Concentrations et hypoellipticité dans les équations de transport cinétiques

Diogo Arsénio
(en collaboration avec Laure Saint-Raymond)

Département de mathématiques et applications
École normale supérieure

Séminaire de Mathématiques Appliquées
Collège de France
4 mars, 2011

Une densité de particules: $f(t,x,v) \geq 0$

$(t,x,v) \in [0,\infty) \times \Omega \times \mathbb{R}^D$
$\Omega \subset \mathbb{R}^D$, $D \geq 2$ $(D=1)$

Une densité de particules: $f(t,x,v) \geq 0$ $\qquad (t,x,v)\in[0,\infty)\times\Omega\times\mathbb{R}^D$, $\Omega\subset\mathbb{R}^D$, $D\geq 2$ $(D=1)$

Distribution maxwellienne: $f(t,x,v) = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{\frac{D}{2}}} e^{-\frac{|v-u|^2}{2\theta}}$ $\begin{pmatrix}\text{équilibre}\\ \text{statistique}\end{pmatrix}$

Une densité de particules: $f(t,x,v) \geq 0$ $\quad (t,x,v)\in[0,\infty)\times\Omega\times\mathbb{R}^D$
$\Omega\subset\mathbb{R}^D,\ D\geq 2\ (D=1)$

Distribution maxwellienne: $f(t,x,v) = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{\frac{D}{2}}} e^{-\frac{|v-u|^2}{2\theta}}$ $\begin{pmatrix}\text{équilibre}\\ \text{statistique}\end{pmatrix}$

L'équation de Boltzmann:

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \mathcal{Q}(f,f)$$

Une densité de particules: $f(t,x,v) \geq 0$ $\quad (t,x,v) \in [0,\infty) \times \Omega \times \mathbb{R}^D$, $\Omega \subset \mathbb{R}^D$, $D \geq 2$ $(D=1)$

Distribution maxwellienne: $f(t,x,v) = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{\frac{D}{2}}} e^{-\frac{|v-u|^2}{2\theta}}$ $\begin{pmatrix}\text{équilibre}\\ \text{statistique}\end{pmatrix}$

Une densité de particules: $f(t,x,v) \geq 0$

$(t,x,v)\in[0,\infty)\times\Omega\times\mathbb{R}^D$
$\Omega\subset\mathbb{R}^D,\ D\geq 2\ (D=1)$

Distribution maxwellienne: $f(t,x,v) = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{\frac{D}{2}}} e^{-\frac{|v-u|^2}{2\theta}}$ $\left(\begin{array}{c}\text{équilibre}\\ \text{statistique}\end{array}\right)$

L'équation de Vlasov:

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + F(t,x) \cdot \nabla_v f = 0$$

Une densité de particules: $f(t,x,v) \geq 0$ $\quad (t,x,v) \in [0,\infty) \times \Omega \times \mathbb{R}^D$
$\Omega \subset \mathbb{R}^D,\ D \geq 2\ (D=1)$

Distribution maxwellienne: $f(t,x,v) = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{\frac{D}{2}}} e^{-\frac{|v-u|^2}{2\theta}}$ $\begin{pmatrix}\text{équilibre}\\ \text{statistique}\end{pmatrix}$

Une densité de particules: $f(t,x,v) \geq 0$ $\quad (t,x,v) \in [0,\infty) \times \Omega \times \mathbb{R}^D$

$\Omega \subset \mathbb{R}^D, \ D \geq 2 \ (D=1)$

Distribution maxwellienne: $f(t,x,v) = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{\frac{D}{2}}} e^{-\frac{|v-u|^2}{2\theta}}$ $\begin{pmatrix} \text{équilibre} \\ \text{statistique} \end{pmatrix}$

L'équation de Vlasov-Poisson:

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + E \cdot \nabla_v f = 0 \\ E = -\nabla_x \phi \\ \nabla_x \cdot E = -\Delta_x \phi = \int_{\mathbb{R}^D} f dv \end{cases}$$

Une densité de particules: $f(t,x,v) \geq 0$ $\quad$ $(t,x,v)\in[0,\infty)\times\Omega\times\mathbb{R}^D$, $\Omega\subset\mathbb{R}^D$, $D\geq 2$ $(D=1)$

Distribution maxwellienne: $f(t,x,v) = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{\frac{D}{2}}} e^{-\frac{|v-u|^2}{2\theta}}$ $\begin{pmatrix}\text{équilibre}\\ \text{statistique}\end{pmatrix}$

Une densité de particules: $f(t,x,v) \geq 0$ $\quad (t,x,v) \in [0,\infty) \times \Omega \times \mathbb{R}^D$, $\Omega \subset \mathbb{R}^D$, $D \geq 2$ $(D=1)$

Distribution maxwellienne: $f(t,x,v) = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{\frac{D}{2}}} e^{-\frac{|v-u|^2}{2\theta}}$ $\begin{pmatrix}\text{équilibre}\\ \text{statistique}\end{pmatrix}$

L'équation de Vlasov-Maxwell:

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + (E + v \times B) \cdot \nabla_v f = 0 \\ \partial_t E - \nabla_x \times B = -\int_{\mathbb{R}^D} v f dv \\ \partial_t B + \nabla_x \times E = 0 \\ \nabla_x \cdot E = \int_{\mathbb{R}^D} f dv \\ \nabla_x \cdot B = 0 \end{cases}$$

Une densité de particules: $f(t,x,v) \geq 0$ $\quad (t,x,v) \in [0,\infty) \times \Omega \times \mathbb{R}^D$, $\Omega \subset \mathbb{R}^D$, $D \geq 2$ $(D=1)$

Distribution maxwellienne: $f(t,x,v) = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{\frac{D}{2}}} e^{-\frac{|v-u|^2}{2\theta}}$ $\begin{pmatrix}\text{équilibre} \\ \text{statistique}\end{pmatrix}$

Une densité de particules: $f(t,x,v) \geq 0$ $\quad (t,x,v)\in[0,\infty)\times\Omega\times\mathbb{R}^D$, $\Omega\subset\mathbb{R}^D$, $D\geq 2$ $(D=1)$

Distribution maxwellienne: $f(t,x,v) = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{\frac{D}{2}}} e^{-\frac{|v-u|^2}{2\theta}}$ $\begin{pmatrix}\text{équilibre}\\ \text{statistique}\end{pmatrix}$

L'équation de Vlasov-Poisson-Boltzmann:

$$\begin{cases} \partial_t f + v\cdot\nabla_x f + E\cdot\nabla_v f = \mathcal{Q}(f,f) \\ E = -\nabla_x\phi \\ \nabla_x\cdot E = -\Delta_x\phi = \int_{\mathbb{R}^D} f dv \end{cases}$$

Une densité de particules: $f(t,x,v)\geq 0$

$(t,x,v)\in[0,\infty)\times\Omega\times\mathbb{R}^D$
$\Omega\subset\mathbb{R}^D,\ D\geq 2\ (D=1)$

Distribution maxwellienne: $f(t,x,v)=\frac{\rho}{(2\pi\theta)^{\frac{D}{2}}}e^{-\frac{|v-u|^2}{2\theta}}$ $\begin{pmatrix}\text{équilibre}\\ \text{statistique}\end{pmatrix}$

Une densité de particules: $f(t,x,v) \geq 0$ $\quad (t,x,v)\in[0,\infty)\times\Omega\times\mathbb{R}^D$, $\Omega\subset\mathbb{R}^D$, $D\geq 2$ $(D=1)$

Distribution maxwellienne: $f(t,x,v) = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{\frac{D}{2}}} e^{-\frac{|v-u|^2}{2\theta}}$ $\begin{pmatrix}\text{équilibre}\\ \text{statistique}\end{pmatrix}$

L'équation de Vlasov-Maxwell-Boltzmann:

$$\begin{cases} \partial_t f + v\cdot\nabla_x f + (E + v\times B)\cdot\nabla_v f = \mathcal{Q}(f,f) \\ \partial_t E - \nabla_x \times B = -\int_{\mathbb{R}^D} vfdv \\ \partial_t B + \nabla_x \times E = 0 \\ \nabla_x \cdot E = \int_{\mathbb{R}^D} fdv \\ \nabla_x \cdot B = 0 \end{cases}$$

Une densité de particules: $f(t,x,v) \geq 0$

$(t,x,v) \in [0,\infty) \times \Omega \times \mathbb{R}^D$
$\Omega \subset \mathbb{R}^D,\ D \geq 2\ (D=1)$

Distribution maxwellienne: $f(t,x,v) = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{\frac{D}{2}}} e^{-\frac{|v-u|^2}{2\theta}}$ $\begin{pmatrix}\text{équilibre}\\ \text{statistique}\end{pmatrix}$

Une densité de particules: $f(t,x,v) \geq 0$ $\quad (t,x,v) \in [0,\infty) \times \Omega \times \mathbb{R}^D$, $\Omega \subset \mathbb{R}^D$, $D \geq 2$ $(D=1)$

Distribution maxwellienne: $f(t,x,v) = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{\frac{D}{2}}} e^{-\frac{|v-u|^2}{2\theta}}$ $\begin{pmatrix}\text{équilibre}\\\text{statistique}\end{pmatrix}$

Le dénominateur commun de toutes ces équations est l'équation de transport cinétique:

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = g$$

L'étude des phénomènes régularisants et compactifiants de l'équation de transport est capitale.

Sans perte de généralité, on considère l'équation de transport stationnaire:

$$v \cdot \nabla_x f(x,v) = g(x,v)$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f(x,v) = g(x,v)}$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f(x,v) = g(x,v)}$$

Théorème (Golse, Lions, Perthame, Sentis '85 '88 - Agoshkov '84)

Si $f, g \in L^2\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right)$, *alors, pour tout* $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^D\right)$,

$$\int_{\mathbb{R}^D} f(x,v)\varphi(v)dv \in H^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{R}^D\right).$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f(x,v) = g(x,v)}$$

Théorème (Golse, Lions, Perthame, Sentis '85 '88 - Agoshkov '84)

Si $f, g \in L^2\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right)$, *alors, pour tout* $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^D\right)$,

$$\int_{\mathbb{R}^D} f(x,v)\varphi(v)dv \in H^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{R}^D\right).$$

Idée de la preuve: Écrire en Fourier $iv \cdot \eta \hat{f}(\eta, v) = \hat{g}(\eta, v)$, puis décomposer, pour une troncature $\chi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^D\right)$ telle que $\chi(0) = 1$,

$$\hat{f}(\eta, v) = \chi\left(\lambda v \cdot \eta\right)\hat{f}(\eta, v) + \frac{1 - \chi\left(\lambda v \cdot \eta\right)}{iv \cdot \eta}\hat{g}(\eta, v).$$

Optimiser en $\lambda > 0$ pour conclure.

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f(x,v) = g(x,v)}$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f(x,v) = g(x,v)}$$

Théorème (DiPerna, Lions, Meyer '91 - Bézard '94)

Si $f, g \in L^p\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right)$, $1 < p \leq 2$, *alors, pour tout* $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^D\right)$,

$$\int_{\mathbb{R}^D} f(x,v)\varphi(v)dv \in W^{1-\frac{1}{p},p}\left(\mathbb{R}^D\right).$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f(x,v) = g(x,v)}$$

Théorème (DiPerna, Lions, Meyer '91 - Bézard '94)

Si $f, g \in L^p\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right)$, $1 < p \leq 2$, alors, pour tout $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^D\right)$,

$$\int_{\mathbb{R}^D} f(x,v)\varphi(v)dv \in W^{1-\frac{1}{p},p}\left(\mathbb{R}^D\right).$$

Idée de la preuve: Interpoler le cas précédent dans L^2 avec le cas dégénéré dans L^1 (c'est-à-dire $f, g \in L^1 \Rightarrow \int f\varphi dv \in L^1$).

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g(x,v)}$$

$$\boxed{v\cdot\nabla_x f(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}}(1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g(x,v)}$$

Théorème (DiPerna, Lions, Meyer '91 - Bézard '94)

Si $f, g \in L^p\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right)$, $1 < p \leq 2$, *et* $\alpha \geq 0$, $0 \leq \beta < 1$, *alors, pour tout* $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^D\right)$,

$$\int_{\mathbb{R}^D} f(x,v)\varphi(v)dv \in W^{s,p}\left(\mathbb{R}^D\right),$$

avec $s = \frac{1-\beta}{1+\alpha}\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = g_n(x,v)}$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = g_n(x,v)}$$

Peut-on au moins espérer obtenir la compacité des moyennes $\int f_n \varphi dv$ dans le cas limite où f_n et g_n sont uniformément bornées dans $L^1\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right)$?

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = g_n(x,v)}$$

Peut-on au moins espérer obtenir la compacité des moyennes $\int f_n \varphi dv$ dans le cas limite où f_n et g_n sont uniformément bornées dans $L^1\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right)$? Non.

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = g_n(x,v)}$$

Peut-on au moins espérer obtenir la compacité des moyennes $\int f_n \varphi dv$ dans le cas limite où f_n et g_n sont uniformément bornées dans $L^1\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right)$? Non.

Contrexemple: Considérons f_n et g_n tels que $f_n + v \cdot \nabla_x f_n = g_n$ et $g_n \rightharpoonup^* \delta_{\{x=0, v=v_0\}}$, où $v_0 \neq 0$. Alors

$$f_n = \int_0^\infty e^{-s} g_n(x - sv, v) ds$$

et donc

$$\int \psi(x) \int f_n(x,v) \varphi(v) dv dx \to \int_0^\infty e^{-s} \psi(sv_0) ds \varphi(v_0).$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = g_n(x,v)}$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = g_n(x,v)}$$

Proposition (Golse, Lions, Perthame, Sentis '88)

Si f_n et g_n sont uniformément bornées dans $L^1\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right)$ et équi-intégrables, alors, pour tout $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^D\right)$,

$$\int_{\mathbb{R}^D} f_n(x,v)\varphi(v)dv \text{ est relativement compacte dans } L^1_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^D\right).$$

Définition

Une suite $f_n(x,v)$ uniformément bornée dans $L^1\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right)$ est **équi-intégrable** si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|A| < \delta \Rightarrow \sup_n \int_A |f_n|\, dxdv < \varepsilon.$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = g_n(x,v)}$$

Proposition (Golse, Lions, Perthame, Sentis '88)

Si f_n *et* g_n *sont uniformément bornées dans* $L^1\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right)$ *et équi-intégrables, alors, pour tout* $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^D\right)$,

$$\int_{\mathbb{R}^D} f_n(x,v)\varphi(v)dv \text{ est relativement compacte dans } L^1_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^D\right).$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = g_n(x,v)}$$

Proposition (Golse, Lions, Perthame, Sentis '88)

Si f_n et g_n sont uniformément bornées dans $L^1\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right)$ et équi-intégrables, alors, pour tout $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^D\right)$,

$$\int_{\mathbb{R}^D} f_n(x,v)\varphi(v)dv \text{ est relativement compacte dans } L^1_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^D\right).$$

Remarques:

- Rôle capital dans la démonstration de DiPerna et Lions ('89) d'existence de solutions renormalisées à l'équation de Boltzmann.
- Ne contient pas le cas $v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}}(1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g_n$.
- Ce résultat n'est pas optimal et ne traite que les oscillations.

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = g_n(x,v)}$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = g_n(x,v)}$$

Théorème (Golse, Saint-Raymond '02)

Si f_n et g_n sont uniformément bornées dans $L^1\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right)$ et $f_n \geq 0$ est équi-intégrable en v, alors, pour tout $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^D\right)$,

$$\int_{\mathbb{R}^D} f_n(x,v)\varphi(v)dv \text{ est relativement compacte dans } L^1_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^D\right).$$

Définition

Une suite $f_n(x,v)$ uniformément bornée dans $L^1\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right)$ est **équi-intégrable en** v si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^D} \left|\left\{v \in \mathbb{R}^D : (x,v) \in A\right\}\right| < \delta \Rightarrow \sup_n \int_A |f_n|\, dxdv < \varepsilon.$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = g_n(x,v)}$$

Théorème (Golse, Saint-Raymond '02)

Si f_n et g_n sont uniformément bornées dans $L^1\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right)$ et $f_n \geq 0$ est équi-intégrable en v, alors, pour tout $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^D\right)$,

$$\int_{\mathbb{R}^D} f_n(x,v)\varphi(v)dv \text{ est relativement compacte dans } L^1_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^D\right).$$

Le cas dégénéré L^1
transfert d'équi-intégrabilité

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = g_n(x,v)}$$

Théorème (Golse, Saint-Raymond '02)

Si f_n et g_n sont uniformément bornées dans $L^1\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right)$ et $f_n \geq 0$ est équi-intégrable en v, alors, pour tout $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^D\right)$,

$$\int_{\mathbb{R}^D} f_n(x,v)\varphi(v)dv \text{ est relativement compacte dans } L^1_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^D\right).$$

Idée de la preuve: f_n et g_n satisfont trivialement

$$\begin{cases} \left(\partial_t + v \cdot \nabla_x\right) f_n(x,v) = g_n(x,v), \\ f_n(t=0) = f_n(x,v). \end{cases}$$

Formule de Duhamel: $f_n(x,v) = f_n(x - tv, v) + \int_0^t g_n(x - sv, v) ds$. Intégrer sur de petits ensembles en x puis optimiser le paramètre d'interpolation t.

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = g_n(x,v)}$$

Théorème (Golse, Saint-Raymond '02)

Si f_n et g_n sont uniformément bornées dans $L^1\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right)$ et $f_n \geq 0$ est équi-intégrable en v, alors, pour tout $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^D\right)$,

$$\int_{\mathbb{R}^D} f_n(x,v)\varphi(v)dv \text{ est relativement compacte dans } L^1_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^D\right).$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = g_n(x,v)}$$

Théorème (Golse, Saint-Raymond '02)

Si f_n et g_n sont uniformément bornées dans $L^1\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right)$ et $f_n \geq 0$ est équi-intégrable en v, alors, pour tout $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^D\right)$,

$$\int_{\mathbb{R}^D} f_n(x,v)\varphi(v)dv \text{ est relativement compacte dans } L^1_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^D\right).$$

Remarques:

- La condition $f_n \geq 0$ n'est pas nécessaire, car $v \cdot \nabla_x |f_n| = \frac{f_n}{|f_n|} g_n$.
- Rôle capital dans la démonstration de Golse et Saint-Raymond ('04) de la limite hydrodynamique de Boltzmann vers Navier-Stokes.
- Ne contient pas le cas $v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g_n$.

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g_n(x,v)} \ (\alpha \geq 0,\ 0 \leq \beta < 1)$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g_n(x,v)} \quad (\alpha \geq 0,\ 0 \leq \beta < 1)$$

Théorème (Ars., Saint-Raymond '10)

Si f_n et g_n sont uniformément bornées dans $L^1\left(\mathbb{R}^D_x; L^r\left(\mathbb{R}^D_v\right)\right)$, pour un certain $r > 1$, et $f_n \geq 0$ est relativement compacte en v, alors

$$f_n(x,v) \text{ est relativement compacte dans } L^1_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right).$$

Définition

Une suite $f_n(x,v)$ uniformément bornée dans $L^1\left(\mathbb{R}^D_x; L^r\left(\mathbb{R}^D_v\right)\right)$ est **relativement compacte en** v si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|h| < \delta \Rightarrow \sup_n \|f_n(x,v+h) - f_n(x,v)\|_{L^1_x L^r_v} < \varepsilon.$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g_n(x,v)} \quad (\alpha \geq 0,\ 0 \leq \beta < 1)$$

Théorème (Ars., Saint-Raymond '10)

Si f_n et g_n sont uniformément bornées dans $L^1\left(\mathbb{R}^D_x; L^r\left(\mathbb{R}^D_v\right)\right)$, pour un certain $r > 1$, et $f_n \geq 0$ est relativement compacte en v, alors

$$f_n(x,v) \text{ est relativement compacte dans } L^1_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right).$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g_n(x,v)} \; {\scriptstyle (\alpha \geq 0,\ 0 \leq \beta < 1)}$$

Théorème (Ars., Saint-Raymond '10)

Si f_n et g_n sont uniformément bornées dans $L^1\left(\mathbb{R}^D_x; L^r\left(\mathbb{R}^D_v\right)\right)$, pour un certain $r > 1$, et $f_n \geq 0$ est relativement compacte en v, alors

$$f_n(x,v) \textit{ est relativement compacte dans } L^1_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right).$$

Remarques:

- La condition $f_n \geq 0$ est nécessaire.
- Application à la limite hydrodynamique de Boltzmann vers Navier-Stokes dans les cas sans troncature (Ars. '10) et avec champ de force extérieur (Ars., Saint-Raymond, en préparation).

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g(x,v)} \quad (\alpha \geq 0,\ 0 \leq \beta < 1)$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g(x,v)} \quad (\alpha \geq 0,\ 0 \leq \beta < 1)$$

Théorème (Bouchut '02)

Si $f \in W_v^{r,p}\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right)$, *où* $r \geq 0$ *et* $1 < p < \infty$, *et* $g \in L^p\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right)$, *alors*

$$f \in W_x^{\sigma,p}\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right), \ \text{où } \sigma = (1-\beta)\frac{r}{1+r+\alpha}.$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g(x,v)} \quad (\alpha \geq 0,\ 0 \leq \beta < 1)$$

Théorème (Bouchut '02)

Si $f \in W_v^{r,p}\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right)$, où $r \geq 0$ et $1 < p < \infty$, et $g \in L^p\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right)$, alors

$$f \in W_x^{\sigma,p}\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right), \text{ où } \sigma = (1-\beta)\frac{r}{1+r+\alpha}.$$

Théorème (Hörmander '67 - Rothschild, Stein '76)

Si $f, g \in L^2\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right)$ satisfont $v \cdot \nabla_x f - \Delta_v f = g$, alors

$$\|\Delta_v f\|_{L^2} + \left\|(-\Delta_x)^{\frac{1}{3}} f\right\|_{L^2} \leq C\left(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}\right).$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g(x,v)} \quad (\alpha \geq 0,\ 0 \leq \beta < 1)$$

Théorème (Bouchut '02)

Si $f \in W_v^{r,p}\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right)$*, où* $r \geq 0$ *et* $1 < p < \infty$*, et* $g \in L^p\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right)$*, alors*

$$f \in W_x^{\sigma,p}\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right), \text{ où } \sigma = (1-\beta)\frac{r}{1+r+\alpha}.$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g(x,v)} \quad (\alpha \geq 0,\ 0 \leq \beta < 1)$$

Théorème (Bouchut '02)

Si $f \in W_v^{r,p}\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right)$, où $r \geq 0$ et $1 < p < \infty$, et $g \in L^p\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right)$, alors

$$f \in W_x^{\sigma,p}\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right), \text{ où } \sigma = (1-\beta)\frac{r}{1+r+\alpha}.$$

Idée: L'exposant σ ne dépend pas de p. Développer une méthode de preuve robuste permettant de comprendre l'hypoellipticité et d'approcher le cas $p = 1$.

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g(x,v)} \quad (\alpha \geq 0,\ 0 \leq \beta < 1)$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g(x,v)} \quad (\alpha \geq 0,\ 0 \leq \beta < 1)$$

En introduisant un paramètre d'interpolation $t \in \mathbb{R}$, on a de manière triviale

$$\begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla_x) f(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g(x,v), \\ f(t=0) = f(x,v). \end{cases}$$

D'où la formule d'interpolation

$$f(x,v) = f(x-tv,v) + \int_0^t (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g(x-sv,v) ds.$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g(x,v)} \quad (\alpha \geq 0,\ 0 \leq \beta < 1)$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g(x,v)} \quad (\alpha \geq 0,\ 0 \leq \beta < 1)$$

En variables de Fourier, on obtient, écrivant $\langle z \rangle = \left(1+|z|^2\right)^{\frac{1}{2}}$,

$$\eta \cdot \nabla_\xi \hat{f}(\eta,\xi) = -\langle \eta \rangle^\beta \langle \xi \rangle^\alpha \hat{g}(\eta,\xi).$$

D'où la formule d'interpolation

$$\hat{f}(\eta,\xi) = \hat{f}(\eta,\xi - t\eta) - \int_0^t \langle \eta \rangle^\beta \langle \xi - s\eta \rangle^\alpha \hat{g}(\eta,\xi - s\eta) ds.$$

On en déduit la formule de représentation, pour un symbole $p(x,v,\eta,\xi)$ approprié,

$$\mathcal{F}^{-1} p(x,v,\eta,\xi) \mathcal{F} f(x,v) = \mathcal{F}^{-1} e^{itv\cdot\eta} p(x,v,\eta,\xi + t\eta) \mathcal{F} f(x,v)$$
$$- \int_0^1 \mathcal{F}^{-1} e^{istv\cdot\eta} p(x,v,\eta,\xi + st\eta) t \langle \eta \rangle^\beta \langle \xi \rangle^\alpha \mathcal{F} g(x,v) ds.$$

Le paramètre t peut dépendre de x, v, η et ξ!

$$\boxed{\begin{gathered}\mathcal{F}^{-1}p(x,v,\eta,\xi)\mathcal{F}f(x,v)=\mathcal{F}^{-1}e^{itv\cdot\eta}p(x,v,\eta,\xi+t\eta)\mathcal{F}f(x,v)\\ -\int_0^1\mathcal{F}^{-1}e^{istv\cdot\eta}p(x,v,\eta,\xi+st\eta)t\left\langle\eta\right\rangle^{\beta}\left\langle\xi\right\rangle^{\alpha}\mathcal{F}g(x,v)ds.\end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}p(x,v,\eta,\xi)\mathcal{F}f(x,v) &= \mathcal{F}^{-1}e^{itv\cdot\eta}p(x,v,\eta,\xi+t\eta)\mathcal{F}f(x,v)\\ &- \int_0^1 \mathcal{F}^{-1}e^{istv\cdot\eta}p(x,v,\eta,\xi+st\eta)t\left\langle\eta\right\rangle^{\beta}\left\langle\xi\right\rangle^{\alpha}\mathcal{F}g(x,v)ds.\end{aligned}}$$

Supposons, pour simplifier, que $p(\eta,\xi)$ ne dépend pas de (x,v) et a un support contenu dans $\{|\eta|>R,\ |\xi|\leq K\}$.

Alors, $p(\eta,\xi+t\eta)$ a un support contenu dans $\{|\eta|>R,\ |\xi+t\eta|\leq K\}$.

Comme $|\xi|\geq t|\eta|-|\xi+t\eta|$, on déduit que $p(\eta,\xi+t\eta)$ a un support contenu dans $\{|\xi|>tR-K\}$, qui ne contient que de grandes valeurs de $|\xi|$ pour un choix de t, K et R approprié.

$$\boxed{\begin{gathered}\mathcal{F}^{-1}p(x,v,\eta,\xi)\mathcal{F}f(x,v) = \mathcal{F}^{-1}e^{itv\cdot\eta}p(x,v,\eta,\xi+t\eta)\mathcal{F}f(x,v)\\ -\int_0^1 \mathcal{F}^{-1}e^{istv\cdot\eta}p(x,v,\eta,\xi+st\eta)t\left\langle\eta\right\rangle^{\beta}\left\langle\xi\right\rangle^{\alpha}\mathcal{F}g(x,v)ds.\end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}p(x,v,\eta,\xi)\mathcal{F}f(x,v) &= \mathcal{F}^{-1}e^{itv\cdot\eta}p(x,v,\eta,\xi+t\eta)\mathcal{F}f(x,v)\\ &- \int_0^1 \mathcal{F}^{-1}e^{istv\cdot\eta}p(x,v,\eta,\xi+st\eta)t\left\langle\eta\right\rangle^{\beta}\left\langle\xi\right\rangle^{\alpha}\mathcal{F}g(x,v)ds.\end{aligned}}$$

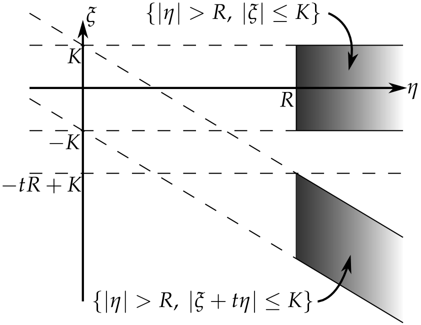

Figure: Hypoellipticité via transport de fréquences.

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g_n(x,v)} \quad (\alpha \geq 0,\ 0 \leq \beta < 1)$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g_n(x,v)} \quad (\alpha \geq 0,\ 0 \leq \beta < 1)$$

Proposition

Si f_n et g_n sont uniformément bornées dans $L^p\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right)$, $1 < p < \infty$, et f_n est relativement compacte en v, alors

$$f_n \text{ est relativement compacte dans } L^p_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right).$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g_n(x,v)} \quad (\alpha \geq 0,\ 0 \leq \beta < 1)$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g_n(x,v)} \quad (\alpha \geq 0,\ 0 \leq \beta < 1)$$

Idée de la preuve dans le cas $p=2$: On a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \mathbf{1}_{\{|\eta|>R \text{ et } |\xi| \leq K(R)\}} \mathcal{F} f_n(x,v) &= \mathcal{F}^{-1} e^{itv\cdot\eta} \mathbf{1}_{\{|\eta|>R \text{ et } |\xi+t\eta| \leq K(R)\}} \mathcal{F} f_n(x,v) \\ &- \int_0^1 \mathcal{F}^{-1} e^{istv\cdot\eta} \mathbf{1}_{\{|\eta|>R \text{ et } |\xi+st\eta| \leq K(R)\}} t \langle\eta\rangle^\beta \langle\xi\rangle^\alpha \mathcal{F} g_n(x,v) ds, \end{aligned}$$

où $t = t(|\eta|) = \frac{2K(R)}{|\eta|} = \frac{\delta^{\frac{1}{1+\alpha}} R^{\frac{1-\beta}{1+\alpha}}}{|\eta|}$. On conclut en remarquant que

$$\{|\eta| > R \text{ et } |\xi + t\eta| \leq K(R)\} \subset \{K(R) \leq |\xi| \leq 3K(R)\},$$

$$\text{et} \quad \mathbf{1}_{\{|\eta|>R \text{ et } |\xi+st\eta| \leq K(R)\}} t \langle\eta\rangle^\beta \langle\xi\rangle^\alpha \leq 2^{\frac{\beta}{2}-\alpha} 10^{\frac{\alpha}{2}} \delta.$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g_n(x,v)} \quad (\alpha \geq 0,\ 0 \leq \beta < 1)$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g_n(x,v)} \quad (\alpha \geq 0,\ 0 \leq \beta < 1)$$

Idée de la preuve dans le cas général $1 < p < \infty$: On fait la même chose avec une régularisation des fonctions indicatrices $\mathbf{1}$. Ainsi, on a

$$\mathcal{F}^{-1}\mathbf{1}_{\{|\eta|>R \text{ et } |\xi|\leq K(R)\}}\mathcal{F}f_n(x,v) = \mathcal{F}^{-1}e^{itv\cdot\eta}\mathbf{1}_{\{|\eta|>R \text{ et } |\xi+t\eta|\leq K(R)\}}\mathcal{F}f_n(x,v)$$
$$- \int_0^1 \mathcal{F}^{-1}e^{istv\cdot\eta}\mathbf{1}_{\{|\eta|>R \text{ et } |\xi+st\eta|\leq K(R)\}} t \langle\eta\rangle^{\beta} \langle\xi\rangle^{\alpha} \mathcal{F}g_n(x,v)ds,$$

où $t = t(|\eta|) = \frac{2K(R)}{|\eta|} = \frac{\delta^{\frac{1}{1+\alpha}} R^{\frac{1-\beta}{1+\alpha}}}{|\eta|}$. Avec une décomposition supplémentaire, $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\chi(0) = 1$,

$$e^{itv\cdot\eta} = \underbrace{\chi(tv\cdot\eta)\, e^{itv\cdot\eta}}_{\text{hypoellipticité}} + \underbrace{(1-\chi(tv\cdot\eta))\, e^{itv\cdot\eta}}_{\text{ellipticité}},$$

on conclut en appliquant les théorèmes standards (Hörmander-Mikhlin et Marcinkiewicz-Mikhlin) sur les multiplicateurs de Fourier.

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g_n(x,v)} \quad (\alpha\geq 0,\ 0\leq\beta<1)$$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g_n(x,v)} \quad (\alpha \geq 0,\ 0 \leq \beta < 1)$$

Remarques:

- Le résultat de Bouchut sur le transfert de régularité peut se prouver de manière similaire.
- Cette preuve ne marche pas dans le cas $p = 1$ car le théorème de Hörmander-Miklhin ne donne qu'une borne de type faible $L^1 \to L^{1,\infty}$ (le théorème de Marcinkiewicz-Mikhlin ne donne même pas ça), où

$$\|h(x)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^D)} = \sup_{\lambda > 0} \lambda \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^D : |h(x)| > \lambda \right\} \right| .$$

- On obtient de manière similaire un résultat optimal equivalent dans les espaces de Besov valide pour tout $1 \leq p < \infty$.

Ellipticité, dispersion et hypoellipticité réconciliées

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f(x,v) = g(x,v)}$$

Ellipticité, dispersion et hypoellipticité réconciliées

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f(x,v) = g(x,v)}$$

1. Ellipticité:

$$\hat{f}(\eta,v) = \chi(\lambda v \cdot \eta)\,\hat{f}(\eta,v) + \frac{1-\chi(\lambda v \cdot \eta)}{iv \cdot \eta}\hat{g}(\eta,v)$$

2. Dispersion:

$$f(x,v) = f(x-tv,v) + \int_0^t g(x-sv,v)ds$$

3. Hypoellipticité:

$$\hat{f}(\eta,\xi) = \hat{f}(\eta,\xi - t\eta) - \int_0^t \hat{g}(\eta,\xi - s\eta)ds$$

Ellipticité, dispersion et hypoellipticité réconciliées

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f(x, v) = g(x, v)}$$

Ellipticité, dispersion et hypoellipticité réconciliées

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f(x,v) = g(x,v)}$$

Comment faire le lien entre l'ellipticité et la dispersion-hypoellipticité?

$$f(x,v) = f(x - tv, v) + \int_0^t g(x - sv, v)\,ds$$

$$\Rightarrow \qquad \hat{f}(\eta, v) = e^{-itv\cdot\eta}\hat{f}(\eta, v) + \int_0^t e^{-isv\cdot\eta}\hat{g}(\eta, v)\,ds$$

$$\Rightarrow \qquad \hat{f}(\eta, v) = e^{-itv\cdot\eta}\hat{f}(\eta, v) + \frac{1 - e^{-itv\cdot\eta}}{iv\cdot\eta}\hat{g}(\eta, v)$$

Soit $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ une fonction telle que $1 = \rho(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\rho}(t)\,dt$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \qquad \hat{f}(\eta, v) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\eta, v)\hat{\rho}(t)\,dt \\ &= \rho(v\cdot\eta)\,\hat{f}(\eta, v) + \frac{1 - \rho(v\cdot\eta)}{iv\cdot\eta}\hat{g}(\eta, v)\end{aligned}$$

Ellipticité, dispersion et hypoellipticité réconciliées

Ellipticité, dispersion et hypoellipticité réconciliées

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g(x,v)} \quad (\alpha \geq 0,\ 0 \leq \beta < 1)$$

$$\boxed{v\cdot\nabla_x f(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}}(1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g(x,v)} \quad (\alpha\geq 0,\ 0\leq\beta<1)$$

Lemme (trivial)

Soient $\chi\in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^D\right)$, *telle que* $\mathbf{1}_{\left\{|r|\leq\frac12\right\}}\leq\chi(r)\leq\mathbf{1}_{\{|r|\leq 1\}}$, *et* $\rho\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}\right)$, *telle que* $\rho(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat\rho(\sigma)d\sigma=1$.
Alors, pour tous $R>0$ *et* $K>0$, *on a que*

$$\begin{aligned}
&\left[\mathcal{F}^{-1}(1-\chi)\left(\tfrac{\eta}{R}\right)\chi\left(\tfrac{\xi}{K}\right)\mathcal{F}\right]f(x,v)\\
&=\left[\mathcal{F}^{-1}(1-\chi)\left(\tfrac{\eta}{R}\right)\chi\left(\tfrac{\xi}{K}\right)\left[\mathcal{F}_v\rho\left(2K\tfrac{\eta}{|\eta|}\cdot v\right)\mathcal{F}_v^{-1}\right]\mathcal{F}\right]f(x,v)\\
&-2i\Big[\mathcal{F}^{-1}(1-\chi)\left(\tfrac{\eta}{R}\right)K^{1+\alpha}\tfrac{\langle\eta\rangle^\beta}{|\eta|}\chi\left(\tfrac{\xi}{K}\right)\\
&\qquad\qquad\left[\mathcal{F}_v\tau\left(2K\tfrac{\eta}{|\eta|}\cdot v\right)\mathcal{F}_v^{-1}\right]\tfrac{\langle\xi\rangle^\alpha}{K^\alpha}\mathcal{F}\Big]g(x,v)
\end{aligned}$$

où $\tau(r)=\frac{1-\rho(r)}{r}$.

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g(x,v)} \quad (\alpha \geq 0,\ 0 \leq \beta < 1)$$

Lemme (crucial)

Soient $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^D)$, telle que $\mathbf{1}_{\{|r| \leq \frac{1}{2}\}} \leq \chi(r) \leq \mathbf{1}_{\{|r| \leq 1\}}$, et $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, telle que $\rho(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\rho}(\sigma) d\sigma = 1$ et $\operatorname{supp} \hat{\rho} \subset \{1 \leq |\sigma| \leq 2\}$.
Alors, pour tous $R > 0$ et $K > 0$, on a que

$$\begin{aligned}
&\left[\mathcal{F}^{-1} (1-\chi)\left(\tfrac{\eta}{R}\right) \chi\left(\tfrac{\xi}{K}\right) \mathcal{F}\right] f(x,v) \\
&= \left[\mathcal{F}^{-1} (1-\chi)\left(\tfrac{\eta}{R}\right) \chi\left(\tfrac{\xi}{K}\right) \left[\mathcal{F}_v \rho\left(2K \tfrac{\eta}{|\eta|} \cdot v\right) \mathcal{F}_v^{-1}\right] \phi\left(\tfrac{\xi}{K}\right) \mathcal{F}\right] f(x,v) \\
&- 2i\Big[\mathcal{F}^{-1} (1-\chi)\left(\tfrac{\eta}{R}\right) K^{1+\alpha} \tfrac{\langle \eta \rangle^\beta}{|\eta|} \chi\left(\tfrac{\xi}{K}\right) \\
&\qquad \left[\mathcal{F}_v \tau\left(2K \tfrac{\eta}{|\eta|} \cdot v\right) \mathcal{F}_v^{-1}\right] \chi\left(\tfrac{\xi}{10K}\right) \tfrac{\langle \xi \rangle^\alpha}{K^\alpha} \mathcal{F}\Big] g(x,v)
\end{aligned}$$

où $\tau(r) = \frac{1-\rho(r)}{r}$ et $\mathbf{1}_{\{1 \leq |r| \leq 5\}} \leq \phi(r) \leq \mathbf{1}_{\{\frac{1}{2} \leq |r| \leq \frac{11}{2}\}}$.

Un généralisation de la théorie de Calderón-Zygmund

Un généralisation de la théorie de Calderón-Zygmund

Proposition

Soit $K(x,v) \in L^1_{\mathrm{loc}}\left(\left(\mathbb{R}^D_x \setminus \{0\}\right) \times \mathbb{R}^D_v\right)$ *tel que*

$$\sup_{\substack{y \neq 0 \\ v \in \mathbb{R}^D}} \int_{\{|x| \geq 2|y|\}} |K(x-y,v) - K(x,v)| \, dx < \infty.$$

Supposons que l'opérateur $T : \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^D_x \times \mathbb{R}^D_v\right) \to \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^D_x\right)$*, défini par*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^D} K *_x f(x,v) \varphi(v) dv,$$

où $\varphi(v) \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^D\right)$*, est borné de* $L^r\left(\mathbb{R}^D_x \times \mathbb{R}^D_v\right)$ *vers* $L^r\left(\mathbb{R}^D_x\right)$*, pour un certain* $1 < r < \infty$*.*
Alors, T *est borné de* $L^1\left(\mathbb{R}^D_x; L^r\left(\mathbb{R}^D_v\right)\right)$ *dans* $L^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^D_x\right)$*.*

Un généralisation de la théorie de Calderón-Zygmund

Corollaire

L'opérateur

$$f(x,v) \mapsto \int_{\mathbb{R}^D} K^D \hat{\chi}(K(v-u)) \left[\mathcal{F}^{-1} \rho \left(2K \frac{\eta}{|\eta|} \cdot u \right) \mathcal{F} \right] f(x,u) du$$

est borné de $L^1\left(\mathbb{R}^D_x; L^r\left(\mathbb{R}^D_v\right)\right)$ *dans* $L^r\left(\mathbb{R}^D_v; L^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^D_x\right)\right)$*, pour tout* $1 < r < \infty$*.*

Transfert de compacité de L^1 vers $L^{1,\infty}$

Transfert de compacité de L^1 vers $L^{1,\infty}$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g_n(x,v)} \quad (\alpha \geq 0,\ 0 \leq \beta < 1)$$

Transfert de compacité de L^1 vers $L^{1,\infty}$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g_n(x,v)} \; {\scriptstyle (\alpha \geq 0,\ 0 \leq \beta < 1)}$$

Proposition

Si f_n et g_n sont uniformément bornées dans $L^1\left(\mathbb{R}^D_x; L^r\left(\mathbb{R}^D_v\right)\right)$, pour un certain $r > 1$, et f_n est relativement compacte en v, alors

$$\lim_{R\to\infty} \sup_n \left\| \left[\mathcal{F}_x^{-1} (1-\chi) \left(\frac{\eta}{R}\right) \mathcal{F}_x \right] f_n(x,v) \right\|_{L^r(\mathbb{R}^D_v; L^{1,\infty}(\mathbb{R}^D_x))} = 0.$$

Transfert de compacité de L^1 vers $L^{1,\infty}$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g_n(x,v)} \quad (\alpha\geq 0,\ 0\leq\beta<1)$$

Proposition

Si f_n et g_n sont uniformément bornées dans $L^1\left(\mathbb{R}^D_x; L^r\left(\mathbb{R}^D_v\right)\right)$, pour un certain $r>1$, et f_n est relativement compacte en v, alors

$$\lim_{R\to\infty} \sup_n \left\| \left[\mathcal{F}_x^{-1} (1-\chi)\left(\frac{\eta}{R}\right) \mathcal{F}_x \right] f_n(x,v) \right\|_{L^r(\mathbb{R}^D_v; L^{1,\infty}(\mathbb{R}^D_x))} = 0$$

et, pour tout $j = 1, \ldots, D$,

$$\lim_{R\to\infty} \sup_n \left\| \left[\mathcal{F}_x^{-1} \frac{\eta_j}{|\eta|} (1-\chi)\left(\frac{\eta}{R}\right) \mathcal{F}_x \right] f_n(x,v) \right\|_{L^r(\mathbb{R}^D_v; L^{1,\infty}(\mathbb{R}^D_x))} = 0.$$

L'espace de Hardy faible $H^{1,\infty}$

Définition

Soit $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^D\right)$ tel que $\int_{\mathbb{R}^D} \varphi(x)dx \neq 0$, $\varphi_t(x) = \frac{1}{t^D}\varphi\left(\frac{x}{t}\right)$.
L'espace de Hardy faible $H^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^D\right)$ est composé des distributions f telles que

$$\|f\|_{H^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^D\right)} = \left\|\sup_{t>0} |\varphi_t * f|\right\|_{L^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^D\right)} < \infty.$$

L'espace de Hardy faible $H^{1,\infty}$

Définition

Soit $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^D\right)$ tel que $\int_{\mathbb{R}^D} \varphi(x)dx \neq 0$, $\varphi_t(x) = \frac{1}{t^D}\varphi\left(\frac{x}{t}\right)$.
L'espace de Hardy faible $H^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^D\right)$ est composé des distributions f telles que

$$\|f\|_{H^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^D\right)} = \left\| \sup_{t>0} |\varphi_t * f| \right\|_{L^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^D\right)} < \infty.$$

Remarques:

- $H^1 \subset L^1 \subset H^{1,\infty}$ et $\frac{1}{x} \in H^{1,\infty}(\mathbb{R})$ mais $\frac{1}{|x|} \notin H^{1,\infty}(\mathbb{R})$.
- Fefferman et Soria ('87) ont montré que, pour des fonctions intégrables,

$$\|f\|_{H^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^D\right)} \sim \|f\|_{L^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^D\right)} + \sum_{i=1}^{D} \left\| \mathcal{F}^{-1} \frac{\eta_i}{|\eta|} \mathcal{F} f \right\|_{L^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^D\right)}.$$

L'espace de Hardy faible $H^{1,\infty}$

Définition

Soit $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^D\right)$ tel que $\int_{\mathbb{R}^D} \varphi(x)dx \neq 0$, $\varphi_t(x) = \frac{1}{t^D}\varphi\left(\frac{x}{t}\right)$.
L'espace de Hardy faible $H^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^D\right)$ est composé des distributions f telles que

$$\|f\|_{H^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^D\right)} = \left\|\sup_{t>0} |\varphi_t * f|\right\|_{L^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^D\right)} < \infty.$$

L'espace de Hardy faible $H^{1,\infty}$

Définition

Soit $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^D\right)$ tel que $\int_{\mathbb{R}^D} \varphi(x)dx \neq 0$, $\varphi_t(x) = \frac{1}{t^D}\varphi\left(\frac{x}{t}\right)$.
L'espace de Hardy faible $H^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^D\right)$ est composé des distributions f telles que

$$\|f\|_{H^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^D\right)} = \left\|\sup_{t>0} |\varphi_t * f|\right\|_{L^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^D\right)} < \infty.$$

Proposition

Soit $f_n \geq 0$ *une suite bornée dans* $L^1\left(\mathbb{R}^D\right)$ *telle que*

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n(x) - \rho_\delta * f_n(x)\|_{H^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^D\right)} = 0.$$

Alors, la suite est équi-intégrable et il existe une sous-suite convergente presque partout.

Transfert de compacité de L^1 vers $H^{1,\infty}$

Transfert de compacité de L^1 vers $H^{1,\infty}$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g_n(x,v)} \ (\alpha \geq 0,\ 0 \leq \beta < 1)$$

Transfert de compacité de L^1 vers $H^{1,\infty}$

$$\boxed{v \cdot \nabla_x f_n(x,v) = (1-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} (1-\Delta_v)^{\frac{\alpha}{2}} g_n(x,v)} \quad (\alpha \geq 0,\ 0 \leq \beta < 1)$$

Théorème

Si f_n et g_n sont uniformément bornées dans $L^1\left(\mathbb{R}^D_x; L^r\left(\mathbb{R}^D_v\right)\right)$, pour un certain $r > 1$, et f_n est relativement compacte en v, alors

$$f_n(x,v) \text{ est relativement compacte dans } L^r\left(\mathbb{R}^D_v; H^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^D_x\right)\right).$$

De plus, si $f_n \geq 0$, alors

$$f_n(x,v) \text{ est relativement compacte dans } L^1_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right).$$