Transfert de l'énergie vers les petites échelles et non ergodicité de la mécanique des fluides incompressibles

Paul Malliavin, 24 octobre 2008
d'après A.B. Cruzeiro+PM JFA April 2008

Représentation unitaire du mouvement d'un fluide

Fourier des champs de vecteurs à divergence nulle

Ergodicité $\rightarrow$ $\exists$ une mesure de Haar infinitésimale

Fourier de la représentation unitaire infinitésimale

Randomisation de la dynamique d'Euler

Matrice de transfert d'énergie $\mathcal{M}$

Symmétrie $\rightarrow$ annulation des termes rectangles

Processus $\eta(*)$ réalisant le semi-groupe $\exp(t\mathcal{M})$

Asymptotique de $\eta(*)$ $\rightarrow$ non ergodicité

Enstrophie et mesure gaussienne invariante $(d = 2)$

Représentation unitaire d'une algèbre de Lie affine

Non existence de mesures de Haar infinitésimales

Représentation unitaire du mouvement d'un fluide

Notons
T^d : tore de dimension d, λ sa mesure de Lebesgue,
G : groupe des difféomorphismes de T^d conservant λ,
$\mathcal{G}$: l'algèbre de Lie de G constituée des champs de vecteurs sur T^d de divergence nulle.

L'évolution C^∞ d'un fluide incompressible sur T^d est équivalente $R^+ \mapsto G$ notée $t \mapsto g_t$.

Notons
$\mathcal{U}$ le groupe unitaire de l'espace de Hilbert $L^2(T^d)$
$\mathcal{U}^m = \{U \in \mathcal{U};\ U(f_1 f_2)) = U(f_1)U(f_2),\ f_i \in L^\infty\}$.

Théorème
$U \in \mathcal{U}^m \leftrightarrow\ \exists\ \varphi :\ T^d \mapsto T^d$ *mesurable, préservant* λ*, telle que*

$$(*). \qquad [U(f)](\theta) = F(\varphi(\theta))$$

Prenant dans $(*)$ $\varphi = g$ on définit une représentation

$$\rho :\ G \mapsto \mathcal{U}^m.$$

La mesure ergodique sera recherchée sur $\mathcal{U}^m$.

Fourier des champs de vecteurs à divergence nulle

$$< k\ ,\ \theta >:= \exp(ik.\theta), \quad k.\theta = \sum k_i\theta_i, \quad k \in Z^d.$$

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{T^d} f(\theta)\ < -k\ ,\ \theta >\ d\theta^1 \otimes ... \otimes d\theta^d$$

Alors f est réelle si et seulement si $\hat{f}(-k) = \bar{\hat{f}}(k)$; soit $\tilde{Z}^d :=$ quotient Z^d par $k \simeq k' \leftrightarrow\ k + k' = 0$

Base orthonormale de $\mathcal{G}$ pour $d = 2$
Champs de vecteurs constants +

$$A_k = \frac{1}{|k|}[(k_2 \cos k.\theta)\partial_1 - (k_1 \cos k.\theta)\partial_2)]$$

$$B_k = \frac{1}{|k|}[(k_2 \sin k.\theta)\partial_1 - (k_1 \sin k.\theta)\partial_2)]$$

$k \in \tilde{Z}^2 - \{(0,0)\}$, $|k|^2 = k_1^2 + k_2^2$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial\theta^i}$.

Fourier de la représentation unitaire infinitésimale

Base des exponentielles complexes $e_s = \exp\ i(s.\theta)$;

Matrice : $c_s^q(g) = (U_g(e_s) \mid e_q),\ U \in \mathcal{U}^m$,

$$c_s^q(g) := \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{T^2} \exp\{-iq.\theta + is.g(\theta)\}\ d\theta \quad \text{alors}$$

dérivant la représentation $\rho\ :\ \mathcal{A}_k := \rho'(A_k)$;

$$[\mathcal{A}_k c_s^q](g) = \left((D_{A_k} U_*)_g(e_s) \,\middle|\, e_q \right)$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^d} \int_{T^2} \exp(-i(q.\theta - s.g(\theta)) \times (s.A_k)(g(\theta))\ d\theta$$

$$\mathcal{A}_k c_s^q = \frac{i}{2|k|}[s,k](c_{s+k}^q + c_{s-k}^q), \quad [s,k] := s_1 k_2 - s_2 k_1;$$

$$\mathcal{B}_k c_s^q = \frac{1}{2|k|}[s,k](c_{s+k}^q - c_{s-k}^q).$$

Ergodicité $\rightarrow$ $\exists$ une mesure de Haar infinitésimale

Le champ de vecteurs constant $Z = A_k$ (resp. $= B_k$) satifait à l'éqution d'Euler :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + Z * \nabla Z + dp = 0 \text{ en effet } (Z * \nabla Z) = 0 \quad \bullet$$

L'ODE assocée à A_k définit le flot de difféomorphisme:

$$\frac{d}{dt} \exp(tA_k)(\theta) = A_k\{\exp(tA_k)(\theta)\}$$

Soit Λ une mesure de probabilités portée par $\mathcal{U}^m$ supposée invariante sous l'action du flot de Euler

$$\int_{\mathcal{U}^m} \Phi(\rho(\exp(tA_k))U)\ \Lambda(dU) = \int_{\mathcal{U}^m} \Phi(U)\ \Lambda(dU)$$

En dérivant relativement à t $\forall\ \Phi$:

$$\int_{\mathcal{U}^m} < d\Phi\ ,\ \mathcal{A}_K) >\ \Lambda(dU) = 0.$$

Randomisation de la dynamique d'Euler

Fixons $k_0,\ k_1$ such that $[k_0,k_1]\neq 0$.

Soi $\mathcal{E}$ l'espace de probabilités associé à un jeu de pile ou face $\{\eta_n\}_{n\in N}\in\mathcal{E}$. Fixons $\epsilon>0$ construisons la courbe àvaleurs dans $\tilde{G}$ $\varphi_{\epsilon,\eta}$: $\varphi_\epsilon(0)=\mathrm{Id}$,

$$\varphi_{\epsilon,\eta}(t)=\exp\Bigg((t-k\epsilon^2)\times\eta_k Z_{q(k)}\Bigg)\varphi_{\epsilon,\eta}(k\epsilon^2),$$

$t\in]k\epsilon^2,(k+1)\epsilon^2]$, $q(k)$ le reste modulo 4 de k

$$Z_0=A_{k_0},\ Z_1=B_{k_0},\ Z_2=A_{k_1},Z_3=B_{k_1}$$

Comme φ_ϵ est une sucession de flots d'Euler :

$$\int_{\mathcal{U}^m}\Phi(\varphi_{\epsilon,\eta}(t)U)\ \Lambda(dU)=\int_{\mathcal{U}^m}\Phi(\gamma)\ \Lambda(dU)$$

Prenons l'espérance sur η et $\epsilon\to 0$:

$$E\Bigg(\int_{\mathcal{U}^m}\Phi(g_x(t)U)\ \Lambda(dU)\Bigg)=\int_{\mathcal{U}^m}\Phi(U)\ \Lambda(dU)$$

$$\begin{aligned}dg_x(t)=&A_{k_0}(g_x(t))\ odx_0^2+B_{k_0}(g_x(t))\ odx_0^1\\&+A_{k_1}(g_x(t))\ odx_1^2+B_{k_1}(g_x(t))\ odx_1^1.\end{aligned}$$

Matrice de transfert d'énergie $\mathcal{M}$

Posons $\rho(g_{x,t}) = U_{x,t}$ et soit $\mathcal{D}_k$ la matrice diagonale $[\mathcal{D}_k]_s^s = (s.\frac{k}{|k|})^2 - |s|^2$:

$$dU^*_{x,t} = \big(\sum_{i=0}^{1} \mathcal{A}_{k_i}\ dx_i^2(t) + \mathcal{B}_{k_i}\ dx_i^1(t) + \frac{1}{2}\mathcal{D}_{k_i}\ dt\big)U^*_{y,t}$$

Fixons $q \in Z^2$, soit

$$c_s^q(x,t) = (U_{x,t}\ e_s \mid e_q), \quad s \in Z^2.$$

Théorème

$$\xi_t(s) := E(|c_s^q(x,t)|^2)$$

satisfait l'ODE

$$\frac{d\xi_t}{dt} = \mathcal{M}(\xi_t)$$

où $\mathcal{M}$ est la matrice symmétrique telle que $(\mathcal{M}(\xi) \mid \xi)$

$$= -\sum_{s\in Z^2} \frac{[s,k_0]^2}{2|k_0|^2}\Big((\xi_s - \xi_{s+k_0)})^2 + (\xi_s - \xi_{s-k_0})^2\Big)$$

$$+\frac{[s,k_1]^2}{2|k_1|^2}\Big((\xi_s - \xi_{s+k_1})^2 + (\xi_s - \xi_{s-k_1})^2\Big)$$

Symmétrie $\rightarrow$ annulation des termes rectangles L'opérateur de translation sur T^2, soit $\tau_{\theta_0};\ \theta \mapsto \theta + \theta_0$, opère sur (A_k, B_k) par une matrice $R_{k\theta_0}$ associée à une rotation de R^2 d'angle $k\theta_0$.

Posons $x_i^{\theta_0} = R_{k_i\theta_0}(x_i),\quad i = 0, 1$, alors

$$\tau_{-\theta_0} \ \circ\ U_{x,t} \ \circ\ \tau_{\theta_0} = U_{x^{\theta_0},t},$$

L'application $x \mapsto x^{\theta_0}$ est un isomorphisme d'espace de probabilités :

$$E\Big(c_s^q(x,t)\bar{c}_{s'}^q(x,t)\Big) = E\Big(c_s^q(x^{\theta_0},t)\bar{c}_{s'}^q(x^{\theta_0},t)\Big)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{T^2} E\Big(c_s^q(x^{\theta_0},t)\bar{c}_{s'}^q(x^{\theta_0},t)\Big)\ \lambda(d\theta_0)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} E\Big(c_s^q(x,t)\bar{c}_{s'}^q(x,t)\Big)\int_{T^2} \exp(i(s-s').\theta_0)\ \lambda(d\theta_0)$$

$$= 0, \quad s \neq s'.$$

Processus $\eta(*)$ réalisant le semi-groupe $\exp(\mathbf{t}\mathcal{M})$
Soit $\mathcal{C}$ une contraction de R (c.a.d $|\mathcal{C}(\xi) - \mathcal{C}(\xi') \leq |\xi - \xi'|)$, $\eta_s := \mathcal{C}(\xi_s)$ alors

$$(\mathcal{M}(\xi) \mid \xi) \leq (\mathcal{M}(\eta) \mid \eta) \leq 0$$

Beurling-Deny théorie $\rightarrow \exp(t\mathcal{M})$ est le semi-groupe associé à un processus markovien $\eta(*)$.

Normalisons chaque colonne of the matrice $\mathcal{M}$ en divisant tous les termes par le coefficient diagonal; les termes non diagonaux sont positif et de somme totale égale à 1 : on définit ainsi une marche aléatoire $X(n)$ sur Z^2.
On définit un processus Markovien à temps continu

$$\eta(t) := X(\varphi(t))$$

où le changement d'horloge $\varphi(t)$ est la function à valeurs entières

$$\sum_{n \leq \varphi(t)} \frac{1}{\mathcal{M}_l^l} \times \Lambda_n \leq t < \sum_{n \leq \varphi(t)+1} \frac{1}{\mathcal{M}_l^l} \times \Lambda_n,$$

où $\{\Lambda_k\}$ sont des variables exponentielles indépend.

Asymptotique de $\eta(*) \rightarrow$ non ergodicité

La marche aléatoire $X(*)$ ne comporte que des quatre sauts possibles : $-k_0, k_0, -k_1, k_1$.

En plongeant $\epsilon \times Z^2$ dans R^2, elle est asymptotique pour $\epsilon \rightarrow 0$ à un mouvement Brownien $B(*)$ sur R^2 changé de temps.

On a $\mathcal{M}_l^l \simeq |l|^2$; posons $q(s) = \int_0^s \frac{1}{|B(\tau)|^2} \ d\tau$;

presque surement $q(s) \rightarrow \infty$ quand $s \rightarrow \infty$.

Le processus $\eta(t)$ est asymptotique quand $t \rightarrow \infty$ au processus $B(q^{-1}(t))$.

Le processus $B(q^{-1}(t))$ ne peut pas laisser une mesure de probabilités sur R^2 invariante.

Enstrophie et mesure gaussienne invariante ($d = 2$)

(Albeverio-Cruzeiro CMP 1990)

Soit Z une solution d'Euler

$$\frac{\partial Z}{\partial t} =< Z, \nabla > Z - \nabla p, \quad divZ = 0,$$

posant $rot(Z) = \Delta\phi \to Z = (-\partial_2\phi, \partial_1\phi)$,

$$(*) \qquad \frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial t} =< (-\partial_2\phi, \partial_1\phi), \nabla\Delta\phi > .$$

$$S := \frac{1}{2}\int_{T^2} [\Delta\phi]^2 \, d\lambda$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \int (\Delta\phi)(-\partial_2\phi\partial_1(\Delta\phi) + \partial_1\phi\partial_2(\Delta\phi)) = 0$$

La mesure gaussienne canonique μ sur l'espace de Sobolev $H^2(T^2)$ est invariante par le flot $(*)$.

MAIS, μ-presque partout, ϕ est Höldérien d'ordre $\forall\ \delta < 1$ sans être Lipshitzien; par suite Z doit être compris comme appartenant à un Sobolev d'ordre négatif; le flot qu'il engendre n'est pas défini....

Représentation unitaire d'une algèbre de Lie affine

Soit $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie compact, par exemple le groupe orthogonal de R^n; choisssant une base e_α de $\mathcal{G}$ les constantes de structures sont définie par $[e_\alpha \ , \ e_\beta] = \sum_\delta c^\delta_{\alpha,\beta} \ e_\delta$

L'algèbre de Lie affine $\mathcal{A}(\mathcal{G})$

$$\mathcal{A}(\mathcal{G}) := \left\{ Y = \sum_{k \in Z, \text{finie}} y_k \otimes \exp(ik\theta) \right\}$$

$$[Y \ , \ Y'] = \sum_{k,k'} [y_k \ , \ y_{k'}] \otimes \exp(i(k+k')\theta)$$

Choisissons sur $\mathcal{G}$ une métrique euclidienne pour laquelle e_α est une base orthonormée de $\mathcal{G}$ et telle que $c^\delta_{\alpha,\beta} + c^\beta_{\alpha,\delta} = 0$.

Définissons une action infinitésimale D_Y de Y sur $L^2(T; \mathcal{G} \otimes C)$ par

$$U_Y \left(\sum_{s \in Z} c_s \exp(is\theta) \right) = \sum_{s,k} [y_k \ , \ c_s] \times \exp((i(k+s\theta))$$

Posons $e_{\alpha,s} = e_\alpha \otimes \exp(is\theta)$.

Non existence de mesures de Haar infinitésimales

Il n'existe pas de mesures de probabilités sur $\mathcal{U}\{L^2(T;\mathcal{G}\otimes C)\}$ invariante sous l'action de $\mathcal{A}(\mathcal{G})$

Fixons $k_0 \neq 0$; définissons une diffusion à valeurs dans $\mathcal{U}$:

$$dU_{x,t} = \left(\sum_\alpha D_{e_{\alpha,k_0}} \ \circ dx^\alpha(t)\right) U_{x,t}$$

$$c_{q,\beta}^{s,\delta} = \big(U_{x,t}(e_{q,\beta}) \mid e_{s,\delta}\big)$$

Fixons q et définissons

$$\xi_t^q(s) = \sum_{\beta,\delta} E(|c_{q,\beta}^{s,\delta}|^2), \text{ alors}$$

$$\frac{d\xi_t^q}{dt} = \mathcal{M}(\xi_t^q)$$

où $\mathcal{M}$ est la matrice symmétrique négative

$$(\mathcal{M}(\xi)\mid\xi) = -\gamma\sum_s((\xi_s - \xi_{s+k_0})^2 + (\xi_s - \xi_{s-k_0})^2)$$

et où γ est une constante numérique ne dépendant que de $\mathcal{G}$.