

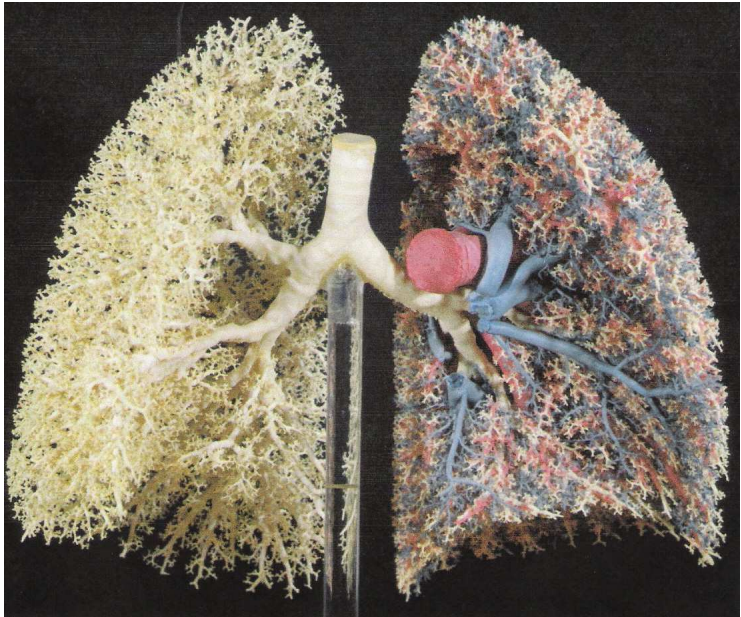
# Modélisation du poumon humain comme un arbre infini

B. Maury

*Orsay*

D. Salort (Paris 7), C. Vannier (Orsay)

Collège de France, 5 décembre 2008



# DONNÉES

Arbre dyadique à 23 générations

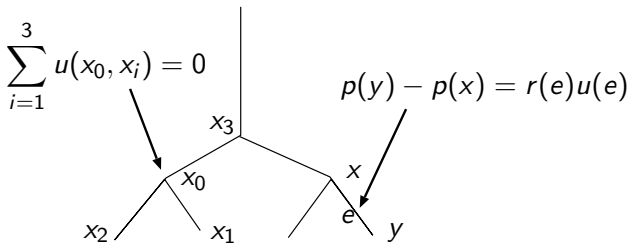
Écoulement non inertiel à partir de la génération 5 ou 6

Au delà : modèle de Stokes (loi de Poiseuille) valide

Régularité géométrique : homothétie de rapport  $h \approx 0.85$  (Weibel).

300 millions ( $\gg 2^{23}$ ) d'alvéoles

Surface d'échange entre 80 et 200  $m^2$

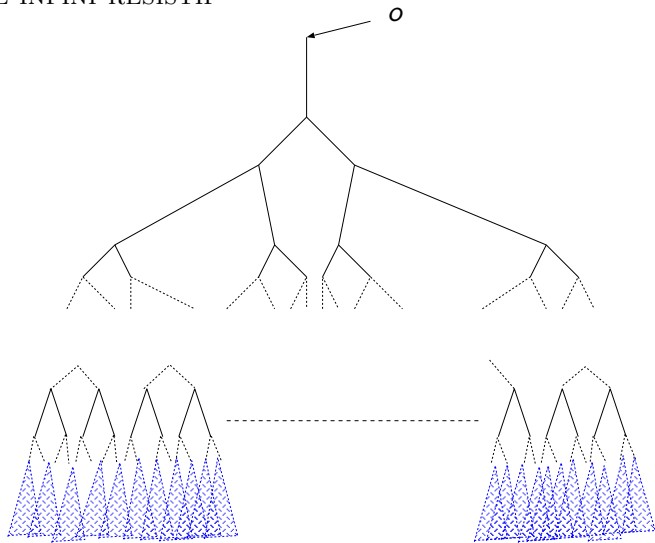


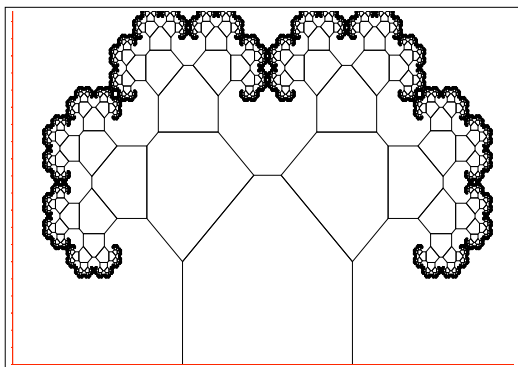
Loi de Poiseuille sur les arêtes

Loi des nœuds aux sommets

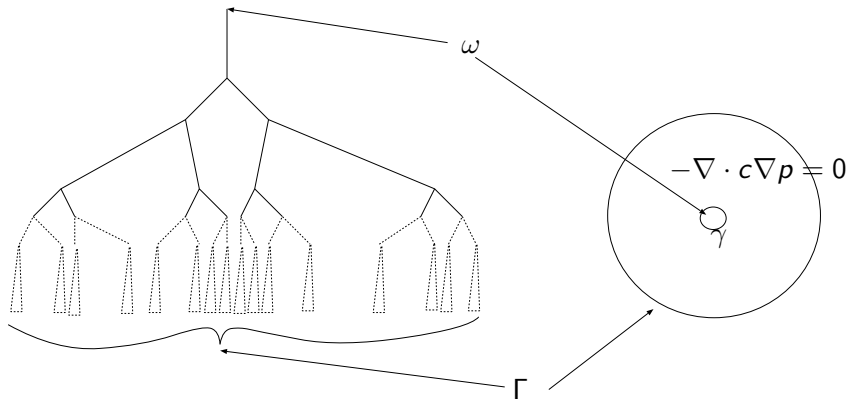
Résistance  $r(e)$  proportionnelle à  $\ell(e)/d(e)^4$  : homogénéité  $-3$

# ARBRE INFINI RÉSISTIF





Trace dans des domaines fractals : Achdou, Sabot, Tchou (2008)



$V$  ensemble des sommets,  $E \subset V \times V$  ensemble des arêtes.

Champ de résistances  $(r(e))_{e \in E}$ , symétrique,  $r(e) \in (0, +\infty)$ .

Pression  $p : V \rightarrow \mathbb{R}$

Flux  $u \in \mathbb{R}^E$ ,  $(u(y, x) = -u(x, y))$ ,

Opérateurs divergence et gradient :

$$\begin{aligned} \partial : \mathbb{R}^E &\longrightarrow \mathbb{R}^V \\ u &\longmapsto \partial u, \quad \partial u(x) = \sum_{y \sim x} u(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial^* : \mathbb{R}^V &\longrightarrow \mathbb{R}^E \\ p &\longmapsto \partial^* p, \quad \partial^* p(e) = \partial^* p(x, y) = p(y) - p(x) \end{aligned}$$



Loi de Poiseuille :  $u = -r^{-1} \partial^* p$

Loi de Kirchhoff :  $\partial u = 0$

Modèle de ventilation :

$$\begin{cases} u + c \partial^* p = 0 \\ \partial u = 0 \text{ dans } \dot{T} \\ p(o) = 0 \\ + ? \end{cases}$$

Espaces fonctionnels (énergie dissipée finie) :

$$L^2(T) = \left\{ u \in \mathbb{R}^E, \sum_e r(e) |u(e)|^2 < +\infty \right\},$$

$$H^1(T) = \left\{ p \in \mathbb{R}^V, |p|_1^2 = \sum_e c(e) |p(y) - p(x)|^2 < +\infty \right\}$$

$L^2$  : espace  $\ell^2$  à poids

$H^1$  : espace de Hilbert pour  $\|p\|^2 = p(0)^2 + |p|_1^2$

Loi de Poiseuille :  $u = -r^{-1} \partial^* p$

Loi de Kirchhoff :  $\partial u = 0$

Modèle de ventilation :

$\mathbf{u} = -k \nabla p$

$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$

$$\begin{cases} u + c \partial^* p = 0 \\ \partial u = 0 \\ p(o) = 0 \\ + ? \end{cases} \text{ dans } \dot{T} \iff \begin{cases} \mathbf{u} + k \nabla p = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ p = 0 \\ + \text{CL sur } \Gamma \end{cases} \begin{matrix} \text{dans } \Omega \\ \text{sur } \gamma \end{matrix}$$

Espaces fonctionnels (énergie dissipée finie) :

$$L^2(T) = \left\{ u \in \mathbb{R}^E, \sum_e r(e) |u(e)|^2 < +\infty \right\},$$

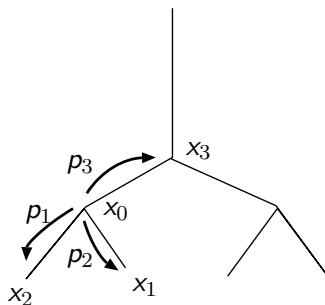
$$H^1(T) = \left\{ p \in \mathbb{R}^V, |p|_1^2 = \sum_e c(e) |p(y) - p(x)|^2 < +\infty \right\}$$

$L^2$  : espace  $\ell^2$  à poids

$H^1$  : espace de Hilbert pour  $\|p\|^2 = p(0)^2 + |p|_1^2$

# VERSION PROBABILISTE

Marche Aléatoire



Probabilités :  $p_i = c_i / (\sum c_j)$ , avec  $c_i = 1/r_i$ .

Cartier (71), Ancona (88), Mouton (00), Soardi (94).

$T$  : arbre infini dyadique

$H_0^1$  : adhérence de  $D(T)$  (champs à support fini) dans  $H^1$ .

Question :  $H_0^1$  différent de  $H^1$  ? ( $\tilde{H}^{1/2} = H^1/H_0^1 \neq \{0\}$  ?)

Proba :  $\tilde{H}^{1/2} \neq \{0\}$  ssi la chaîne de Markov est transiente (Soardi)

Autre critère :  $\tilde{H}^{1/2} \neq \{0\} \iff$  la résistance effective est finie

Cas d'un arbre géométrique ( $r_N = r_0 \alpha^N = r_0/h^{3N}$ ) :

Espace non trivial ssi  $h > 1/\sqrt[3]{2} \approx 0.79$ .

N.B.  $1/\sqrt[3]{2}$  valeur critique

*Mauroy, Filoche, Weibel, Sapoval, Nature '2004*

Poumon "réel" (Weibel) :  $h = 0.85 > 0.79$ .

Sous l'hypothèse de résistance finie

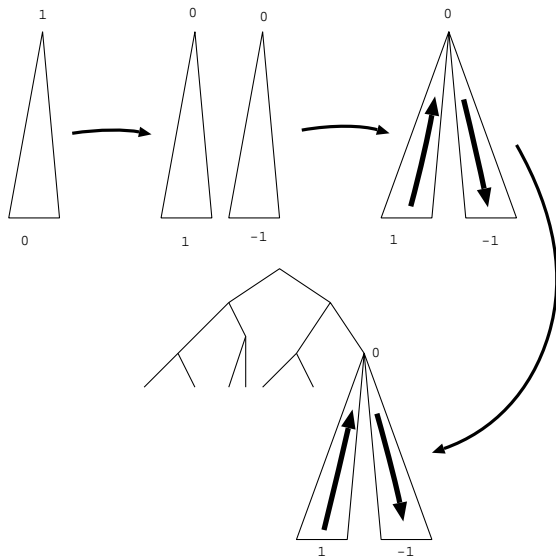
$$\begin{cases} u + c \partial^* p & = 0 \\ \partial u & = \delta_0 \\ \tilde{\gamma}_0 p & = \tilde{g} \quad \text{on } \Gamma \end{cases}$$

est bien posé pour tout  $\tilde{g} \in \tilde{H}^{1/2}$ , mais purement abstrait.

Approche semi-abstraite :

$\tilde{H}^{1/2}$  peut être identifié à un sous-espace de  $L^2(\Gamma)$ , où  $\Gamma$  l'espace des bouts (ensemble des géodésiques, identifiable à  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ).

# BASE HILBERTIENNE DE $H_{\Delta}^1$



## DÉFINITION DE $\gamma_0$

Deux ingrédients

- Décomposition de Royden (Soardi)

$$p = \underbrace{p_0}_{\in H_0^1} + \underbrace{p_1}_{\in H_\Delta^1}$$

-  $\gamma_0$  bien définie sur  $(\varphi_{nk})$ . Pour un arbre régulier,  $\gamma_0$  se prolonge par continuité ( $L^2$ ) sur  $H_\Delta^1$ .

$$\gamma_0(H^1) \subset L^2(\Gamma).$$

## TRACE DE LA DÉRIVÉE NORMALE

Équivalent pour  $T$  de  $-c\partial p/\partial n$ , qu'on peut définir comme élément de  $H^{-1/2}(\Gamma)$  pour les champs  $p$  tels que  $c\nabla p$  est dans  $H_{div}$ .

Ici : on définit  $\gamma_1$  (flux sortant) sur les champs  $H^1$  harmoniques sur  $\dot{T} = T \setminus \{o\}$ .

Dualité naturelle :  $\gamma_1(H^1_\Delta(\dot{T})) \sim (\gamma_0(H^1))'$

Formule de Green :

$$\langle \gamma_1 p, \gamma_0 p \rangle = \text{énergie dissipée} .$$



# ARBRE GÉOMÉTRIQUE

$(\Phi_0, \Phi_{nk})$  base de Haar de  $L^2(\Gamma)$  (avec  $\Gamma = \{0, 1\}^N$ ).

$$A^r(\Gamma) = \left\{ f \in L^2(\Gamma), \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{2nr} c_{nk}(f)^2 < +\infty \right\}, c_{nk}(f) = (\Phi_{nk}, f).$$

autre définition (A. Cohen)

$$A^r(\Gamma) = \left\{ f \in L^2(\Gamma), (\text{dist}_{L^2}(f, V_n) 2^{nr})_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 \right\}.$$

avec  $V_n$  espace des fonctions en escalier à l'échelle  $1/2^n$ .

Pour un arbre géométrique ( $r_n = \alpha^n$  avec  $\alpha < 2$ ),

$$\Phi_{nk} = \gamma_0(\varphi_{nk}) \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{n/2}$$

on a

$$\gamma_0(H^1(T)) = A^s, \quad \text{avec } s = (1 - \ln \alpha / \ln 2) / 2.$$

On a naturellement

$$\gamma_1(H_{\Delta}^1(\dot{T})) = A^{-s}.$$

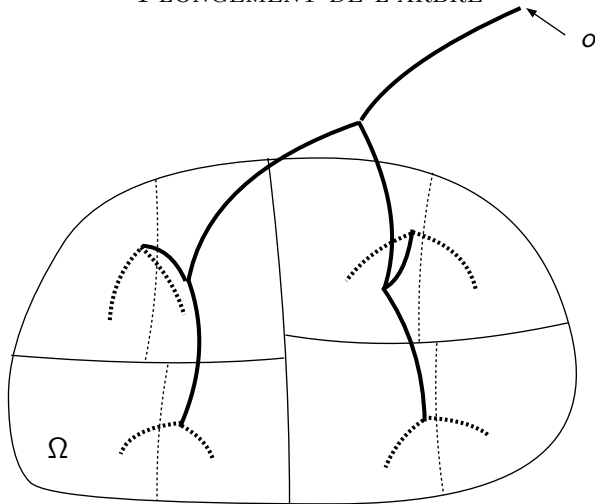
Opérateur Dirichlet Neuman  $C$  (pour Conductance)

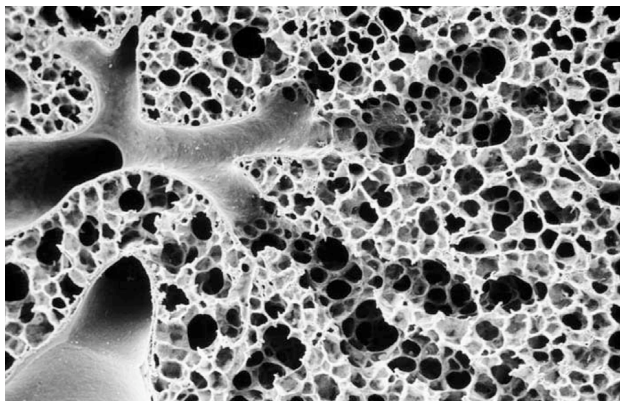
$$g \in A^r(\Gamma) \longmapsto p \in H_{\Delta}^1(\dot{T}) \longmapsto u = \gamma_1 p \in A^{-r}(\Gamma).$$

Loi de Poiseuille généralisée

$$\underbrace{g - 0}_{\text{saut de pression}} = C^{-1} \underbrace{u}_{\text{flux}}.$$

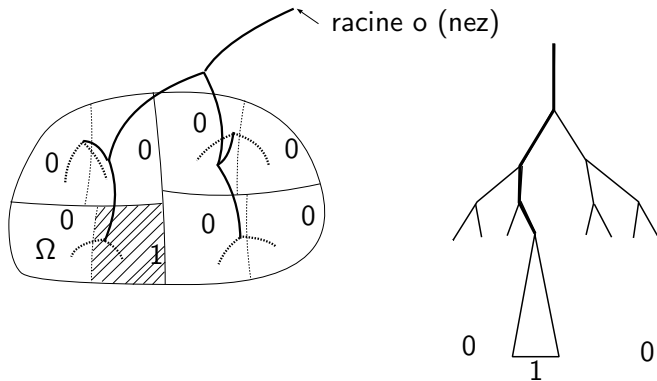
## PLONGEMENT DE L'ARBRE





Courtesy E.R.Weibel, University of Berne

On considère l'ensemble  $F$  des fonctions asymptotiquement constantes par morceaux



On définit l'application

$$\gamma_0^\Omega : F \subset H^1(T) \longrightarrow L^2(\Omega).$$

*Prop.*

*Arbre régulier, décomposition équilibrée,  $(|\Omega_j^n| = 2^{-n})$*

*$\gamma_0^\Omega$  s'étend par densité*

$$\gamma_0^\Omega : H^1(T) \longrightarrow L^2(\Omega).$$

Identification de  $\gamma_0^\Omega(H^1(T))$  ?

# RÉGULARITÉ DU CHAMP DE PRESSION

Décomposition régulière :

(i)  $\mathcal{O}$  équilibrée,

(ii) Il existe  $C > 0$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$

$$\text{diam}(\Omega_{nk}) \leq C 2^{-\frac{n}{d}}.$$

(iii) Il existe  $C > 0$  telle que

$$\|\tau_h \mathbb{1}_{\Omega_{nk}} - \mathbb{1}_{\Omega_{nk}}\|_{L^1(\Omega)} \leq C |h| 2^{-\frac{n(d-1)}{d}}, \quad \forall h \in \mathbf{R}^d, \quad \forall n, k,$$

où  $\tau_h$  représente :  $\tau_h \varphi(\cdot) = \varphi(\cdot + h)$ .

Prop.

*Arbre géométrique et décomposition équilibrée :*

$$\gamma_0^\Omega(H^1) = A^r(\Omega) \text{ avec } r = (1 - \ln(\alpha)/\ln 2)/2,$$

*Pour un arbre géométrique et une décomposition régulière :*

$$\gamma_0^\Omega(H^1) = H^s(\Omega) \text{ avec } s = rd, \text{ tant que } 0 < s < 1/2.$$

Pour le poumon humain :

$$d = 3,$$

Coefficient de réduction :  $h \simeq 0.85$

Résistances :  $\alpha = 1/h^3 \simeq 1.63$

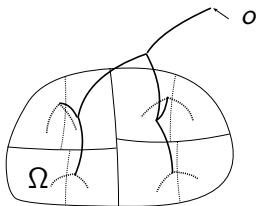
On obtient  $s \simeq 0.45$  : champ de pression dans  $H^s(\Omega)$ .



Ventilation : opérateur Dirichlet-Neuman  $C$  pour un problème elliptique posé sur  $T$ , pour lequel  $\Omega$  joue le rôle de frontière.

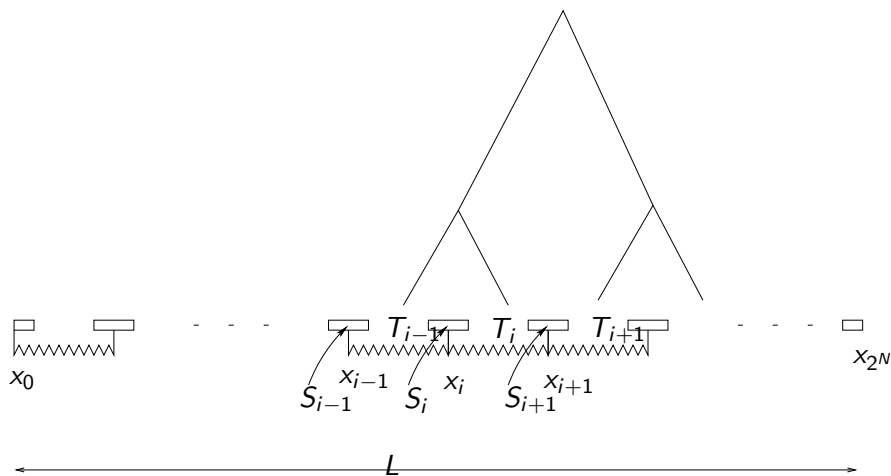
$g \in H^{0.45}(\Omega)$  pression prescrite dans le parenchyme  $\Omega$   
 $p$  solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\partial c \partial^* p = 0 \quad \text{in } T \setminus \{o\}, \\ p(o) = 0, \\ \gamma_0^\Omega(p) = g. \end{array} \right.$$



$$C : g \longmapsto p \longmapsto Cg = \gamma_1^\Omega p \text{ (flux "en sortie" )}.$$

# MODÈLES CONSTITUTIFS POUR LE PAREMCHYME

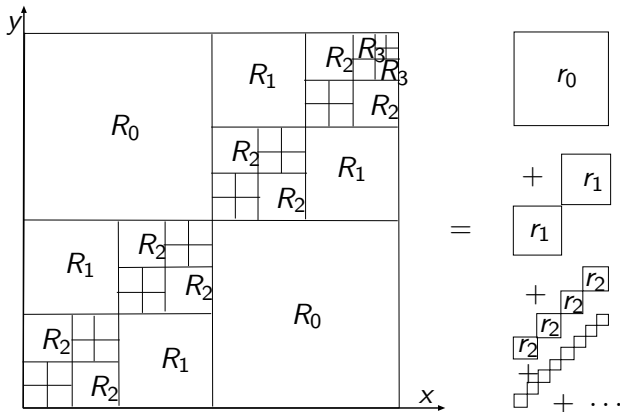


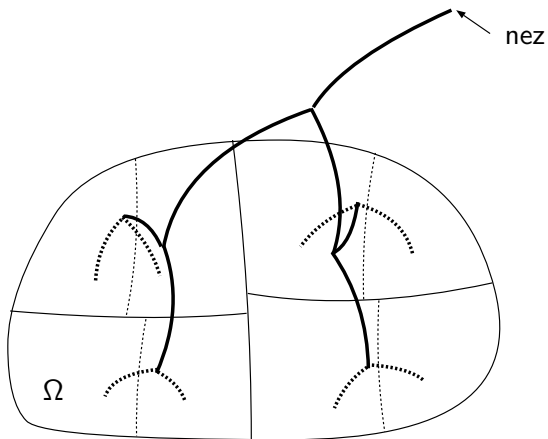
# Équation d'évolution 1D (Grandmont, B.M., Meunier 06)

$$\partial_{tt}\eta - \partial_{xx}\eta - \partial_x R \partial_x \partial_t \eta = 0.$$

$R = C^{-1}$  opérateur Neuman Dirichlet

$$Ru(y) = p(y) = \int K(x, y)u(x) dx$$





$$\partial_{tt}\eta - \nabla \cdot \sigma(\eta) - \nabla R \nabla \cdot \partial_t \eta = 0.$$

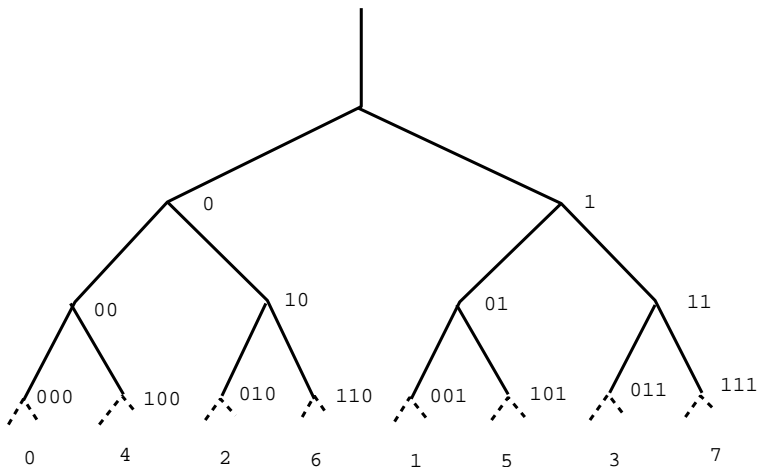
## APPROCHE $\mathbb{Z}_2$ (AVEC F. BERNICOT, D. SALORT)

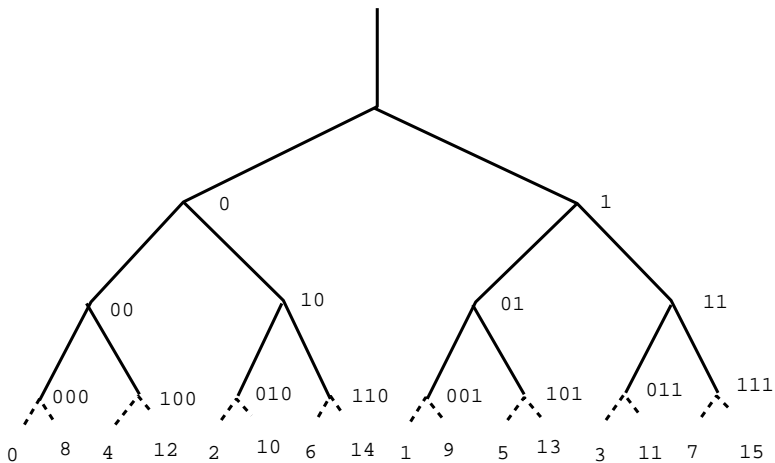
But : proposer un cadre naturel pour rendre compte de la proximité (entre bouts) vis-à-vis de l'arbre

Résultats : définition naturelle des espaces de traces comme espace de Sobolev

Formulation de l'opérateur Neuman Dirichlet comme une convolution

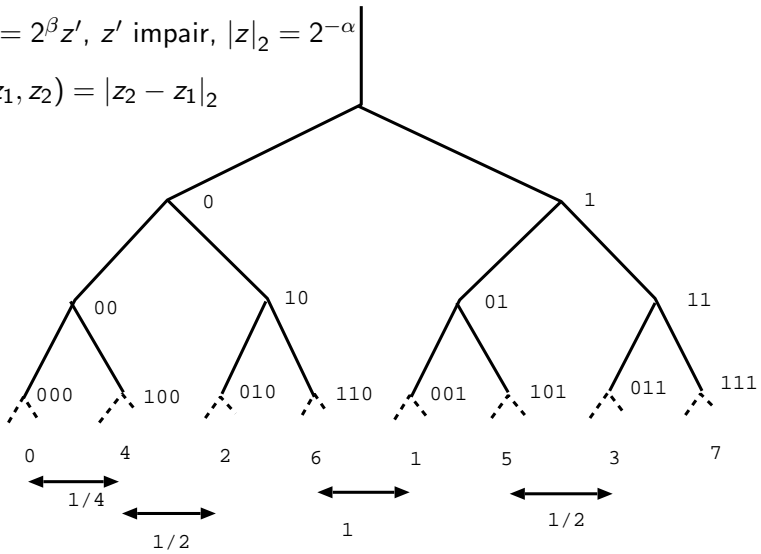
flux en sortie  $\mapsto$  champ de pression





Si  $z = 2^\beta z'$ ,  $z'$  impair,  $|z|_2 = 2^{-\alpha}$

$$\text{dist}(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|_2$$





$$\Gamma_N \sim \mathbb{Z}/2^N\mathbb{Z}$$

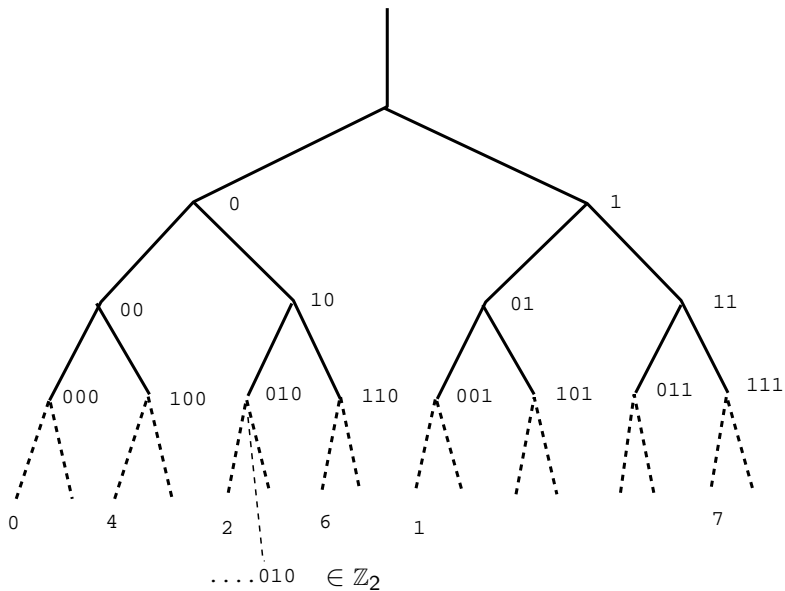
équipé de la distance ultramétrique

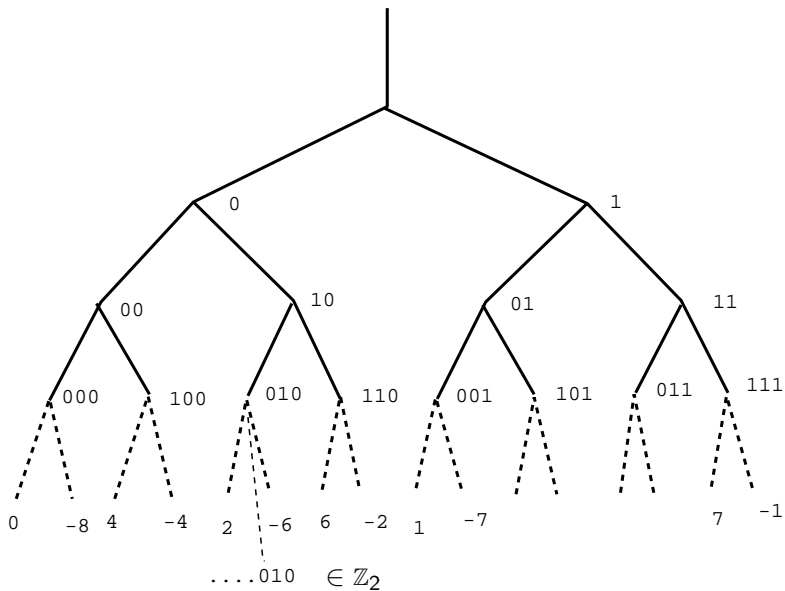
$$z = 2^\alpha y, \quad 2 \nmid y, \quad |z|_2 = 2^{-\alpha}, \quad \text{dist}(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|_2.$$

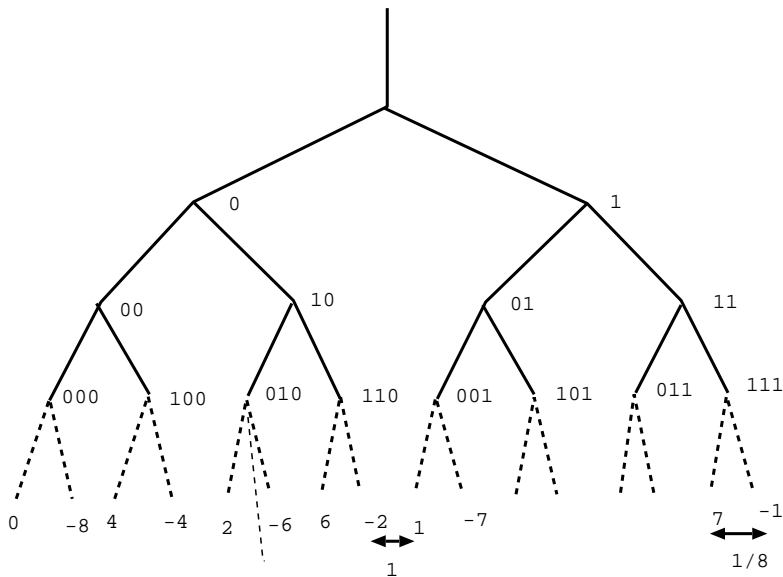
$$\Gamma_n = \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}, \quad \varphi_{nm} : z \in \Gamma_m \mapsto \tilde{z} \in \Gamma_n \quad (\tilde{z} \equiv z \pmod{2^n}) \quad n \leq m.$$

$\Gamma$  est la limite projective des  $\Gamma_n$  :

$$\Gamma = \varprojlim \Gamma_n = \left\{ (a_n) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n, \varphi_{nm}(a_m) = a_n \quad \forall n \leq m \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$







Champ de pression  $p \in \mathbb{R}^V$ ,  $p = (p_0, p_1, \dots, p_n, \dots) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^{\Gamma_n}$ ,  
 On définit  $\tilde{p}_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_2}$  par

$$\tilde{p}_n(z) = p_n(a) \iff z \in a + 2^n \mathbb{Z}_2.$$

Alors

$$p \in H^1(T) \iff \sum \frac{1}{\alpha^n} \frac{|\tilde{p}_{n+1} - \tilde{p}_n|_0^2}{|2^n \mathbb{Z}_2|} = \sum \left(\frac{2}{\alpha}\right)^n |\tilde{p}_{n+1} - \tilde{p}_n|_0^2 < +\infty.$$

On en déduit

$$p \in H^1(T) \implies (\tilde{p}_n) \text{ de Cauchy dans } H^{s-\varepsilon}(\mathbb{Z}_2), \quad s = (1 - \ln \alpha / \ln 2) / 2.$$

$$H^s(\mathbb{Z}_2) = \left\{ g \in L^2(\mathbb{Z}_2), \int_{\mathbb{Q}_2} \left(1 + |\xi|_2^2\right)^s |\hat{g}(\xi)|^2 d\mu < +\infty \right\}$$

$$\text{avec } \hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_2} e^{-2i\pi x \xi} g(\xi) d\mu.$$

Intégrale sur  $\mathbb{Z}_2$  basée sur

$$\int_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{1}_{a+2^n\mathbb{Z}_2} d\mu = 2^{-n}$$

Flux :  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{Z}_2)$  :  $\mu(a + 2^n\mathbb{Z}_2)$  est connu pour tout  $a$ , tout  $n$ .

$$p(x) = \mathcal{R}\mu(x) = \int_{\mathbb{Z}_2} \frac{\mu(y)}{|x - y|_2^{\log_2(\alpha)}} dy = G \star \mu(x).$$

où  $G$  est un noyau de type Green (du type  $1/|x - y|^{d-2}$  dans  $\mathbb{R}^d$ ).

N.B. : pour  $R < \infty$ ,  $\log_2(\alpha) \in (-\infty, 1)$

En particulier  $\log_2(\alpha) \approx 0.7$  pour  $\alpha = 0.85$

$\log_2(\alpha) < 1$  : compacité de l'opérateur (noyau intégrable dans  $\mathbb{Z}_2$ ).