Dynamique des prix sur les marchés à information asymétrique.

Bernard De Meyer - CES Université Paris 1

Dynamique des prix

- Pour évaluer des produits dérivés, il est essentiel d'avoir des modèles précis de la dynamique des prix des actifs sous-jacents.

Dynamique des prix

- Pour évaluer des produits dérivés, il est essentiel d’avoir des modèles précis de la dynamique des prix des actifs sous-jacents.
- D’un point de vue théorique, à quel type de dynamique doit-on s’attendre?

Dynamique des prix

- Pour évaluer des produits dérivés, il est essentiel d'avoir des modèles précis de la dynamique des prix des actifs sous-jacents.
- D'un point de vue théorique, à quel type de dynamique doit-on s'attendre?
- Dans un environnement risque-neutre, le processus des prix devrait être une "Martingale Continue à Variation Maximale" (MCVM).

Origine du mouvement Brownien

- Depuis Bachelier, le mouvement Brownien est utilisé pour modéliser l’évolution des prix sur les marchés.
  $\longrightarrow$ D’où vient ce M. B.?

Origine du mouvement Brownien

- Depuis Bachelier, le mouvement Brownien est utilisé pour modéliser l'évolution des prix sur les marchés.
  $\longrightarrow$ D'où vient ce M. B.?
- Origine exogène:

Origine du mouvement Brownien

- Depuis Bachelier, le mouvement Brownien est utilisé pour modéliser l'évolution des prix sur les marchés.
  $\longrightarrow$ D'où vient ce M. B.?

- Origine exogène:

  "Les influences qui déterminent les mouvements de la bourse sont innombrables, des événements passés, actuels ou même escomptables, ne présentant souvent aucun rapport apparent avec ses variations, se répercutent sur ses cours."

  Théorie de la spéculation. L. Bachelier (1900)

Origine du mouvement Brownien

- Depuis Bachelier, le mouvement Brownien est utilisé pour modéliser l'évolution des prix sur les marchés.
  $\longrightarrow$ D'où vient ce M. B.?
- Origine exogène:
- Origine endogène:
  "On the strategic origin of the Brownian motion in finance"
  De Meyer- Moussa Saley.
  $\longrightarrow$ *Il est introduit par les agents afin de maximiser leur profit.*

Idée générale

- Asymétrie d'information.

Idée générale

- Asymétrie d'information.
- Les agents informés sont réputés l'être.

Idée générale

- Asymétrie d'information.
- Les agents informés sont réputés l'être.
  $\longrightarrow$ Leurs actes sont analysés par les non-informés.

Idée générale

- Asymétrie d'information.
- Les agents informés sont réputés l'être.
  $\longrightarrow$ Leurs actes sont analysés par les non-informés.
- S'ils utilisent naïvement leur information:
  $\longrightarrow$ Révélation immédiate

Idée générale

- Asymétrie d'information.
- Les agents informés sont réputés l'être.
  $\longrightarrow$ Leurs actes sont analysés par les non-informés.
- S'ils utilisent naïvement leur information:
  $\longrightarrow$ Révélation immédiate
  $\longrightarrow$ Perte de l'avantage stratégique.

Idée générale

- Asymétrie d'information.
- Les agents informés sont réputés l'être.
  $\longrightarrow$ Leurs actes sont analysés par les non-informés.
- S'ils utilisent naïvement leur information:
  $\longrightarrow$ Révélation immédiate
  $\longrightarrow$ Perte de l'avantage stratégique.
- Pour éviter une révélation trop rapide
  $\longrightarrow$ Ils introduisent un "bruit" sur leurs actions.

Idée générale

- Asymétrie d'information.
- Les agents informés sont réputés l'être.
  $\longrightarrow$ Leurs actes sont analysés par les non-informés.
- S'ils utilisent naïvement leur information:
  $\longrightarrow$ Révélation immédiate
  $\longrightarrow$ Perte de l'avantage stratégique.
- Pour éviter une révélation trop rapide
  $\longrightarrow$ Ils introduisent un "bruit" sur leurs actions.
- L'ensemble de ces bruits s'agrège en un mouvement Brownien.

Objectif de cet article

- Ce type d’argument conduit à une classe très particulière de dynamiques pour les prix.

Objectif de cet article

- Ce type d'argument conduit à une classe très particulière de dynamiques pour les prix.
- Le processus Π_t des prix actualisés des actifs sera une Martingale Continue à Variation Maximale (MCVM).

Objectif de cet article

- Ce type d'argument conduit à une classe très particulière de dynamiques pour les prix.
- Le processus Π_t des prix actualisés des actifs sera une Martingale Continue à Variation Maximale (MCVM).
- Cette classe est "robuste", c.-à-d. indépendante du modèle.

Objectif de cet article

- Ce type d'argument conduit à une classe très particulière de dynamiques pour les prix.
- Le processus Π_t des prix actualisés des actifs sera une Martingale Continue à Variation Maximale (MCVM).
- Cette classe est "robuste", c.-à-d. indépendante du modèle.
- N.B. Cette classe contient en particulier les dynamiques de Bachelier et de Black et Scholes.

MCVM

- Une martingale Π_t est une MCVM si $\Pi_t = f(B_t, t)$ où B=M.B. et $f(x,t)$ est croissante en x.

MCVM

- Une martingale Π_t est une MCVM si $\Pi_t = f(B_t, t)$ où B=M.B. et $f(x,t)$ est croissante en x.
- Notations:
  - $\Delta^2 := \{\}$ des probabilités μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ telles que $\int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu(x) < \infty$.

MCVM

- Une martingale Π_t est une MCVM si $\Pi_t = f(B_t, t)$ où B=M.B. et $f(x,t)$ est croissante en x.
- Notations:
  - $\Delta^2 := \{\}$ des probabilités μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ telles que $\int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu(x) < \infty$.
  - $[X]$ est la loi de la v.a. X.

MCVM

- Une martingale Π_t est une MCVM si $\Pi_t = f(B_t, t)$ où B=M.B. et $f(x,t)$ est croissante en x.
- Notations:
  - $\Delta^2 := \{\}$ des probabilités μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ telles que $\int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu(x) < \infty$.
  - $[X]$ est la loi de la v.a. X.
  - Si $\mu \in \Delta^2$ et $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, il existe une unique fonction croissante f_μ telle que $[f_\mu(Z)] = \mu$.

MCVM

- Une martingale Π_t est une MCVM si $\Pi_t = f(B_t, t)$ où B=M.B. et $f(x,t)$ est croissante en x.
- Notations:
  - $\Delta^2 := \{\}$ des probabilités μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ telles que $\int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu(x) < \infty$.
  - $[X]$ est la loi de la v.a. X.
  - Si $\mu \in \Delta^2$ et $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, il existe une unique fonction croissante f_μ telle que $[f_\mu(Z)] = \mu$.
  - $\Pi_t^\mu := E[f_\mu(B_1) | (B_s)_{s \leq t}]$ est la MCVM associée à μ.

MCVM

- Une martingale Π_t est une MCVM si $\Pi_t = f(B_t, t)$ où B=M.B. et $f(x,t)$ est croissante en x.
- Notations:
  - $\Delta^2 := \{\}$ des probabilités μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ telles que $\int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu(x) < \infty$.
  - $[X]$ est la loi de la v.a. X.
  - Si $\mu \in \Delta^2$ et $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, il existe une unique fonction croissante f_μ telle que $[f_\mu(Z)] = \mu$.
  - $\Pi_t^\mu := E[f_\mu(B_1) | (B_s)_{s \leq t}]$ est la MCVM associée à μ.
  - $\mu = \mathcal{N} \rightarrow$ Bachelier $\mu = Log\mathcal{N} \rightarrow$ Black et Scholes.

MCVM

- Une martingale Π_t est une MCVM si $\Pi_t = f(B_t, t)$ où B=M.B. et $f(x,t)$ est croissante en x.
- Notations:
- Pour illustrer le caractère universel des MCVM, nous modélisons les échanges répétés entre deux agents asymétriquement informés de la manière la plus générale possible:$\longrightarrow$ Le jeux Γ_n

Le Jeu Γ_n:

- J1 et J2 s’échangent un actif risqué R en contre partie d’un numéraire N.

Le Jeu Γ_n:

- J1 et J2 s'échangent un actif risqué R en contre partie d'un numéraire N.
- Asymétrie d'information:

  J1 reçoit initialement un message $m \in M$ de loi ν.

  J2 n'est pas informé de m, il ne connaît que ν.

Le Jeu Γ_n:

- J1 et J2 s'échangent un actif risqué R en contre partie d'un numéraire N.
- Asymétrie d'information:

  J1 reçoit initialement un message $m \in M$ de loi ν.

  J2 n'est pas informé de m, il ne connaît que ν.
- Valeur de liquidation.

  A une date future D, m sera révélé publiquement

  (ex. Assemblée générale des actionnaires)

Le Jeu Γ_n:

- J1 et J2 s'échangent un actif risqué R en contre partie d'un numéraire N.
- Asymétrie d'information:

  J1 reçoit initialement un message $m \in M$ de loi ν.

  J2 n'est pas informé de m, il ne connaît que ν.
- Valeur de liquidation.

  A une date future D, m sera révélé publiquement

  A la date D, l'actif R vaudra $L = L(m)$ sur les marchés et N vaudra 1. La fonction $L(.)$ est connue des deux joueurs.

Le Jeu Γ_n:

- J1 et J2 s'échangent un actif risqué R en contre partie d'un numéraire N.
- Asymétrie d'information:

  J1 reçoit initialement un message $m \in M$ de loi ν.

  J2 n'est pas informé de m, il ne connaît que ν.
- Valeur de liquidation.

  A une date future D, m sera révélé publiquement

  A la date D, l'actif R vaudra $L = L(m)$ sur les marchés et N vaudra 1. La fonction $L(.)$ est connue des deux joueurs.
- On peut identifier le message à $L(m)$.

  μ =la loi de $L(m)$.

Le Jeu $\Gamma_n(\mu)$:

- étape 0:

  La nature choisit $L \sim \mu$

  J1 est informé de L *pas J2*

  J1 et J2 connaissent μ.

Le Jeu $\Gamma_n(\mu)$:

- étape 0:
- n périodes de transaction avant D.

Le Jeu $\Gamma_n(\mu)$:

- étape 0:
- n périodes de transaction avant D.
- Ils utilisent un mécanisme d'échange $\langle I, J, T\rangle$:

  I, J= *espaces des actions de J1 et J2 respectivement.*

  $T : I \times J \to \mathbb{R}^2$.

  Si choix=(i, j), $T(i, j) = (A_{ij}, B_{ij})$ *représente les nombres* A_{ij} *d'actions* R *et* B_{ij} *de* N *cédés à J1 par J2.*

Le Jeu $\Gamma_n(\mu)$:

- étape 0:
- n périodes de transaction avant D.
- Ils utilisent un mécanisme d'échange $\langle I, J, T\rangle$:
- A l'étape q:

  J1 et J2 choisissent simultanément (i_q, j_q).

  (i_q, j_q) *est rendu public.*

  $y_q = (y_q^R, y_q^N)$, $z_q = (z_q^R, z_q^N)$*: portefeuilles de J1 et J2 après* q

  $y_q = y_{q-1} + T(i_q, j_q)$ et $z_q = z_{q-1} - T(i_q, j_q)$

Le Jeu $\Gamma_n(\mu)$:

- étape 0:
- n périodes de transaction avant D.
- Ils utilisent un mécanisme d'échange $\langle I, J, T\rangle$:
- A l'étape q:

  J1 et J2 choisissent simultanément (i_q, j_q).

  (i_q, j_q) est rendu public.

  $y_q = (y_q^R, y_q^N)$, $z_q = (z_q^R, z_q^N)$: portefeuilles de J1 et J2 après q

  $y_q = y_{q-1} + T(i_q, j_q)$ et $z_q = z_{q-1} - T(i_q, j_q)$
- Objectif des joueurs: *maximiser la valeur de liquidation de leur portefeuille final. Joueurs neutres au risque*

Stratégies dans $\Gamma_n(\mu)$

- Une stratégie σ pour J1 est $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ où $\sigma_q : \mathbb{R} \times (I \times J)^{q-1} \to \Delta(I)$.

Stratégies dans $\Gamma_n(\mu)$

- Une stratégie σ pour J1 est $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ où $\sigma_q : \mathbb{R} \times (I \times J)^{q-1} \longrightarrow \Delta(I)$.
- Une stratégie τ pour J2 est $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ où $\tau_q : (I \times J)^{q-1} \longrightarrow \Delta(J)$.

Stratégies dans $\Gamma_n(\mu)$

- Une stratégie σ pour J1 est $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ où $\sigma_q : \mathbb{R} \times (I \times J)^{q-1} \rightarrow \Delta(I)$.
- Une stratégie τ pour J2 est $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ où $\tau_q : (I \times J)^{q-1} \rightarrow \Delta(J)$.
- $(\mu, \sigma, \tau) \rightarrow$ proba $\pi_{(\mu,\sigma,\tau)}$ sur $\mathbb{R} \times (I \times J)^n$

Stratégies dans $\Gamma_n(\mu)$

- Une stratégie σ pour J1 est $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ où $\sigma_q : \mathbb{R} \times (I \times J)^{q-1} \to \Delta(I)$.
- Une stratégie τ pour J2 est $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ où $\tau_q : (I \times J)^{q-1} \to \Delta(J)$.
- $(\mu, \sigma, \tau) \to$ proba $\pi_{(\mu,\sigma,\tau)}$ sur $\mathbb{R} \times (I \times J)^n$
- Payement de J1: $g_n(\mu, \sigma, \tau) := E_{\pi_{(\mu,\sigma,\tau)}}[y_n^R L + y_n^N]$.

Stratégies dans $\Gamma_n(\mu)$

- Une stratégie σ pour J1 est $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ où $\sigma_q : \mathbb{R} \times (I \times J)^{q-1} \to \Delta(I)$.
- Une stratégie τ pour J2 est $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ où $\tau_q : (I \times J)^{q-1} \to \Delta(J)$.
- $(\mu, \sigma, \tau) \to$ proba $\pi_{(\mu,\sigma,\tau)}$ sur $\mathbb{R} \times (I \times J)^n$
- Payement de J1: $g_n(\mu, \sigma, \tau) := E_{\pi_{(\mu,\sigma,\tau)}}[y_n^R L + y_n^N]$.
- Puisque $y_n + z_n = y_0 + z_0$: jeu à Σ constante.

Stratégies dans $\Gamma_n(\mu)$

- Une stratégie σ pour J1 est $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ où $\sigma_q : \mathbb{R} \times (I \times J)^{q-1} \to \Delta(I)$.
- Une stratégie τ pour J2 est $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ où $\tau_q : (I \times J)^{q-1} \to \Delta(J)$.
- $(\mu, \sigma, \tau) \to$ proba $\pi_{(\mu,\sigma,\tau)}$ sur $\mathbb{R} \times (I \times J)^n$
- Payement de J1: $g_n(\mu, \sigma, \tau) := E_{\pi_{(\mu,\sigma,\tau)}}[y_n^R L + y_n^N]$.
- Puisque $y_n + z_n = y_0 + z_0$: jeu à Σ constante.
  $\to$ jeu à Σ nulle $y_0 = z_0 = (0,0)$

Stratégies dans $\Gamma_n(\mu)$

- Une stratégie σ pour J1 est $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ où $\sigma_q : \mathbb{R} \times (I \times J)^{q-1} \to \Delta(I)$.
- Une stratégie τ pour J2 est $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ où $\tau_q : (I \times J)^{q-1} \to \Delta(J)$.
- $(\mu, \sigma, \tau) \to$ proba $\pi_{(\mu,\sigma,\tau)}$ sur $\mathbb{R} \times (I \times J)^n$
- Payement de J1: $g_n(\mu, \sigma, \tau) := E_{\pi_{(\mu,\sigma,\tau)}}[y_n^R L + y_n^N]$.
- Puisque $y_n + z_n = y_0 + z_0$: jeu à Σ constante.
  $\to$ jeu à Σ nulle $y_0 = z_0 = (0, 0)$
- Un équilibre dans $\Gamma_n(\mu)$ est une paire (σ^*, τ^*) telle que $\forall \sigma, \tau : g_n(\mu, \sigma, \tau^*) \leq g_n(\mu, \sigma^*, \tau^*) \leq g_n(\mu, \sigma^*, \tau)$

Valeur du jeu.

- Si $\sup_\sigma \inf_\tau g_n(\mu,\sigma,\tau) = \inf_\tau \sup_\sigma g_n(\mu,\sigma,\tau) =: V_n(\mu)$, le nombre $V_n(\mu)$ est appelé valeur du jeu.

Valeur du jeu.

- Si $\sup_\sigma \inf_\tau g_n(\mu, \sigma, \tau) = \inf_\tau \sup_\sigma g_n(\mu, \sigma, \tau) =: V_n(\mu)$, le nombre $V_n(\mu)$ est appelé valeur du jeu.
- Si $\Gamma_n(\mu)$ admet un équilibre (σ^*, τ^*), le jeu admet une valeur $V_n(\mu) = g_n(\mu, \sigma^*, \tau^*)$.

Mécanismes d’échange naturels

Mécanismes d’échange naturels

Un mécanisme d’échange $\langle I, J, T \rangle$ est dit naturel si

- Invariance à l’échelle du numéraire
- Invariance à la partie sans risque de l’actif risqué
- Existence de la valeur
- Valeur positive de l’information
- Continuité de la valeur

Mécanismes d'échange naturels

Un mécanisme d'échange $\langle I, J, T\rangle$ est dit naturel si

- Invariance à l'échelle du numéraire
  - Si échange R contre \$ ou contre du cent,
    $\rightarrow$ mêmes transactions en valeurs.
  - Traduction des actions en \$ vers les actions en cent:
  - $\forall \alpha > 0, \exists \psi_1 : I \rightarrow I; \exists \psi_2 : J \rightarrow J :$
    $\forall ij : A_{\psi_1(i),\psi_2(j)} = A_{ij}$ et $B_{\psi_1(i),\psi_2(j)} = \alpha B_{ij}$
- Invariance à la partie sans risque de l'actif risqué
- Existence de la valeur
- Valeur positive de l'information

Mécanismes d’échange naturels

Un mécanisme d’échange $\langle I, J, T\rangle$ est dit naturel si

- Invariance à l’échelle du numéraire : $\forall \alpha > 0 : V_1([\alpha L]) = \alpha V_1([L])$.
- Invariance à la partie sans risque de l’actif risqué
- Existence de la valeur
- Valeur positive de l’information
- Continuité de la valeur

Mécanismes d'échange naturels

Un mécanisme d'échange $\langle I, J, T \rangle$ est dit naturel si

- Invariance à l'échelle du numéraire :
  $\forall \alpha > 0 : V_1([\alpha L]) = \alpha V_1([L])$.
- Invariance à la partie sans risque de l'actif risqué
  - Si échange R ou $R + 100\$$ contre \$
    $\rightarrow$ mêmes transactions en valeurs.
  - Traduction des actions du cas 1 vers le cas 2:
  - $\forall \beta, \exists \psi_1 : I \rightarrow I; \exists \psi_2 : J \rightarrow J$:
    $\forall ij : A_{\psi_1(i),\psi_2(j)} = A_{ij}$ et $B_{\psi_1(i),\psi_2(j)} = B_{ij} - \beta A_{ij}$
- Existence de la valeur
- Valeur positive de l'information

Mécanismes d’échange naturels

Un mécanisme d’échange $\langle I, J, T\rangle$ est dit naturel si

- Invariance à l’échelle du numéraire : $\forall \alpha > 0 : V_1([\alpha L]) = \alpha V_1([L])$.
- Invariance à la partie sans risque de l’actif risqué: $\forall \beta : V_1([L+\beta]) = V_1([L])$.
- Existence de la valeur
- Valeur positive de l’information
- Continuité de la valeur

Mécanismes d’échange naturels

Un mécanisme d’échange $\langle I, J, T \rangle$ est dit naturel si

- Invariance à l’échelle du numéraire :
  $\forall \alpha > 0 : V_1([\alpha L]) = \alpha V_1([L])$.
- Invariance à la partie sans risque de l’actif risqué:
  $\forall \beta : V_1([L + \beta]) = V_1([L])$.
- Existence de la valeur
  - $\forall \mu \in \Delta^2$, $\Gamma_n(\mu)$ admet un équilibre.
- Valeur positive de l’information
- Continuité de la valeur

Mécanismes d’échange naturels

Un mécanisme d’échange $\langle I, J, T \rangle$ est dit naturel si

- Invariance à l’échelle du numéraire :
  $\forall \alpha > 0 : V_1([\alpha L]) = \alpha V_1([L])$.
- Invariance à la partie sans risque de l’actif risqué:
  $\forall \beta : V_1([L + \beta]) = V_1([L])$.
- Existence de la valeur
- Valeur positive de l’information
  - $\exists \mu \in \Delta^2 : V_1(\mu) > 0$
- Continuité de la valeur

Mécanismes d'échange naturels

Un mécanisme d'échange $\langle I, J, T \rangle$ est dit naturel si

- Invariance à l'échelle du numéraire : $\forall \alpha > 0 : V_1([\alpha L]) = \alpha V_1([L])$.
- Invariance à la partie sans risque de l'actif risqué: $\forall \beta : V_1([L + \beta]) = V_1([L])$.
- Existence de la valeur
- Valeur positive de l'information
- Continuité de la valeur
  - $\exists p \in [1, 2[, \exists A$ tel que $\forall$ v.a. X, Y: $|V_1([X]) - V_1([Y])| \leq A \|X - Y\|_{L^p}$

Le prix à l'étape q

- Comment définir le prix de R à l'étape q?

Le prix à l’étape q

- Comment définir le prix de R à l’étape q?
- Possibilité 1: $\frac{-B_{i_q j_q}}{A_{i_q j_q}}$

Le prix à l'étape q

- Comment définir le prix de R à l'étape q?
- Possibilité 1: $\frac{-B_{i_q j_q}}{A_{i_q j_q}}$
  $\rightarrow$ problème si $A_{i_q j_q} = 0$.

Le prix à l'étape q

- Comment définir le prix de R à l'étape q?
- Possibilité 1: $\frac{-B_{i_q j_q}}{A_{i_q j_q}}$
  $\rightarrow$ problème si $A_{i_q j_q} = 0$.
- Possibilité 2: prix=$L_q^n := E[L|i_s, j_s; s \leq q]$.
  C'est le prix auquel J2 est prêt à échanger avec un autre joueur non-informé.

Théorème 1:

- *Si le mécanisme d'échange est naturel,*
- *si,* $\forall n$, (σ^n, τ^n) *est un équilibre dans* $\Gamma_n(\mu)$
- *si* $L_q^n := E_{\pi(\mu,\sigma^n,\tau^n)}[L|i_s, j_s; s \leq q]$ *et* $\Pi_t^n := L_{[\![nt]\!]}^n$

Alors Π^n converge en loi fini-dimensionnelles vers la MCVM Π^μ.

Théorème 1:

- *Si le mécanisme d'échange est naturel,*
- *si,* $\forall n$, (σ^n, τ^n) *est un équilibre dans* $\Gamma_n(\mu)$
- *si* $L_q^n := E_{\pi(\mu,\sigma^n,\tau^n)}[L | i_s, j_s; s \leq q]$ *et* $\Pi_t^n := L_{[\![nt]\!]}^n$

Alors Π^n converge en loi fini-dimensionnelles vers la MCVM Π^μ.

Le processus des prix asymptotique est donc indépendant du mécanisme d'échange utilisé!

Le problème de J1

- $\mathcal{M}_n(\mu) := \{\}$ des martingales X de longueur $n+1$ telles que $[X_{n+1}] = \mu$.

Le problème de J1

- $\mathcal{M}_n(\mu) := \{\}$ des martingales X de longueur $n+1$ telles que $[X_{n+1}] = \mu$.

  Par exemple $L^n \in \mathcal{M}(\mu)$ où L^n est définie par $L^n_q := E[L|i_s, j_s; s \leq q]$ et $L^n_{n+1} := L$.

Le problème de J1

- $\mathcal{M}_n(\mu) := \{\}$ des martingales X de longueur $n+1$ telles que $[X_{n+1}] = \mu$.

  Par exemple $L^n \in \mathcal{M}(\mu)$ où L^n est définie par $L^n_q := E[L|i_s, j_s; s \leq q]$ et $L^n_{n+1} := L$.

- J1 contrôle L^n_q.

  $\rightarrow$ Il peut choisir la martingale $L^n \in \mathcal{M}_n(\mu)$ qu'il désire.

Le problème de J1

- Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mu)$.

Le problème de J1

- Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mu)$.
  - *étape 0: La nature utilise X pour choisir $L := X_{n+1}$*

Le problème de J1

- Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mu)$.
  - *étape 0: La nature utilise* X *pour choisir* $L := X_{n+1}$
  - *J1 observe* X

Le problème de J1

- Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mu)$.
  - *étape 0: La nature utilise* X *pour choisir* $L := X_{n+1}$
  - *J1 observe* X
  - *à l'étape* q, *J1 joue* $i_q(X_s, s \leq q)$.

Le problème de J1

- Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mu)$.
  - *étape 0: La nature utilise X pour choisir $L := X_{n+1}$*
  - *J1 observe X*
  - *à l'étape q, J1 joue $i_q(X_s, s \leq q)$.*
  - *Donnons + d'info à J2: après l'étape q J2 est informé de X_q.*

Le problème de J1

- Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mu)$.
  - *étape 0: La nature utilise* X *pour choisir* $L := X_{n+1}$
  - *J1 observe* X
  - *à l'étape* q*, J1 joue* $i_q(X_s, s \leq q)$.
  - *Donnons + d'info à J2: après l'étape* q *J2 est informé de* X_q.
  - $i_q(.)$ *est alors choisi pour maximiser le profit à l'étape* q.

    pas de problème de révélation

Le problème de J1

- Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mu)$.
  - *étape 0: La nature utilise X pour choisir $L := X_{n+1}$*
  - *J1 observe X*
  - *à l'étape q, J1 joue $i_q(X_s, s \leq q)$.*
  - *Donnons + d'info à J2: après l'étape q J2 est informé de X_q.*
  - *$i_q(.)$ est alors choisi pour maximiser le profit à l'étape q.*
    pas de problème de révélation
  - *Le jeu à l'étape q est alors $\Gamma_1([X_q|X_s, s < q])$*
    où $[X_q|X_s, s < q] =$ loi de X_q conditionnelle à $X_s, s < q$.

Le problème de J1

- Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mu)$.
  - *J1 observe* X
  - *à l'étape* q, *J1 joue* $i_q(X_s, s \leq q)$.
  - *Donnons + d'info à J2: après l'étape* q *J2 est informé de* X_q.
  - $i_q(.)$ *est alors choisi pour maximiser le profit à l'étape* q.
    pas de problème de révélation
  - *Le jeu à l'étape* q *est alors* $\Gamma_1([X_q | X_s, s < q])$
    où $[X_q | X_s, s < q] =$ *loi de* X_q *conditionnelle à* $X_s, s < q$.
  - *Si* $i_q()$ *est optimale dans* $\Gamma_1([X_q | X_s, s < q])$, *J1 obtient au moins* $\mathcal{V}_n(X) := \sum_{q=1}^{n} E[V_1([X_q | X_s, s < q])]$

Le problème de J1

- Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mu)$.
  - *Donnons + d'info à J2: après l'étape q J2 est informé de X_q.*
  - $i_q(.)$ *est alors choisi pour maximiser le profit à l'étape q.*
    pas de problème de révélation
  - *Le jeu à l'étape q est alors* $\Gamma_1([X_q|X_s, s < q])$
    où $[X_q|X_s, s < q] =$ *loi de X_q conditionnelle à $X_s, s < q$.*
  - *Si* $i_q()$ *est optimale dans* $\Gamma_1([X_q|X_s, s < q])$, *J1 obtient au moins* $\mathcal{V}_n(X) := \sum_{q=1}^n E[V_1([X_q|X_s, s < q])]$
  - $\overline{\mathcal{V}}_n(\mu) := \sup\{\mathcal{V}_n(X) : X \in \mathcal{M}_n(\mu)\}$
    $\Rightarrow V_n(\mu) \geq \overline{\mathcal{V}}_n(\mu)$

Optimisation de martingale

- **Proposition:** $V_n(\mu) = \overline{\mathcal{V}}_n(\mu)$.
  Si (σ^n, τ^n) *est un équilibre de* $\Gamma_n(\mu)$
  si $L_q^n := E_{\pi_{(\mu,\sigma^n,\tau^n)}}[L | i_s, j_s; s \leq q]$ *et* $L_{n+1}^n := L$
  alors L^n *est optimale dans le problème* $\overline{\mathcal{V}}_n(\mu)$.
- $\mathcal{V}_n(X) := \sum_{q=1}^n E[V_1([X_q | X_s, s < q])]$
- $\overline{\mathcal{V}}_n(\mu) := \sup\{\mathcal{V}_n(X) : X \in \mathcal{M}_n(\mu)\}$.

Optimisation de martingale

- **Proposition:** $V_n(\mu) = \overline{\mathcal{V}}_n(\mu)$.
  Si (σ^n, τ^n) *est un équilibre de* $\Gamma_n(\mu)$
  si $L^n_q := E_{\pi_{(\mu,\sigma^n,\tau^n)}}[L|i_s, j_s; s \leq q]$ *et* $L^n_{n+1} := L$
  alors L^n *est optimale dans le problème* $\overline{\mathcal{V}}_n(\mu)$.
- $\mathcal{V}_n(X) := \sum_{q=1}^{n} E[V_1([X_q|X_s, s < q])]$
- $\overline{\mathcal{V}}_n(\mu) := \sup\{\mathcal{V}_n(X) : X \in \mathcal{M}_n(\mu)\}$.
- *Invariance à la partie sans risque de* R
  $\Rightarrow \forall$ *constante* β : $V_1([X + \beta]) = V_1([X])$,

Optimisation de martingale

- **Proposition:** $V_n(\mu) = \overline{\mathcal{V}}_n(\mu)$.
  Si (σ^n, τ^n) *est un équilibre de* $\Gamma_n(\mu)$
  si $L^n_q := E_{\pi_{(\mu,\sigma^n,\tau^n)}}[L|i_s, j_s; s \leq q]$ *et* $L^n_{n+1} := L$
  alors L^n *est optimale dans le problème* $\overline{\mathcal{V}}_n(\mu)$.
- $\mathcal{V}_n(X) := \sum_{q=1}^n E[V_1([X_q|X_s, s < q])]$
- $\overline{\mathcal{V}}_n(\mu) := \sup\{\mathcal{V}_n(X) : X \in \mathcal{M}_n(\mu)\}$.
- *Invariance à la partie sans risque de* R
  $\Rightarrow \forall$ *constante* $\beta : V_1([X + \beta]) = V_1([X])$,
  $\Rightarrow V_1[X_q|X_s, s < q] = V_1[X_q - X_{q-1}|X_s, s < q]$

M-variation

- *Soit* $M : \Delta^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $X \in \mathcal{M}_n(\mu)$*,*
  La M*-variation de* X *est définie comme*
  $\mathcal{V}_n^M(X) := \sum_{q=1}^{n} E[M([X_q - X_{q-1}|X_s, s < q])]$

M-variation

- *Soit* $M : \Delta^2 \to \mathbb{R}$ *et* $X \in \mathcal{M}_n(\mu)$,
  La M*-variation de* X *est définie comme*
  $\mathcal{V}_n^M(X) := \sum_{q=1}^n E[M([X_q - X_{q-1}|X_s, s < q])]$
- $\mathcal{V}_n(X) = \mathcal{V}_n^{V_1}(X)$

M-variation

- *Soit* $M : \Delta^2 \to \mathbb{R}$ *et* $X \in \mathcal{M}_n(\mu)$*,*
  La M*-variation de* X *est définie comme*
  $\mathcal{V}_n^M(X) := \sum_{q=1}^n E[M([X_q - X_{q-1}|X_s, s < q])]$
- $\mathcal{V}_n(X) = \mathcal{V}_n^{V_1}(X)$
- $\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu) := \sup\{\mathcal{V}_n^M(X) : X \in \mathcal{M}_n(\mu)\}$

M-variation

- *Soit $M : \Delta^2 \to \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_n(\mu)$,*
  La M-variation de X est définie comme
  $\mathcal{V}_n^M(X) := \sum_{q=1}^n E[M([X_q - X_{q-1}|X_s, s < q])]$
- $\mathcal{V}_n(X) = \mathcal{V}_n^{V_1}(X)$
- $\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu) := \sup\{\mathcal{V}_n^M(X) : X \in \mathcal{M}_n(\mu)\}$
- $\gamma(\mu) := \sup\{E[ZL] : Z \sim \mathcal{N}(0,1); L \sim \mu\}$

M-variation

- *Soit* $M : \Delta^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $X \in \mathcal{M}_n(\mu)$,
  La M*-variation de* X *est définie comme*
  $\mathcal{V}_n^M(X) := \sum_{q=1}^n E[M([X_q - X_{q-1}|X_s, s < q])]$
- $\mathcal{V}_n(X) = \mathcal{V}_n^{V_1}(X)$
- $\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu) := \sup\{\mathcal{V}_n^M(X) : X \in \mathcal{M}_n(\mu)\}$
- $\gamma(\mu) := \sup\{E[ZL] : Z \sim \mathcal{N}(0,1); L \sim \mu\}$
  $\longrightarrow L =$ *fonction croissante de* Z.

M-variation

- *Soit* $M : \Delta^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $X \in \mathcal{M}_n(\mu)$,
  La M*-variation de* X *est définie comme*
  $\mathcal{V}_n^M(X) := \sum_{q=1}^n E[M([X_q - X_{q-1}|X_s, s < q])]$
- $\mathcal{V}_n(X) = \mathcal{V}_n^{V_1}(X)$
- $\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu) := \sup\{\mathcal{V}_n^M(X) : X \in \mathcal{M}_n(\mu)\}$
- $\gamma(\mu) := \sup\{E[ZL] : Z \sim \mathcal{N}(0,1); L \sim \mu\}$
  $\longrightarrow L =$ *fonction croissante de* Z.
  $\longrightarrow L = f_\mu(Z)$ *et* $\gamma(\mu) = E[Zf_\mu(Z)]$

Théorème 2:

- *Si* $\forall \alpha > 0, \forall Y : M([\alpha Y]) = \alpha M([Y])$,
  si $\exists p \in [1, 2[, A \in \mathbb{R} : \forall X, Y :$
  $|(M([X]) - M([Y])| \leq A\|X - Y\|_{L^p}$
  Alors $\frac{\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \to \infty} \rho\gamma(\mu)$.
  où $\rho := \sup\{M([X]) : \|X\|_{L^2} \leq 1\}$

Théorème 2:

- *Si* $\forall \alpha > 0, \forall Y : M([\alpha Y]) = \alpha M([Y])$*,*
  si $\exists p \in [1, 2[, A \in \mathbb{R} : \forall X, Y :$
  $|(M([X]) - M([Y])| \leq A\|X - Y\|_{L^p}$
  Alors $\frac{\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \to \infty} \rho\gamma(\mu)$*.*
  où $\rho := \sup\{M([X]) : \|X\|_{L^2} \leq 1\}$
- *Si* $\rho > 0$ *et si,* $\forall n$*,* $L^n \in \mathcal{M}_n(\mu)$ *vérifie*
  $\mathcal{V}_n^M(L^n) = \overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu)$
  Alors $\Pi_t^n := L^n_{[\![nt]\!]}$ *converge en loi fini-dimensionnelle vers la MCVM* Π_t^μ

Remarques

- La limite Π^{μ} ne dépend pas de M.

Remarques

- La limite Π^μ ne dépend pas de M.
  En particulier, la dynamique asymptotique des prix ne dépend pas du mécanisme d'échange naturel!

Remarques

- La limite Π^μ ne dépend pas de M.
  En particulier, la dynamique asymptotique des prix ne dépend pas du mécanisme d'échange naturel!
- Le théorème 2 justifie la terminologie MCVM.

Remarques

- La limite Π^μ ne dépend pas de M.
  En particulier, la dynamique asymptotique des prix ne dépend pas du mécanisme d'échange naturel!
- Le théorème 2 justifie la terminologie MCVM.
- La preuve repose sur
  - Dualité
  - Théorème Central Limite
  - Plongement de martingales dans une filtration Brownième

Preuve du Théorème 2

- $B^q_r := \{X : \|X\|_{L^q} \leq r\}$
- $B^* := B^2_\rho \cap B^{p'}_A$ où $1/p + 1/p' = 1$
- $B([X]) := \sup\{E[XY] : Y \in B^*\}$

Preuve du Théorème 2

- $B_r^q := \{X : \|X\|_{L^q} \leq r\}$
- $B^* := B_\rho^2 \cap B_A^{p'}$ où $1/p + 1/p' = 1$
- $B([X]) := \sup\{E[XY] : Y \in B^*\}$
- **Lemme:** $\forall X : M([X]) \leq B([X])$

Preuve du Théorème 2

- $B_r^q := \{X : \|X\|_{L^q} \leq r\}$
- $B^* := B_\rho^2 \cap B_A^{p'}$ où $1/p + 1/p' = 1$
- $B([X]) := \sup\{E[XY] : Y \in B^*\}$
- **Lemme:** $\forall X : M([X]) \leq B([X])$
  - $X \to B([X])$ est convexe.

Preuve du Théorème 2

- $B_r^q := \{X : \|X\|_{L^q} \leq r\}$
- $B^* := B_\rho^2 \cap B_A^{p'}$ où $1/p + 1/p' = 1$
- $B([X]) := \sup\{E[XY] : Y \in B^*\}$
- **Lemme:** $\forall X : M([X]) \leq B([X])$
  - $X \to B([X])$ est convexe.
    $\to \tilde{B} := \{X : B([X]) \leq 1\}$ est convexe.

Preuve du Théorème 2

- $B_r^q := \{X : \|X\|_{L^q} \leq r\}$
- $B^* := B_\rho^2 \cap B_A^{p'}$ où $1/p + 1/p' = 1$
- $B([X]) := \sup\{E[XY] : Y \in B^*\}$
- **Lemme:** $\forall X : M([X]) \leq B([X])$
  - $\tilde{B} := \{X : B([X]) \leq 1\}$ est convexe.
  - $B([X]) \leq \rho\|X\|_{L^2}$ et $B([X]) \leq A\|X\|_{L^p}$

Preuve du Théorème 2

- $B_r^q := \{X : \|X\|_{L^q} \leq r\}$
- $B^* := B_\rho^2 \cap B_A^{p'}$ où $1/p + 1/p' = 1$
- $B([X]) := \sup\{E[XY] : Y \in B^*\}$
- **Lemme:** $\forall X : M([X]) \leq B([X])$
  - $\tilde{B} := \{X : B([X]) \leq 1\}$ est convexe.
  - $B([X]) \leq \rho\|X\|_{L^2}$ et $B([X]) \leq A\|X\|_{L^p}$ $\rightarrow B_{\frac{1}{\rho}}^2 \cup B_{\frac{1}{A}}^p \subset \tilde{B}$

Preuve du Théorème 2

- $B^q_r := \{X : \|X\|_{L^q} \leq r\}$
- $B^* := B^2_\rho \cap B^{p'}_A$ où $1/p + 1/p' = 1$
- $B([X]) := \sup\{E[XY] : Y \in B^*\}$
- **Lemme:** $\forall X : M([X]) \leq B([X])$
  - $\tilde{B} := \{X : B([X]) \leq 1\}$ est convexe.
  - $B([X]) \leq \rho\|X\|_{L^2}$ et $B([X]) \leq A\|X\|_{L^p}$
    $\rightarrow B^2_{\frac{1}{\rho}} \cup B^p_{\frac{1}{A}} \subset \tilde{B}$
    $\rightarrow C := vex(B^2_{\frac{1}{\rho}} \cup B^p_{\frac{1}{A}}) \subset \tilde{B}$

Preuve du Théorème 2

- $B_r^q := \{X : \|X\|_{L^q} \leq r\}$
- $B^* := B_\rho^2 \cap B_A^{p'}$ où $1/p + 1/p' = 1$
- $B([X]) := \sup\{E[XY] : Y \in B^*\}$
- **Lemme:** $\forall X : M([X]) \leq B([X])$
  - $\tilde{B} := \{X : B([X]) \leq 1\}$ est convexe.
  - $C := vex(B^2_{\frac{1}{\rho}} \cup B^p_{\frac{1}{A}}) \subset \tilde{B}$
  - Si $X \notin C$: $\exists Z : E[XZ] > 1 = \sup\{E[YZ]; Y \in C\}$

Preuve du Théorème 2

- $B_r^q := \{X : \|X\|_{L^q} \leq r\}$
- $B^* := B_\rho^2 \cap B_A^{p'}$ où $1/p + 1/p' = 1$
- $B([X]) := \sup\{E[XY] : Y \in B^*\}$
- **Lemme:** $\forall X : M([X]) \leq B([X])$
  - $\tilde{B} := \{X : B([X]) \leq 1\}$ est convexe.
  - $C := vex(B^2_{\frac{1}{\rho}} \cup B^p_{\frac{1}{A}}) \subset \tilde{B}$
  - Si $X \notin C$: $\exists Z : E[XZ] > 1 = \sup\{E[YZ]; Y \in C\}$
    $\rightarrow 1 \geq \frac{1}{\rho}\|Z\|_{L^2}$ et $1 \geq \frac{1}{A}\|Z\|_{L^{p'}}$

Preuve du Théorème 2

- $B^q_r := \{X : \|X\|_{L^q} \leq r\}$
- $B^* := B^2_\rho \cap B^{p'}_A$ où $1/p + 1/p' = 1$
- $B([X]) := \sup\{E[XY] : Y \in B^*\}$
- **Lemme:** $\forall X : M([X]) \leq B([X])$
  - $\tilde{B} := \{X : B([X]) \leq 1\}$ est convexe.
  - $C := vex(B^2_{\frac{1}{\rho}} \cup B^p_{\frac{1}{A}}) \subset \tilde{B}$
  - Si $X \notin C$: $\exists Z : E[XZ] > 1 = \sup\{E[YZ]; Y \in C\}$
    $\rightarrow 1 \geq \frac{1}{\rho}\|Z\|_{L^2}$ et $1 \geq \frac{1}{A}\|Z\|_{L^{p'}}$
    $\rightarrow Z \in B^2_\rho \cap B^{p'}_A =: B^*$

Preuve du Théorème 2

- $B^q_r := \{X : \|X\|_{L^q} \leq r\}$
- $B^* := B^2_\rho \cap B^{p'}_A$ où $1/p + 1/p' = 1$
- $B([X]) := \sup\{E[XY] : Y \in B^*\}$
- **Lemme:** $\forall X : M([X]) \leq B([X])$
  - $\tilde{B} := \{X : B([X]) \leq 1\}$ est convexe.
  - $C := vex(B^2_{\frac{1}{\rho}} \cup B^p_{\frac{1}{A}}) \subset \tilde{B}$
  - Si $X \notin C$: $\exists Z : E[XZ] > 1 = \sup\{E[YZ]; Y \in C\}$
    $\rightarrow 1 \geq \frac{1}{\rho}\|Z\|_{L^2}$ et $1 \geq \frac{1}{A}\|Z\|_{L^{p'}}$
    $\rightarrow Z \in B^2_\rho \cap B^{p'}_A =: B^*$
    $\rightarrow B([X]) \geq E[XZ] > 1$

Preuve du Théorème 2

- $B_r^q := \{X : \|X\|_{L^q} \leq r\}$
- $B^* := B_\rho^2 \cap B_A^{p'}$ où $1/p + 1/p' = 1$
- $B([X]) := \sup\{E[XY] : Y \in B^*\}$
- **Lemme:** $\forall X : M([X]) \leq B([X])$
  - $\tilde{B} := \{X : B([X]) \leq 1\}$ est convexe.
  - $C := vex(B_{\frac{1}{\rho}}^2 \cup B_{\frac{1}{A}}^p) \subset \tilde{B}$
  - Si $X \notin C$: $\exists Z : E[XZ] > 1 = \sup\{E[YZ]; Y \in C\}$
    $\rightarrow 1 \geq \frac{1}{\rho}\|Z\|_{L^2}$ et $1 \geq \frac{1}{A}\|Z\|_{L^{p'}}$
    $\rightarrow Z \in B_\rho^2 \cap B_A^{p'} =: B^*$
    $\rightarrow B([X]) \geq E[XZ] > 1$ i.e. $X \notin \tilde{B}$.

Preuve du Théorème 2

- $B^q_r := \{X : \|X\|_{L^q} \leq r\}$
- $B^* := B^2_\rho \cap B^{p'}_A$ où $1/p + 1/p' = 1$
- $B([X]) := \sup\{E[XY] : Y \in B^*\}$
- **Lemme:** $\forall X : M([X]) \leq B([X])$
  - $\tilde{B} := \{X : B([X]) \leq 1\} = vex(B^2_{\frac{1}{\rho}} \cup B^p_{\frac{1}{A}})$

Preuve du Théorème 2

- $B^q_r := \{X : \|X\|_{L^q} \leq r\}$
- $B^* := B^2_\rho \cap B^{p'}_A$ où $1/p + 1/p' = 1$
- $B([X]) := \sup\{E[XY] : Y \in B^*\}$
- **Lemme:** $\forall X : M([X]) \leq B([X])$
  - $\tilde{B} := \{X : B([X]) \leq 1\} = vex(B^2_{\frac{1}{\rho}} \cup B^p_{\frac{1}{A}})$
  - Si $B([X]) \leq 1 : \exists X' \in B^2_{\frac{1}{\rho}}, X'' \in B^p_{\frac{1}{A}}, \lambda', \lambda'' \geq 0 :$ $\lambda' + \lambda'' = 1$ et $X = \lambda' X' + \lambda'' X''$

Preuve du Théorème 2

- $B_r^q := \{X : \|X\|_{L^q} \le r\}$
- $B^* := B_\rho^2 \cap B_A^{p'}$ où $1/p + 1/p' = 1$
- $B([X]) := \sup\{E[XY] : Y \in B^*\}$
- **Lemme:** $\forall X : M([X]) \le B([X])$
  - $\tilde{B} := \{X : B([X]) \le 1\} = vex(B^2_{\frac{1}{\rho}} \cup B^p_{\frac{1}{A}})$
  - Si $B([X]) \le 1 : \exists X' \in B^2_{\frac{1}{\rho}}, X'' \in B^p_{\frac{1}{A}}, \lambda', \lambda'' \ge 0 :$ $\lambda' + \lambda'' = 1$ et $X = \lambda' X' + \lambda'' X''$

$$M([X]) \le M([\lambda' X']) + A\|\lambda'' X''\|_{L^p}$$

Preuve du Théorème 2

- $B_r^q := \{X : \|X\|_{L^q} \leq r\}$
- $B^* := B_\rho^2 \cap B_A^{p'}$ où $1/p + 1/p' = 1$
- $B([X]) := \sup\{E[XY] : Y \in B^*\}$
- **Lemme:** $\forall X : M([X]) \leq B([X])$
  - $\tilde{B} := \{X : B([X]) \leq 1\} = vex(B^2_{\frac{1}{\rho}} \cup B^p_{\frac{1}{A}})$
  - Si $B([X]) \leq 1 : \exists X' \in B^2_{\frac{1}{\rho}}, X'' \in B^p_{\frac{1}{A}}, \lambda', \lambda'' \geq 0 :$
    $\lambda' + \lambda'' = 1$ et $X = \lambda' X' + \lambda'' X''$

$$\begin{aligned} M([X]) &\leq M([\lambda' X']) + A\|\lambda'' X''\|_{L^p} \\ &\leq \rho\|\lambda' X'\|_{L^2} + A\|\lambda'' X''\|_{L^p} \end{aligned}$$

Preuve du Théorème 2

- $B_r^q := \{X : \|X\|_{L^q} \leq r\}$
- $B^* := B_\rho^2 \cap B_A^{p'}$ où $1/p + 1/p' = 1$
- $B([X]) := \sup\{E[XY] : Y \in B^*\}$
- **Lemme:** $\forall X : M([X]) \leq B([X])$
  - $\tilde{B} := \{X : B([X]) \leq 1\} = vex(B^2_{\frac{1}{\rho}} \cup B^p_{\frac{1}{A}})$
  - Si $B([X]) \leq 1 : \exists X' \in B^2_{\frac{1}{\rho}}, X'' \in B^p_{\frac{1}{A}}, \lambda', \lambda'' \geq 0 :$
    $\lambda' + \lambda'' = 1$ et $X = \lambda' X' + \lambda'' X''$

$$\begin{aligned} M([X]) &\leq M([\lambda' X']) + A\|\lambda'' X''\|_{L^p} \\ &\leq \rho\|\lambda' X'\|_{L^2} + A\|\lambda'' X''\|_{L^p} \leq \lambda' + \lambda'' = 1 \end{aligned}$$

Preuve du Théorème 2

- $B_r^q := \{X : \|X\|_{L^q} \leq r\}$
- $B^* := B_\rho^2 \cap B_A^{p'}$ où $1/p + 1/p' = 1$
- $B([X]) := \sup\{E[XY] : Y \in B^*\}$
- **Lemme:** $\forall X : M([X]) \leq B([X])$
- $\limsup \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu)}{\sqrt{n}} \leq \rho\gamma(\mu)$.

Preuve du Théorème 2

- $B_r^q := \{X : \|X\|_{L^q} \leq r\}$
- $B^* := B_\rho^2 \cap B_A^{p'}$ où $1/p + 1/p' = 1$
- $B([X]) := \sup\{E[XY] : Y \in B^*\}$
- **Lemme:** $\forall X : M([X]) \leq B([X])$
- $\limsup \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu)}{\sqrt{n}} \leq \rho\gamma(\mu)$.
- *Si* $L \in \mathcal{M}_n(\mu) : \mathcal{V}_n^M(L) \leq \mathcal{V}_n^B(L)$.

Preuve du Théorème 2

- $B_r^q := \{X : \|X\|_{L^q} \leq r\}$
- $B^* := B_\rho^2 \cap B_A^{p'}$ où $1/p + 1/p' = 1$
- $B([X]) := \sup\{E[XY] : Y \in B^*\}$
- **Lemme:** $\forall X : M([X]) \leq B([X])$
- $\limsup \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu)}{\sqrt{n}} \leq \rho\gamma(\mu)$.
- *Si* $L \in \mathcal{M}_n(\mu) : \mathcal{V}_n^M(L) \leq \mathcal{V}_n^B(L)$.
- $\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu) \leq \overline{\mathcal{V}}_n^B(\mu)$

Preuve du Théorème 2

- $\limsup \dfrac{\overline{\mathcal{V}}_n^B(\mu)}{\sqrt{n}} \leq \rho\gamma(\mu).$

Preuve du Théorème 2

- $\limsup \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^B(\mu)}{\sqrt{n}} \leq \rho\gamma(\mu)$.
- $E[B([L_q - L_{q-1}|L_s, s \leq q])] = \sup_{Y_q} E[(L_q - L_{q-1})Y_q]$
  où Y_q *vérifie:*
  - Y_q: $\sigma(L_s, s \leq q)$*-mesurable.*
  - $E[Y_q^2|L_s, s < q] \leq \rho^2$
  - $E[|Y_q|^{p'}|L_s, s < q] \leq A^{p'}$

Preuve du Théorème 2

- $\limsup \dfrac{\overline{\mathcal{V}}_n^B(\mu)}{\sqrt{n}} \leq \rho\gamma(\mu)$.
- $E[B([L_q - L_{q-1}|L_s, s \leq q])] = \sup_{Y_q} E[(L_q - L_{q-1})Y_q]$
  où Y_q vérifie:
  - Y_q*:* $\sigma(L_s, s \leq q)$*-mesurable.*
  - $E[Y_q^2|L_s, s < q] \leq \rho^2$
  - $E[|Y_q|^{p'}|L_s, s < q] \leq A^{p'}$
- *Si* $Y_q' := Y_q - E[Y_q|L_s, s < q]$, *alors*
  $E[(L_q - L_{q-1})Y_q] = E[(L_q - L_{q-1})Y_q'] = E[L_q Y_q']$

Preuve du Théorème 2

- $\limsup \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^B(\mu)}{\sqrt{n}} \leq \rho\gamma(\mu)$.
- $E[B([L_q - L_{q-1}|L_s, s \leq q])] = \sup_{Y_q} E[(L_q - L_{q-1})Y_q]$
  où Y_q vérifie:
  - Y_q*: $\sigma(L_s, s \leq q)$-mesurable.*
  - $E[Y_q^2|L_s, s < q] \leq \rho^2$
  - $E[|Y_q|^{p'}|L_s, s < q] \leq A^{p'}$
- *Si $Y_q' := Y_q - E[Y_q|L_s, s < q]$, alors*
  $E[(L_q - L_{q-1})Y_q] = E[(L_q - L_{q-1})Y_q'] = E[L_q Y_q']$
  - Y_q'*: $\sigma(L_s, s \leq q)$-mesurable et $E[Y_q'|L_s, s < q] = 0$.*

Preuve du Théorème 2

- $\limsup \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^B(\mu)}{\sqrt{n}} \leq \rho\gamma(\mu)$.
- $E[B([L_q - L_{q-1}|L_s, s \leq q])] = \sup_{Y_q} E[(L_q - L_{q-1})Y_q]$
  où Y_q *vérifie:*
  - $E[Y_q^2|L_s, s < q] \leq \rho^2$
  - $E[|Y_q|^{p'}|L_s, s < q] \leq A^{p'}$
- *Si* $Y_q' := Y_q - E[Y_q|L_s, s < q]$, *alors*
  $E[(L_q - L_{q-1})Y_q] = E[(L_q - L_{q-1})Y_q'] = E[L_q Y_q']$
  - Y_q': $\sigma(L_s, s \leq q)$*-mesurable et* $E[Y_q'|L_s, s < q] = 0$.
  - $E[Y_q'^2|L_s, s < q] \leq \rho^2$

Preuve du Théorème 2

- $\limsup \dfrac{\overline{\mathcal{V}}_n^B(\mu)}{\sqrt{n}} \leq \rho\gamma(\mu)$.
- $E[B([L_q - L_{q-1}|L_s, s \leq q])] = \sup_{Y_q} E[(L_q - L_{q-1})Y_q]$
  où Y_q *vérifie:*
  - $E[|Y_q|^{p'}|L_s, s < q] \leq A^{p'}$
- *Si* $Y_q' := Y_q - E[Y_q|L_s, s < q]$, *alors*
  $E[(L_q - L_{q-1})Y_q] = E[(L_q - L_{q-1})Y_q'] = E[L_q Y_q']$
  - Y_q': $\sigma(L_s, s \leq q)$*-mesurable et* $E[Y_q'|L_s, s < q] = 0$.
  - $E[Y_q'^2|L_s, s < q] \leq \rho^2$
  - $E[|Y_q'|^{p'}|L_s, s < q] \leq (2A)^{p'}$

Preuve du Théorème 2

- $\limsup \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^B(\mu)}{\sqrt{n}} \leq \rho\gamma(\mu)$.
- $E[B([L_q - L_{q-1}|L_s, s \leq q])] = \sup_{Y_q} E[(L_q - L_{q-1})Y_q]$
- *Si* $Y'_q := Y_q - E[Y_q|L_s, s < q]$, *alors* $E[(L_q - L_{q-1})Y_q] = E[(L_q - L_{q-1})Y'_q] = E[L_q Y'_q]$
  - Y'_q: $\sigma(L_s, s \leq q)$*-mesurable et* $E[Y'_q|L_s, s < q] = 0$.
  - $E[Y'^2_q|L_s, s < q] \leq \rho^2$
  - $E[|Y'_q|^{p'}|L_s, s < q] \leq (2A)^{p'}$
- *Si* $Z_q \sim \mathcal{N}(0,1) \perp\!\!\!\perp L_s, s \leq n+1$, *si* $\mathcal{H}_q := \sigma(L_s, Z_s, s \leq q)$, *si* $Y''_q := Y'_q + \sqrt{\rho^2 - E[Y'^2_q|L_s, s < q]}\,Z_q$

Preuve du Théorème 2

- $\limsup \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^B(\mu)}{\sqrt{n}} \leq \rho\gamma(\mu)$.
- $E[B([L_q - L_{q-1}|L_s, s \leq q])] = \sup_{Y_q} E[(L_q - L_{q-1})Y_q]$
- *Si* $Y'_q := Y_q - E[Y_q|L_s, s < q]$, *alors*
  $E[(L_q - L_{q-1})Y_q] = E[(L_q - L_{q-1})Y'_q] = E[L_q Y'_q]$
  - Y'_q: $\sigma(L_s, s \leq q)$*-mesurable et* $E[Y'_q|L_s, s < q] = 0$.
  - $E[Y'^2_q|L_s, s < q] \leq \rho^2$
  - $E[|Y'_q|^{p'}|L_s, s < q] \leq (2A)^{p'}$
- *Si* $Z_q \sim \mathcal{N}(0,1) \perp\!\!\!\perp L_s, s \leq n+1$, *si* $\mathcal{H}_q := \sigma(L_s, Z_s, s \leq q)$,
  si $Y''_q := Y'_q + \sqrt{\rho^2 - E[Y'^2_q|L_s, s < q]}Z_q$ *alors*
  - Y''_q *est* $\mathcal{H}_q$*-mesurable et* $E[Y''_q|\mathcal{H}_{q-1}] = 0$.

Preuve du Théorème 2

- $\limsup \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^B(\mu)}{\sqrt{n}} \leq \rho\gamma(\mu)$.
- $E[B([L_q - L_{q-1}|L_s, s \leq q])] = \sup_{Y_q} E[(L_q - L_{q-1})Y_q]$
- Si $Y'_q := Y_q - E[Y_q|L_s, s < q]$, alors
  $E[(L_q - L_{q-1})Y_q] = E[(L_q - L_{q-1})Y'_q] = E[L_q Y'_q]$
  - $E[Y'^2_q|L_s, s < q] \leq \rho^2$
  - $E[|Y'_q|^{p'}|L_s, s < q] \leq (2A)^{p'}$
- Si $Z_q \sim \mathcal{N}(0,1) \perp\!\!\!\perp L_s, s \leq n+1$, si $\mathcal{H}_q := \sigma(L_s, Z_s, s \leq q)$,
  si $Y''_q := Y'_q + \sqrt{\rho^2 - E[Y'^2_q|L_s, s < q]}Z_q$ alors
  - Y''_q est $\mathcal{H}_q$-mesurable et $E[Y''_q|\mathcal{H}_{q-1}] = 0$.
  - $E[Y''^2_q|\mathcal{H}_{q-1}] = \rho^2$

Preuve du Théorème 2

- $\limsup \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^B(\mu)}{\sqrt{n}} \le \rho\gamma(\mu)$.
- $E[B([L_q - L_{q-1}|L_s, s \le q])] = \sup_{Y_q} E[(L_q - L_{q-1})Y_q]$
- *Si* $Y'_q := Y_q - E[Y_q|L_s, s < q]$, *alors* $E[(L_q - L_{q-1})Y_q] = E[(L_q - L_{q-1})Y'_q] = E[L_q Y'_q]$
  - $E[|Y'_q|^{p'}|L_s, s < q] \le (2A)^{p'}$
- *Si* $Z_q \sim \mathcal{N}(0,1) \perp\!\!\!\perp L_s, s \le n+1$, *si* $\mathcal{H}_q := \sigma(L_s, Z_s, s \le q)$, *si* $Y''_q := Y'_q + \sqrt{\rho^2 - E[Y'^2_q|L_s, s < q]}Z_q$ *alors*
  - Y''_q *est* $\mathcal{H}_q$*-mesurable et* $E[Y''_q|\mathcal{H}_{q-1}] = 0$.
  - $E[Y''^2_q|\mathcal{H}_{q-1}] = \rho^2$
  - $E[|Y''_q|^{p'}|\mathcal{H}_{q-1}] \le (2A+C)^{p'} =: K^{p'}$

Preuve du Théorème 2

- $\limsup \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^B(\mu)}{\sqrt{n}} \leq \rho\gamma(\mu)$.
- $E[B([L_q - L_{q-1}|L_s, s \leq q])] = \sup_{Y_q} E[(L_q - L_{q-1})Y_q]$
- *Si* $Y'_q := Y_q - E[Y_q|L_s, s < q]$, *alors* $E[(L_q - L_{q-1})Y_q] = E[(L_q - L_{q-1})Y'_q] = E[L_q Y'_q]$
- *Si* $Z_q \sim \mathcal{N}(0,1) \perp\!\!\!\perp L_s, s \leq n+1$, *si* $\mathcal{H}_q := \sigma(L_s, Z_s, s \leq q)$, *si* $Y''_q := Y'_q + \sqrt{\rho^2 - E[Y'^2_q|L_s, s < q]}Z_q$ *alors*
  - Y''_q *est* $\mathcal{H}_q$*-mesurable et* $E[Y''_q|\mathcal{H}_{q-1}] = 0$.
  - $E[Y''^2_q|\mathcal{H}_{q-1}] = \rho^2$
  - $E[|Y''_q|^{p'}|\mathcal{H}_{q-1}] \leq (2A + C)^{p'} =: K^{p'}$

  $E[(L_q - L_{q-1})Y_q] = E[L_q Y'_q] = E[L_q Y''_q] = E[L_{n+1} Y''_q]$

Preuve du Théorème 2

- $\limsup \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^B(\mu)}{\sqrt{n}} \leq \rho\gamma(\mu).$
- $E[B([L_q - L_{q-1}|L_s, s \leq q])] = \sup_{Y_q} E[(L_q - L_{q-1})Y_q]$
- *si* $Z_q \sim \mathcal{N}(0,1) \perp\!\!\!\perp L_s, s \leq n+1$, *si* $\mathcal{H}_q := \sigma(L_s, Z_s, s \leq q)$, *si* $Y_q'' := Y_q' + \sqrt{\rho^2 - E[Y_q'^2|L_s, s < q]}Z_q$ *alors*
  - Y_q'' *est* $\mathcal{H}_q$*-mesurable et* $E[Y_q''|\mathcal{H}_{q-1}] = 0$.
  - $E[Y_q''^2|\mathcal{H}_{q-1}] = \rho^2$
  - $E[|Y_q''|^{p'}|\mathcal{H}_{q-1}] \leq (2A + C)^{p'} =: K^{p'}$

  $E[(L_q - L_{q-1})Y_q] = E[L_q Y_q'] = E[L_q Y_q''] = E[L_{n+1} Y_q'']$
- $\frac{\mathcal{V}_n^B(L)}{\sqrt{n}} \leq \sup_{Y''} E[L_{n+1} \frac{\sum_{q=1}^n Y_q''}{\sqrt{n}}]$

Preuve du Théorème 2

- $\limsup \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^B(\mu)}{\sqrt{n}} \leq \rho\gamma(\mu)$.
- $E[B([L_q - L_{q-1}|L_s, s \leq q])] = \sup_{Y_q} E[(L_q - L_{q-1})Y_q]$
- si $Z_q \sim \mathcal{N}(0,1) \perp\!\!\!\perp L_s, s \leq n+1$, si $\mathcal{H}_q := \sigma(L_s, Z_s, s \leq q)$, si $Y_q'' := Y_q' + \sqrt{\rho^2 - E[Y_q'^2|L_s, s < q]}Z_q$ alors
  - Y_q'' est $\mathcal{H}_q$-mesurable et $E[Y_q''|\mathcal{H}_{q-1}] = 0$.
  - $E[Y_q''^2|\mathcal{H}_{q-1}] = \rho^2$
  - $E[|Y_q''|^{p'}|\mathcal{H}_{q-1}] \leq (2A+C)^{p'} =: K^{p'}$

  $E[(L_q - L_{q-1})Y_q] = E[L_q Y_q'] = E[L_q Y_q''] = E[L_{n+1} Y_q'']$
- $\frac{\mathcal{V}_n^B(L)}{\sqrt{n}} \leq \sup_{Y''} E[L_{n+1} \frac{\sum_{q=1}^n Y_q''}{\sqrt{n}}] \overset{TCL}{\approx} E[L_{n+1} Z \rho]$
  où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

Preuve du Théorème 2

- $\limsup \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^B(\mu)}{\sqrt{n}} \leq \rho\gamma(\mu)$.
- $E[B([L_q - L_{q-1}|L_s, s \leq q])] = \sup_{Y_q} E[(L_q - L_{q-1})Y_q]$
- *Si* $Z_q \sim \mathcal{N}(0,1) \perp\!\!\!\perp L_s, s \leq n+1$, *si* $\mathcal{H}_q := \sigma(L_s, Z_s, s \leq q)$, *si* $Y_q'' := Y_q' + \sqrt{\rho^2 - E[Y_q'^2|L_s, s < q]}Z_q$ *alors*
  - Y_q'' *est* $\mathcal{H}_q$*-mesurable et* $E[Y_q''|\mathcal{H}_{q-1}] = 0$.
  - $E[Y_q''^2|\mathcal{H}_{q-1}] = \rho^2$
  - $E[|Y_q''|^{p'}|\mathcal{H}_{q-1}] \leq (2A + C)^{p'} =: K^{p'}$

  $E[(L_q - L_{q-1})Y_q] = E[L_q Y_q'] = E[L_q Y_q''] = E[L_{n+1} Y_q'']$
- $\frac{\mathcal{V}_n^B(L)}{\sqrt{n}} \leq \sup_{Y''} E[L_{n+1} \frac{\sum_{q=1}^n Y_q''}{\sqrt{n}}] \overset{TCL}{\approx} E[L_{n+1} Z\rho] \leq \rho\gamma(\mu)$ *où* $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ *et* $L_{n+1} \sim \mu$.

Immersion à la Skorohod et TCL

- Soit B un MB et $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle.
  Soit $S_q := \frac{\sum_{k=1}^{q} Y_k''}{\rho\sqrt{n}}$
  $\exists$ une suite croissante τ_q de $\mathcal{F}$-t. a.
  $\exists \tilde{L}_{n+1}$ une v.a. $\mathcal{F}_\infty$-mesurable
  tels que $[(S_1, \dots, S_n, L_{n+1})] = [(B_{\tau_1}, \dots, B_{\tau_n}, \tilde{L}_{n+1})]$.

Immersion à la Skorohod et TCL

- *Soit* B *un MB et* $\mathcal{F}$ *sa filtration naturelle.*
  Soit $S_q := \frac{\sum_{k=1}^{q} Y_k''}{\rho\sqrt{n}}$
  $\exists$ *une suite croissante* τ_q *de* $\mathcal{F}$*-t. a.*
  $\exists \tilde{L}_{n+1}$ *une v.a.* $\mathcal{F}_\infty$*-mesurable*
  tels que $[(S_1, \ldots, S_n, L_{n+1})] = [(B_{\tau_1}, \ldots, B_{\tau_n}, \tilde{L}_{n+1})]$.
- $E[\tau_n] = E[B^2_{\tau_n}] = E[S^2_n] = 1$

Immersion à la Skorohod et TCL

- *Soit* B *un MB et* $\mathcal{F}$ *sa filtration naturelle.*
  Soit $S_q := \frac{\sum_{k=1}^{q} Y_k''}{\rho\sqrt{n}}$
  $\exists$ *une suite croissante* τ_q *de* $\mathcal{F}$*-t. a.*
  $\exists \tilde{L}_{n+1}$ *une v.a.* $\mathcal{F}_\infty$*-mesurable*
  tels que $[(S_1, \ldots, S_n, L_{n+1})] = [(B_{\tau_1}, \ldots, B_{\tau_n}, \tilde{L}_{n+1})]$.
- $E[\tau_n] = E[B^2_{\tau_n}] = E[S^2_n] = 1$
- $\theta_q := \tau_q - q/n$ *est une* $\mathcal{F}_{\tau_q}$*-martingale:*
  $E[\tau_q - \tau_{q-1} | \mathcal{F}_{\tau_{q-1}}] = E[(B_{\tau_q} - B_{\tau_{q-1}})^2 | \mathcal{F}_{\tau_{q-1}}] =$
  $E[(Y_q''/\rho\sqrt{n})^2 | S_t, t < q] = 1/n$

Immersion à la Skorohod et TCL

- *Soit* B *un MB et* $\mathcal{F}$ *sa filtration naturelle.*
  Soit $S_q := \frac{\sum_{k=1}^{q} Y_k''}{\rho\sqrt{n}}$
  $\exists$ *une suite croissante* τ_q *de* $\mathcal{F}$*-t. a.*
  $\exists \tilde{L}_{n+1}$ *une v.a.* $\mathcal{F}_\infty$*-mesurable*
  tels que $[(S_1, \ldots, S_n, L_{n+1})] = [(B_{\tau_1}, \ldots, B_{\tau_n}, \tilde{L}_{n+1})]$.
- $E[\tau_n] = E[B^2_{\tau_n}] = E[S^2_n] = 1$
- $\theta_q := \tau_q - q/n$ *est une* $\mathcal{F}_{\tau_q}$*-martingale:*
- $p < 2 \implies p' > 2$. *Ici* $p' = 4$

Immersion à la Skorohod et TCL

- *Soit* B *un MB et* $\mathcal{F}$ *sa filtration naturelle.*
  Soit $S_q := \frac{\sum_{k=1}^{q} Y_k''}{\rho\sqrt{n}}$
  $\exists$ *une suite croissante* τ_q *de* $\mathcal{F}$*-t. a.*
  $\exists \tilde{L}_{n+1}$ *une v.a.* $\mathcal{F}_\infty$*-mesurable*
  tels que $[(S_1, \ldots, S_n, L_{n+1})] = [(B_{\tau_1}, \ldots, B_{\tau_n}, \tilde{L}_{n+1})]$.
- $E[\tau_n] = E[B_{\tau_n}^2] = E[S_n^2] = 1$
- $\theta_q := \tau_q - q/n$ *est une* $\mathcal{F}_{\tau_q}$*-martingale:*
- $p < 2 \implies p' > 2$. *Ici* $p' = 4$
  $E[(\theta_q - \theta_{q-1})^2] \leq E[(\tau_q - \tau_{q-1})^2] \leq$
  $C_4 E[(B_{\tau_q} - B_{\tau_{q-1}})^4] = C_4 E[(Y_q''/\rho\sqrt{n})^4] \leq C_4 K/n^2$

Immersion à la Skorohod et TCL

- *Soit* B *un MB et* $\mathcal{F}$ *sa filtration naturelle.*
  Soit $S_q := \frac{\sum_{k=1}^{q} Y_k''}{\rho\sqrt{n}}$
  $\exists$ *une suite croissante* τ_q *de* $\mathcal{F}$*-t. a.*
  $\exists \tilde{L}_{n+1}$ *une v.a.* $\mathcal{F}_\infty$*-mesurable*
  tels que $[(S_1, \dots, S_n, L_{n+1})] = [(B_{\tau_1}, \dots, B_{\tau_n}, \tilde{L}_{n+1})]$.
- $E[\tau_n] = E[B_{\tau_n}^2] = E[S_n^2] = 1$
- $\theta_q := \tau_q - q/n$ *est une* $\mathcal{F}_{\tau_q}$*-martingale:*
- $p < 2 \implies p' > 2$. *Ici* $p' = 4$
  $E[(\theta_q - \theta_{q-1})^2] \leq E[(\tau_q - \tau_{q-1})^2] \leq$
  $C_4 E[(B_{\tau_q} - B_{\tau_{q-1}})^4] = C_4 E[(Y_q''/\rho\sqrt{n})^4] \leq C_4 K/n^2$
- $var(\tau_n) = var(\theta_n) \leq C_4 K/n$

Immersion à la Skorohod et TCL

- *Soit* B *un MB et* $\mathcal{F}$ *sa filtration naturelle.*
  Soit $S_q := \frac{\sum_{k=1}^{q} Y_k''}{\rho\sqrt{n}}$
  $\exists$ *une suite croissante* τ_q *de* $\mathcal{F}$*-t. a.*
  $\exists \tilde{L}_{n+1}$ *une v.a.* $\mathcal{F}_\infty$*-mesurable*
  tels que $[(S_1, \ldots, S_n, L_{n+1})] = [(B_{\tau_1}, \ldots, B_{\tau_n}, \tilde{L}_{n+1})]$.
- $E[\tau_n] = E[B^2_{\tau_n}] = E[S^2_n] = 1$
- $\theta_q := \tau_q - q/n$ *est une* $\mathcal{F}_{\tau_q}$*-martingale:*
- $p < 2 \implies p' > 2$. *Ici* $p' = 4$
- $var(\tau_n) = var(\theta_n) \leq C_4 K/n$
- $E[(B_{\tau_n} - B_1)^2] = \|\tau_n - 1\|_{L^1} \leq \sqrt{var(\tau_n)} \leq \sqrt{C_4 K/n}$

Preuve du Théorème 2

- $\liminf \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu)}{\sqrt{n}} \geq \rho\gamma(\mu)$.

Preuve du Théorème 2

- $\liminf \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu)}{\sqrt{n}} \geq \rho\gamma(\mu)$.
- *Soit* U *telle que* $E[U^2] = 1$, $E[U^4] < \infty$ *et* $E[U] = 0$.

Preuve du Théorème 2

- $\liminf \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu)}{\sqrt{n}} \geq \rho\gamma(\mu)$.
- *Soit* U *telle que* $E[U^2] = 1$, $E[U^4] < \infty$ *et* $E[U] = 0$.
- $\forall n\ \exists(\tau_q^n)_{q=1,\ldots,n}$ *suite* $\nearrow$ *de t.a.*
  tel que $U_q^n := (B_{\tau_q^n} - B_{\tau_{q-1}^n})\sqrt{n}$ *est i.i.d. et* $[U_q] = [U]$.

Preuve du Théorème 2

- $\liminf \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu)}{\sqrt{n}} \geq \rho\gamma(\mu)$.
- *Soit* U *telle que* $E[U^2] = 1$, $E[U^4] < \infty$ *et* $E[U] = 0$.
- $\forall n\ \exists(\tau_q^n)_{q=1,\ldots,n}$ *suite* $\nearrow$ *de t.a.*
  tel que $U_q^n := (B_{\tau_q^n} - B_{\tau_{q-1}^n})\sqrt{n}$ *est i.i.d. et* $[U_q] = [U]$.
- $L_q^n := E[f_\mu(B_1)|\mathcal{F}_{\tau_q^n}]$ *et* $L_{n+1}^n := f_\mu(B_1) \Rightarrow L^n \in \mathcal{M}_n(\mu)$.

Preuve du Théorème 2

- $\liminf \dfrac{\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu)}{\sqrt{n}} \geq \rho\gamma(\mu)$.
- *Soit* U *telle que* $E[U^2] = 1$, $E[U^4] < \infty$ *et* $E[U] = 0$.
- $\forall n \; \exists (\tau_q^n)_{q=1,\ldots,n}$ *suite* $\nearrow$ *de t.a.*
  tel que $U_q^n := (B_{\tau_q^n} - B_{\tau_{q-1}^n})\sqrt{n}$ *est i.i.d. et* $[U_q] = [U]$.
- $L_q^n := E[f_\mu(B_1) | \mathcal{F}_{\tau_q^n}]$ *et* $L_{n+1}^n := f_\mu(B_1) \Rightarrow L^n \in \mathcal{M}_n(\mu)$.
- $\exists r \geq 0 : f_\mu(B_1) = E[f_\mu(B_1)] + \int_0^1 r_t dB_t$
- $L_q^n = L_0^n + \int_0^{\tau_q^n} r_t dB_t$ *où* $r_t \geq 0$

Preuve du Théorème 2

- $\liminf \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu)}{\sqrt{n}} \geq \rho\gamma(\mu)$.
- *Soit* U *telle que* $E[U^2] = 1$, $E[U^4] < \infty$ *et* $E[U] = 0$.
- $\forall n\ \exists(\tau_q^n)_{q=1,\ldots,n}$ *suite* $\nearrow$ *de t.a.* *tel que* $U_q^n := (B_{\tau_q^n} - B_{\tau_{q-1}^n})\sqrt{n}$ *est i.i.d. et* $[U_q] = [U]$.
- $L_q^n := E[f_\mu(B_1)|\mathcal{F}_{\tau_q^n}]$ *et* $L_{n+1}^n := f_\mu(B_1) \Rightarrow L^n \in \mathcal{M}_n(\mu)$.
- $L_q^n = L_0^n + \int_0^{\tau_q^n} r_t dB_t$ *où* $r_t \geq 0$
- $\exists \tilde{r}_t^n = \sum_{q=0}^{n-1} a_q^n \mathbb{1}_{[\tau_q^n, \tau_{q+1}^n[}(t)$ *où* $a_q^n \geq 0$ *est* $\mathcal{F}_{\tau_q^n}$*-mesurable* *tels que* $\tilde{L}_q^n := L_0^n + \int_0^{\tau_q^n} \tilde{r}_t^n dB_t$ *vérifie:*
  - $\|L_n^n - \tilde{L}_n^n\|_{L^2} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

Preuve du Théorème 2

- $\liminf \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu)}{\sqrt{n}} \geq \rho\gamma(\mu)$.
- *Soit* U *telle que* $E[U^2] = 1$, $E[U^4] < \infty$ *et* $E[U] = 0$.
- $\forall n\ \exists (\tau_q^n)_{q=1,\dots,n}$ *suite* $\nearrow$ *de t.a.*
  tel que $U_q^n := (B_{\tau_q^n} - B_{\tau_{q-1}^n})\sqrt{n}$ *est i.i.d. et* $[U_q] = [U]$.
- $L_q^n := E[f_\mu(B_1)|\mathcal{F}_{\tau_q^n}]$ *et* $L_{n+1}^n := f_\mu(B_1) \Rightarrow L^n \in \mathcal{M}_n(\mu)$.
- $L_q^n = L_0^n + \int_0^{\tau_q^n} r_t dB_t$ *où* $r_t \geq 0$
- $\exists \tilde{r}_t^n = \sum_{q=0}^{n-1} a_q^n \mathbb{1}_{[\tau_q^n, \tau_{q+1}^n[}(t)$ *où* $a_q^n \geq 0$ *est* $\mathcal{F}_{\tau_q^n}$*-mesurable*
  tels que $\tilde{L}_q^n := L_0^n + \int_0^{\tau_q^n} \tilde{r}_t^n dB_t$ *vérifie:*
  - $\|L_n^n - \tilde{L}_n^n\|_{L^2} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$
  - $\frac{|\mathcal{V}_n^M(L^n) - \mathcal{V}_n^M(\tilde{L}^n)|}{\sqrt{n}} \leq A\|L_n^n - \tilde{L}_n^n\|_{L^2} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

Preuve du Théorème 2

- $\liminf \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu)}{\sqrt{n}} \geq \liminf \frac{\mathcal{V}_n^M(L^n)}{\sqrt{n}} = \liminf \frac{\mathcal{V}_n^M(\tilde{L}^n)}{\sqrt{n}}$.

Preuve du Théorème 2

- $\liminf \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu)}{\sqrt{n}} \geq \liminf \frac{\mathcal{V}_n^M(L^n)}{\sqrt{n}} = \liminf \frac{\mathcal{V}_n^M(\tilde{L}^n)}{\sqrt{n}}.$
- $\tilde{L}_q^n - \tilde{L}_{q-1}^n = a_{q-1}^n(B_{\tau_q^n} - B_{\tau_{q-1}^n}) = a_{q-1}^n U_q^n / \sqrt{n}.$

Preuve du Théorème 2

- $\liminf \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu)}{\sqrt{n}} \geq \liminf \frac{\mathcal{V}_n^M(L^n)}{\sqrt{n}} = \liminf \frac{\mathcal{V}_n^M(\tilde{L}^n)}{\sqrt{n}}$.
- $\tilde{L}_q^n - \tilde{L}_{q-1}^n = a_{q-1}^n (B_{\tau_q^n} - B_{\tau_{q-1}^n}) = a_{q-1}^n U_q^n / \sqrt{n}$.
- $M[\tilde{L}_q^n - \tilde{L}_{q-1}^n | \mathcal{F}_{\tau_{q-1}^n}] = a_{q-1}^n M[U_q^n | \mathcal{F}_{\tau_{q-1}^n}] / \sqrt{n} = M[U] a_{q-1}^n / \sqrt{n}$.

Preuve du Théorème 2

- $\liminf \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu)}{\sqrt{n}} \geq \liminf \frac{\mathcal{V}_n^M(L^n)}{\sqrt{n}} = \liminf \frac{\mathcal{V}_n^M(\tilde{L}^n)}{\sqrt{n}}$.
- $\tilde{L}_q^n - \tilde{L}_{q-1}^n = a_{q-1}^n(B_{\tau_q^n} - B_{\tau_{q-1}^n}) = a_{q-1}^n U_q^n/\sqrt{n}$.
- $M[\tilde{L}_q^n - \tilde{L}_{q-1}^n|\mathcal{F}_{\tau_{q-1}^n}] = a_{q-1}^n M[U_q^n|\mathcal{F}_{\tau_{q-1}^n}]/\sqrt{n} = M[U]a_{q-1}^n/\sqrt{n}$.

$$\mathcal{V}_n^M(\tilde{L}^n) = M[U]E[\sum_{q=0}^{n-1} a_q^n]/\sqrt{n}$$

Preuve du Théorème 2

- $\liminf \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu)}{\sqrt{n}} \geq \liminf \frac{\mathcal{V}_n^M(L^n)}{\sqrt{n}} = \liminf \frac{\mathcal{V}_n^M(\tilde{L}^n)}{\sqrt{n}}.$
- $\tilde{L}_q^n - \tilde{L}_{q-1}^n = a_{q-1}^n(B_{\tau_q^n} - B_{\tau_{q-1}^n}) = a_{q-1}^n U_q^n/\sqrt{n}.$
- $M[\tilde{L}_q^n - \tilde{L}_{q-1}^n|\mathcal{F}_{\tau_{q-1}^n}] = a_{q-1}^n M[U_q^n|\mathcal{F}_{\tau_{q-1}^n}]/\sqrt{n} = M[U]a_{q-1}^n/\sqrt{n}.$

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_n^M(\tilde{L}^n) &= M[U]E[\textstyle\sum_{q=0}^{n-1} a_q^n]/\sqrt{n} \\
&= M[U]E[(\textstyle\sum_{q=0}^{n-1} a_q^n U_q^n)(\sum_{q=0}^{n-1} U_q^n)]/\sqrt{n}
\end{aligned}$$

Preuve du Théorème 2

- $\liminf \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu)}{\sqrt{n}} \geq \liminf \frac{\mathcal{V}_n^M(L^n)}{\sqrt{n}} = \liminf \frac{\mathcal{V}_n^M(\tilde{L}^n)}{\sqrt{n}}$.
- $\tilde{L}_q^n - \tilde{L}_{q-1}^n = a_{q-1}^n(B_{\tau_q^n} - B_{\tau_{q-1}^n}) = a_{q-1}^n U_q^n/\sqrt{n}$.
- $M[\tilde{L}_q^n - \tilde{L}_{q-1}^n|\mathcal{F}_{\tau_{q-1}^n}] = a_{q-1}^n M[U_q^n|\mathcal{F}_{\tau_{q-1}^n}]/\sqrt{n} = M[U]a_{q-1}^n/\sqrt{n}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_n^M(\tilde{L}^n) &= M[U]E[\textstyle\sum_{q=0}^{n-1} a_q^n]/\sqrt{n} \\
&= M[U]E[(\textstyle\sum_{q=0}^{n-1} a_q^n U_q^n)(\textstyle\sum_{q=0}^{n-1} U_q^n)]/\sqrt{n} \\
&= M[U]E[(\tilde{L}_n^n - \tilde{L}_0^n)B_{\tau_n^n}]\sqrt{n}
\end{aligned}$$

Preuve du Théorème 2

- $\liminf \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu)}{\sqrt{n}} \geq \liminf \frac{\mathcal{V}_n^M(L^n)}{\sqrt{n}} = \liminf \frac{\mathcal{V}_n^M(\tilde{L}^n)}{\sqrt{n}}$.
- $\tilde{L}_q^n - \tilde{L}_{q-1}^n = a_{q-1}^n(B_{\tau_q^n} - B_{\tau_{q-1}^n}) = a_{q-1}^n U_q^n/\sqrt{n}$.
- $M[\tilde{L}_q^n - \tilde{L}_{q-1}^n|\mathcal{F}_{\tau_{q-1}^n}] = a_{q-1}^n M[U_q^n|\mathcal{F}_{\tau_{q-1}^n}]/\sqrt{n} = M[U]a_{q-1}^n/\sqrt{n}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_n^M(\tilde{L}^n) &= M[U]E[\textstyle\sum_{q=0}^{n-1} a_q^n]/\sqrt{n} \\
&= M[U]E[(\textstyle\sum_{q=0}^{n-1} a_q^n U_q^n)(\textstyle\sum_{q=0}^{n-1} U_q^n)]/\sqrt{n} \\
&= M[U]E[(\tilde{L}_n^n - \tilde{L}_0^n)B_{\tau_n^n}]\sqrt{n} \\
&\approx M[U]E[L_n^n B_{\tau_n^n}]\sqrt{n}
\end{aligned}$$

Preuve du Théorème 2

- $\liminf \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu)}{\sqrt{n}} \geq \liminf \frac{\mathcal{V}_n^M(L^n)}{\sqrt{n}} = \liminf \frac{\mathcal{V}_n^M(\tilde{L}^n)}{\sqrt{n}}$.
- $\tilde{L}_q^n - \tilde{L}_{q-1}^n = a_{q-1}^n (B_{\tau_q^n} - B_{\tau_{q-1}^n}) = a_{q-1}^n U_q^n / \sqrt{n}$.
- $M[\tilde{L}_q^n - \tilde{L}_{q-1}^n | \mathcal{F}_{\tau_{q-1}^n}] = a_{q-1}^n M[U_q^n | \mathcal{F}_{\tau_{q-1}^n}] / \sqrt{n} = M[U] a_{q-1}^n / \sqrt{n}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_n^M(\tilde{L}^n) &= M[U] E[\textstyle\sum_{q=0}^{n-1} a_q^n] / \sqrt{n} \\
&= M[U] E[(\textstyle\sum_{q=0}^{n-1} a_q^n U_q^n)(\sum_{q=0}^{n-1} U_q^n)] / \sqrt{n} \\
&= M[U] E[(\tilde{L}_n^n - \tilde{L}_0^n) B_{\tau_n^n}] \sqrt{n} \\
&\approx M[U] E[L_n^n B_{\tau_n^n}] \sqrt{n} \\
&= M[U] E[L_{n+1}^n B_{\tau_n^n}] \sqrt{n}
\end{aligned}$$

Preuve du Théorème 2

- $\liminf \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu)}{\sqrt{n}} \geq \liminf \frac{\mathcal{V}_n^M(L^n)}{\sqrt{n}} = \liminf \frac{\mathcal{V}_n^M(\tilde{L}^n)}{\sqrt{n}}$.
- $\tilde{L}_q^n - \tilde{L}_{q-1}^n = a_{q-1}^n(B_{\tau_q^n} - B_{\tau_{q-1}^n}) = a_{q-1}^n U_q^n/\sqrt{n}$.
- $M[\tilde{L}_q^n - \tilde{L}_{q-1}^n|\mathcal{F}_{\tau_{q-1}^n}] = a_{q-1}^n M[U_q^n|\mathcal{F}_{\tau_{q-1}^n}]/\sqrt{n} = M[U]a_{q-1}^n/\sqrt{n}$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}_n^M(\tilde{L}^n) &= M[U]E[(\textstyle\sum_{q=0}^{n-1} a_q^n U_q^n)(\sum_{q=0}^{n-1} U_q^n)]/\sqrt{n} \\
&= M[U]E[(\tilde{L}_n^n - \tilde{L}_0^n)B_{\tau_n^n}]\sqrt{n} \\
&\approx M[U]E[L_n^n B_{\tau_n^n}]\sqrt{n} \\
&= M[U]E[L_{n+1}^n B_{\tau_n^n}]\sqrt{n} \\
&\approx M[U]E[L_{n+1}^n B_1]\sqrt{n}
\end{aligned}
$$

Preuve du Théorème 2

- $\liminf \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu)}{\sqrt{n}} \geq \liminf \frac{\mathcal{V}_n^M(L^n)}{\sqrt{n}} = \liminf \frac{\mathcal{V}_n^M(\tilde{L}^n)}{\sqrt{n}}$.
- $\tilde{L}_q^n - \tilde{L}_{q-1}^n = a_{q-1}^n(B_{\tau_q^n} - B_{\tau_{q-1}^n}) = a_{q-1}^n U_q^n/\sqrt{n}$.
- $M[\tilde{L}_q^n - \tilde{L}_{q-1}^n|\mathcal{F}_{\tau_{q-1}^n}] = a_{q-1}^n M[U_q^n|\mathcal{F}_{\tau_{q-1}^n}]/\sqrt{n} = M[U]a_{q-1}^n/\sqrt{n}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_n^M(\tilde{L}^n) &= M[U]E[(\tilde{L}_n^n - \tilde{L}_0^n)B_{\tau_n^n}]\sqrt{n} \\
&\approx M[U]E[L_n^n B_{\tau_n^n}]\sqrt{n} \\
&= M[U]E[L_{n+1}^n B_{\tau_n^n}]\sqrt{n} \\
&\approx M[U]E[L_{n+1}^n B_1]\sqrt{n} \\
&= M[U]E[f_\mu(B_1)B_1]\sqrt{n}
\end{aligned}$$

Preuve du Théorème 2

- $\liminf \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu)}{\sqrt{n}} \geq \liminf \frac{\mathcal{V}_n^M(L^n)}{\sqrt{n}} = \liminf \frac{\mathcal{V}_n^M(\tilde{L}^n)}{\sqrt{n}}$.
- $\tilde{L}_q^n - \tilde{L}_{q-1}^n = a_{q-1}^n(B_{\tau_q^n} - B_{\tau_{q-1}^n}) = a_{q-1}^n U_q^n/\sqrt{n}$.
- $M[\tilde{L}_q^n - \tilde{L}_{q-1}^n|\mathcal{F}_{\tau_{q-1}^n}] = a_{q-1}^n M[U_q^n|\mathcal{F}_{\tau_{q-1}^n}]/\sqrt{n} = M[U]a_{q-1}^n/\sqrt{n}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_n^M(\tilde{L}^n) &\approx M[U]E[L_n^n B_{\tau_n^n}]\sqrt{n} \\
&= M[U]E[L_{n+1}^n B_{\tau_n^n}]\sqrt{n} \\
&\approx M[U]E[L_{n+1}^n B_1]\sqrt{n} \\
&= M[U]E[f_\mu(B_1)B_1]\sqrt{n} \\
&= M[U]\gamma(\mu)\sqrt{n}
\end{aligned}$$

Preuve du Théorème 2

- $\liminf \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu)}{\sqrt{n}} \geq \liminf \frac{\mathcal{V}_n^M(L^n)}{\sqrt{n}} = \liminf \frac{\mathcal{V}_n^M(\tilde{L}^n)}{\sqrt{n}}$.
- $\tilde{L}_q^n - \tilde{L}_{q-1}^n = a_{q-1}^n(B_{\tau_q^n} - B_{\tau_{q-1}^n}) = a_{q-1}^n U_q^n/\sqrt{n}$.
- $M[\tilde{L}_q^n - \tilde{L}_{q-1}^n|\mathcal{F}_{\tau_{q-1}^n}] = a_{q-1}^n M[U_q^n|\mathcal{F}_{\tau_{q-1}^n}]/\sqrt{n} = M[U]a_{q-1}^n/\sqrt{n}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_n^M(\tilde{L}^n) &= M[U]E[L_{n+1}^n B_{\tau_n^n}]\sqrt{n} \\
&\approx M[U]E[L_{n+1}^n B_1]\sqrt{n} \\
&= M[U]E[f_\mu(B_1)B_1]\sqrt{n} \\
&= M[U]\gamma(\mu)\sqrt{n}
\end{aligned}$$

- $\liminf \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu)}{\sqrt{n}} \geq M[U]\gamma(\mu)$.

Preuve du Théorème 2

- $\liminf \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu)}{\sqrt{n}} \geq \liminf \frac{\mathcal{V}_n^M(L^n)}{\sqrt{n}} = \liminf \frac{\mathcal{V}_n^M(\tilde{L}^n)}{\sqrt{n}}$.
- $\tilde{L}_q^n - \tilde{L}_{q-1}^n = a_{q-1}^n(B_{\tau_q^n} - B_{\tau_{q-1}^n}) = a_{q-1}^n U_q^n/\sqrt{n}$.
- $M[\tilde{L}_q^n - \tilde{L}_{q-1}^n | \mathcal{F}_{\tau_{q-1}^n}] = a_{q-1}^n M[U_q^n | \mathcal{F}_{\tau_{q-1}^n}]/\sqrt{n} = M[U]a_{q-1}^n/\sqrt{n}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_n^M(\tilde{L}^n) &\approx M[U]E[L_{n+1}^n B_1]\sqrt{n} \\
&= M[U]E[f_\mu(B_1)B_1]\sqrt{n} \\
&= M[U]\gamma(\mu)\sqrt{n}
\end{aligned}$$

- $\liminf \frac{\overline{\mathcal{V}}_n^M(\mu)}{\sqrt{n}} \geq M[U]\gamma(\mu)$.
- $\sup\{M[U] : E[U^2] = 1, E[U] = 0, E[U^4] < \infty\} = \rho$