



Modélisation géométrique constructive

Choix d'une représentation

Marie-Paule Cani

Univ. Grenoble-Alpes, CNRS & Inria



COLLÈGE
DE FRANCE
—1530—



Organisation du cours

« Façonner l'imaginaire »

Partie 1 : Création numérique 3D

- *Cours 1 : Modélisation géométrique constructive : choix d'une représentation*
Séminaire : Combiner les objets 3D par composition de fonctions. Loïc Barthe.
- Sculpture virtuelle: des modèles d'argile aux déformations de l'espace
- Modélisation 3D à partir de dessins 2D
- Réutilisation et transfert des modèles 3D

Partie 2 : Mondes virtuels animés

- Création intuitive des éléments d'un paysage
- Animation efficace de phénomènes naturels : des détails qui s'adaptent
- Humains et créatures virtuelles : animation par habillages successifs
- Vers une animation expressive – marier réalisme et contrôle ?

Motivation

Modéliser les formes que l'on imagine

Objectifs

- Nouvelles formes (pas de reconstruction)
 - Contrôle par un utilisateur (pas de génération)
- *Modélisation interactive*



Cette séance

- Notion de « modélisation constructive »
- Importance d'une représentation adaptée
- **Avancées récentes** : les surfaces implicites.



- ✓ **Modélisation constructive**
- ✓ *Choix d'une représentation*
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

Les formes : définitions

Forme : Structure géométrique dans un espace 3D

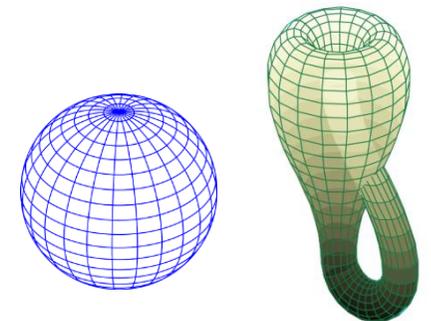
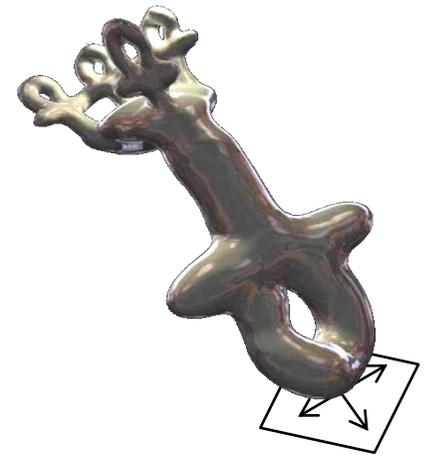
- 1D (courbes), 2D (surfaces), 3D (volumes)
- Toute combinaison des précédentes

Forme **libre** : toute géométrie et tout genre topologique

Forme **lisse** :

- Classe C^1 : continuité des tangentes
- Classe C^2 : continuité des courbures

Formes 3D : représentation **volumique** ou **par bord**



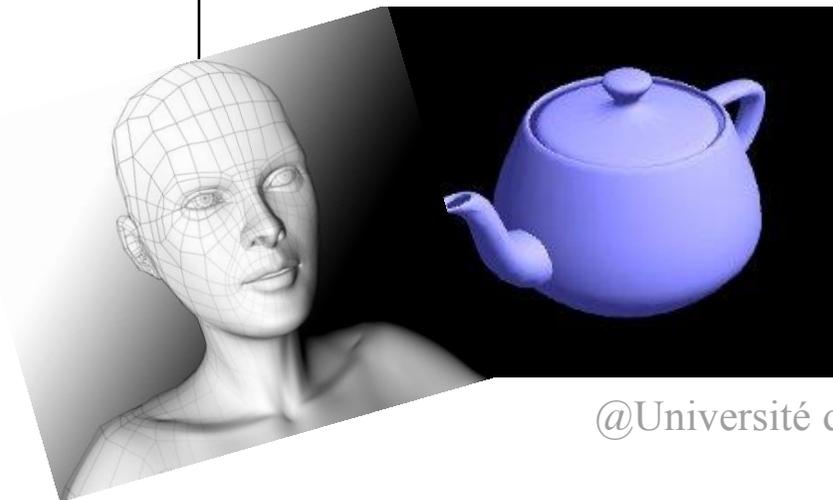
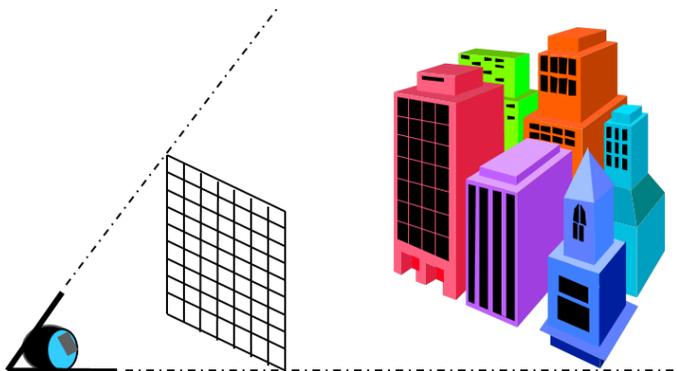
Les Formes 3D

Vues par les machines / Vues par les humains

- Modèle mathématique
 - Enumération (ex : liste faces)
 - Équation pour la calculer
- Rendu : projection des éléments

[Travaux de Michael Leyton]

- Forme = assemblage de parties
- Partie = déformation d'une version plus symétrique



[A generative theory of shapes. M. Leyton, Springer]

@Université de l'Utah, 1982

Les Formes 3D

Vues par les machines / Vues par les humains

- Modèle mathématique
 - Liste d'éléments
 - Équation pour la retrouver
- **Spécifier les degrés de liberté**
 - Donner la liste
 - ou la valeur des paramètres

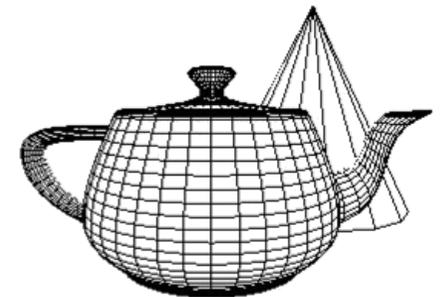
Gagnent à la fin !

- Forme = assemblage de parties
- Partie = déformation d'une version plus symétrique

→ **Modélisation « constructive »**

= suite d'opérations :

- Créer
- Déformer
- Assembler



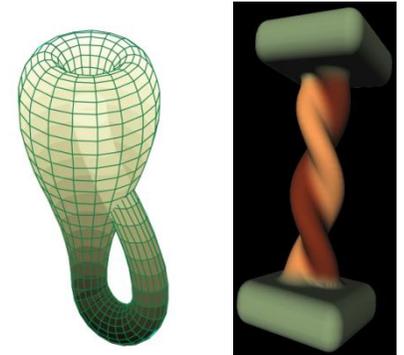
Source d'incompréhension !

- ✓ **Modélisation constructive**
- ✓ *Choix d'une représentation*
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

Modélisation constructive

Les besoins

1. Pouvoir créer des formes libres
2. Rester dans l'espace des formes 'valides'
 - Pas de bouteille de Klein
 - Eviter les auto-intersections
3. Modélisation progressive
4. Affichage temps réel
 - Quelque soit la durée de la modélisation



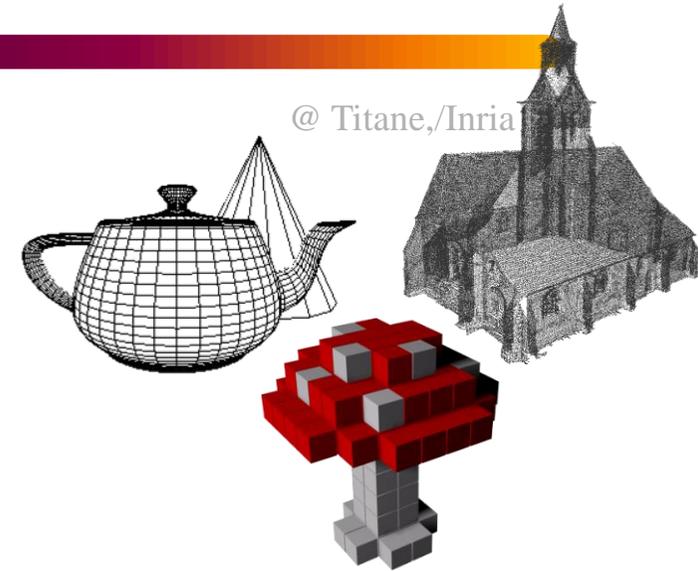
→ ***Choix d'une représentation adaptée ?***

- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ ***Choix d'une représentation***
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

Représentations Discrètes

Enumération

- points 0D, segments 1D
- faces 2D (*maillages* si info voisinage)
- voxels 3D : volumes



Représentations non lisses

- Adaptées à la création automatique
- Inadaptées à la création manuelle

(Sauf à titre ludique!)

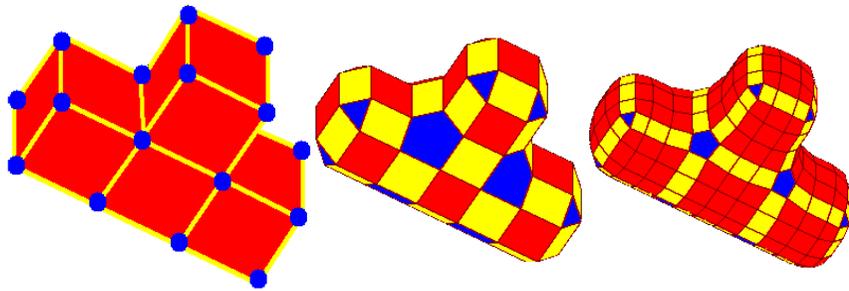
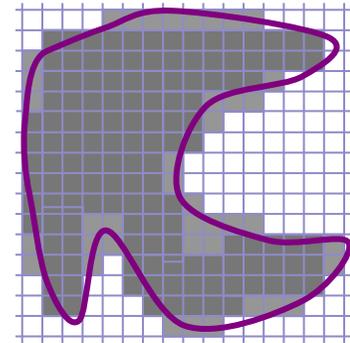


- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ *Choix d'une représentation*
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

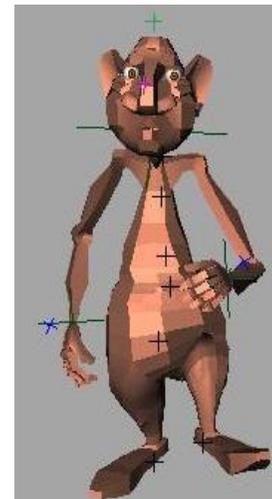
Représentations Algorithmiques

Représentation discrète + méthode de lissage automatique

- *Voxels* : Densité scalaire interpolée dans la grille
 - Afficher la surface d'iso-densité 0.5
- *Maillage* : Surfaces de subdivision
 - Difficulté : contrôle de la forme limite



« couper les coins » récursivement



- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ ***Choix d'une représentation***
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

Représentations continues

Forme (courbe, surface, volume) définie par une équation

- Equation **paramétrique** ou **implicite**

Exemple : Sphère de rayon r

Surface paramétrique

$$S(u,v) = (r \sin(u)\cos(v), r \sin(u)\sin(v), r \cos(u))$$

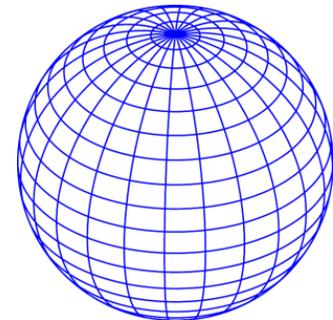
$$u \in [0, \pi], v \in [0, 2\pi]$$

Surface implicite

$$I = \{P \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

Volume implicite

$$V = \{P \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$$



- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ **Choix d'une représentation**
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

Modélisation constructive

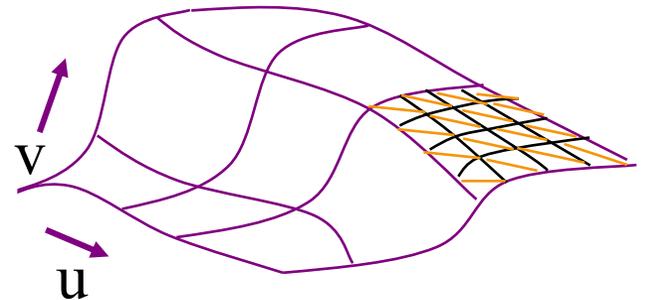
Choix d'une représentation ?

Avantages des représentations continues

- Moins de paramètres à définir (ex sphère : rayon, centre)
- Un objet lisse reste lisse à toutes les échelles
- Convertible en représentation discrète à l'échelle qu'on veut

Ex: Surface paramétrique $S(u, v) = (S_x(u, v), S_y(u, v), S_z(u, v))$

- Calculer une grille de points
- La trianguler (faces planes)



- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ ***Choix d'une représentation***
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

Modélisation constructive

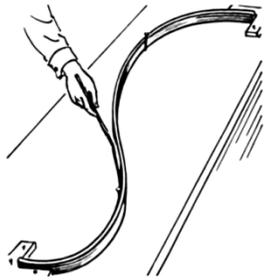
Choix d'une représentation ?

Boucle de modélisation constructive

1. Créer des formes simples
2. Les déformer – doit être intuitif
3. Les assembler – si possible de manière invisible



Tentative avec des surfaces paramétriques?



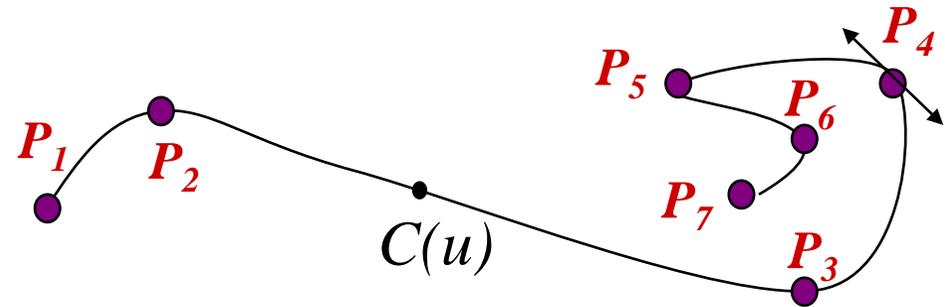
Modélisation paramétrique

Courbe spline

Inspiré par un ancien outil de dessin

Création

- Liste de « points de contrôle » P_i
- A interpoler ou à approximer : $C(u) = \sum F_i(u) P_i$



Déformation

- Besoin de contrôle local
- F_i polynômes de bas degré (degré 3), à support compact

Assemblage

- Raccordement C^1 ou C^2

- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ **Choix d'une représentation**
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

Spline d'interpolation

“Cardinal Spline”

Assemblage C^1 (tangentes continues)

$$C_i(0) = P_i$$

$$C_i(1) = P_{i+1}$$

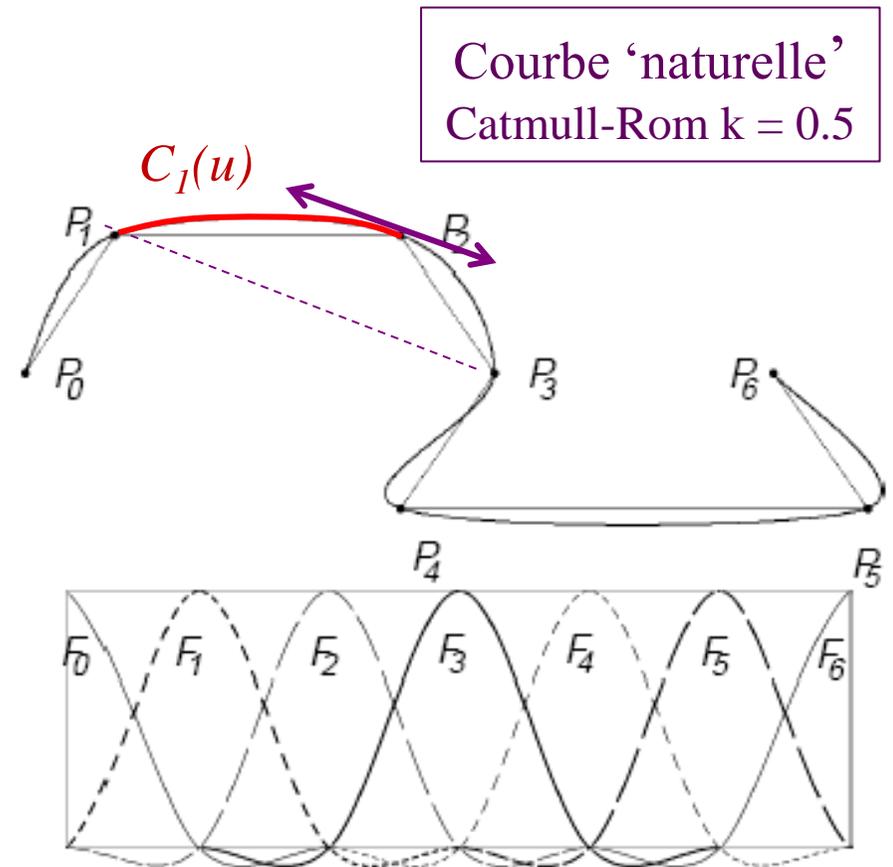
$$C'_i(0) = k (P_{i+1} - P_{i-1})$$

$$C'_i(1) = k (P_{i+2} - P_i)$$

$$C_i(u) = \sum F_i(u) P_i$$

Solution unique avec $F_i(u)$ de degré 3

- Localité d'ordre 4
 - $F_i(u)$ n'est pas toujours positif
- $C(u)$ sort de l'enveloppe convexe



- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ ***Choix d'une représentation***
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

Spline d'approximation

Bspline cubique uniforme

Obtenir du C^2 avec F_i locale, d^03 ?

Segment de courbe défini par :

- Contrôle local d'ordre 4
- Approximation
- Enveloppe convexe
- Courbe régularisante

$$C_i(u) = \sum F_i(u) P_i$$

Pour tout u , $F_i(u) \geq 0$, $\sum F_i(u) = 1$

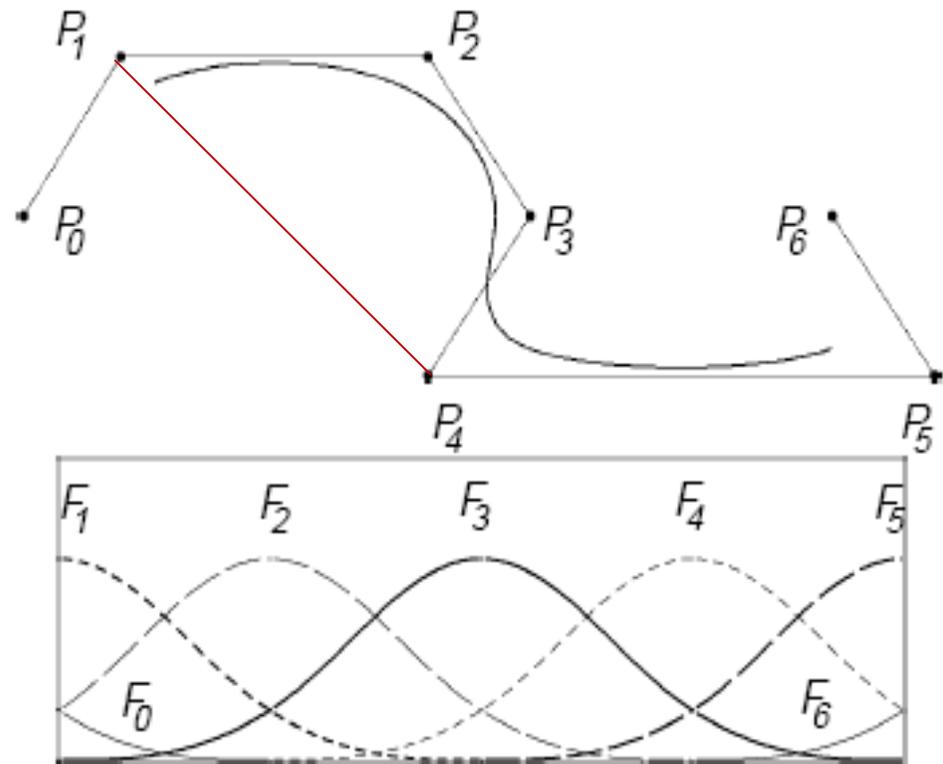


Figure 1: Uniform B-spline curve

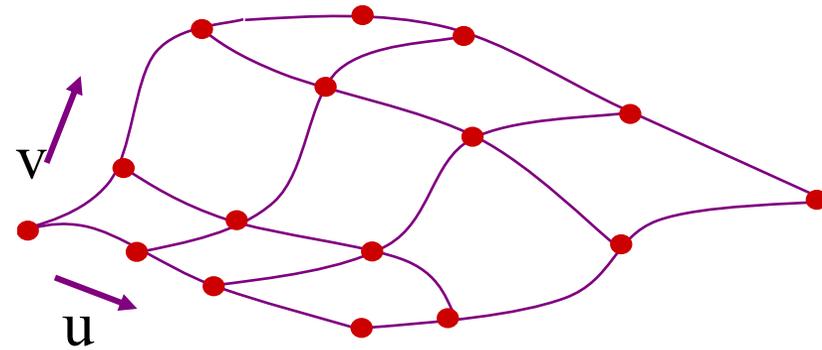
- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ *Choix d'une représentation*
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

Modélisation paramétrique

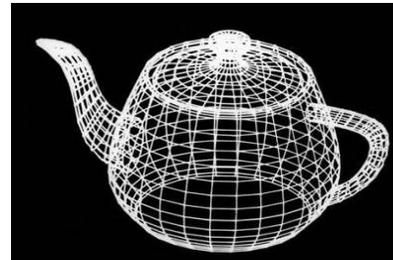
Surface spline

- Produit de courbes splines en u et v

$$S_{i,j}(u, v) = \sum F_i(u) F_j(v) P_{ij}$$



- Il faut une **grille** de point de contrôle
- Comment créer des formes complexes?



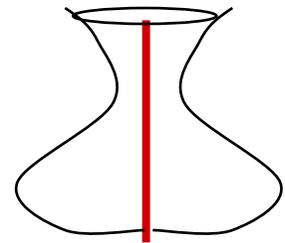
- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ **Choix d'une représentation**
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

Modélisation paramétrique

Surface spline : Créer

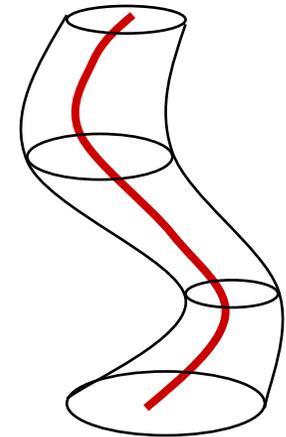
- **Surfaces de révolution**

- Rotation d'une courbe plane autour d'un axe



- **Extrusion**

- Une courbe sert de « squelette » à la forme
- Une section est promenée le long du squelette
- Un facteur d'échelle variable peut être appliqué

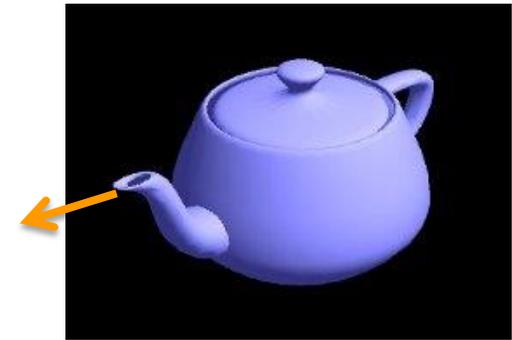


- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ ***Choix d'une représentation***
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

Modélisation paramétrique

Surface spline : Déformer

- ***Déformation locale***
 - Déplacer les points de contrôle



@Université de l'Utah,
1982

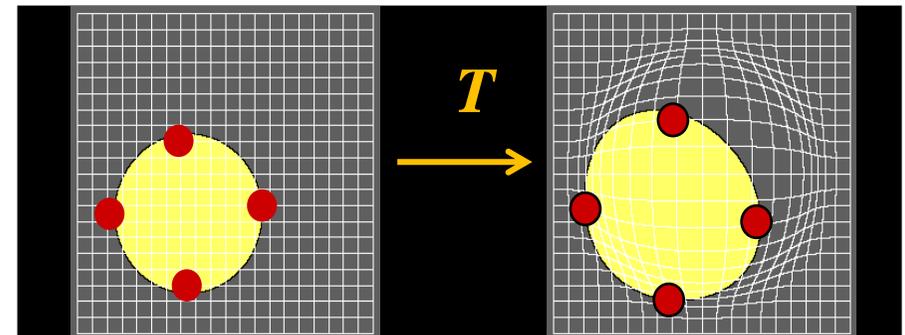
- ***Déformation globale ?***

Plonger l'objet dans un « champ de déformation » $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Les points de contrôle se déplacent

La surface se déforme

(Détailé dans cours « sculpture »)

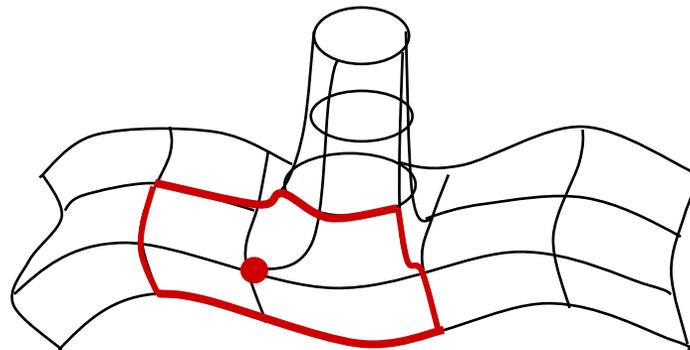
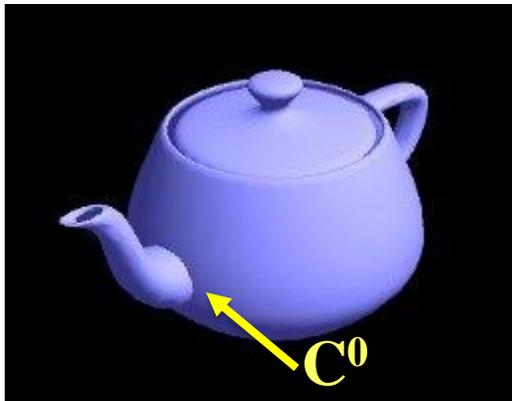
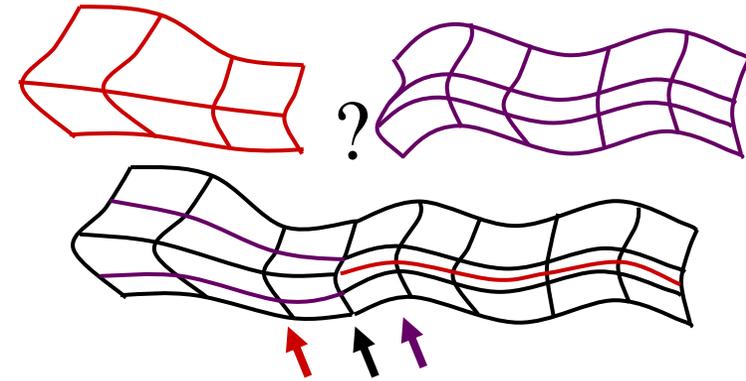


- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ ***Choix d'une représentation***
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

Modélisation paramétrique

Surface spline : Assembler

- **Bord à bord... OK**
 - Même nombre de carreaux
 - 3 rangées de points communes
- **Poignées, embranchements ?**
Très difficile!



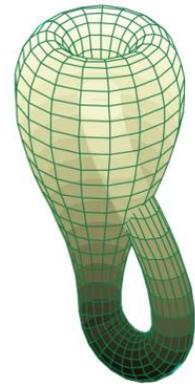
S-patch rationnel @ACM

- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ *Choix d'une représentation*
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

Surfaces paramétriques

Limitations pour les formes 3D

- Modélisation par bord uniquement
 - On peut modéliser des **formes incorrectes** (Bouteille de Klein...)
- **Mais difficile d'obtenir ceci :**
 - Genre topologique arbitraire
 - Des embranchements lisses



- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ **Choix d'une représentation**
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

Modélisation volumique

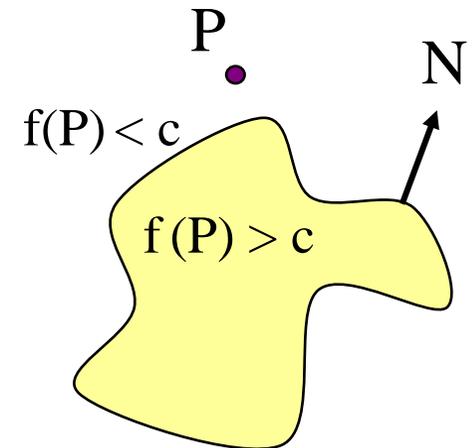
Surfaces implicites

$I = \{ P / f(P) = c \}$ $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est un champ scalaire

(ex sphère : $f(P) = x^2 + y^2 + z^2$ et $c = r^2$)

S découpe l'espace en deux parties, dont une finie

- Volume fini (« intérieur ») $f(P) > c$
- Normale à la surface $N = - \nabla f$ (« gradient »)
 f et S ont le même degré de continuité !
- Difficile d'énumérer les points
Test « dedans / dehors » ($f(P)$?)

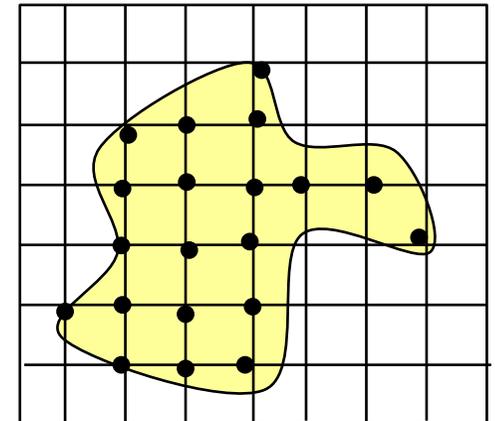
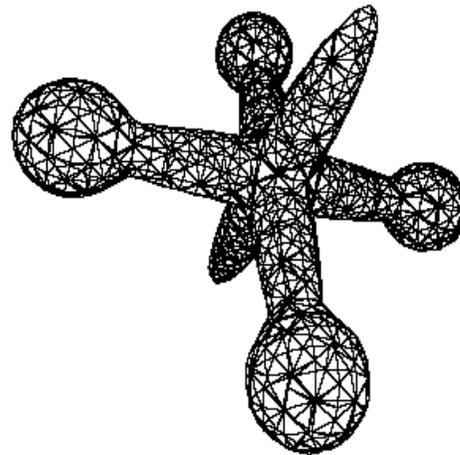
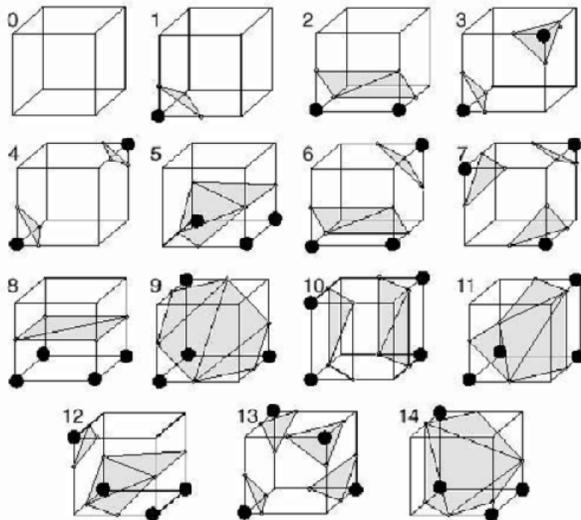


- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ *Choix d'une représentation*
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

Surfaces implicites

Discrétisation pour l'affichage

- **Discrétisation par « marching cubes »** [*Lorensen 1991*]
 - Classer les points d'une grille dedans/dehors : $f(P) \geq c \rightarrow \text{noir}$
 - Extraire les cubes qui coupent la surface
 - Les trianguler



- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ ***Choix d'une représentation***
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

Modélisation constructive

Choix d'une représentation ?

Boucle de modélisation constructive

1. Créer des formes simples
2. Les déformer – doit être intuitif
3. Les assembler – si possible de manière invisible



Tentative avec des surfaces implicites ?

- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ **Choix d'une représentation**
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

Surfaces implicites

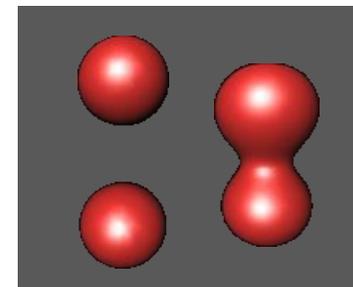
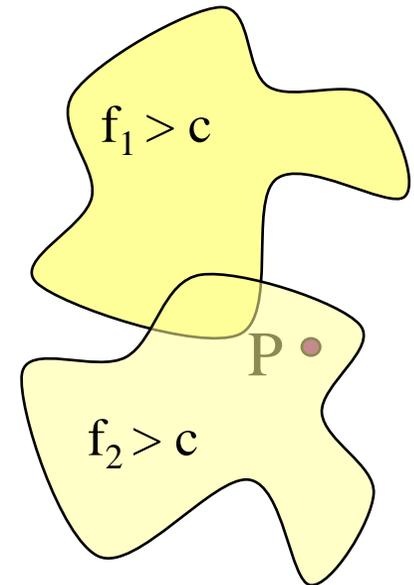
Assembler

Soient $I_1 = \{ P / f_1(P) = c \}$ et $I_2 = \{ P / f_2(P) = c \}$
 f_1 et f_2 continus, dérivables

Assemblage : calculer $I = \{ P / f(P) = c \}$

- $f = \max(f_1, f_2) \rightarrow$ **Union**
- $f = \min(f_1, f_2) \rightarrow$ **Intersection**
- $f = f_1 + f_2 \rightarrow$ « **Mélange** »

Préserve le degré de continuité!



- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ **Choix d'une représentation**
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

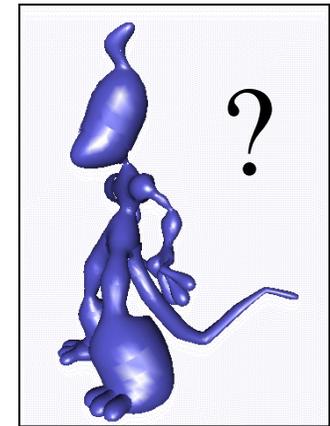
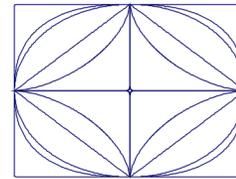
Surfaces implicites

Créer ?

- Création par équation vite limitée...

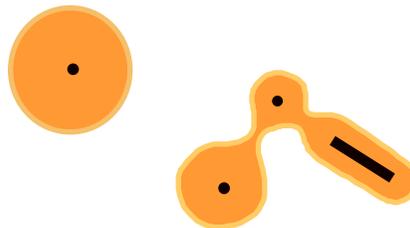
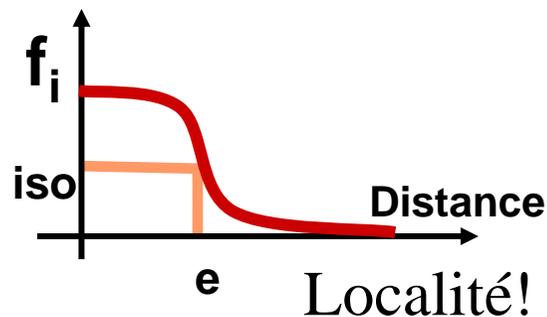
Sphères : $f(P) = x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

Super-ellipsoïdes : $f(P) = \frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1$



- Solution : surfaces implicites à **squelette**

f : fonction décroissante de $d(P, S) \rightarrow$ *densité de matière* autour de S



$$f(P) = \sum f_i(P) = c$$

Squelettes :
points, courbes
surfaces...

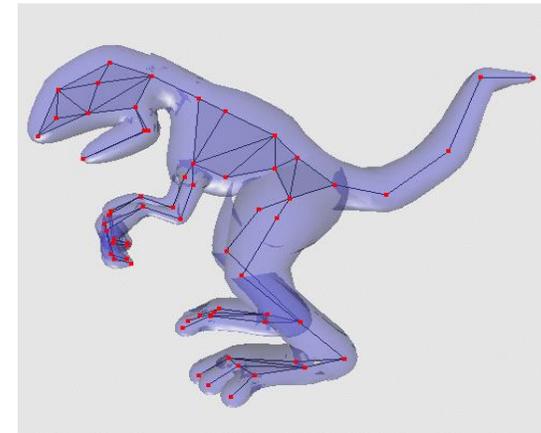
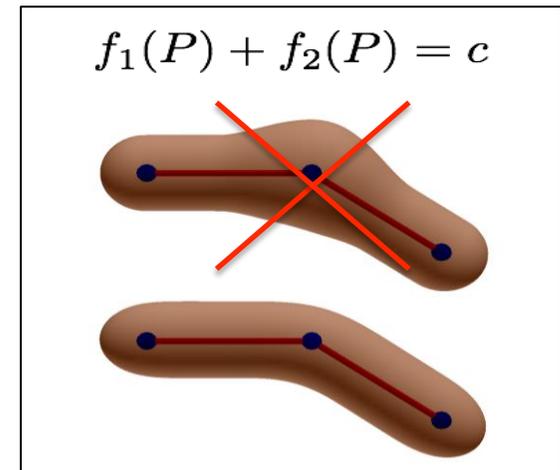
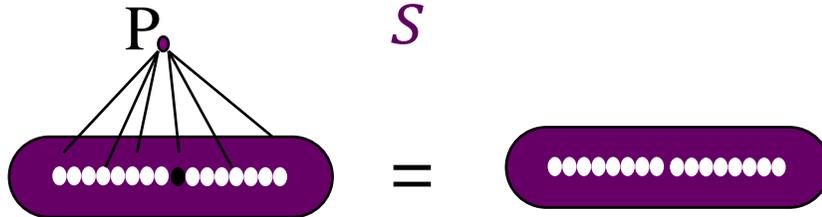
Surfaces implicites à squelettes

Surfaces “de Convolution” [Bloomethal 91]

- Squelette : deux segments
Bosses au raccord des squelettes!

Surfaces de convolution

$$F(P) = \int_S r(s) f_s(P) ds$$



- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ *Choix d'une représentation*
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

Surfaces implicites

Déformer?

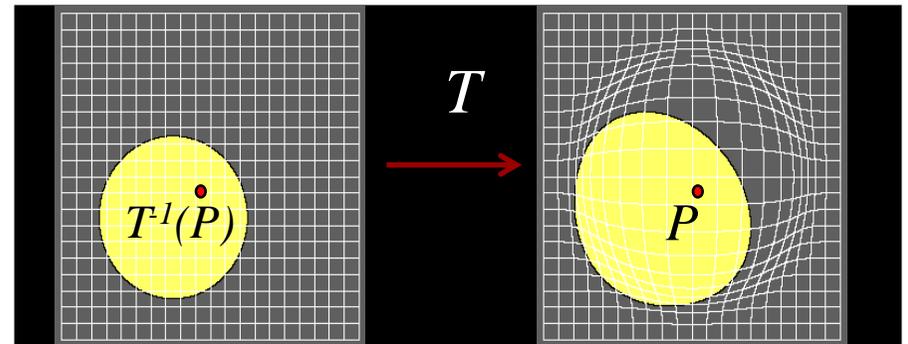
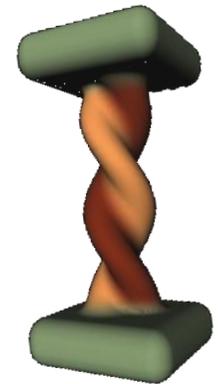
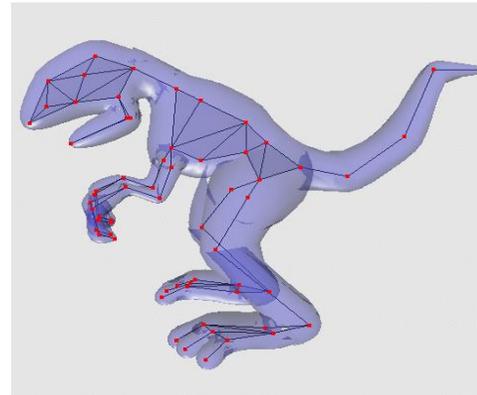
- **Déformation locale**

- déformer les squelettes
- changer les épaisseurs

- **Déformation globale**

- Champ de déformation $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\hat{f}(P) = f(T^{-1}(P))$$



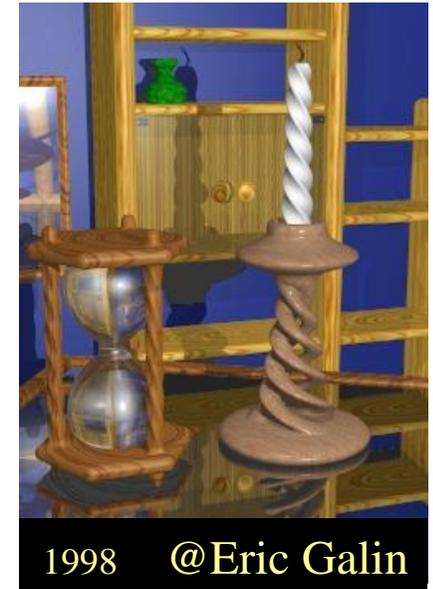
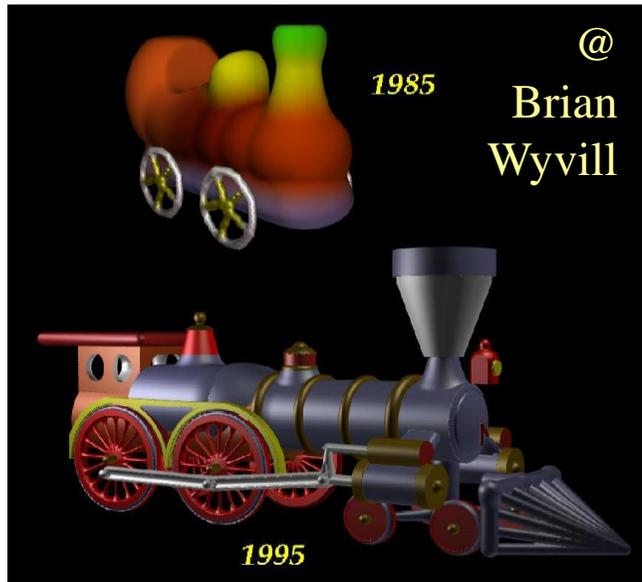
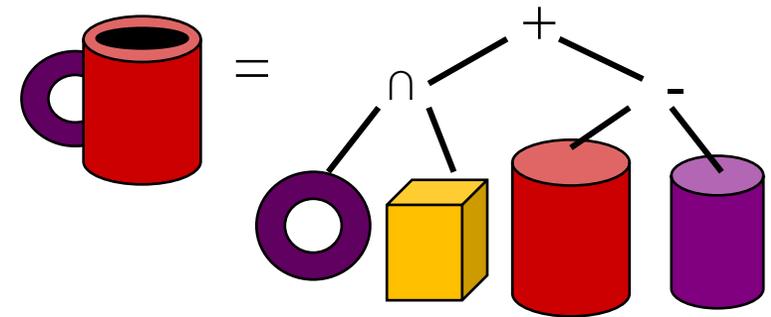
- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ *Choix d'une représentation*
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

Modélisation Constructive Implicite

Arbre de construction

Arbre décrivant la suite d'opérations

- Assemblages : +, -, max, min, ...
- Nœuds unaires de déformation
- Feuilles = primitives à squelette

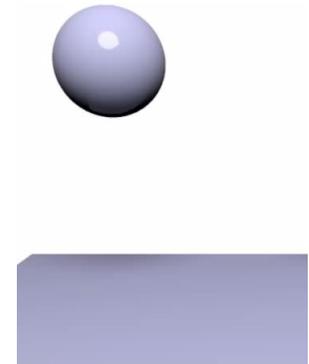
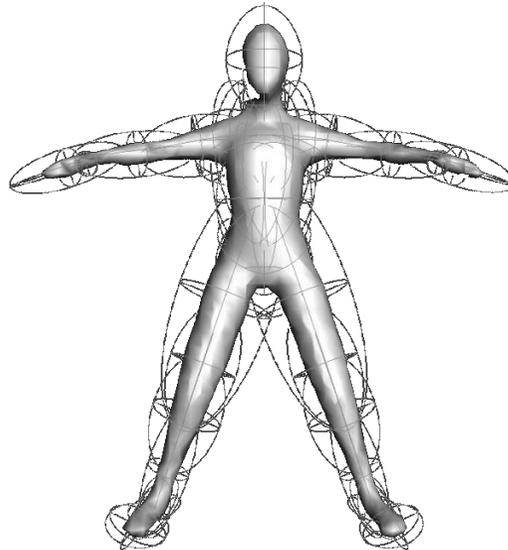
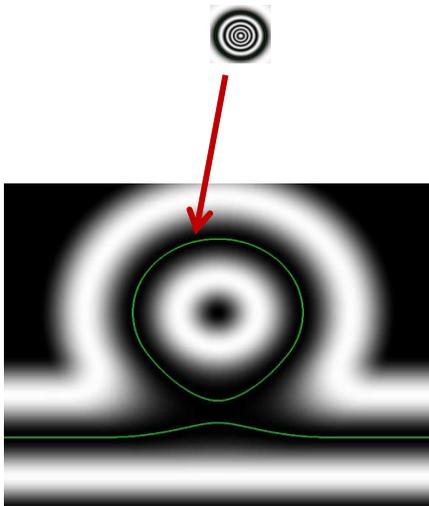


Surfaces implicites peu utilisées en pratique!

Bloquage [2000 - 2010]

Problèmes majeurs non résolus

1. Les détails fins s'estompent
2. Mélanges non locaux, qui commencent à distance
→ *difficulté de contrôle des formes et des animations !*



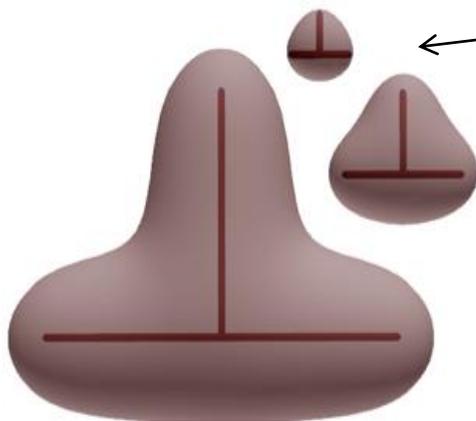
- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ *Choix d'une représentation*
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

Problème 1

Les détails fins s'estompent

Surfaces de convolution ($r(s)$ pour faire varier la taille)

$$f_S(P) = \int_S r(s) K(d(P, S)) ds$$



- Les détails disparaissent



- $r(s)$ a une influence non linéaire sur le rayon

- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ *Choix d'une représentation*
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

Problème 1

Les détails fins s'estompent

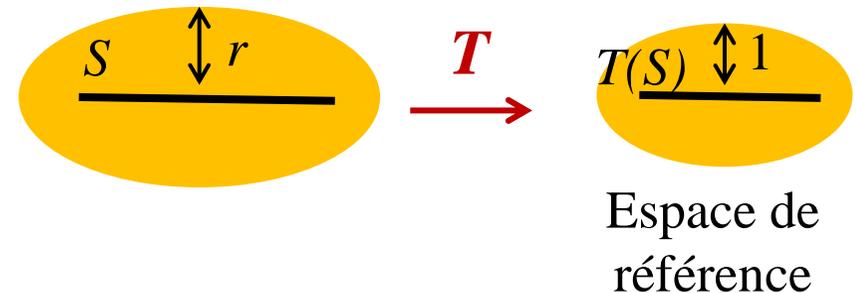
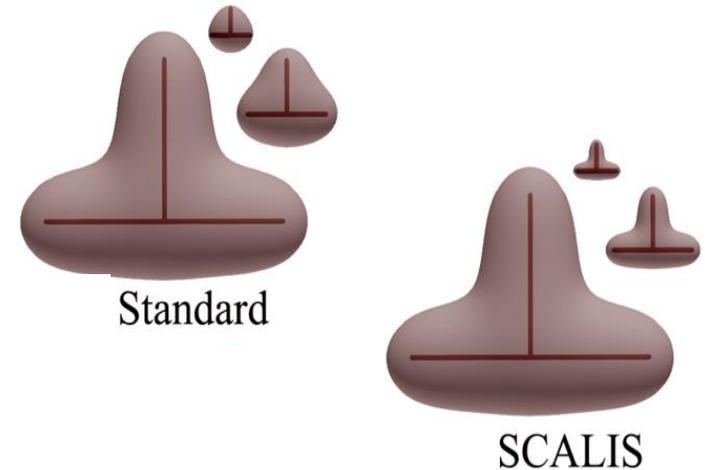
Solution

SCALIS Surface intégrale normalisée

- Mise à l'échelle $1/r$
- Convolution normalisée

$$f_S(P) = \tilde{f}_{T(S)}(T(P))$$

\swarrow Rayon 1 \swarrow Changement d'échelle
 \nwarrow



- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ *Choix d'une représentation*
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

Problème 1

Les détails fins s'estompent

Cas général : le poids r varie!

Convolution :

$$f_S(P) = \int_S r(s) K(d(P,S)) ds$$

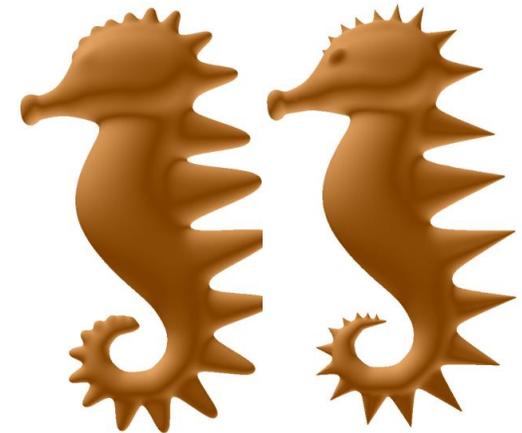
SCALIS

$$f_S(P) = \frac{1}{N(K,c)} \int_S K\left(\frac{d(P,S)}{r(s)}\right) \frac{ds}{r(s)}$$

Pour que
poids = rayon

↑
Changement
d'échelle
position du
point

↑
Changement
d'échelle
squelette



Convolution SCALIS

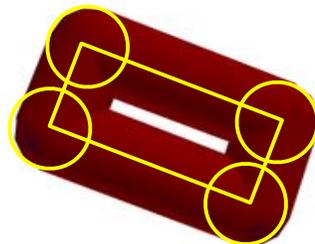
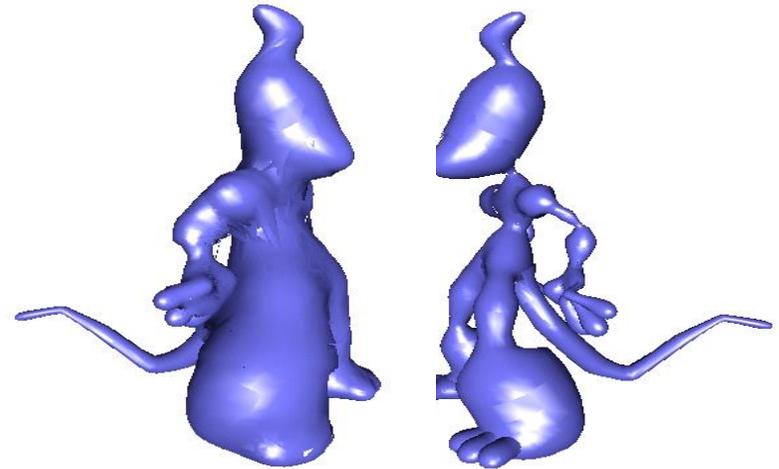
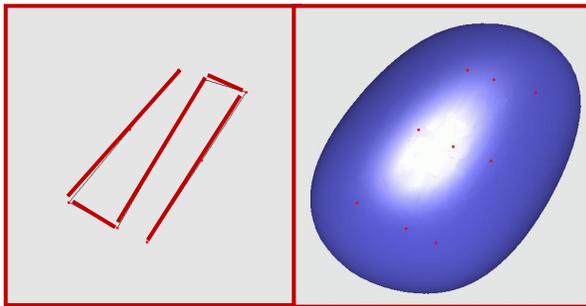
[Zanni 2013]

- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ *Choix d'une représentation*
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

Problème 2

Mélanges indésirables

- Les formes se mélangent selon la distance, pas selon le squelette!



Forme désirée



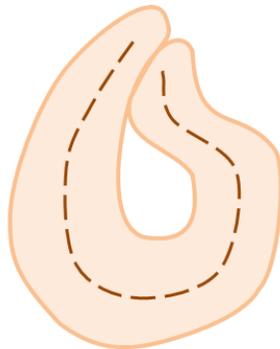
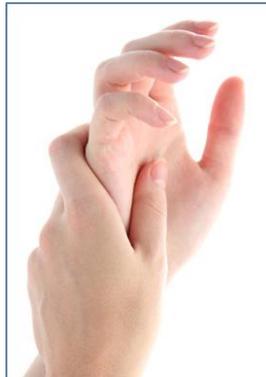
Assemblage avec +

- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ *Choix d'une représentation*
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

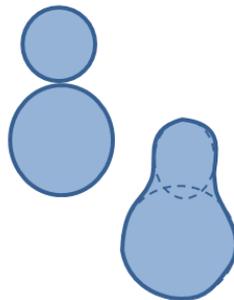
Problème 2

Quels mélanges voudrait-on?

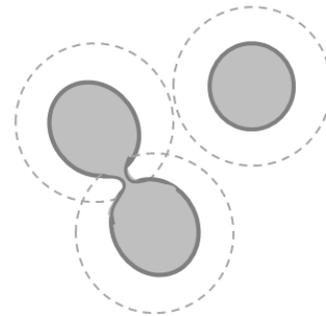
Squelettal



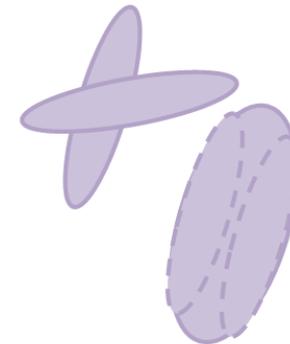
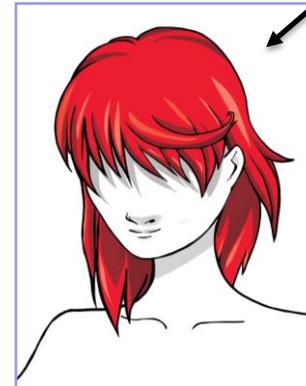
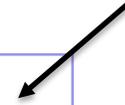
Au contact



A distance



Contextuel



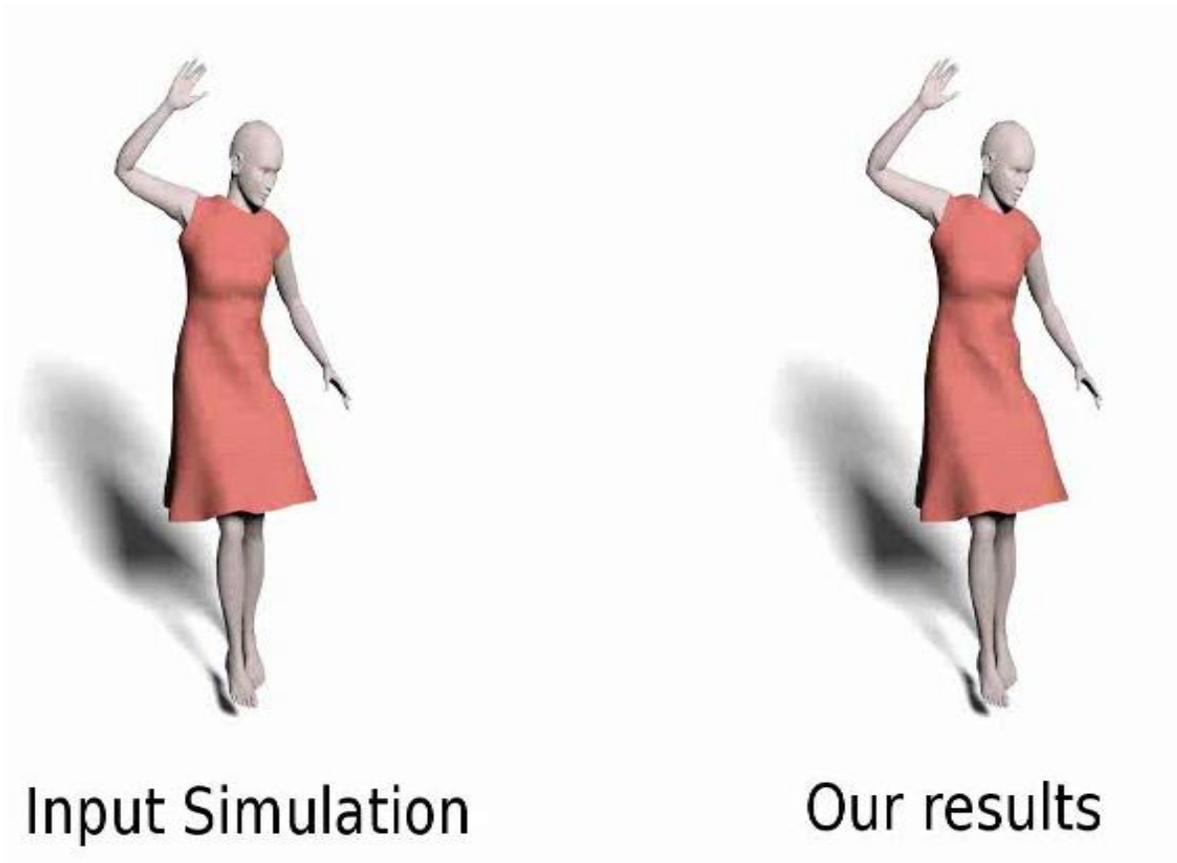
- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ *Choix d'une représentation*
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

Problème 2

Mélange à distance : plis de vêtements

En cas de compression

- Squelettes de plis
- Surface implicite
- Déforme le tissu



Input Simulation

Our results

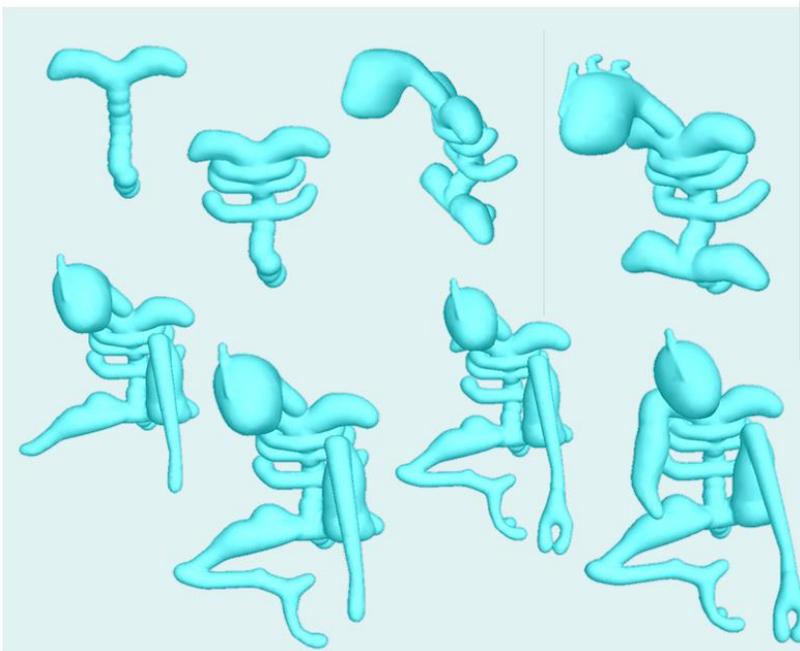
[Rohmer 2010]

- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ *Choix d'une représentation*
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

Problème 2

Mélange au contact

Modélisation constructive



Gouttes d'eau animées

Avant



Après



Séminaire Loic Barthe

« Combiner les objets 3D par composition de fonctions »

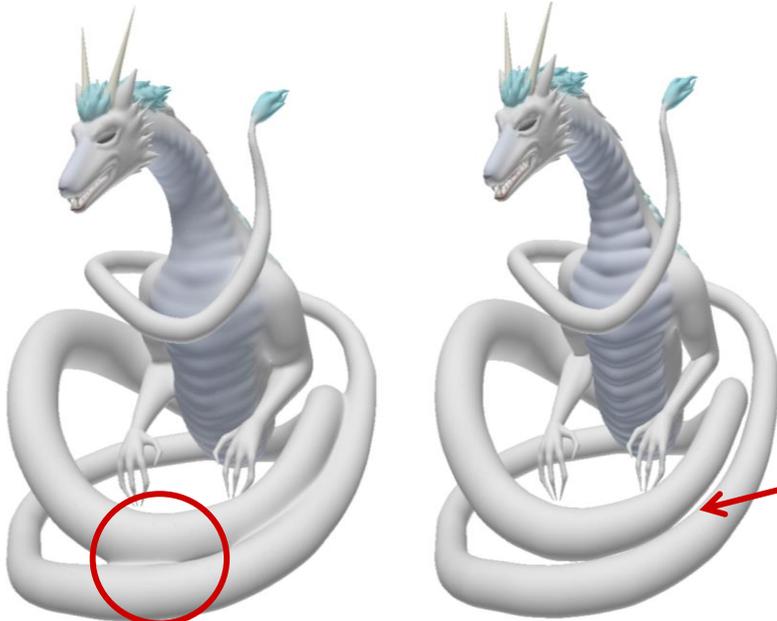
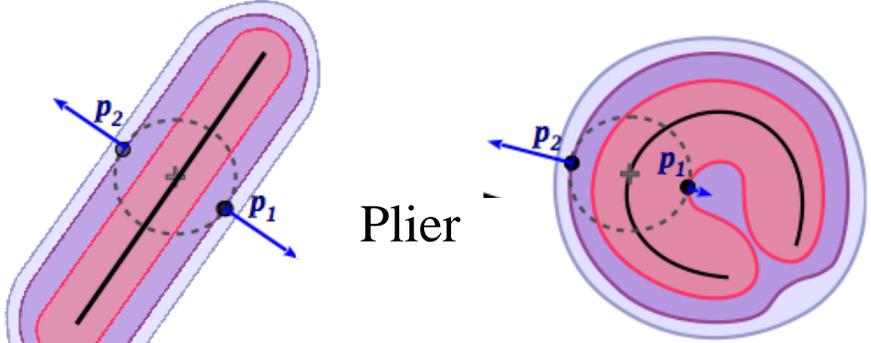
- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ *Choix d'une représentation*
- ✓ *Zoom : les surfaces implicites*

Problème 2

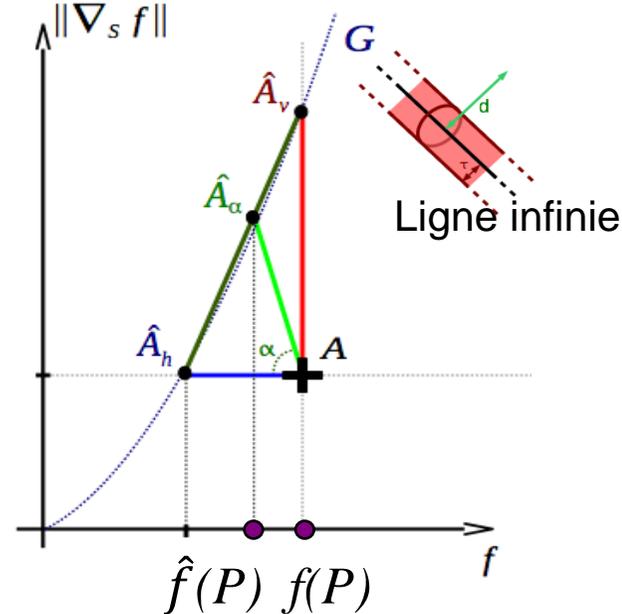
Mélange squelettal

1. Mélange avec +
2. Réduire f là où trop de mélange

$$\hat{f} = C(f, \|\nabla f\|)$$

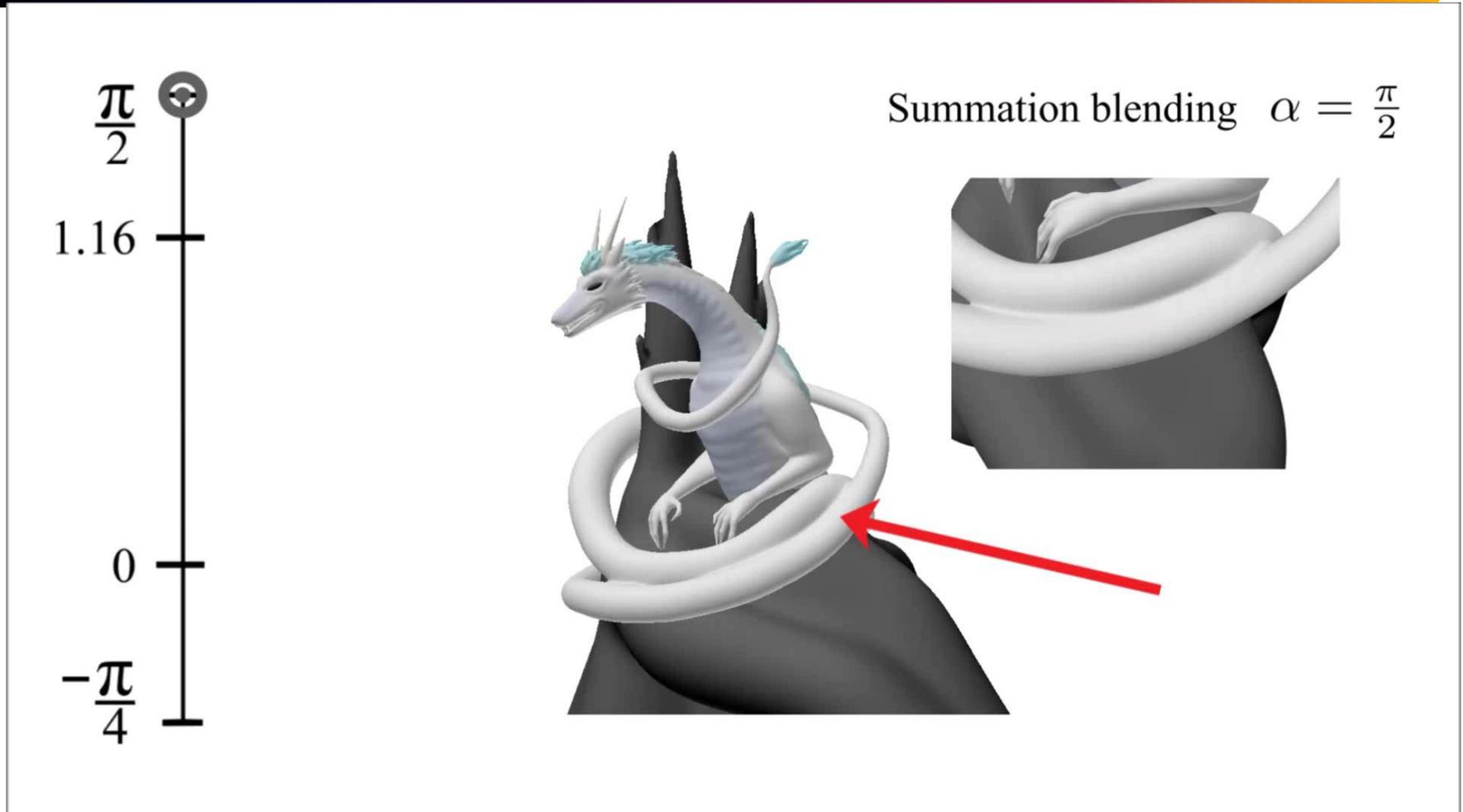


Solution :
projection sur
un cas de
référence G



- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ *Choix d'une représentation*
- ✓ ***Zoom : les surfaces implicites***

Résultats [Zanni 2014]



- ✓ *Modélisation constructive*
- ✓ *Choix d'une représentation*
- ✓ ***Zoom : les surfaces implicites***

Résultats [Zanni 2014]



Skeleton topology blending $\alpha = -\frac{\pi}{4}$



Summation blending $\alpha = \frac{\pi}{2}$

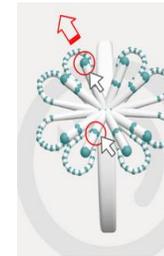


Directional Blend

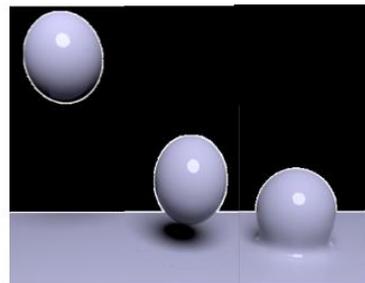
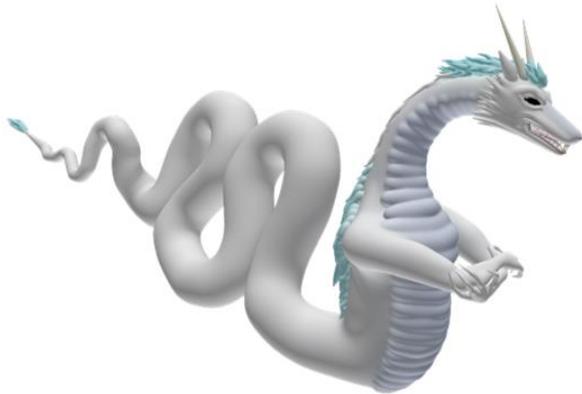
Conclusion

Modélisation constructive

- Intérêt des Surfaces implicites
- Contrôle intuitif à l'aide de squelettes
- Importance du contrôle fin des assemblages



Jweel @Skimlab



Bibliographie

- Leyton (2001). A generative theory of shape (Vol. 2145). Springer Science & Business Media.
- Beatty & Barsky (1987). An introduction to splines for use in computer graphics and geometric modeling. Morgan Kaufmann.
- Loop & DeRose (1990). Generalized b-spline surfaces of arbitrary topology. ACM Computer Graphics, Siggraph.
- Lorensen & Cline (1987). Marching cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm. ACM Computer Graphics, Siggraph.
- Bloomenthal (1997) Introduction to Implicit Surfaces, Morgan Kaufmann.
- Wyvill, Guy, Galin (1999). Extending the CSG Tree - Warping, Blending and Boolean Operations in an Implicit Surface Modeling System. Comput. Graph. Forum 18(2).
- Zanni, Bernhardt, Quiblier, Cani (2013). SCALE-invariant Integral Surfaces Computer Graphics Forum, Wiley-Blackwell, 32 (8).
- Rohmer, Popa, Cani, Hahmann, Sheffer (2010). Animation Wrinkling: Augmenting Coarse Cloth Simulations with Realistic-Looking Wrinkles. ACM Transactions on Graphics, 29 (5).
- Zanni, Cani, Gleicher (2014). N-ary implicit blends with topology control. Computers and Graphics (proceedings of Shape Modeling International), Elsevier.