot{q}) = \mathbf{F}(q,\dot{q},t)$$

$$\text{sous} \quad \boxed{C(q) = 0}$$

- Contraintes



Nombre fini de coordonnées

$q \in \mathbb{R}^m$: coordonnées généralisées

- Matrice d'inertie
- Forces élastiques internes
- Termes d'inertie non-linéaires
- Forces extérieures

$$\mathbb{M}(q) \cdot \ddot{q} + \mathbf{K}(q) + \mathbf{A}(q,\dot{q}) = \mathbf{F}(q,\dot{q},t)$$

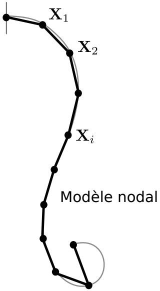
$$\text{sous} \quad C(q) = 0$$

- Contraintes

Plus généralement : discrétisation spatiale

Nombre fini de coordonnées

$q \in \mathbb{R}^m$: coordonnées généralisées



- Matrice d'inertie
- Forces élastiques internes
- Termes d'inertie non-linéaires
- Forces extérieures

$$\mathbb{M} \cdot \ddot{q} + \mathbf{K}(q) = \mathbf{F}(q, \dot{q}, t)$$

$$\text{sous} \quad C(q) = 0$$

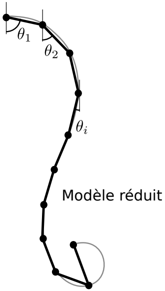
- Contraintes

Modèle nodal : $\mathbb{M}$ creuse ☺, contraintes ☹, $\mathbf{K}$ non-linéaire ☹

Plus généralement : discrétisation spatiale

Nombre fini de coordonnées

$q \in \mathbb{R}^m$: coordonnées généralisées



- Matrice d'inertie
- Forces élastiques internes
- Termes d'inertie non-linéaires
- Forces extérieures

$$\mathbb{M}(q) \cdot \ddot{q} + \mathbb{K} \cdot (q - q^0) + \mathbf{A}(q, \dot{q}) = \mathbf{F}(q, \dot{q}, t)$$

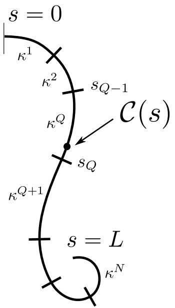
Modèle réduit : $\mathbb{M}$ dense ☹, aucune contrainte ☺, $\mathbf{K}$ linéaire ☺

Plus généralement : discrétisation spatiale

Nombre fini de coordonnées

$q \in \mathbb{R}^m$: coordonnées généralisées

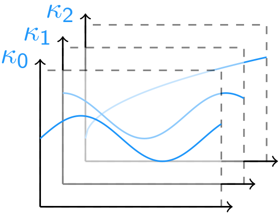
- Matrice d'inertie
- Forces élastiques internes
- Termes d'inertie non-linéaires
- Forces extérieures



$$\mathbb{M}(q) \cdot \ddot{q} + \mathbb{K} \cdot (q - q^0) + \mathbf{A}(q, \dot{q}) = \mathbf{F}(q, \dot{q}, t)$$

$\rightarrow$ Choix de coordonnées réduites de haut degré : courbures

Géométrie discrète : Super-Hélice

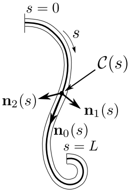


$\longrightarrow$

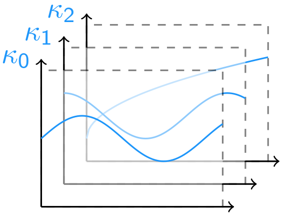
$$\forall i \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}_i}{\mathrm{ds}}(s) = \boldsymbol{\Omega}(s) \wedge \mathbf{n}_i(s)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}(0) = \boldsymbol{\mathcal{R}}_0$$

$\longrightarrow$



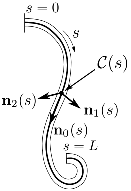
Géométrie discrète : Super-Hélice



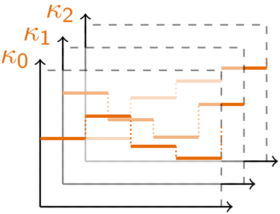
$\longrightarrow$

$$\forall i \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}_i}{\mathrm{ds}}(s) = \boldsymbol{\Omega}(s) \wedge \mathbf{n}_i(s)$$
$$\mathcal{R}(0) = \mathcal{R}_0$$

$\longrightarrow$



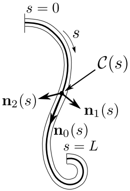
Si $\kappa_0(s)$, $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$ sont constantes par morceau [Bertails et al. 2006]



$\longrightarrow$

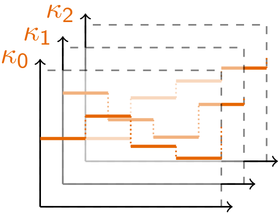
$$\forall i \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}_i}{\mathrm{ds}}(s) = \boldsymbol{\Omega}(s) \wedge \mathbf{n}_i(s)$$
$$\boldsymbol{\mathcal{R}}(0) = \boldsymbol{\mathcal{R}}_0$$

$\longrightarrow$

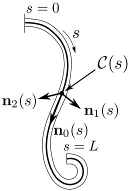


Si $\kappa_0(s)$, $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$ sont constantes par morceau [Bertails et al. 2006]

Géométrie discrète : Super-Hélice



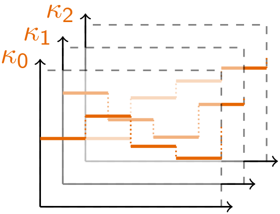
$$\forall i \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}_i}{\mathrm{ds}}(s) = \boldsymbol{\Omega}(s) \wedge \mathbf{n}_i(s)$$
$$\boldsymbol{\mathcal{R}}(0) = \boldsymbol{\mathcal{R}}_0$$



Si $\kappa_0(s)$, $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$ sont constantes par morceau [Bertails et al. 2006]

- Sur chaque morceau, solution explicite pour $\boldsymbol{\mathcal{R}}(s)$ et $\mathcal{C}(s)$

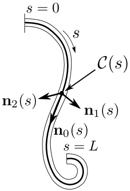
Géométrie discrète : Super-Hélice



$\longrightarrow$

$$\forall i \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}_i}{\mathrm{d}s}(s) = \boldsymbol{\Omega}(s) \wedge \mathbf{n}_i(s)$$
$$\mathcal{R}(0) = \mathcal{R}_0$$

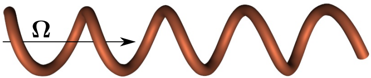
$\longrightarrow$

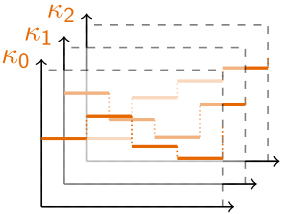


Si $\kappa_0(s)$, $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$ sont constantes par morceau [Bertails et al. 2006]

- Sur chaque morceau, solution explicite pour $\mathcal{R}(s)$ et $\mathcal{C}(s)$

  $\rightarrow$ Équations d'une hélice circulaire

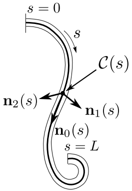




$\longrightarrow$

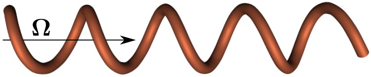
$$\boxed{\begin{array}{l} \forall i \quad \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{n}_i}{\mathrm{d}s}(s) = \boldsymbol{\Omega}(s) \wedge \mathbf{n}_i(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{R}}(0) = \boldsymbol{\mathcal{R}}_0 \end{array}}$$

$\longrightarrow$



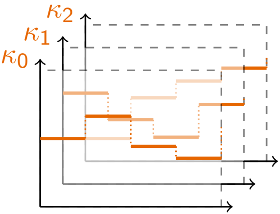
Si $\kappa_0(s)$, $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$ sont constantes par morceau [Bertails et al. 2006]

- Sur chaque morceau, solution explicite pour $\boldsymbol{\mathcal{R}}(s)$ et $\mathcal{C}(s)$
  $\rightarrow$ Équations d'une hélice circulaire

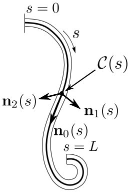


- Raccordement continu entre morceaux

Géométrie discrète : Super-Hélice

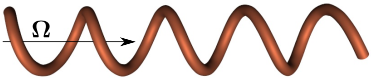


$$\longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \forall i \quad \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{n}_i}{\mathrm{d}s}(s) = \boldsymbol{\Omega}(s) \wedge \mathbf{n}_i(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{R}}(0) = \boldsymbol{\mathcal{R}}_0 \end{array}} \longrightarrow$$



Si $\kappa_0(s)$, $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$ sont constantes par morceau [Bertails et al. 2006]

- Sur chaque morceau, solution explicite pour $\boldsymbol{\mathcal{R}}(s)$ et $\mathcal{C}(s)$
  $\rightarrow$ Équations d'une hélice circulaire



- Raccordement continu entre morceaux
  $\rightarrow$ Toute la cinématique de tige calculable explicitement
  $\rightarrow$ Ligne moyenne $\mathcal{C}(s)$ de continuité $\mathcal{C}^1$

Dynamique discrète : Super-Hélice

$q = [\kappa_0^1, \kappa_1^1, \kappa_2^2, \ldots, \kappa_0^N, \kappa_1^N, \kappa_2^N]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3\,N}$

Dynamique discrète : Super-Hélice

$q = [\kappa_0^1, \kappa_1^1, \kappa_2^2, \ldots, \kappa_0^N, \kappa_1^N, \kappa_2^N]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3N}$

Calcul des coefficients de l'EDO en temps

$$\mathbb{M}(q) \quad \cdot \ddot{q} \quad + \quad \mathbb{K} \cdot (q - q^0) \quad + \quad \mathbf{A}(q, \dot{q}) \quad = \quad \mathbf{F}(q, \dot{q}, t)$$

$q = [\kappa_0^1, \kappa_1^1, \kappa_2^2, \ldots, \kappa_0^N, \kappa_1^N, \kappa_2^N]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3N}$

Calcul des coefficients de l'EDO en temps

$$\boxed{\mathbb{M}(q)} \cdot \ddot{q} + \mathbb{K} \cdot (q - q^0) + \mathbf{A}(q, \dot{q}) = \mathbf{F}(q, \dot{q}, t)$$

- Formule explicite en q, $\dot{q}$ pour chaque coefficient

Dynamique discrète : Super-Hélice

$q = [\kappa_0^1, \kappa_1^1, \kappa_2^2, \ldots, \kappa_0^N, \kappa_1^N, \kappa_2^N]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3\,N}$

Calcul des coefficients de l'EDO en temps

$$\mathbb{M}(q) \quad \cdot \ddot{q} \quad + \quad \mathbb{K} \cdot (q - q^0) \quad + \quad \mathbf{A}(q, \dot{q}) \quad = \quad \mathbf{F}(q, \dot{q}, t)$$

- Formule explicite en q, $\dot{q}$ pour chaque coefficient
- Exemple : $\mathbb{M}_{i,j} = \rho S \int_0^L \left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q_i}(s) \right)^T \cdot \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q_j}(s) \, \mathrm{d}s$

Dynamique discrète : Super-Hélice

$q = [\kappa_0^1, \kappa_1^1, \kappa_2^2, \ldots, \kappa_0^N, \kappa_1^N, \kappa_2^N]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3\,N}$

Calcul des coefficients de l'EDO en temps

$$\mathbb{M}(q) \quad \cdot \ddot{q} \quad + \quad \mathbb{K} \cdot (q - q^0) \quad + \quad \mathbf{A}(q, \dot{q}) \quad = \quad \mathbf{F}(q, \dot{q}, t)$$

- Formule explicite en q, $\dot{q}$ pour chaque coefficient
- Exemple : $\mathbb{M}_{i,j} = \rho S \int_0^L \left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q_i}(s) \right)^T \cdot \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q_j}(s)\, \mathrm{d}s$

Résolution temporelle

- Schéma d'Euler semi-implicite
  $\mathbf{M}\,\mathbf{v} + \mathbf{f} = 0 \quad$ avec $\mathbf{v} = \dot{q}_{t+1}$

Dynamique discrète : Super-Hélice

$q = [\kappa_0^1, \kappa_1^1, \kappa_2^2, \ldots, \kappa_0^N, \kappa_1^N, \kappa_2^N]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3N}$

Calcul des coefficients de l'EDO en temps

$$\mathbb{M}(q) \quad \cdot \ddot{q} \quad + \quad \boxed{\mathbb{K} \cdot (q - q^0)} \quad + \quad \mathbf{A}(q, \dot{q}) \quad = \quad \mathbf{F}(q, \dot{q}, t)$$

- Formule explicite en q, $\dot{q}$ pour chaque coefficient
- Exemple : $\mathbb{M}_{i,j} = \rho S \int_0^L \left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q_i}(s) \right)^T \cdot \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q_j}(s)\, \mathrm{d}s$

Résolution temporelle

- Schéma d'Euler semi-implicite
  $\mathbf{M}\,\mathbf{v} + \mathbf{f} = 0 \quad$ avec $\mathbf{v} = \dot{q}_{t+1}$
- Forces élastiques implicites

Dynamique discrète : Super-Hélice

$q = [\kappa_0^1, \kappa_1^1, \kappa_2^2, \ldots, \kappa_0^N, \kappa_1^N, \kappa_2^N]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3\,N}$

Calcul des coefficients de l'EDO en temps

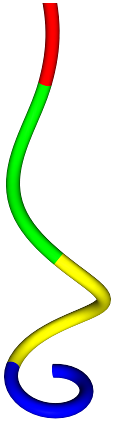
$$\mathbb{M}(q) \quad \cdot \ddot{q} \quad + \quad \boxed{\mathbb{K} \cdot (q - q^0)} \quad + \quad \mathbf{A}(q, \dot{q}) \quad = \quad \mathbf{F}(q, \dot{q}, t)$$

- Formule explicite en q, $\dot{q}$ pour chaque coefficient
- Exemple : $\mathbb{M}_{i,j} = \rho S \int_0^L \left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q_i}(s) \right)^T \cdot \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q_j}(s) \, \mathrm{d}s$

Résolution temporelle

- Schéma d'Euler semi-implicite
  $\mathbf{M}\,\mathbf{v} + \mathbf{f} = 0$ avec $\mathbf{v} = \dot{q}_{t+1}$
- Forces élastiques implicites
  $\rightarrow$ Simulations stables

Super-Hélice : exemple de simulation



Modèle de Super-Hélice : Conclusion

Avantages

- Inextensibilité parfaite
- Gamme importante de formes naturelles

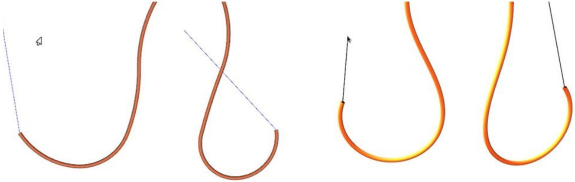
  Lisse, ondulée, bouclée
- Éléments d'ordre élevé $\rightarrow$ représentation riche
- Paramétrisation minimale et intuitive

Modèle de Super-Hélice : Conclusion

Inconvénients

- Coûteux si on raffine la précision en espace ($N > 15$)
- Ligne moyenne seulement de continuité C^1

  $\rightarrow$ Pas assez lisse visuellement

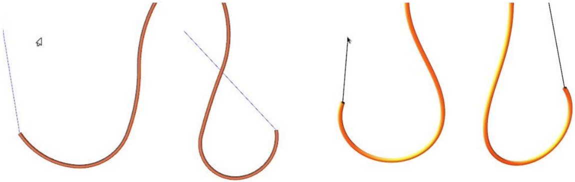


Modèle de Super-Hélice : Conclusion

Inconvénients

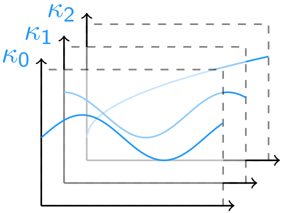
- Coûteux si on raffine la précision en espace ($N > 15$)
- Ligne moyenne seulement de continuité C^1

  → Pas assez lisse visuellement



- Peut-on imaginer un modèle d'ordre encore plus élevé ?

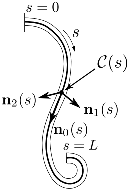
Géométrie discrète : Super-Clothoïde



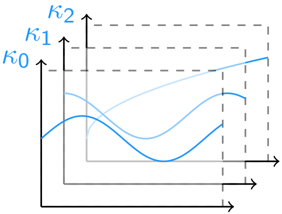
$$\longrightarrow$$

$$\forall i \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}_i}{\mathrm{ds}}(s) = \boldsymbol{\Omega}(s) \wedge \mathbf{n}_i(s)$$
$$\boldsymbol{\mathcal{R}}(0) = \boldsymbol{\mathcal{R}}_0$$

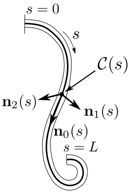
$$\longrightarrow$$



Géométrie discrète : Super-Clothoïde

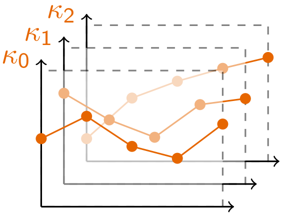


$$\forall i \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}_i}{\mathrm{ds}}(s) = \boldsymbol{\Omega}(s) \wedge \mathbf{n}_i(s)$$
$$\boldsymbol{\mathcal{R}}(0) = \boldsymbol{\mathcal{R}}_0$$

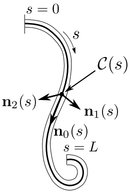


Si $\kappa_0(s)$, $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$ sont linéaires par morceau

Géométrie discrète : Super-Clothoïde

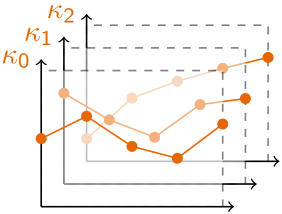


$$\boxed{\begin{array}{l} \forall i \quad \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{n}_i}{\mathrm{d}s}(s) = \boldsymbol{\Omega}(s) \wedge \mathbf{n}_i(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{R}}(0) = \boldsymbol{\mathcal{R}}_0 \end{array}}$$



Si $\kappa_0(s)$, $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$ sont linéaires par morceau

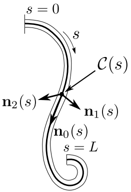
Géométrie discrète : Super-Clothoïde



$\longrightarrow$

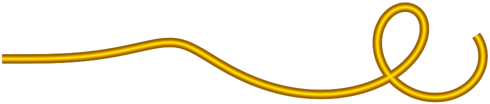
$$\boxed{\begin{array}{l} \forall i \quad \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{n}_i}{\mathrm{ds}}(s) = \boldsymbol{\Omega}(s) \wedge \mathbf{n}_i(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{R}}(0) = \boldsymbol{\mathcal{R}}_0 \end{array}}$$

$\longrightarrow$

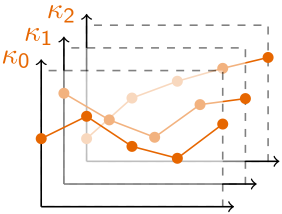


Si $\kappa_0(s)$, $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$ sont linéaires par morceau

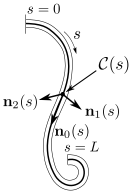
- Sur chaque morceau, solution en clothoïde 3D



Géométrie discrète : Super-Clothoïde

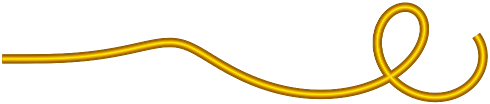


$$\longrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} \forall i \quad \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{n}_i}{\mathrm{ds}}(s) = \boldsymbol{\Omega}(s) \wedge \mathbf{n}_i(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{R}}(0) = \boldsymbol{\mathcal{R}}_0 \end{array}} \quad \longrightarrow$$



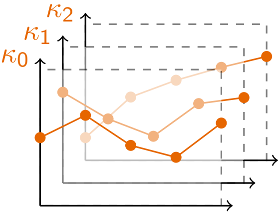
Si $\kappa_0(s)$, $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$ sont linéaires par morceau

- Sur chaque morceau, solution en clothoïde 3D

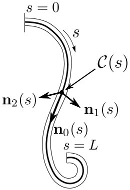


- Mais plus de solution explicite...

Géométrie discrète : Super-Clothoïde

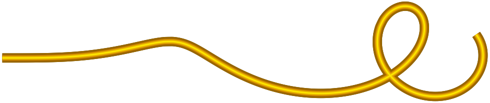


$\longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \forall i \quad \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{n}_i}{\mathrm{d}s}(s) = \boldsymbol{\Omega}(s) \wedge \mathbf{n}_i(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{R}}(0) = \boldsymbol{\mathcal{R}}_0 \end{array}}$ $\longrightarrow$



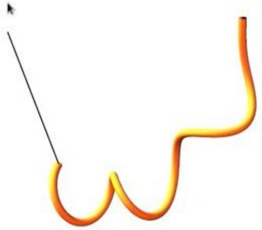
Si $\kappa_0(s)$, $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$ sont linéaires par morceau

- Sur chaque morceau, solution en clothoïde 3D



- Mais plus de solution explicite...
- Intégrer numériquement précisément et efficacement ?
  $\rightarrow$ Calcul par séries entières [Casati et Bertails-Descoubes 2013]

Super-Clothoïde : exemple de simulation



I. Modélisation directe

Phénomène physique

Modélisation directe →

Simulateur direct

1. Modèle réduit de fibre
2. Modèle de contact frottant

Observation d'un mouvement de cheveux réels

Capture de S. Paris and T. Judd (MIT)

Méthode la plus simple : pénalité et régularisation

Contact par pénalités

- Méthode par pénalité très rapide, mais ...
- Méthode très peu robuste
  - Calcul explicite des forces de pénalité
  - Difficile de régler automatiquement la raideur

Frottement régularisé

- Effet de seuil adhérence/glissement non capturé

Contact frottant par contraintes

- Calcul implicite des “bonnes” forces de contact
  → Aucun paramètre redondant à ajuster
- Prise en compte du frottement solide
- Temps de calcul plus long (système augmenté)
- Problèmes éventuels de convergence

Vers un modèle plus robuste : contraintes

Contact frottant par contraintes

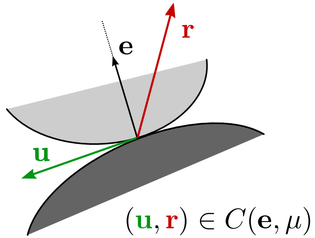
- Calcul implicite des “bonnes” forces de contact
  $\rightarrow$ Aucun paramètre redondant à ajuster
- Prise en compte du frottement solide
- Temps de calcul plus long (système augmenté)
- Problèmes éventuels de convergence

$\rightarrow$ Objectif : trouver un solveur à la fois robuste et rapide pour traiter des dizaines voire centaines de milliers de contacts frottants

Modèle de contact frottant

Modèle idéal retenu

Contact avec frottement de Coulomb

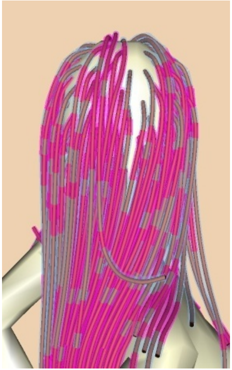


Avantages de ce modèle :

- a priori, suffisamment réaliste (effet de seuil)
- suffisamment "simple" pour être simulé

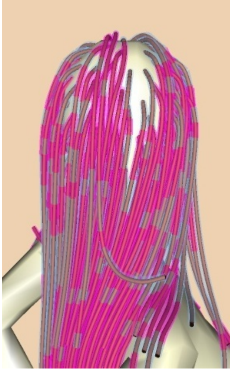
Étape préliminaire : détection des contacts

- Chaîne de cylindres englobants autour de chaque fibre



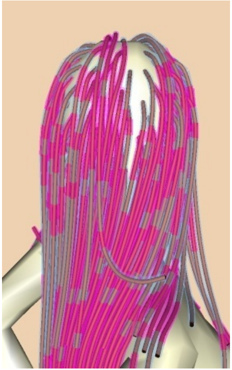
Étape préliminaire : détection des contacts

- Chaîne de cylindres englobants
  autour de chaque fibre
- Détection : calcul de la distance minimale
  - entre 2 cylindres (fibre/fibre)
  - entre 1 cylindre et 1 maillage (fibre/corps)



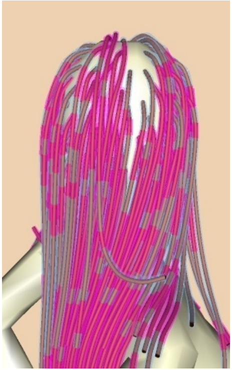
Étape préliminaire : détection des contacts

- Chaîne de cylindres englobants
  autour de chaque fibre
- Détection : calcul de la distance minimale
  - entre 2 cylindres (fibre/fibre)
  - entre 1 cylindre et 1 maillage (fibre/corps)
- Sortie :
  - Positions du point de contact
    pour les 2 objets en contact
  - Normale **e** au point de contact



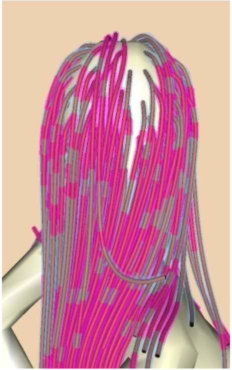
Étape préliminaire : détection des contacts

- Chaîne de cylindres englobants
  autour de chaque fibre
- Détection : calcul de la distance minimale
  - entre 2 cylindres (fibre/fibre)
  - entre 1 cylindre et 1 maillage (fibre/corps)
- Sortie :
  - Positions du point de contact
    pour les 2 objets en contact
  - Normale **e** au point de contact
- Méthodes d'accélération
  - Partitionnement des contraintes
  - Table de hachage en espace



Étape préliminaire : détection des contacts

- Chaîne de cylindres englobants
  autour de chaque fibre
- Détection : calcul de la distance minimale
  - entre 2 cylindres (fibre/fibre)
  - entre 1 cylindre et 1 maillage (fibre/corps)
- Sortie :
  - Positions du point de contact
    pour les 2 objets en contact
  - Normale **e** au point de contact
- Méthodes d'accélération
  - Partitionnement des contraintes
  - Table de hachage en espace



☹ Peut nécessiter de petits pas de temps

☺ Simple et rapide (~ 1 % du temps total de calcul)

Formulation de la dynamique avec contact frottant

- Système global (sans interactions) :

$$\mathbf{M}\,\mathbf{v} + \mathbf{f} = 0$$

$\rightarrow$ inconnue : $\mathbf{v}$

Formulation de la dynamique avec contact frottant

- Système global (sans interactions) :

$$\mathbf{M}\,\mathbf{v} + \mathbf{f} = 0$$

$\rightarrow$ inconnue : $\mathbf{v}$

- Système global (avec contact frottant) :

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathbf{M}\,\mathbf{v} + \mathbf{f} & = & \mathbf{H}^{\top} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{u} & = & \mathbf{H}\,\mathbf{v} + \mathbf{w} \\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}) & & \text{vérifie la loi de Coulomb} \end{array}\right. \tag{1}$$

$\rightarrow$ Inconnues : $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{r}$

- Soit $\mathbf{v} = \mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{H}^\top \boldsymbol{r} - \mathbf{f}\right)$

- Soit $\mathbf{v} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{H}^\top \boldsymbol{r} - \mathbf{f})$
- Formulation compacte en $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r})$:

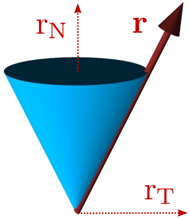
$$\left\{\begin{array}{lll} \boldsymbol{u} & = & \mathbf{W}\,\boldsymbol{r} + \mathbf{q} \\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}) & & \text{vérifie la loi de Coulomb} \end{array}\right. \tag{2}$$

où $\mathbf{W} = \mathbf{H}\,\mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{H}^\top \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$ est l'opérateur de Delassus

Loi de Coulomb : formulation disjonctive

Soit $\mu \geq 0$ le coefficient de frottement.
On définit le cône du second-ordre $\mathcal{K}_\mu$,

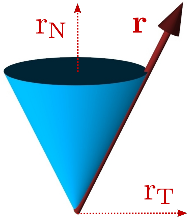
$$\mathcal{K}_\mu = \{\|r_\mathsf{T}\| \leq \mu r_\mathsf{N}\} \subset \mathbb{R}^3$$



Loi de Coulomb : formulation disjonctive

Soit $\mu \geq 0$ le coefficient de frottement.
On définit le cône du second-ordre $\mathcal{K}_\mu$,

$$\mathcal{K}_\mu = \{\|r_\mathsf{T}\| \leq \mu r_\mathsf{N}\} \subset \mathbb{R}^3$$



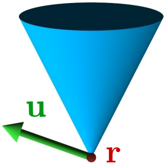
Contact frottant avec la loi de Coulomb

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}) \in C(\mathbf{e}, \mu) \iff$$

Loi de Coulomb : formulation disjonctive

Soit $\mu \geq 0$ le coefficient de frottement.
On définit le cône du second-ordre $\mathcal{K}_\mu$,

$$\mathcal{K}_\mu = \{\|r_\mathsf{T}\| \leq \mu r_\mathsf{N}\} \subset \mathbb{R}^3$$



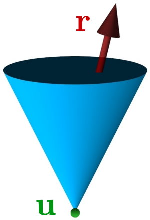
Contact frottant avec la loi de Coulomb

$$(u, r) \in C(\mathbf{e}, \mu) \iff \begin{cases} \text{soit décollage} \quad r = 0 \text{ et } u_\mathsf{N} > 0 \\ \\ \\ \end{cases}$$

Loi de Coulomb : formulation disjonctive

Soit $\mu \geq 0$ le coefficient de frottement.
On définit le cône du second-ordre $\mathcal{K}_\mu$,

$$\mathcal{K}_\mu = \{\|r_\mathsf{T}\| \leq \mu r_\mathsf{N}\} \subset \mathbb{R}^3$$



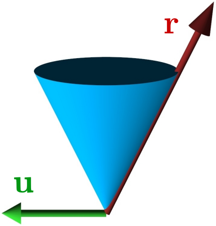
Contact frottant avec la loi de Coulomb

$$(u, r) \in C(\mathbf{e}, \mu) \iff \begin{cases} \text{soit décollage} & r = 0 \text{ et } u_\mathsf{N} > 0 \\ \text{soit adhérence} & r \in \mathrm{int}(\mathcal{K}_\mu) \text{ et } u = 0 \\ & \end{cases}$$

Loi de Coulomb : formulation disjonctive

Soit $\mu \geq 0$ le coefficient de frottement.
On définit le cône du second-ordre $\mathcal{K}_\mu$,

$$\mathcal{K}_\mu = \{\|r_\mathsf{T}\| \leq \mu r_\mathsf{N}\} \subset \mathbb{R}^3$$



Contact frottant avec la loi de Coulomb

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}) \in C(\mathbf{e}, \mu) \iff \begin{cases} \text{soit décollage} & r = 0 \text{ et } u_\mathsf{N} > 0 \\ \text{soit adhérence} & r \in \mathrm{int}(\mathcal{K}_\mu) \text{ et } u = 0 \\ \text{soit glissement} & r \in \mathrm{bord}(\mathcal{K}_\mu) \setminus 0,\ u_\mathsf{N} = 0 \\ & \text{et } \exists \alpha \geq 0,\ u_\mathsf{T} = -\alpha\, r_\mathsf{T} \end{cases}$$

Beaucoup de formulations possibles

Beaucoup de formulations possibles

Deux exemples :

1. Formulation disjonctive :
   → Explorer de manière énumérative tous les cas
   - ☺ Solution exacte [Bonnefon et Daviet 2011]
   - ☹ Complexité exponentielle

Beaucoup de formulations possibles

Deux exemples :

1. Formulation disjonctive :
   $\rightarrow$ Explorer de manière énumérative tous les cas
   - Solution exacte [Bonnefon et Daviet 2011]
   - Complexité exponentielle
2. Formulation fonctionnelle :
   $f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r}) = \mathbf{0} \iff (\boldsymbol{u},\boldsymbol{r}) \in C(\mathbf{e},\mu)$
   $\rightarrow$ Recherche de zéro d'une fonction non-régulière

Loi de Coulomb : formulation fonctionnelle

Formulation d'Alart et Curnier [1991]

$$\boldsymbol{f}^{AC}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r}) = \left[\begin{array}{c} f_N^{AC}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r}) \\ \boldsymbol{f}_T^{AC}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r}) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{lcc} \mathrm{P}_{\mathbb{R}^+}(r_N - \rho_N u_N) & - & r_N \\ \mathrm{P}_{\boldsymbol{B}(\mathbf{0},\mu r_N)}(\boldsymbol{r}_T - \rho_T \boldsymbol{u}_T) & - & \boldsymbol{r}_T \end{array}\right]$$

où ρ_N, $\rho_T \in \mathbb{R}_+^*$ et P_K est la projection sur le convexe K.

$$\boxed{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r}) \in C(\mathbf{e},\mu) \iff \boldsymbol{f}^{AC}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r}) = \mathbf{0}}$$

Loi de Coulomb : formulation fonctionnelle

Formulation d'Alart et Curnier [1991]

$$\boldsymbol{f}^{AC}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} f_N^{AC}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r}) \\ \boldsymbol{f}_T^{AC}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{P}_{\mathbb{R}^+}(r_N - \rho_N u_N) & - & r_N \\ \mathrm{P}_{\boldsymbol{B}(\mathbf{0},\mu r_N)}(\boldsymbol{r}_T - \rho_T \boldsymbol{u}_T) & - & \boldsymbol{r}_T \end{bmatrix}$$

où ρ_N, $\rho_T \in \mathbb{R}_+^*$ et P_K est la projection sur le convexe K.

$$\boxed{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r}) \in C(\mathbf{e},\mu) \iff \boldsymbol{f}^{AC}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r}) = \mathbf{0}}$$

Une méthode de résolution

- Algorithme de Newton non-régulier

Résultats de tests de multiples solveurs

- Les solveurs globaux ne passent pas à l'échelle

Résultats de tests de multiples solveurs

- Les solveurs globaux ne passent pas à l'échelle
  $\rightarrow$ Résolution itérative contact par contact

Résultats de tests de multiples solveurs

- Les solveurs globaux ne passent pas à l'échelle
  $\rightarrow$ Résolution itérative contact par contact
- Un échec sur 1 contact fait échouer la boucle

Résultats de tests de multiples solveurs

- Les solveurs globaux ne passent pas à l'échelle
  $\rightarrow$ Résolution itérative contact par contact
- Un échec sur 1 contact fait échouer la boucle
  $\rightarrow$ Effort porté sur le solveur local

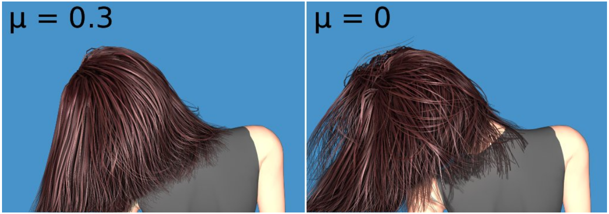
Résultats de tests de multiples solveurs

- Les solveurs globaux ne passent pas à l'échelle
  $\rightarrow$ Résolution itérative contact par contact
- Un échec sur 1 contact fait échouer la boucle
  $\rightarrow$ Effort porté sur le solveur local
- Sur 1 contact donné, réussite variable selon la méthode

Résultats de tests de multiples solveurs

- Les solveurs globaux ne passent pas à l'échelle
  $\rightarrow$ Résolution itérative contact par contact
- Un échec sur 1 contact fait échouer la boucle
  $\rightarrow$ Effort porté sur le solveur local
- Sur 1 contact donné, réussite variable selon la méthode
  $\rightarrow$ Choix d'une méthode hybride
  Newton non-régulier + solveur énumératif exact [Daviet et al. 2011]

Quelques résultats



II. Modélisation inverse

Phénomène physique

Modélisation directe →

Simulateur direct

II. Modélisation inverse

Phénomène physique

Modélisation directe

Simulateur direct

Paramètres

- Matériau $(\rho S, EI, \mu)$
- Forme au repos (q^0)

Phénomène physique

Modélisation directe

Simulateur direct

Paramètres

- Matériau $(\rho S, EI, \mu)$
- Forme au repos (q^0)

Référence géométrique

Phénomène physique

Modélisation directe

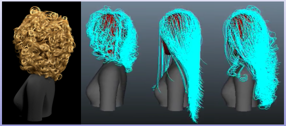
Simulateur direct

Paramètres

- Matériau ($\rho S, EI, \mu$)
- Forme au repos (q^0)

Référence géométrique

Essais-erreurs



II. Modélisation inverse

Phénomène physique

Modélisation directe

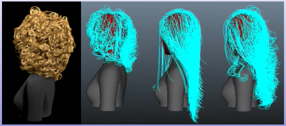
Simulateur direct

Paramètres

- Matériau $(\rho S, EI, \mu)$
- Forme au repos (q^0)

Référence géométrique

Essais-erreurs



II. Modélisation inverse

Phénomène physique

Modélisation directe

Simulateur direct

Paramètres

- Matériau $(\rho S, EI, \mu)$
- Forme au repos (q^0)

Référence géométrique

Phénomène physique

Modélisation directe

Simulateur direct

Paramètres

- Matériau $(\rho S, EI, \mu)$
- Forme au repos (q^0)

Référence géométrique

$q^0 \leftarrow q$

Phénomène physique

Modélisation directe

Simulateur direct

Paramètres

- Matériau $(\rho S, EI, \mu)$
- Forme au repos (q^0)

Référence géométrique

$q^0 \leftarrow q$

II. Modélisation inverse

Phénomène physique

Modélisation directe →

Simulateur direct

Paramètres

- Matériau $(\rho S, EI, \mu)$
- Forme au repos (q^0)

Référence géométrique

Modélisation inverse →

Simulateur statique inverse

1. Fibre isolée
2. Assemblée de fibres

Objectif

Étant donné q, trouver q^0, $E\,I$ and $\rho\,S$
tels que l'état q soit un équilibre stable

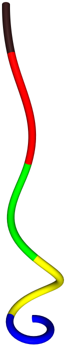
Objectif

Étant donné q, trouver q^0, $E\,I$ and $\rho\,S$
tels que l'état q soit un équilibre stable

Condition d'équilibre

$$\mathbb{K}(E\,I) \cdot \left(q - q^0\right) = F(q, \rho\,S)$$

$\rightarrow$ Résoudre un système linéaire de taille $\sim 3\,N$



Statique inverse d'un "Super-Modèle"

Objectif

Étant donné q, trouver q^0, $E\,I$ and $\rho\,S$
tels que l'état q soit un équilibre stable

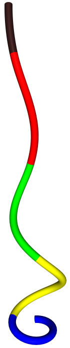
Condition d'équilibre

$$\mathbb{K}(E\,I) \cdot \left(q - q^0\right) = F(q, \rho\,S)$$

$\rightarrow$ Résoudre un système linéaire de taille $\sim 3\,N$

Condition suffisante de stabilité

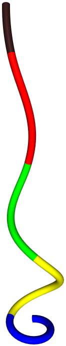
$$\frac{E\,I}{\rho\,S} \geq A(q)$$



Statique inverse d'un "Super-Modèle"

Objectif

Étant donné q, trouver q^0, $E\,I$ and $\rho\,S$
tels que l'état q soit un équilibre stable



Condition d'équilibre

$$\mathbb{K}(E\,I) \cdot \left(q - q^0\right) = F(q, \rho\,S)$$

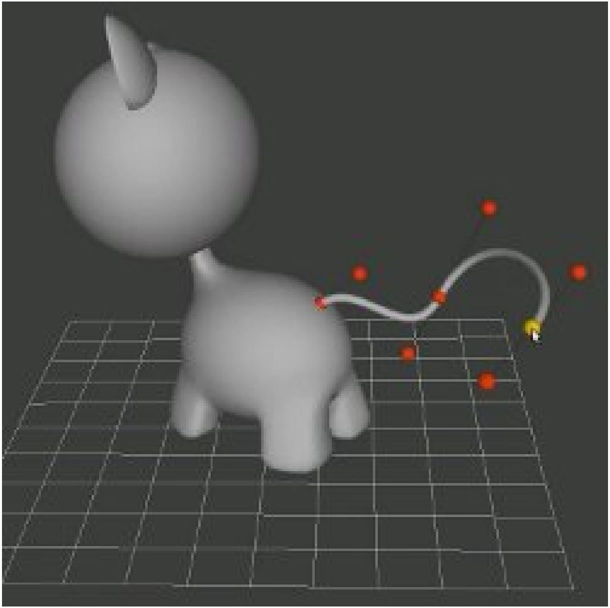
$\rightarrow$ Résoudre un système linéaire de taille $\sim 3\,N$

Condition suffisante de stabilité

$$\frac{E\,I}{\rho\,S} \geq A(q)$$

$\rightarrow$ Calculer les valeurs propres d'une matrice réelle symétrique

(Détails dans [Derouet-Jourdan et al. 2010])



Statique inverse d'un "Super-Modèle" : Conclusion

- L'inversion statique est triviale pour un "Super-Modèle" isolé

Statique inverse d'un "Super-Modèle" : Conclusion

- L'inversion statique est triviale pour un "Super-Modèle" isolé
- Unique difficulté d'ordre géometrique :
  Convertir une courbe en hélice/clothoïde par morceaux ?

Statique inverse d'un “Super-Modèle” : Conclusion

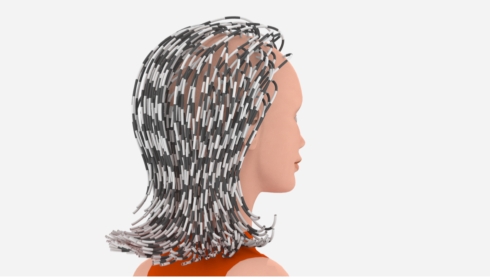
- L'inversion statique est triviale pour un “Super-Modèle” isolé
- Unique difficulté d'ordre géometrique :
  Convertir une courbe en hélice/clothoïde par morceaux ?
- Des algorithmes d'approximation robustes et rapides peuvent être conçus

  Exemple : algorithme des tangentes flottantes [Derouet-Jourdan et al. 2013]

Modélisation inverse d'une chevelure

En entrée : ensemble de courbes géométriques

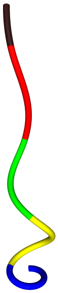
En sortie : courbures naturelles (q^0) des Super-Hélices



→ Interpréter la géométrie comme un ensemble de Super-Hélices à l'équilibre sous la gravité et les contacts frottants

Sans contact

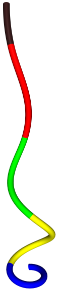
$$\mathbb{K} \cdot (q - q^0) = \mathbf{F}$$



$$q^0 = q - \mathbb{K}^{-1}\mathbf{F}$$

Sans contact

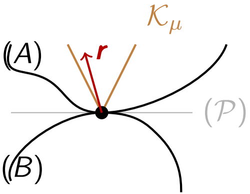
$$\mathbb{K} \cdot (q - q^0) = \mathbf{F}$$



$$q^0 = q - \mathbb{K}^{-1}\mathbf{F}$$

Avec contact frottant

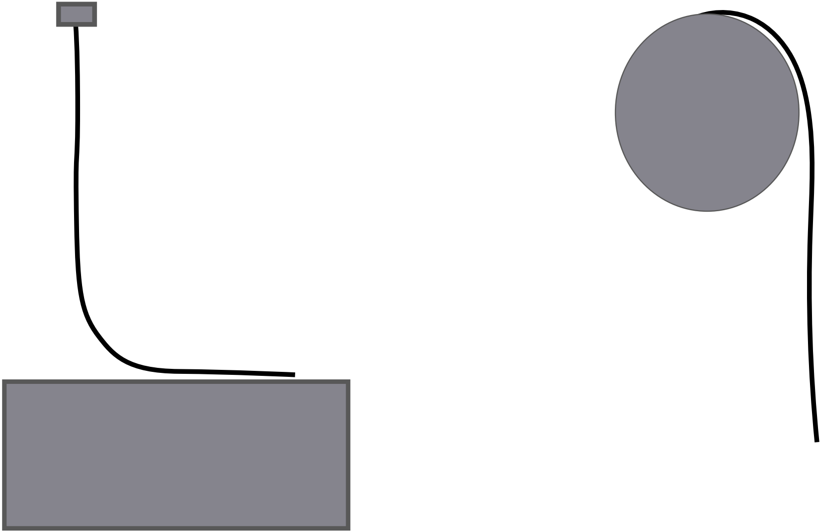
$$\begin{cases} \mathbb{K} \cdot (q - q^0) = \mathbf{F} + \mathbf{H}^\top \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{r} \in \mathrm{int}(\mathcal{K}_\mu) \text{ (cône de Coulomb)} \end{cases}$$



$$\begin{cases} q^0 = q - \mathbb{K}^{-1} \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{H}^\top \boldsymbol{r}) \\ \boldsymbol{r} \in \mathcal{K}_\mu \end{cases}$$

Problème sous-déterminé

Découplage de la gravité et des contacts



Notre approche

- Estimer q^0 : $\underline{q}^0$

Notre approche

- Estimer q^0 : $\underline{q}^0$
- Trouver la “meilleure” force $\boldsymbol{r}$, i.e., telle que :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\boldsymbol{r}} & \frac{1}{2}\| \overbrace{q - \mathbb{K}^{-1}(\mathbf{H}^\top \boldsymbol{r} + \mathbf{F})}^{q^0} - \underline{q}^0 \|^2 \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{r} \in \mathcal{K}_\mu \end{array}$$

Notre approche

- Estimer q^0 : $\underline{q}^0$
- Trouver la "meilleure" force $\boldsymbol{r}$, i.e., telle que :

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{r}} \quad & \frac{1}{2}\| \overbrace{q - \mathbb{K}^{-1}(\mathbf{H}^\top \boldsymbol{r} + \mathbf{F})}^{q^0} - \underline{q}^0 \|^2 + \gamma \|\boldsymbol{r}\|^2 \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{r} \in \mathcal{K}_\mu \end{aligned}$$

- γ : paramètre de régularisation

Notre approche

- Estimer q^0 : $\underline{q}^0$
- Trouver la “meilleure” force $\boldsymbol{r}$, i.e., telle que :

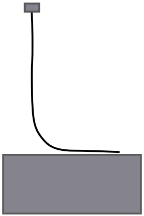
$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\boldsymbol{r}} & \frac{1}{2}\| \overbrace{q - \mathbb{K}^{-1}(\mathbf{H}^\top \boldsymbol{r} + \mathbf{F})}^{q^0} - \underline{q}^0 \|^2 + \gamma \|\boldsymbol{r}\|^2 \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{r} \in \mathcal{K}_\mu \end{array}$$

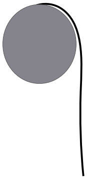
- γ : paramètre de régularisation

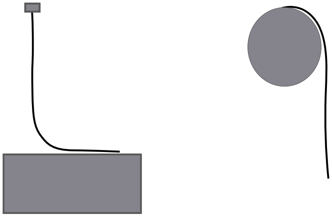
$\rightarrow$ Peut être résolu grâce à notre solveur direct pour la dynamique !

(Détails dans [Derouet-Jourdan et al. 2013])

Heuristique pour trouver $\underline{q}^0$

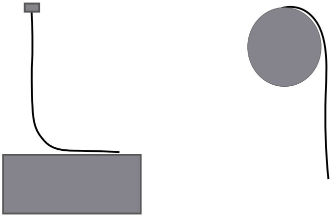






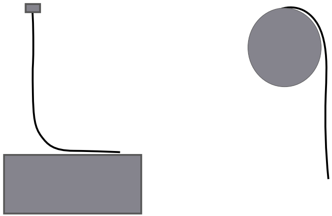
1. $\underline{q}^0 = q(L)$

Heuristique pour trouver $\underline{q}^0$



1. $\underline{q}^0 = q(L)$
2. $\underline{q}^0 = q$

Heuristique pour trouver $\underline{q}^0$



1. $\underline{q}^0 = q(L)$
2. $\underline{q}^0 = q$

Rappelons-nous que :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\boldsymbol{r}} & \frac{1}{2}\| \overbrace{q - \mathbb{K}^{-1}(\mathbf{H}^\top \boldsymbol{r} + \mathbf{F})}^{q^0} - \underline{q}^0\|^2 + \gamma\|\boldsymbol{r}\|^2 \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{r} \in \mathcal{K}_\mu \end{array}$$

$\rightarrow$ Trouver $\boldsymbol{r}$ qui minimise l'énergie élastique de la tige

3 coiffures

8922 contacts	30381 contacts	14358 contacts
5s	19s	15s

Beaucoup de limitations...

- Heuristique très simple pour estimer $\underline{q}^0$
- Grande dépendance aux données d'entrée
- Pas de critère de stabilité ($\neq$ cas isolé)
- Beaucoup de paramètres supposés connus

Discussion

Beaucoup de limitations...

- Heuristique très simple pour estimer $\underline{q}^0$
- Grande dépendance aux données d'entrée
- Pas de critère de stabilité ($\neq$ cas isolé)
- Beaucoup de paramètres supposés connus

... Néanmoins

- Résultats plausibles
- La solution proposée est exactement un équilibre
- Inversion très rapide

Modélisation numérique directe et inverse : bilan

Phénomène physique

Modélisation directe →

Simulateur direct

Paramètres

- Matériau $(\rho S, EI, \mu)$
- Forme au repos (q^0)

Référence géométrique

Modélisation inverse →

Simulateur statique inverse

1. Fibre isolée
2. Assemblée de fibres

Perspectives

- Validation expérimentale

Perspectives

- Validation expérimentale
- Méthode directe : modèle alternatif basé sur un continuum ?

Perspectives

- Validation expérimentale
- Méthode directe : modèle alternatif basé sur un continuum ?
- Méthode inverse :
  - Raffiner l'identification (plusieurs poses, dynamique)
  - Extension possible aux vêtements ?

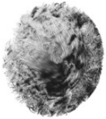
D-WOD

4D Views

Code source

http://www.inrialpes.fr/bipop/people/bertails/Papiers/Code

Cloc, simulating the dynamics of arbitrary curly thin elastic rods.
This code is the reference implementation of our **Super Space Clothoids** paper.
Citation: Romain Casati and Florence Bertails-Descoubes, *Super Space Clothoids*, **ACM SIGGRAPH 2013**.



Approche, converting a space curve into a smooth piecewise helix.
This code is the reference implementation of our **3D Floating Tangents** paper.
Citation: Alexandre Derouet-Jourdan, Florence Bertails-Descoubes, and Joëlle Thollot, *Floating Tangents for Approximating Spatial Curves with G^1 Piecewise Helices*, **Computer-Aided Geometric Design 2013**.
Note: We have also been leveraging this code in our **Inverse Dynamic Hair Modeling** paper to convert splines into the geometry of super-helices.

Bogus, a fast and robust solver for capturing frictional contact between many Lagrangian systems with exact Coulomb friction.
This code is a new reimplementation by **Gilles Daviet** and serves as a reference code for our **Hybrid Iterative Solver** paper. The method significantly improves robustness and scaling up compared to **Double Loop**.
Citation: Gilles Daviet, Florence Bertails-Descoubes, and Laurence Boissieux, *A Hybrid Iterative Solver for Robustly Capturing Coulomb Friction in Hair Dynamics*, **ACM SIGGRAPH Asia 2011**.
Note: We have also been leveraging this code in our **Super Space Clothoids** paper to simulate dry frictional contact and in our **Inverse Dynamic Hair Modeling** paper to efficiently solve the inverse problem formulated as a large second-order cone quadratic program.

Remerciements

Merci à

- Alexandre Derouet-Jourdan
- Romain Casati
- Gilles Daviet

Remerciements

Merci à

- Alexandre Derouet-Jourdan
- Romain Casati
- Gilles Daviet

Merci pour votre attention !