Configurations de vortex dans le modèle de Ginzburg-Landau de la supraconductivité

De Ginzburg-Landau à des problèmes de réseaux

Sylvia Serfaty, avec Etienne Sandier

1er février 2008, Collège de France

La fonctionnelle de Ginzburg-Landau

$$G_\varepsilon(\psi, A) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla_A \psi|^2 + |\mathrm{curl}\, A - h_{\mathrm{ex}}|^2 + \frac{(1-|\psi|^2)^2}{2\varepsilon^2}$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ simplement connexe
- $\psi : \Omega \to \mathbb{C}$ "paramètre d'ordre"
- $A : \Omega \to \mathbb{R}^2$ potentiel vecteur $\nabla_A = \nabla - iA$
- $h = \mathrm{curl}\, A$ champ magnétique induit
- $h_{\mathrm{ex}} > 0$ intensité du champ appliqué
- $\varepsilon = \frac{1}{\kappa}$ “paramètre de Ginzburg-Landau": constante du matériau
- limite $\varepsilon \to 0$ extrême type-II ou fortement répulsive

Les équations de Ginzburg-Landau

$$(GL)\begin{cases} -\nabla_A^2\psi = \frac{\psi}{\varepsilon^2}(1-|\psi|^2) & \text{dans } \Omega \\ -\nabla^\perp h = \psi\times\nabla_A\psi & \text{dans } \Omega \\ h = h_{\mathrm{ex}} & \text{sur } \partial\Omega \\ \nabla_A\psi\cdot\nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Invariance de jauge $\mathbb{U}(1)$ (“théorie abélienne de jauge")

$$\begin{cases} \psi \mapsto \psi e^{i\Phi} \\ A \mapsto A + \nabla\Phi \end{cases}$$

Les quantités physiques sont celles qui sont invariantes de jauge, tq: $|\psi|^2$, h, $j = \psi\times\nabla_A\psi$, G_ε.

motivations: supraconductivité, superfluidité, condensats de Bose-Einstein

Les équations de Ginzburg-Landau

$$(GL)\begin{cases} -\nabla_A^2\psi = \frac{\psi}{\varepsilon^2}(1-|\psi|^2) & \text{dans } \Omega \\ -\nabla^\perp h = \psi \times \nabla_A \psi & \text{dans } \Omega \\ h = h_{\mathrm{ex}} & \text{sur } \partial\Omega \\ \nabla_A\psi \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

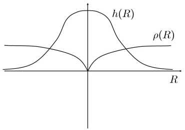
Invariance de jauge $\mathbb{U}(1)$ (“théorie abélienne de jauge")

$$\begin{cases} \psi \mapsto \psi e^{i\Phi} \\ A \mapsto A + \nabla\Phi \end{cases}$$

Les quantités physiques sont celles qui sont invariantes de jauge, tq: $|\psi|^2$, h, $j = \psi \times \nabla_A\psi$, G_ε.
motivations: supraconductivité, superfluidité, condensats de Bose-Einstein

Les vortex

- $|\psi|^2 \leq 1$ densité d'électrons supraconducteurs
- $|\psi| = 0$ phase normale
- $|\psi| \sim 1$ phase supra
- vortex: zéros de ψ de degré non nul

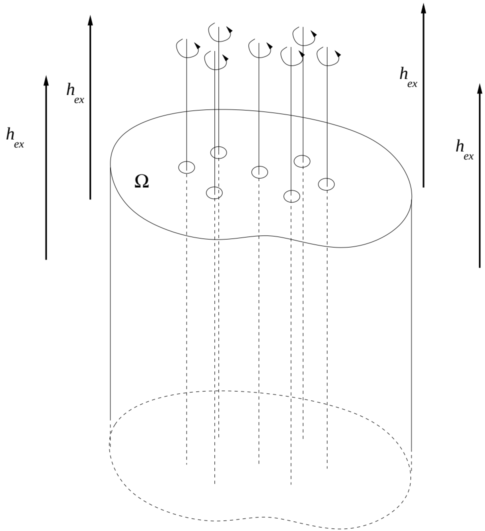


- $\psi = \rho e^{i\varphi}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B(x_0,r)} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = d \in \mathbb{Z}$$

degré du vortex

- Dans la lim $\varepsilon \to 0$ les vortex deviennent *ponctuels*, ou plus généralement des singularités de *codimension-2*



h_{ex}
h_{ex}
h_{ex}
h_{ex}
Ω

La vorticité

$\psi = \rho e^{i\varphi}$, φ pas univaluée

introduire la mesure de vorticité

$$\mu_\varepsilon := \mu(\psi, A) = \operatorname{curl}(\psi \times \nabla_A \psi) + \operatorname{curl} A$$

"estimée Jacobienne" (voir Jerrard-Soner)

$$\operatorname{curl}(\psi \times \nabla \psi) = det\ D\psi = \operatorname{curl}(\rho^2 \nabla \varphi) \simeq \operatorname{curl} \nabla \varphi = 2\pi \sum_i d_i \delta_{a_i} \quad \text{qd } \varepsilon \to 0$$

Si (ψ, A) vérifie (GL2)

$$-\nabla^\perp h = \psi \times \nabla_A \psi$$

prenant le rot

$$\begin{cases} -\Delta h + h = \mu \simeq 2\pi \sum_i d_i \delta_{a_i} & \text{dans } \Omega \\ h = h_{\mathrm{ex}} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Egalement $|\nabla_A \psi| \simeq |\nabla h| \rightsquigarrow$ divergence logarithmique de $\int_\Omega |\nabla_A \psi|^2$

La vorticité

$\psi = \rho e^{i\varphi}$, φ pas univaluée

introduire la mesure de vorticité

$$\mu_\varepsilon := \mu(\psi, A) = \operatorname{curl}(\psi \times \nabla_A \psi) + \operatorname{curl} A$$

"estimée Jacobienne" (voir Jerrard-Soner)

$$\operatorname{curl}(\psi \times \nabla \psi) = det\ D\psi = \operatorname{curl}(\rho^2 \nabla \varphi) \simeq \operatorname{curl} \nabla \varphi = 2\pi \sum_i d_i \delta_{a_i} \quad \text{qd } \varepsilon \to 0$$

Si (ψ, A) vérifie (GL2)

$$-\nabla^\perp h = \psi \times \nabla_A \psi$$

prenant le rot

$$\begin{cases} -\Delta h + h = \mu \simeq 2\pi \sum_i d_i \delta_{a_i} & \text{dans } \Omega \\ h = h_{\mathrm{ex}} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Egalement $|\nabla_A \psi| \simeq |\nabla h| \rightsquigarrow$ divergence logarithmique de $\int_\Omega |\nabla_A \psi|^2$

La vorticité

$\psi = \rho e^{i\varphi}$, φ pas univaluée

introduire la mesure de vorticité

$$\mu_\varepsilon := \mu(\psi, A) = \operatorname{curl}(\psi \times \nabla_A \psi) + \operatorname{curl} A$$

“estimée Jacobienne" (voir Jerrard-Soner)

$$\operatorname{curl}(\psi \times \nabla \psi) = det\, D\psi = \operatorname{curl}(\rho^2 \nabla\varphi) \simeq \operatorname{curl} \nabla\varphi = 2\pi \sum_i d_i \delta_{a_i} \quad \text{qd } \varepsilon \to 0$$

Si (ψ, A) vérifie (GL2)

$$-\nabla^\perp h = \psi \times \nabla_A \psi$$

prenant le rot

$$\begin{cases} -\Delta h + h = \mu \simeq 2\pi \sum_i d_i \delta_{a_i} & \text{dans } \Omega \\ h = h_{\mathrm{ex}} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Egalement $|\nabla_A \psi| \simeq |\nabla h| \rightsquigarrow$ divergence logarithmique de $\int_\Omega |\nabla_A \psi|^2$

Influence du champ appliqué et champs critiques

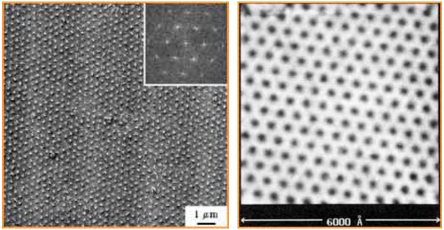
- $h_{\text{ex}} < H_{c_1}$ pas de vortex, $|\psi| \sim 1$ (effet Meissner)
- $H_{c_1} = O(|\log \varepsilon|)$ premier champ critique: les premiers vortex apparaissent, puis leur nombre croît
  $\rightsquigarrow$ réseaux d'Abrikosov (triangulaires)
- $H_{c_2} = O(\frac{1}{\varepsilon^2})$ supraconductivité détruite à l'intérieur, reste de la supraconductivité de surface
- $H_{c_3} = O(\frac{1}{\varepsilon^2})$ état normal $\psi \equiv 0$

Influence du champ appliqué et champs critiques

- $h_{\rm ex} < H_{c_1}$ pas de vortex, $|\psi| \sim 1$ (effet Meissner)
- $H_{c_1} = O(|\log \varepsilon|)$ premier champ critique: les premiers vortex apparaissent, puis leur nombre croît
  $\rightsquigarrow$ réseaux d'Abrikosov (triangulaires)
- $H_{c_2} = O(\frac{1}{\varepsilon^2})$ supraconductivité détruite à l'intérieur, reste de la supraconductivité de surface
- $H_{c_3} = O(\frac{1}{\varepsilon^2})$ état normal $\psi \equiv 0$

Influence du champ appliqué et champs critiques

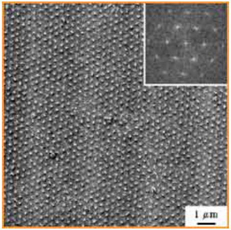
- $h_{\text{ex}} < H_{c_1}$ pas de vortex, $|\psi| \sim 1$ (effet Meissner)
- $H_{c_1} = O(|\log \varepsilon|)$ premier champ critique: les premiers vortex apparaissent, puis leur nombre croît
  $\rightsquigarrow$ réseaux d'Abrikosov (triangulaires)

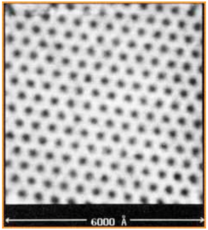


- $H_{c_2} = O(\frac{1}{\varepsilon^2})$ supraconductivité détruite à l'intérieur, reste de la supraconductivité de surface
- $H_{c_3} = O(\frac{1}{\varepsilon^2})$ état normal $\psi \equiv 0$

Influence du champ appliqué et champs critiques

- $h_{\text{ex}} < H_{c_1}$ pas de vortex, $|\psi| \sim 1$ (effet Meissner)
- $H_{c_1} = O(|\log \varepsilon|)$ premier champ critique: les premiers vortex apparaissent, puis leur nombre croît
  $\rightsquigarrow$ réseaux d'Abrikosov (triangulaires)

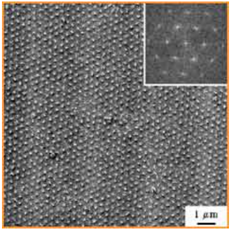


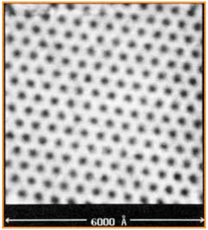


- $H_{c_2} = O(\frac{1}{\varepsilon^2})$ supraconductivité détruite à l'intérieur, reste de la supraconductivité de surface
- $H_{c_3} = O(\frac{1}{\varepsilon^2})$ état normal $\psi \equiv 0$

Influence du champ appliqué et champs critiques

- $h_{\text{ex}} < H_{c_1}$ pas de vortex, $|\psi| \sim 1$ (effet Meissner)
- $H_{c_1} = O(|\log \varepsilon|)$ premier champ critique: les premiers vortex apparaissent, puis leur nombre croît
  $\rightsquigarrow$ réseaux d'Abrikosov (triangulaires)





- $H_{c_2} = O(\frac{1}{\varepsilon^2})$ supraconductivité détruite à l'intérieur, reste de la supraconductivité de surface
- $H_{c_3} = O(\frac{1}{\varepsilon^2})$ état normal $\psi \equiv 0$

Questions et méthodes

- Prouver des résultats mathématiques sur les minimiseurs de l'énergie
- décrire leurs vortex dans la limite $\varepsilon \to 0$
- les réseaux d'Abrikosov
- les champs critiques pour lesquels ils apparaissent

Méthode de Γ-convergence:

- prouver des bornes inférieures pour une configuration arbitraire en fonction de ses vortex limites
- prouver que cette minoration est optimale en construisant une configuration test explicite
- déduire l'énergie limite à minimiser

Autres résultats non décrits aujourd'hui:

- existence de branches de solutions localement minimisantes à nombre de vortex prescrit
- caractérisation des vortex pour tous les points critiques

Questions et méthodes

- Prouver des résultats mathématiques sur les minimiseurs de l'énergie
- décrire leurs vortex dans la limite $\varepsilon \to 0$
- les réseaux d'Abrikosov
- les champs critiques pour lesquels ils apparaissent

Méthode de Γ-convergence:

- prouver des bornes inférieures pour une configuration arbitraire en fonction de ses vortex limites
- prouver que cette minoration est optimale en construisant une configuration test explicite
- déduire l'énergie limite à minimiser

Autres résultats non décrits aujourd'hui:

- existence de branches de solutions localement minimisantes à nombre de vortex prescrit
- caractérisation des vortex pour tous les points critiques

Questions et méthodes

- Prouver des résultats mathématiques sur les minimiseurs de l'énergie
- décrire leurs vortex dans la limite $\varepsilon \to 0$
- les réseaux d'Abrikosov
- les champs critiques pour lesquels ils apparaissent

Méthode de Γ-convergence:

- prouver des bornes inférieures pour une configuration arbitraire en fonction de ses vortex limites
- prouver que cette minoration est optimale en construisant une configuration test explicite
- déduire l'énergie limite à minimiser

Autres résultats non décrits aujourd'hui:

- existence de branches de solutions localement minimisantes à nombre de vortex prescrit
- caractérisation des vortex pour tous les points critiques

Le problème de l'obstacle...

- introduire h_* l'(unique) minimiseur du *problème de l'obstacle*

$$\min_{\substack{h=1 \text{ sur } \partial\Omega \\ h \geq 1 - \frac{1}{2h_{\text{ex}}} \log \frac{1}{\varepsilon\sqrt{h_{\text{ex}}}} := m_\varepsilon}} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla h|^2 + h^2$$

- supposer

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{h_{\text{ex}}}{\log \frac{1}{\varepsilon\sqrt{h_{\text{ex}}}}} = \lambda$$

$\rightsquigarrow$ h_* ne dépend essentiellement pas de ε, juste de λ.

- ensemble de coincidence

$$\omega = \{x \in \Omega / h_*(x) = m_\varepsilon\}$$

$\mu_* = -\Delta h_* + h_*$
μ_* densité uniforme sur $\omega \subset \Omega$,

$$\mu_* = m_\varepsilon \mathbf{1}_\omega$$

avec $m_\varepsilon \to m := 1 - \frac{1}{2\lambda}$

Le problème de l'obstacle...

- introduire h_* l'(unique) minimiseur du *problème de l'obstacle*

$$\min_{\substack{h=1 \text{ sur } \partial\Omega \\ h\geq 1-\frac{1}{2h_{\rm ex}}\log\frac{1}{\varepsilon\sqrt{h_{\rm ex}}}:=m_\varepsilon}} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla h|^2 + h^2$$

- supposer

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{h_{\rm ex}}{\log\frac{1}{\varepsilon\sqrt{h_{\rm ex}}}} = \lambda$$

$\rightsquigarrow$ h_* ne dépend essentiellement pas de ε, juste de λ.

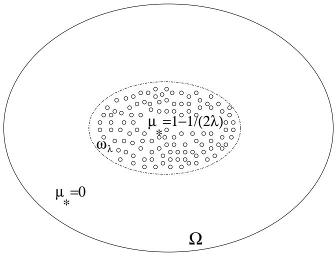
- ensemble de coincidence

$$\omega = \{x\in\Omega / h_*(x) = m_\varepsilon\}$$

$\mu_* = -\Delta h_* + h_*$
μ_* densité uniforme sur $\omega\subset\Omega$,

$$\mu_* = m_\varepsilon \mathbf{1}_\omega$$

avec $m_\varepsilon \to m := 1-\frac{1}{2\lambda}$



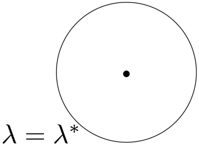
μ* =1−1/(2λ)
ωλ
μ* =0
Ω

Dépendence en λ

- $\lambda < \lambda_0$: $\omega_\lambda = \varnothing$, $\mu_* = 0$, pas de vortex
- $\lambda = \lambda_0$: $\omega_\lambda = \Lambda =$ ensemble fini de points (on suppose $\Lambda = \{p\}$)
- $\lambda > \lambda_0$: $\omega_\lambda \neq \varnothing$
- $|\log \varepsilon| \ll h_{\mathrm{ex}} \ll \frac{1}{\varepsilon^2}$: $\quad \omega_\infty = \Omega$, $\mu_* = 1$

Dépendence en λ

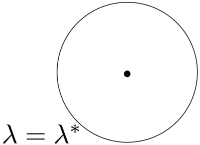
- $\lambda < \lambda_0$: $\omega_\lambda = \varnothing$, $\mu_* = 0$, pas de vortex
- $\lambda = \lambda_0$: $\omega_\lambda = \Lambda =$ ensemble fini de points (on suppose $\Lambda = \{p\}$)



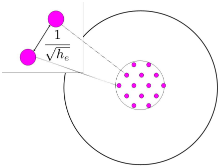
- $\lambda > \lambda_0$: $\omega_\lambda \neq \varnothing$
- $|\log \varepsilon| \ll h_{\rm ex} \ll \frac{1}{\varepsilon^2}$: $\quad \omega_\infty = \Omega$, $\mu_* = 1$

Dépendence en λ

- $\lambda < \lambda_0$: $\omega_\lambda = \varnothing$, $\mu_* = 0$, pas de vortex
- $\lambda = \lambda_0$: $\omega_\lambda = \Lambda =$ ensemble fini de points (on suppose $\Lambda = \{p\}$)



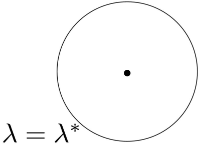
- $\lambda > \lambda_0$: $\omega_\lambda \neq \varnothing$



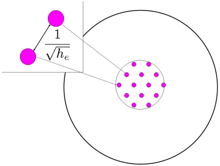
- $|\log \varepsilon| \ll h_{\text{ex}} \ll \frac{1}{\varepsilon^2}$: $\omega_\infty = \Omega$, $\mu_* = 1$

Dépendence en λ

- $\lambda < \lambda_0$: $\omega_\lambda = \varnothing$, $\mu_* = 0$, pas de vortex
- $\lambda = \lambda_0$: $\omega_\lambda = \Lambda =$ ensemble fini de points (on suppose $\Lambda = \{p\}$)



- $\lambda > \lambda_0$: $\omega_\lambda \neq \varnothing$



- $|\log \varepsilon| \ll h_{\mathrm{ex}} \ll \frac{1}{\varepsilon^2}$: $\quad \omega_\infty = \Omega, \ \ \mu_* = 1$

Une formule de décomposition de l'énergie

Soit (ψ, A) vérifiant (GL2) et $h = \operatorname{curl} A$. On décompose A et h en posant

$$A = h_{\mathrm{ex}} \nabla^{\perp} h_* + A_1 \qquad h = h_{\mathrm{ex}} h_* + h_1.$$

Un calcul direct donne avec (GL2)

$$\begin{cases} -\Delta h_1 + h_1 = \mu_\varepsilon - h_{\mathrm{ex}} \mu_* & \text{dans } \Omega \\ h_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Proposition (Décomposition de l'énergie)

$$G_\varepsilon(\psi, A) = \frac{h_{\rm ex}}{2} \log \frac{1}{\varepsilon\sqrt{h_{\rm ex}}} \int_\Omega \mu_* + \frac{h_{\rm ex}^2}{2} \int_\Omega |\nabla h_*|^2 + |h_* - 1|^2$$
$$+ \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla_{A_1} \psi|^2 + h_1^2 + \frac{(1-|\psi|^2)^2}{2\varepsilon^2} + h_{\rm ex} \int_\Omega (h_* - 1)\mu_\varepsilon + o(1).$$

On se ramène à minimiser

$$G_1(\psi, A) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla_{A_1} \psi|^2 + h_1^2 + \frac{(1-|\psi|^2)^2}{2\varepsilon^2} + \int_\Omega h_{\rm ex}(h_* - 1)\mu_\varepsilon.$$

On verra que $\min G_1 = O(h_{\rm ex})$ d'où on déduit

$$\min G_\varepsilon \sim h_{\rm ex}^2 \left(\frac{1}{2\lambda} \int_\Omega |\mu_*| + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla h_*|^2 + |h_* - 1|^2 \right) + O(h_{\rm ex})$$

Résultats pour les minimiseurs à l'ordre principal

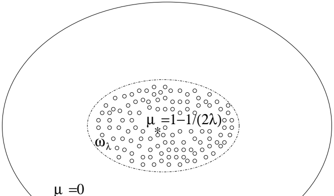
Théorème (Sandier-S)

Pour les minimiseurs de G_ε on a

$$\frac{\mu_\varepsilon}{h_{\mathrm{ex}}} \rightharpoonup \mu_* = m\mathbf{1}_{\omega_\lambda} \qquad \frac{h}{h_{\mathrm{ex}}} \rightharpoonup h_*$$

$$\frac{G_\varepsilon(\psi, A)}{h_{\mathrm{ex}}^2} \to \frac{1}{2\lambda}\int_\Omega |\mu_*| + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla h_*|^2 + |h_* - 1|^2$$

$$\boxed{H_{c_1} \sim \lambda_0 |\log \varepsilon|}$$



Minimiseurs près de H_{c_1} - nombre fini de vortex

Théorème

Supposons $\Lambda = \{p\}$ *et* $h_{\rm ex} \le H_{c_1} + O(\log\ |\log \varepsilon|)$ *et* $h_{\rm ex} \in (H_n, H_{n+1})$ *où*

$$H_n = \lambda_0\left(|\log \varepsilon| + (n-1)\log(\lambda_0|\log \varepsilon|) + C_n\right)$$

les minimiseurs de G_ε *ont exactement* n *vortex de degré* $+1$, $a_i^\varepsilon \to p$ *et*

$$\tilde{a}_i^\varepsilon = \sqrt{\frac{h_{\rm ex}}{n}}(a_i^\varepsilon - p)$$

converge quand $\varepsilon \to 0$ *vers un minimiseur de*

$$w_n(x_1, \cdots, x_n) = -\pi \sum_{i \neq j} \log|x_i - x_j| + \pi n \sum_i Q(x_i).$$

minimiser w_n donne des configurations régulières (polygone régulier pour n assez petit)

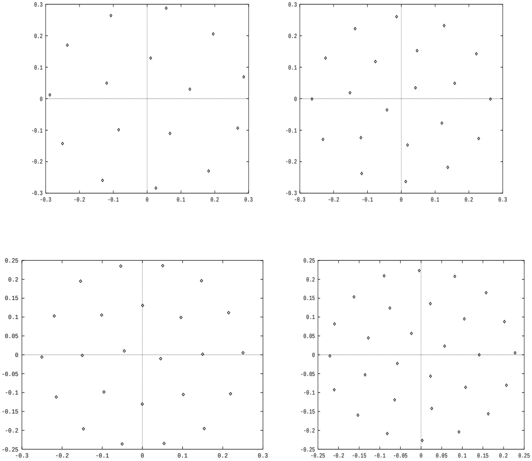


Figure: Résultat de la minimisation numérique de w_n par Gueron-Shafrir, $n = 16, 21, 24, 29$

Minimiseurs près de H_{c_1} : régime intermédiaire

Théorème

$\log\ |\log\varepsilon| \ll h_{\mathrm{ex}} - H_{c_1} \ll |\log\varepsilon|$, *il existe* n_ε *tel que*

$$h_{\mathrm{ex}} \sim \lambda_0 \quad |\log\varepsilon| + n_\varepsilon \log \frac{|\log\varepsilon|}{n_\varepsilon} \qquad 1 \ll n_\varepsilon \ll h_{\mathrm{ex}}$$

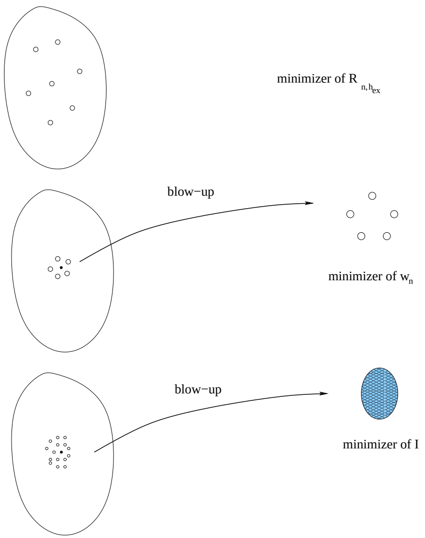
et si $(\psi_\varepsilon, A_\varepsilon)$ *minimise* G_ε *et a des vortex en* $a_i(\varepsilon)$ *de degré* d_i, *notant*

$$\mu_\varepsilon = 2\pi \sum_i d_i \delta_{a_i}$$

on a $\frac{\tilde{\mu_\varepsilon}}{2\pi n_\varepsilon} \rightharpoonup \mu_0$ *où* $\tilde{\mu_\varepsilon}$ *est la mesure image de* μ_ε *par le blow-up* $x \mapsto \sqrt{\frac{h_{\mathrm{ex}}}{n_\varepsilon}}(x-p)$ *et* μ_0 *est l'unique minimiseur parmi les mesures de probabilité de*

$$I(\mu) = \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} -\log|x-y|\, d\mu(x)\, d\mu(y) + \int_{\mathbb{R}^2} Q(x)\, d\mu(x)$$

μ_0 est une proba de densité cste sur un sous-domaine de $\mathbb{R}^2$
(disque/ellipse)


minimizer of $R_{n,h_{ex}}$
blow−up
minimizer of w_n
blow−up
minimizer of I

Comportement des minimiseurs à l'ordre suivant

- densité de vortex $mh_{\rm ex}$, distances $\sim 1/\sqrt{mh_{\rm ex}} \to$ faut dilater pour voir la configuration
- comprendre la Γ-limite de $G_1/h_{\rm ex} \to \Gamma$-convergence à l'ordre suivant
- Rappel

$$-\Delta h_1 + h_1 = \mu_\varepsilon - h_{\rm ex}\mu_* = \mu_\varepsilon - m_\varepsilon h_{\rm ex}\mathbf{1}_\omega$$

- après blow up à l'échelle $\sqrt{mh_{\rm ex}}$ autour d'un point de ω, on obtient une configuration de points dans TOUT le plan avec

$$-\Delta H = 2\pi \sum_i d_i \delta_{a_i} - 1 \quad \text{sur } \mathbb{R}^2$$

Question: quelle est l'énergie d'interaction des a_i? Pbl: domaine de taille infinie

Comportement des minimiseurs à l'ordre suivant

- densité de vortex mh_{ex}, distances $\sim 1/\sqrt{mh_{\mathrm{ex}}} \to$ faut dilater pour voir la configuration
- comprendre la Γ-limite de $G_1/h_{\mathrm{ex}} \to \Gamma$-convergence à l'ordre suivant
- Rappel

$$-\Delta h_1 + h_1 = \mu_\varepsilon - h_{\mathrm{ex}}\mu_* = \mu_\varepsilon - m_\varepsilon h_{\mathrm{ex}} \mathbf{1}_\omega$$

- après blow up à l'échelle $\sqrt{mh_{\mathrm{ex}}}$ autour d'un point de ω, on obtient une configuration de points dans TOUT le plan avec

$$-\Delta H = 2\pi \sum_i d_i \delta_{a_i} - 1 \quad \text{sur } \mathbb{R}^2$$

Question: quelle est l'énergie d'interaction des a_i? Pbl: domaine de taille infinie

Comportement des minimiseurs à l'ordre suivant

- densité de vortex mh_{ex}, distances $\sim 1/\sqrt{mh_{\mathrm{ex}}} \to$ faut dilater pour voir la configuration
- comprendre la Γ-limite de $G_1/h_{\mathrm{ex}} \to \Gamma$-convergence à l'ordre suivant
- Rappel

$$-\Delta h_1 + h_1 = \mu_\varepsilon - h_{\mathrm{ex}}\mu_* = \mu_\varepsilon - m_\varepsilon h_{\mathrm{ex}} \mathbf{1}_\omega$$

- après blow up à l'échelle $\sqrt{mh_{\mathrm{ex}}}$ autour d'un point de ω, on obtient une configuration de points dans TOUT le plan avec

$$-\Delta H = 2\pi \sum_i d_i \delta_{a_i} - 1 \quad \text{sur } \mathbb{R}^2$$

Question: quelle est l'énergie d'interaction des a_i? Pbl: domaine de taille infinie

Analyse formelle de G_1

$$G_1(\psi, A) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla_{A_1}\psi|^2 + h_1^2 + \frac{(1-|\psi|^2)^2}{2\varepsilon^2} + \int_\Omega h_{\mathrm{ex}}(h_* - 1)\mu_\varepsilon$$

$$\begin{array}{lcll} h_{\mathrm{ex}}(h_* - 1) & = & -\frac{1}{2}\log\ \frac{1}{\varepsilon\sqrt{h_{\mathrm{ex}}}} & \quad \text{dans } \omega \\ & > & -\frac{1}{2}\log\ \frac{1}{\varepsilon\sqrt{h_{\mathrm{ex}}}} & \quad \text{ailleurs} \end{array}$$

$$\int_\Omega h_{\mathrm{ex}}(h_* - 1)\mu_\varepsilon \simeq -\pi \sum_i d_i \log\ \frac{1}{\varepsilon\sqrt{h_{\mathrm{ex}}}}$$

$\rightsquigarrow$ tous les vortex doivent être dans ω, et de degrés positifs.
Après blow-up, posant $\varepsilon' = \varepsilon\sqrt{h_{\mathrm{ex}}}$ et avec les mêmes notations pour (ψ, A)

$$G_1(\psi, A) \simeq \frac{1}{2}\int_{\sqrt{h_{\mathrm{ex}}}\Omega} |\nabla_{A_1}\psi|^2 + \frac{h_1^2}{h_{\mathrm{ex}}} + \frac{(1-|\psi|^2)^2}{2(\varepsilon')^2} - \pi \sum_i d_i |\log \varepsilon'|$$

Première partie $\sim$ énergie "libre" de GL sans chp appliqué
$\geq \pi \sum |d_i| |\log \varepsilon'|$

énergie dans les vortex - minorations via "méthode de construction de boules" Bethuel-Brezis-Hélein, Jerrard, Sandier, Sandier-S

- Un vortex ajoute une qté "infinie" d'énergie mais aussi soustrait une qté infinie
- $\rightsquigarrow$ reste une "énergie renormalisée"
- $\rightsquigarrow$ il faut extraire l'énergie des vortex avec une très grande précision pour évaluer le reste

$$G_1(\psi, A) \simeq \frac{1}{2}\int_{\sqrt{h_{\mathrm{ex}}}\Omega} |\nabla_{A_1}\psi|^2 + \frac{h_1^2}{h_{\mathrm{ex}}} + \frac{(1-|\psi|^2)^2}{2(\varepsilon')^2} - \pi \sum_i d_i |\log \varepsilon'|$$

Première partie $\sim$ énergie "libre" de GL sans chp appliqué
$\geq \pi \sum |d_i| |\log \varepsilon'|$

énergie dans les vortex - minorations via "méthode de construction de boules" Bethuel-Brezis-Hélein, Jerrard, Sandier, Sandier-S

- Un vortex ajoute une qté "infinie" d'énergie mais aussi soustrait une qté infinie
- $\rightsquigarrow$ reste une "énergie renormalisée"
- $\rightsquigarrow$ il faut extraire l'énergie des vortex avec une très grande précision pour évaluer le reste

L'énergie renormalisée

Etant donnée une configuration de points dans le plan a_i, $d_i = 1$ et H solution de

$$-\Delta H = 2\pi \sum_i \delta_{a_i} - 1 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2.$$

On considère pour tout R une fonction troncature $\chi_R \in C_0^\infty(B_R)$ tq $0 \le \chi_R \le 1$ et $\chi_R \equiv 1$ dans B_{R-1}, $|\nabla \chi_R| \le 2$, et on définit

$$W(\{a_i\}, H) = \liminf_{R\to\infty} \frac{1}{|B_R|} \lim_{\alpha\to 0} \Big(\frac{1}{2} \int_{B_R \setminus \cup_i B(a_i,\alpha)} \chi_R |\nabla H|^2 + \sum_i \chi_R(a_i)(\pi \log \alpha + \gamma - \frac{1}{4} \log m) \Big)$$

cf énergie renormalisée de Bethuel-Brezis-Hélein pour nombre fini de vortex, ou cf w_n

$$\text{“}W(\{a_i\}) = \|2\pi \sum_i \delta_{a_i} - 1\|^2_{H^{-1}}\text{”}$$

$\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des $(\{a_i\}, H)$ avec $-\Delta H = 2\pi \sum_i \delta_{a_i} - 1$ sur $\mathbb{R}^2$

Théorème (Borne inférieure)

Soit ω le support de μ_*. Pour tout $(\psi_\varepsilon, A_\varepsilon)$, il existe une probabilité P sur $\mathcal{F}$ tq

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{m h_{\mathrm{ex}}|\omega|} G_1(\psi_\varepsilon, A_\varepsilon) \geq \int W(\{a_i\}, H)\, dP(\{a_i\}, H) \geq \inf_{a_i, H} W$$

et ainsi

$$G_\varepsilon(\psi_\varepsilon, A_\varepsilon) \geq \frac{h_{\mathrm{ex}}^2}{2} \int_\Omega |\nabla h_*|^2 + |h_* - 1|^2 + \frac{h_{\mathrm{ex}}}{2} \log \frac{1}{\varepsilon\sqrt{h_{\mathrm{ex}}}} \int_\Omega \mu_* + m h_{\mathrm{ex}}|\omega| \inf_{a_i, H} W + o(h_{\mathrm{ex}})$$

Borne inférieure optimale à $o(h_{\mathrm{ex}})$ près (=o(nombre de vortex))

Majoration

Théorème (Borne supérieure)

Supposons $h_{\mathrm{ex}} \ll \frac{1}{\varepsilon^2}$. *Pour* $\varepsilon < \varepsilon_0$, *il existe* $(\psi_\varepsilon, A_\varepsilon)$ *tq*

$$G_\varepsilon(\psi_\varepsilon, A_\varepsilon) \leq \frac{h_{\mathrm{ex}}^2}{2} \int_\Omega |\nabla h_*|^2 + |h_* - 1|^2 + \frac{h_{\mathrm{ex}}}{2} \log \frac{1}{\varepsilon\sqrt{h_{\mathrm{ex}}}} \int \mu_* + m h_{\mathrm{ex}} |\omega| \inf_{a_i, H} W + o(h_{\mathrm{ex}})$$

Corollaire

"Pour des minimiseurs de G_ε*, les images des vortex par dilatation d'un facteur* $\sqrt{m h_{\mathrm{ex}}}$ *autour d'un point* x_ε *pris au hasard convergent p.s vers des configurations de points dans le plan qui "minimisent"* W*."*

Méthodes et difficultés

- pour dériver W on doit contrôler le nombre de vortex par unité de volume après blow-up
  $\rightsquigarrow$ il faut des minorations très précises de leur coût et pour un *nombre divergent*
- le coût renormalisé d'un vortex dans B_R tend vers $-\infty$ quand il s'approche de ∂B_R $\rightsquigarrow$ besoin de tronquer et faire $R \to \infty$
- la taille du domaine dilaté tend vers ∞. Grâce au théorème ergodique, on définit une sorte de notion de Γ-convergence moyennée qui marche sur les domaines infinis quand il y a invariance par translation de la densité d'énergie. Alternative à une méthode d'Alberti-Müller via mesures de Young.
  Pbl: notre densité d'énergie n'est pas positive
- cela fournit aussi une borne sur le nombre de vortex par unité de volume en moyenne autour de la plupart des points
- pour obtenir la majoration il faut se ramener à des configurations de points périodiques cad mq on peut approcher la minimisation de W par une minimisation sur des grands tores
- montrer aussi que la discontinuité sur $\partial\omega$ génère une énergie négligeable

Méthodes et difficultés

- pour dériver W on doit contrôler le nombre de vortex par unité de volume après blow-up
  $\rightsquigarrow$ il faut des minorations très précises de leur coût et pour un *nombre divergent*
- le coût renormalisé d'un vortex dans B_R tend vers $-\infty$ quand il s'approche de ∂B_R $\rightsquigarrow$ besoin de tronquer et faire $R \to \infty$
- la taille du domaine dilaté tend vers ∞. Grâce au théorème ergodique, on définit une sorte de notion de Γ-convergence moyennée qui marche sur les domaines infinis quand il y a invariance par translation de la densité d'énergie. Alternative à une méthode d'Alberti-Müller via mesures de Young.
  Pbl: notre densité d'énergie n'est pas positive
- cela fournit aussi une borne sur le nombre de vortex par unité de volume en moyenne autour de la plupart des points
- pour obtenir la majoration il faut se ramener à des configurations de points périodiques cad mq on peut approcher la minimisation de W par une minimisation sur des grands tores
- montrer aussi que la discontinuité sur $\partial\omega$ génère une énergie négligeable

Méthodes et difficultés

- pour dériver W on doit contrôler le nombre de vortex par unité de volume après blow-up
  $\rightsquigarrow$ il faut des minorations très précises de leur coût et pour un *nombre divergent*
- le coût renormalisé d'un vortex dans B_R tend vers $-\infty$ quand il s'approche de ∂B_R $\rightsquigarrow$ besoin de tronquer et faire $R \to \infty$
- la taille du domaine dilaté tend vers ∞. Grâce au théorème ergodique, on définit une sorte de notion de Γ-convergence moyennée qui marche sur les domaines infinis quand il y a invariance par translation de la densité d'énergie. Alternative à une méthode d'Alberti-Müller via mesures de Young.
  Pbl: notre densité d'énergie n'est pas positive
- cela fournit aussi une borne sur le nombre de vortex par unité de volume en moyenne autour de la plupart des points
- pour obtenir la majoration il faut se ramener à des configurations de points périodiques cad mq on peut approcher la minimisation de W par une minimisation sur des grands tores
- montrer aussi que la discontinuité sur $\partial\omega$ génère une énergie négligeable

Méthodes et difficultés

- pour dériver W on doit contrôler le nombre de vortex par unité de volume après blow-up
  $\leadsto$ il faut des minorations très précises de leur coût et pour un *nombre divergent*
- le coût renormalisé d'un vortex dans B_R tend vers $-\infty$ quand il s'approche de ∂B_R $\leadsto$ besoin de tronquer et faire $R \to \infty$
- la taille du domaine dilaté tend vers ∞. Grâce au théorème ergodique, on définit une sorte de notion de Γ-convergence moyennée qui marche sur les domaines infinis quand il y a invariance par translation de la densité d'énergie. Alternative à une méthode d'Alberti-Müller via mesures de Young.
  Pbl: notre densité d'énergie n'est pas positive
- cela fournit aussi une borne sur le nombre de vortex par unité de volume en moyenne autour de la plupart des points
- pour obtenir la majoration il faut se ramener à des configurations de points périodiques cad mq on peut approcher la minimisation de W par une minimisation sur des grands tores
- montrer aussi que la discontinuité sur $\partial\omega$ génère une énergie négligeable

Méthodes et difficultés

- pour dériver W on doit contrôler le nombre de vortex par unité de volume après blow-up
  $\rightsquigarrow$ il faut des minorations très précises de leur coût et pour un *nombre divergent*
- le coût renormalisé d'un vortex dans B_R tend vers $-\infty$ quand il s'approche de ∂B_R $\rightsquigarrow$ besoin de tronquer et faire $R \to \infty$
- la taille du domaine dilaté tend vers ∞. Grâce au théorème ergodique, on définit une sorte de notion de Γ-convergence moyennée qui marche sur les domaines infinis quand il y a invariance par translation de la densité d'énergie. Alternative à une méthode d'Alberti-Müller via mesures de Young.
  Pbl: notre densité d'énergie n'est pas positive
- cela fournit aussi une borne sur le nombre de vortex par unité de volume en moyenne autour de la plupart des points
- pour obtenir la majoration il faut se ramener à des configurations de points périodiques cad mq on peut approcher la minimisation de W par une minimisation sur des grands tores
- montrer aussi que la discontinuité sur $\partial\omega$ génère une énergie négligeable

Méthodes et difficultés

- pour dériver W on doit contrôler le nombre de vortex par unité de volume après blow-up
  $\rightsquigarrow$ il faut des minorations très précises de leur coût et pour un *nombre divergent*
- le coût renormalisé d'un vortex dans B_R tend vers $-\infty$ quand il s'approche de ∂B_R $\rightsquigarrow$ besoin de tronquer et faire $R \to \infty$
- la taille du domaine dilaté tend vers ∞. Grâce au théorème ergodique, on définit une sorte de notion de Γ-convergence moyennée qui marche sur les domaines infinis quand il y a invariance par translation de la densité d'énergie. Alternative à une méthode d'Alberti-Müller via mesures de Young.
  Pbl: notre densité d'énergie n'est pas positive
- cela fournit aussi une borne sur le nombre de vortex par unité de volume en moyenne autour de la plupart des points
- pour obtenir la majoration il faut se ramener à des configurations de points périodiques cad mq on peut approcher la minimisation de W par une minimisation sur des grands tores
- montrer aussi que la discontinuité sur $\partial\omega$ génère une énergie négligeable

Le résultat abstrait

θ_λ groupe à un paramètre d'actions sur les fonctions sur un espace topologique X(= action des translations)

Proposition

Soit f_ε *fonctions positives sur* X, *avec* f_ε Γ*-converge vers* f *sur* X, *au sens que si* $u_\varepsilon \to u$ *dans* X, $\liminf_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq f(u)$ + *une hyp de coercivité. Soit*

$$F_\varepsilon(u) = \frac{1}{|\omega_\varepsilon|}\int_{\omega_\varepsilon} f_\varepsilon(\theta_y u)\, dy$$

Si $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C$, *quitte à extraire* $u_\varepsilon \to u$ *dans* X *et il existe une probabilité* P *sur* X *supportée sur* $\mathcal{F}$= *l'ensemble des limites de* $\theta_{x_\varepsilon} u_\varepsilon$, *invariante par l'action de* θ, *tq*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \mathbf{E}^P\left(\lim_{R\to\infty}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} f(\theta_y u)dy\right)$$

Un exemple simple

Soit f_n des fonctions sur $\omega_n = n\omega$ tq

$$\frac{1}{|\omega_n|}\int_{\omega_n} |f_n|^2 \leq C.$$

Alors il existe x_n et f tq $f_n(x_n + \cdot) \rightharpoonup f$ et

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{|\omega_n|}\int_{\omega_n} |f_n|^2 \geq \limsup_{R\to\infty} \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} |f|^2$$

Vient de la relation plus forte

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{|\omega_n|}\int_{\omega_n} |f_n|^2 \geq \mathbf{E}^P \left(\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} |f|^2\right)$$

P_n processus stochastique obtenu en rendant tous les $f_n(x_n + \cdot)$ équiprobables, P_n tendue $\rightharpoonup P$.

Le résultat pour les configurations périodiques

- Soit H solution de
$$-\Delta H = \delta_0 - 1$$
sur un tore de volume 1 de forme quelconque.
- transformer de Fourier l'expression explicite de W dans ce cas pour en faire une fonction du réseau (régularisation de $\sum_{p\in\Lambda}\frac{1}{|p|^2}$)
- sa valeur se trouve liée à la fonction eta de Dedekind et aux séries de Eisenstein
- Minimiser W se ramène à minimiser la fonction zeta d'Epstein $\zeta(s) = \sum_{p\in\Lambda}\frac{1}{|p|^s}$, $s > 2$, parmi les réseaux Λ
- résultats de théorie des nombres (Cassels, Rankin, 60's) disent que c'est minimisé par le réseau triangulaire

Théorème

La fonction W restreinte aux configurations en réseau admet pour seul minimiseur le réseau triangulaire

$\rightsquigarrow$ W permet de distinguer entre les réseaux

Le résultat pour les configurations périodiques

- Soit H solution de
$$-\Delta H = \delta_0 - 1$$
sur un tore de volume 1 de forme quelconque.
- transformer de Fourier l'expression explicite de W dans ce cas pour en faire une fonction du réseau (régularisation de $\sum_{p\in\Lambda} \frac{1}{|p|^2}$)
- sa valeur se trouve liée à la fonction eta de Dedekind et aux séries de Eisenstein
- Minimiser W se ramène à minimiser la fonction zeta d'Epstein $\zeta(s) = \sum_{p\in\Lambda} \frac{1}{|p|^s}$, $s > 2$, parmi les réseaux Λ
- résultats de théorie des nombres (Cassels, Rankin, 60's) disent que c'est minimisé par le réseau triangulaire

Théorème

La fonction W restreinte aux configurations en réseau admet pour seul minimiseur le réseau triangulaire

$\rightsquigarrow$ W permet de distinguer entre les réseaux

Le résultat pour les configurations périodiques

- Soit H solution de
$$-\Delta H = \delta_0 - 1$$
sur un tore de volume 1 de forme quelconque.
- transformer de Fourier l'expression explicite de W dans ce cas pour en faire une fonction du réseau (régularisation de $\sum_{p\in\Lambda} \frac{1}{|p|^2}$)
- sa valeur se trouve liée à la fonction eta de Dedekind et aux séries de Eisenstein
- Minimiser W se ramène à minimiser la fonction zeta d'Epstein $\zeta(s) = \sum_{p\in\Lambda} \frac{1}{|p|^s}$, $s > 2$, parmi les réseaux Λ
- résultats de théorie des nombres (Cassels, Rankin, 60's) disent que c'est minimisé par le réseau triangulaire

Théorème

La fonction W restreinte aux configurations en réseau admet pour seul minimiseur le réseau triangulaire

$\rightsquigarrow$ W permet de distinguer entre les réseaux

Le résultat pour les configurations périodiques

- Soit H solution de
$$-\Delta H = \delta_0 - 1$$
sur un tore de volume 1 de forme quelconque.
- transformer de Fourier l'expression explicite de W dans ce cas pour en faire une fonction du réseau (régularisation de $\sum_{p\in\Lambda} \frac{1}{|p|^2}$)
- sa valeur se trouve liée à la fonction eta de Dedekind et aux séries de Eisenstein
- Minimiser W se ramène à minimiser la fonction zeta d'Epstein $\zeta(s) = \sum_{p\in\Lambda} \frac{1}{|p|^s}$, $s > 2$, parmi les réseaux Λ
- résultats de théorie des nombres (Cassels, Rankin, 60's) disent que c'est minimisé par le réseau triangulaire

Théorème

La fonction W restreinte aux configurations en réseau admet pour seul minimiseur le réseau triangulaire

$\rightsquigarrow$ W permet de distinguer entre les réseaux

Conclusion et perspectives

- on a caractérisé l'emplacement des vortex dans tous les régimes de champs appliqués $h_{\mathrm{ex}} \ll \frac{1}{\varepsilon^2}$ jusqu'à l'échelle où on voit des vortex individuels
- on a derivé un problème limite d'interaction de points dans le plan : l'énergie renormalisée W
- W est une interaction de type logarithmique $\rightsquigarrow$ longue portée!
- ce problème permet de distinguer entre les réseaux et sélectionne le triangulaire $\rightsquigarrow$ première justification rigoureuse du réseau triangulaire d'Abrikosov dans ce régime
- reste à étudier l'énergie renormalisée W sans supposer cette périodicité $\rightsquigarrow$ question de cristallisation...

Bibliographie

- E. Sandier, S.S, *Vortices in the Magnetic Ginzburg-Landau Model*, Progress in Nonlinear Differential Equations, Birkhaüser, 2007.
- E. Sandier, S.S, From the Ginzburg-Landau energy to lattice problems, en préparation.