

**Quelques inégalités de Korn  
unilatérales :  
application à un problème  
d'homogénéisation périodique  
avec inclusions**

Séminaire de mathématiques appliquées

Collège de France

22 Novembre 2013

Alain Damlamian ,

Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées CNRS UMR 8050

Université Paris-Est Créteil Val de Marne

# Introduction

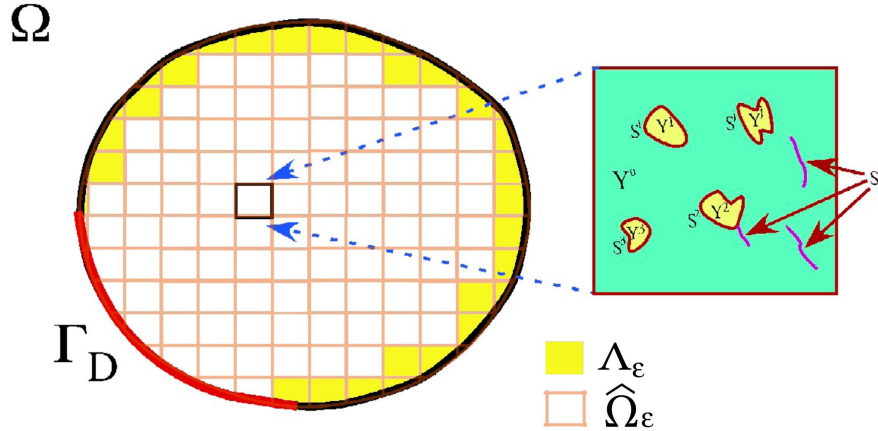


Figure 1. Domaine borné périodique avec fissures et inclusions

Dans un article en collaboration avec Doina Cioranescu et Julia Orlik, “Homogenization via unfolding in periodic elasticity with contact on closed and open cracks” (Asymptotic Analysis, 2013), nous avons étudié l’homogénéisation de problèmes avec contact statique pour l’élasticité linéarisée en présence de fissures et d’inclusions. Ceci peut être vu comme la recherche d’une fonction minimisant une certaine fonction convexe dont la coercivité n’est pas assurée à cause des déplacements rigides (linéarisés).

La première difficulté est d'obtenir des estimations uniformes avant tout passage à la limite de l'homogénéisation. En effet, il y a des résultats "classiques" d'existence de solutions pour les problèmes de contact unilatéral. Par exemple de multiples travaux de Gaetano Fichera, [5, 6, 7, 8] sont les premiers concernant l'existence de solutions sur ce sujet ([7] est une conférence au Séminaire Jean Leray au Collège de France en 1966-67). Voir aussi plus récemment les livres de

I. Hlaváček, J. Haslinger, J. Nečas et J. Lovíček [9] (1982),

N. Kikuchi et J.T. Oden [10] (1988),

Eck, Jarušek et Krbec [12] (2005).

Ces résultats donnent une condition d'existence de solutions, mais pas d'estimation uniforme. De plus, aucun de ces résultats ne semble s'appliquer de façon simple au cas de frottement pour des **inclusions**.

En approchant le problème via l'éclatement périodique, les éclatés des fonctions admissibles sont dans des espaces fixes. Et l'utilisation de certaines inégalités de Korn unilatérales adaptées aux inclusions permettent d'obtenir des estimations uniformes par rapport au paramètre d'homogénéisation.

**Plan :**

1. Brève présentation du problème (avant homogénéisation)
2. Inégalités de Korn unilatérales
3. Le résultat d'homogénéisation
4. Quelques références

## Notations

- le vecteur normal à une surface est dénoté  $\nu$ , la composante normale d'un champ de vecteurs  $v$  sur une surface est noté  $v_\nu$ , sa composante tangentielle  $v - v_\nu\nu$  est notée  $v_\tau$  ;
- $e(v)$  est le tenseur des déformations (gradient symétrisé) d'un champ de vecteur  $v$  ;
- $\mathcal{R}$  est le noyau de  $e$  dans des domaine connexes, c'est à dire l'espace de dimension finie des déplacements rigides (infinitésimaux) :

$$\mathcal{R} = \{x \mapsto a + Bx, a \text{ vecteur, } B \text{ matrice antisymétrique}\};$$

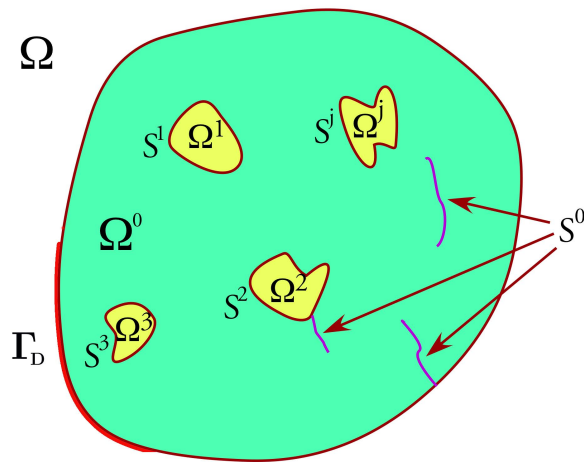
- dans les estimations,  $C$  est utilisé pour désigner une constante générique (indépendante de  $\varepsilon$ ).

# 1 Elasticité linéaire avec inclusions et frottement

Problème posé dans  $\mathbb{R}^3$ , mais les résultats sont valides en toute dimension  $N \geq 2$ .

$\Omega$  est un ouvert borné avec frontière Lipschitzienne,  $\Gamma_D$  un sous ensemble ouvert non vide de son bord  $\partial\Omega$  (où la condition de Dirichlet homogène est imposée).

Dans  $\Omega$  sont donnés un nombre fini  $m$  de sous ensembles fermés  $S^1, \dots, S^m$  qui représentent des fissures.  $S^0$  est la réunion disjointe d'un nombre fini de portions de surfaces Lipschitziennes, les autres  $S^j$  sont les bords supposés Lipschitziens de sous ouverts  $\Omega^j$ . On note  $\Omega^0$  l'ouvert  $\Omega \setminus (S^0 \cup \bar{\Omega}^j)$  et  $\Omega^*$  l'ouvert  $\Omega \setminus \bigcup_{j=0, \dots, m} S^j = \bigcup_{j=0, \dots, m} \Omega^j$ . Les  $\Omega_j, j = 1, \dots, m$  sont des inclusions. La normale  $\nu$  sur  $S^j$  sera considérée comme sortant de  $\Omega^j$ .



On considère classiquement une forme bilinéaire symétrique

$$\mathbf{a}(e(u), e(v)) \doteq \sum_{j=0}^m \int_{\Omega^j} \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta=1}^3 a_{\alpha\beta\gamma\delta}(x) e(u)_{\gamma\delta}(x) e(v)_{\alpha\beta}(x) dx,$$

où le tenseur  $a = (a_{\alpha\beta\gamma\delta})$  possède les propriétés usuelles de continuité et coercivité sur les tenseurs d'ordre deux symétriques:

$$a_{\alpha\beta\gamma\delta} = a_{\beta\alpha\gamma\delta} = a_{\alpha\beta\delta\gamma} = a_{\gamma\delta\alpha\beta}, \quad \max_{\alpha\beta\gamma\delta} |a_{\alpha\beta\gamma\delta}^\varepsilon|_{L^\infty(\Omega)} < \infty, \quad \exists \underline{a} > 0 \quad \underline{a} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta} \leq a_{\alpha\beta\gamma\delta}^\varepsilon \eta_{\alpha\beta} \eta_{\gamma\delta}.$$

Le tenseur  $\sigma_{\alpha\beta}(v) \doteq \sum_{\gamma, \delta=1}^3 a_{\alpha\beta\gamma\delta} e(v)_{\gamma\delta}$  est le tenseur des contraintes associé à  $v$  et est défini dans  $\Omega^*$  (à ne pas le confondre avec la mesure superficielle  $d\sigma$  !)

## Conditions de non-pénétration

Le convexe des déformations admissibles est défini comme

$$\mathcal{K} \doteq \left\{ v = (v^0, \dots, v^m) \mid v \in H^1(\Omega^0; \Gamma_D) \times \dots \times H^1(\Omega^m), \right. \\ \left. v_\nu^j - v_\nu^0 \leq g^j \text{ on } S^j \text{ and } [v_\nu^0]_{S^0} \leq g^0 \right\},$$

où les  $g^j$  sont des fonctions positives ou nulles mesurables sur  $S^j$ .

Pour  $v$  dans  $\mathcal{K}$ , les théorèmes de trace impliquent que le saut  $[v^0]_{S^0}$  est dans  $H^{1/2}(S^0)$ . De même, les sauts  $[v]_{S^j} \doteq v_{|S^j}^j - v_{|S^j}^0$  sont dans  $H^{1/2}(S^j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Il s'en suit que  $\mathcal{K}$  est fermé dans  $H^1(\Omega^0; \Gamma_D) \times \dots \times H^1(\Omega^m)$ .

Pourquoi  $g^j \geq 0$  ? Le problème provient en fait de la discrétisation en temps du problème d'évolution. Les fonctions  $g^0$  et  $g^j$  sont donc les mesures des ouverture des fissures (rapportées à la configuration de référence) à l'instant discret considéré et les conditions correspondantes sont celles de **non pénétration**. Dans le cas de contact effectif, ces fonctions sont nulles. Dans ce problème, on supposera  $g^j \in L^1(S^j)$  pour  $j = 0, \dots, m$  (ce qui correspond à une condition de volume fini des fissures).



## Conditions de frottement

Pour modéliser le frottement, on utilise une famille de fonctions convexes non négatives  $\Psi^j$ ,  $0 \leq j \leq m$ .

$\Psi^0$  est supposée semi-continue inférieurement sur  $H^{1/2}(S^0)$ .

Pour  $j = 1, \dots, m$ ,  $\Psi^j$  continue sur  $H^{1/2}(S^j)$  et satisfait

$$\Psi^j(w) \geq \kappa^j |w_\tau|_{L^1(S^j)}, \text{ où } \kappa^j \text{ est } \geq 0. \quad (1.1)$$

Dans le cas de la condition de friction de Tresca, les fonctions  $\Psi^j$  ont la forme explicite suivante

$$\Psi^j(w) \doteq \int_{S^j} G^j(x) |w_\tau(x)| d\sigma(x), \quad (1.2)$$

avec  $G^j$  minorée par  $\kappa^j$  for  $j = 1 \dots, m$ .

## Le problème

**Problème  $\mathcal{P}$ :** Etant données  $f = (f^0, \dots, f^m)$  dans  $L^2(\Omega)$  trouver un minimiseur dans  $\mathcal{K}$  de la fonctionnelle

$$\mathcal{E}(v) \doteq \frac{1}{2} \mathbf{a}(e(v), e(v)) + \sum_{j=0}^m \Psi^j([v]_{S^j}) - \int_{\Omega^*} f v \, dx. \quad (1.3)$$

La formulation “**Equation variationnelle**” du problème s’écrit:

**Problem  $\mathcal{P}'$ :** Trouver  $u \in \mathcal{K}$  telle que pour tout  $v \in \mathcal{K}$ ,

$$\mathbf{a}(e(u), e(v - u)) + \sum_{j=0}^m (\Psi^j([v]_{S^j}) - \Psi^j([u]_{S^j})) \geq \int_{\Omega^*} f(v - u) \, dx. \quad (1.4)$$

**Sa formulation forte:**

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ in } \mathcal{K} \text{ telle que} \\ -\operatorname{div} \sigma(u) = f \text{ in } \Omega^*, \\ \sigma(u)(\nu) \in \partial \Psi^j([u]_{S^j}) \text{ on } S^j \text{ for } j = 0, \dots, m, \end{cases} \quad (1.5)$$

où  $\partial \Psi^j$  est le sous-différentiel de  $\Psi^j$  (pris au sens de  $L^2(S^j)$ ).

Dans le cas du frottement de Tresca, on peut expliciter la dernière condition.

Il existe une fonction mesurable  $\lambda^j$  sur  $S^j$  telle que

$$\begin{aligned} [u_\tau(x)] + \lambda(x)\sigma(\nu)(x)_\tau &= 0 \quad \text{p.p. sur } S^j \text{ avec} \\ \lambda(x) &\geq 0, \quad G^j(x) - |\sigma(\nu)(x)_\tau| \geq 0 \quad \text{et} \\ \lambda(x) (G^j(x) - |\sigma(\nu)(x)_\tau|) &= 0 \quad \text{p.p. sur } S^j. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Cf. Kikuchi-Oden [10] section 10.3 pour une présentation détaillée des conditions de Tresca.

Pour établir l'existence d'une solution à ce problème on se propose d'utiliser une suite minimisante pour laquelle il y aura besoin d'estimations.

C'est ici qu'interviennent les inégalités de Korn.

D'abord, on contrôlera la norme  $H^1(\Omega^0)$  du déplacement  $u^0$  dans  $\Omega^0$  par la norme  $L^2(\Omega^0)$  de sa déformation  $e(u^0)$  grâce à la présence de la condition de Dirichlet sur  $\Gamma_D$ . Ceci nécessite une inégalité de type Korn-Dirichlet dans des domaines avec fissures ouvertes.

Ayant cette estimation, on contrôle la trace de  $u^0$  sur les fissures fermées  $S^j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , ce qui par la définition de  $\mathcal{K}$  donne une estimation par au dessus des traces normales des  $u^j$ .

Par suite, on a besoin d'une inégalité de Korn unilatérale pour les ouverts  $\Omega^j$ .

Nous en avons trouvées plusieurs!

Elles sont le sujet du paragraphe suivant.

## 2

# Inégalités de Korn

On se place dans  $\mathbb{R}^3$  pour simplifier la présentation (mais il n'y a pas de difficultés autres que de notations pour la dimension  $N$ ...)

Le noyau de l'opérateur de déformation (gradient symétrisé)  $e$  dans un ouvert connexe est constitué des déplacements rigides (linéarisés).

$$\mathcal{R} \doteq \{x \mapsto v_{a,b}(x) = a + b \wedge x; a \text{ and } b \in \mathbb{R}^3\}. \quad (2.1)$$

**Définition 2.1.** *Un ouvert borné  $O$  est un **domaine de Korn** s'il satisfait la seconde inégalité de Korn, c'est à dire s'il existe un constante  $C_K$  telle que*

$$\forall v \in H^1(O), \quad |v|_{H^1(O)} \leq C_K (|v|_{L^2(O)} + |e(v)|_{L^2(O)}). \quad (2.2)$$

En 1962 Gobert ([1]) a donné la toute première démonstration qu'un ouvert borné connexe de bord Lipschitz est un ouvert de Korn. Voir aussi le livre [2] de Oleinik, Shamaev et Yosifian, l'article [3] de Ciarlet et Ciarlet.

Il est évident que la réunion d'un nombre fini de domaines de Korn est encore un domaine de Korn. On remarque que c'est le cas d'ouverts comme  $\Omega_0$ , pourvu que les fissures, qui sont Lipschitz, ne soient pas tangentes au bord de  $\Omega$  lui-même Lipschitz (hypothèse qui sera faite systématiquement).

**Définition 2.2.** *Un ouvert borné et connexe  $O$  est un domaine de **Korn-Wirtinger** si  $y$  est satisfaite l'inégalité de Korn suivante (analogue à l'inégalité de Poincaré-Wirtinger pour le cas scalaire):*

*il existe une constante  $C_{KW}$  telle que pour tout  $v \in H^1(O)$  il existe un élément  $r(v) \in \mathcal{R}$  avec*

$$|v - r(v)|_{H^1(O)} \leq C_{KW}|e(v)|_{L^2(O)}. \quad (2.3)$$

*L'application  $v \mapsto r(v)$  peut être choisie linéaire continue sur  $H^1(O)$ .*

**Remarque 2.3.** *Il est facile de voir que dans un domaine de Korn-Wirtinger, l'inégalité de Poincaré-Wirtinger est satisfaite (il suffit de considérer un champ de vecteur ayant une seule composante non nulle). La réciproque semble une problème ouvert.<sup>1</sup>*

Exemples de domaines de Korn-Wirtinger :

**Proposition 2.4.** *Si  $O$  est un domaine de Korn **connexe** et si l'injection de  $H^1(O)$  dans  $L^2(O)$  est **compacte**, alors  $O$  est un domaine de Korn-Wirtinger. C'est le cas en particulier de tout ouvert borné connexe et à bord Lipschitz.*

La démonstration par l'absurde est classique.

**Proposition 2.5.** *La réunion de deux domaines de Korn-Wirtinger d'intersection non vide est un domaine de Korn-Wirtinger. Il en est de même de deux domaines de Korn-Wirtinger dont les bords ont une intersection de mesure superficielle non nulle.*

---

<sup>1</sup> Georges Griso m'a indiqué après cette conférence (et je l'en remercie) que la réciproque est conséquence de la démonstration du Théorème 2.3 de son article "Decompositions of displacements of thin structures" (J. Math. Pures Appl. 89 (2008) 199–223).

## 2.1 Une inégalité de Korn-Poincaré pour $\Omega^0$

Le domaine  $\Omega^0$ , est connexe mais n'est pas Lipschitz (ce qui nécessite qu'il soit d'un seul coté de son bord). Toutefois, les hypothèses sont telles que  $\Omega^0$  est une réunion finie de domaines Lipschitz. La compacité de  $H^1$  dans  $L^2$  est aussi satisfaite. Il est donc un domaine de Korn-Wirtinger.

**Proposition 2.6.** *Soit  $O$  un domaine de Korn-Wirtinger et  $\Gamma_D$  une partie ouverte non vide de son bord  $\partial O$  qui soit Lipschitz . Il existe alors une constante  $C$  telle que*

$$\forall v \in H^1(O) \text{ avec } v = 0 \text{ sur } \Gamma_D, \quad |v|_{H^1(O)} \leq C|e(v)|_{L^2(O)}. \quad (2.4)$$

*Démonstration.* Par (2.3),  $|v - r(v)|_{H^1(O)} \leq C_{KW}|e(v)|_{L^2(O)}$ . Par suite, le théorème de trace implique  $|v - r(v)|_{L^2(\Gamma_D)} \leq C'|e(v)|_{L^2(O)}$  et comme  $v \equiv 0$  sur  $\Gamma_D$

$$|r(v)|_{L^2(\Gamma_D)} \leq C'|e(v)|_{L^2(O)}.$$

Comme  $\mathcal{R}$  est de dimension finie, on en déduit

$$|r(v)|_{H^1(\Omega)} \leq C''|e(v)|_{L^2(O)}.$$

On conclut en réutilisant (2.3). □

## 2.2 Inégalités de Korn unilatérales pour les inclusions $\Omega^j$

Pour construire des inégalités de Korn, on passe par l'intermédiaire de semi-normes et normes sur  $\mathcal{R}$  qui ont de bonnes propriétés par rapport à la norme  $H^1$ .

On commence par une remarque triviale concernant les déplacements rigides.

Tout déplacement rigide  $r \in \mathcal{R}$  est de divergence nulle. Par le théorème de Stokes, pour tout ouvert  $U$  de bord Lipschitzien dans  $\mathbb{R}^3$  on a donc  $\int_{\partial U} r_\nu d\sigma = 0$ . Par suite,

$$|r_\nu|_{L^1(\partial U)} = 2|(r_\nu)^+|_{L^1(\partial U)},$$

ce qui montre que  $|(r_\nu)^+|_{L^1(\partial U)}$  est une semi-norme sur  $\mathcal{R}$ .

On est amené à distinguer deux types d'inclusions.

**Définition 2.7.** *Un domaine bloqué est un ouvert connexe borné à bord Lipschitz pour lequel le seul déplacement rigide tangent à son bord est nul.*

En utilisant l'application exponentielle, on voit qu'un domaine est bloqué si et seulement si son groupe d'isométries est discret.

Les seuls domaines non bloqués (dans  $\mathbb{R}^3$ ) sont donc les boules sphériques, les zones entre deux sphères concentriques (cas du groupe d'isométries  $SO_3$ ), les ouverts de révolutions autour d'un axe (cas du groupe d'isométries des rotations autour de cet axe). On notera  $\mathcal{R}_O$  le sous-espace de  $\mathcal{R}$  constitué des déplacements rigides tangents à  $\partial O$ .



Le bord d'un domaine bloqué ne peut donc pas être globalement de révolution. S'il n'est pas connexe, il peut aussi contenir des composantes connexes qui ne sont pas de révolution ou des unions de composantes connexes qui ne sont pas globalement de révolution. On notera  $\Sigma(O)$  toute union de composantes connexes du bord du domaine bloqué  $O$  qui n'est pas globalement de révolution (on peut en fait voir que  $\Sigma(O)$  est lui-même le bord d'un ouvert qui n'est pas de révolution).

### Notations: Moments

Soit  $\omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  ou d'une surface Lipschitzienne dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $z$  un point et  $\mathbf{d}$  un vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^3$ . Pour  $\varphi \in L^1(\omega)$ , on note  $\mathcal{M}_\omega^z(\varphi)$  le moment de  $\varphi$  par rapport au point  $z$ , et  $\mathcal{M}_\omega^{z,\mathbf{d}}(\varphi)$  son moment par rapport à l'axe de direction  $\mathbf{d}$  passant par  $z$ :

$$\mathcal{M}_\omega^z(\varphi) = \int_\omega (x - z) \wedge \varphi(x), \quad \mathcal{M}_\omega^{z,\mathbf{d}}(\varphi) = \int_\omega \mathbf{d} \cdot ((x - z) \wedge \varphi(x)).$$

Dans le cas où  $\omega$  est un ouvert d'une sphère de centre  $z$  ce moment est majoré (à une constante près) par  $\|\varphi_\tau\|_{L^1(\omega)}$ . Dans le cas où  $\omega$  est un ouvert d'une surface de révolution d'axe passant par  $z$  et de vecteur directeur  $\mathbf{d}$ , ce moment est majoré (à une constante près) par  $\|\mathbf{d} \wedge \varphi_\tau\|_{L^1(\omega)}$ .

On peut également choisir une mesure autre que la mesure de Lebesgue sur  $\omega$  pour définir les moments. Pour la suite, on aura besoin que cette mesure opère continument sur  $H^1(\mathbb{R}^N)$ .

**Lemme 2.8.** (Normes et semi-normes sur  $\mathcal{R}$ )

**Domaines bloqués.** *Si  $O$  est un domaine bloqué et  $\Sigma(O)$  une union de composantes connexes du bord de  $O$  qui n'est pas globalement de révolution, alors*

$$r \mapsto \|r\|_l \doteq |(r_\nu)^+|_{L^1(\Sigma(O))} \text{ est une norme sur } \mathcal{R}. \quad (2.5)$$

**Cas de symétrie cylindrique.**

*Soient  $O$  un ouvert de révolution autour d'un axe contenant l'origine et de vecteur directeur unitaire  $\mathbf{d}$ ,  $\Sigma$  une composante connexe Lipschitzienne de son bord et  $\omega$  un ouvert borné non vide de  $\mathbb{R}^3$  ou un ouvert relatif borné non vide d'une surface Lipschitzienne dans  $\mathbb{R}^3$ . Alors*

$$r \mapsto \|r\| \doteq |\mathcal{M}_\omega^{\mathbf{d}}(r1_\omega)| + |(r_\nu)^+|_{L^1(\Sigma)} \text{ est une norme (équivalente) sur } \mathcal{R}. \quad (2.6)$$

*De plus, il existe une constante  $C$  et pour chaque  $r$  dans  $\mathcal{R}$ , un scalaire  $\ell(r)$  de  $\mathbb{R}$  tels que*

$$|r - \ell(r) \mathbf{d} \wedge Id|_{\mathcal{R}} \leq C |(r_\nu)^+|_{L^1(\Sigma)}. \quad (2.7)$$

**Cas de symétrie sphérique.**

*Soient  $\Sigma$  un sphère centrée à l'origine et  $\omega$  un ouvert borné non vide de  $\mathbb{R}^3$  ou un ouvert relatif borné non vide d'une surface Lipschitzienne dans  $\mathbb{R}^3$ . Alors,*

$$r \mapsto \|r\| \doteq |\mathcal{M}_\omega(r1_\omega)| + |(r_\nu)^+|_{L^1(\Sigma)} \text{ est une norme (équivalente) sur } \mathcal{R}. \quad (2.8)$$

*De plus, il existe une constante  $C$  et pour chaque  $r$  dans  $\mathcal{R}$ , un vecteur  $b(r)$  de  $\mathbb{R}^3$  tels que*

$$|r - b(r) \wedge Id|_{\mathcal{R}} \leq C |(r_\nu)^+|_{L^1(\Sigma)}. \quad (2.9)$$

*Enfin, les applications  $\ell$  et  $b$  peuvent être choisies linéaires.*

*Démonstration.*

Chaque composante connexe du bord de  $O$  est le bord d'un domaine  $U$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Donc  $\|\cdot\|_l$  est une semi norme sur  $\mathcal{R}$  comme somme de semi-normes. Par ailleurs,  $\|r\|_l = 0$  implique que  $r|_{\Sigma(O)}$  est tangent sur chaque composante connexe de  $\Sigma(O)$ . Si  $\Sigma(O)$  n'est pas globalement de révolution, ceci implique que  $r$  est nul et donc  $\|\cdot\|_l$  est une norme.

Si  $\Sigma$  est une sphère de centre l'origine et  $\|r\|_l = 0$ , ceci signifie que  $r$  est tangent à  $\Sigma$ . Il existe donc  $b \in \mathbb{R}^3$  avec  $r(x) = b \wedge x$ . La condition de moment nul sur  $\omega$  implique que  $b$  est nul. Donc  $\|\cdot\|_l$  est une norme sur  $\mathcal{R}$ .

Un raisonnement analogue s'applique dans le cas de symétrie cylindrique.

Les deux dernières assertions correspondent au fait que  $\|r\|_l = 0$  est une norme sur tout supplémentaire de  $\mathcal{R}_O$  dans  $\mathcal{R}$ . □

**Le lemme précédent fournit une famille d'inégalités de Korn unilatérales.**

**Proposition 2.9** (Cas des domaines bloqués). *Soit  $O$  un domaine bloqué et  $\Sigma(O)$  une union de composantes connexes du bord de  $O$  qui n'est pas globalement de révolution. Il existe alors une constante  $C_1$  telle que*

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad |v|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 \left( |e(v)|_{L^2(\Omega)} + |(v_\nu)^+|_{L^1(\Sigma(O))} \right). \quad (2.10)$$

**Proposition 2.10** (cas de bord sphérique). *Soit  $O$  un domaine de Korn-Wirtinger dont le bord a une composante connexe sphérique  $\Sigma$  centrée à l'origine. Il existe une constante  $C_3$  et une application linéaire continue  $\mathbf{b} : H^1(O) \rightarrow \mathbb{R}^3$  telles que pour tout  $v$  in  $H^1(O)$*

$$|v - \mathbf{b}(v) \wedge Id|_{H^1(O)} \leq C_2(|e(v)|_{L^2(O)} + |(v_\nu)^+|_{L^1(\Sigma)}). \quad (2.11)$$

*Si de plus  $\omega$  est un ouvert relatif non vide d'une surface Lipschitzienne incluse dans  $\overline{O}$  (ou un sous-ouvert non vide de  $O$ ) il existe alors une constante  $C_2$  telle que*

$$\forall v \in H^1(O), \quad |v|_{H^1(O)} \leq C_3 \left( |e(v)|_{L^2(O)} + |(v_\nu)^+|_{L^1(\Sigma)} + |\mathcal{M}_\omega(v)| \right). \quad (2.12)$$

**Proposition 2.11** (cas de bord de révolution cylindrique). *Soit  $O$  est un domaine de Korn-Wirtinger dont le bord a une composante connexe  $\Sigma$  Lipschitzienne de révolution autour d'un axe contenant l'origine et de vecteur directeur unitaire  $\mathbf{d}$  (mais non sphérique). Il existe une constante  $C_4$  et une forme linéaire continue  $\boldsymbol{\ell} : H^1(O) \rightarrow \mathbb{R}$  telles que*

$$|v - \boldsymbol{\ell}(v)\mathbf{d} \wedge Id|_{H^1(O)} \leq C_4(|e(v)|_{L^2(O)} + |(v_\nu)^+|_{L^1(\Sigma)}). \quad (2.13)$$

*Si de plus  $\omega$  un ouvert relatif non vide d'une surface Lipschitzienne incluse dans  $\overline{O}$  (ou un sous-ouvert non vide de  $O$ ) il existe alors une constante  $C_2$  telle que*

$$\forall v \in H^1(O), \quad |v|_{H^1(O)} \leq C_5 \left( |e(v)|_{L^2(O)} + |(v_\nu)^+|_{L^1(\Sigma)} + |\mathcal{M}_\omega^{\mathbf{d}}(v)| \right). \quad (2.14)$$

*Démonstration de la proposition 2.10.*

L'ouvert  $O$  est un domaine de Korn-Wirtinger et une composante connexe de son bord est la sphère  $\Sigma$ . Pour  $v$  dans  $H^1(O)$ , par (2.3), il existe un déplacement rigide  $r(v)$  tel que

$$|v - r(v)|_{H^1(O)} \leq C_{KW} |e(v)|_{L^2(O)}. \quad (2.15)$$

Par le théorème de trace sur  $\Sigma$  et  $\omega$ , on a  $|v - r(v)|_{L^2(\Sigma)} \leq C' |e(v)|_{L^2(O)}$ , ce qui implique

$$\begin{cases} |r(v)_\nu^+|_{L^1(\Sigma)} \leq |v_\nu^+|_{L^1(\Sigma)} + C'' |e(v)|_{L^2(O)} \\ |\mathcal{M}_\omega(r(v)1_\omega)| \leq |\mathcal{M}_\omega(v1_\omega)| + C'' |e(v)|_{L^2(O)} \end{cases}$$

$\Sigma$  étant une sphère elle est le bord d'une boule. Par (2.8) on en déduit l'estimation

$$\|r(v)\| \leq C''' \left( |e(v)|_{L^2(O)} + |(v_\nu)^+|_{L^1(\partial O)} + |\mathcal{M}_\omega(v)| \right)$$

et on conclut en utilisant à nouveau (2.15). □

La démonstration des autres inégalités est similaire en utilisant les inégalités (2.5), (2.9) et (2.7).

### 3

## Retour au problème $\mathcal{P}$

**Unicité:** En additionnant les inéquations variationnelles  $\mathcal{P}'$  pour deux solutions  $u$  et  $\hat{u}$ , on obtient immédiatement  $\mathbf{a}(e(u - \hat{u}), e(u - \hat{u})) \leq 0$ . L'inégalité (2.4), implique alors  $u^0 - \hat{u}^0 = 0$  et  $u^j - \hat{u}^j \in \mathcal{R}$  pour  $j = 1, \dots, m$  (les  $\Omega^j$  sont tous connexes). L'unicité pour  $u^j$  dépend alors de la stricte convexité de la fonction  $\Psi^j$  et de la saturation du contact (voir remarque page 26).

### Existence

Il s'agit de contrôler la partie linéaire  $\int_{\Omega^*} f(x)v(x) dx$  de l'énergie  $\mathcal{E}$  par la partie convexe  $\frac{1}{2} \mathbf{a}(e(v), e(v)) + \sum_{j=0}^m \Psi^j([v]_{S^j})$  et d'en déduire le fait que les suites minimisantes sont bornées dans  $\mathcal{K}$  c'est à dire, dans  $\prod_{j=0}^m H^1(\Omega^j)$ .

Pour  $\int_{\Omega^0} f^0(x)v^0(x) dx$  on utilise (2.4). On contrôle donc  $|u^0|_{H^1(\Omega^0)}$  par  $|e(u^0)|_{L^2(\Omega^0)}$ , ce qui permet aussi de contrôler les traces de  $u^0$  sur les  $S^j$ .

$$|u^0|_{H^1(\Omega^0)} \lesssim |e(u^0)|_{L^2(\Omega^0)}$$

Pour chaque  $u^j$  on utilise alors la définition de  $\mathcal{K}$  pour contrôler

$$|(u^j_{|_{S^j}})^+|_{L^1(S^j)} \lesssim |g^j|_{L^1(S^j)} + |e(u^0)|_{L^2(\Omega^0)}.$$

Si  $S^j$  n'est pas de révolution,  $\Omega^j$  est bloqué et en utilisant (2.10), on contrôle  $|u^j|_{H^1}$  de la manière suivante:

$$|u^j|_{H^1(\Omega^j)} \lesssim |e(u^0)|_{L^2(\Omega^0)} + |e(u^j)|_{L^2(\Omega^j)} + |g^j|_{L^1(S^j)}.$$

Si  $S^j$  est de révolution, on peut utiliser (2.12) ou (2.14) en majorant le moment  $\mathcal{M}_{S^j}(u^j)$  par  $|u^j_\tau|_{L^1(S^j)}$ , c'est à dire

$$|u^j|_{H^1(\Omega^j)} \lesssim |e(u^j)|_{L^2(\Omega^j)} + |(u^j_\nu)^+|_{L^1(S^j)} + |u^j_\tau|_{L^1(S^j)}$$

Comme par hypothèse sur  $\Psi^j$ ,  $|u^j_\tau|_{L^1(S^j)} \leq |u^j_0|_{L^1(S^j)} + \frac{1}{\kappa^j} \Psi^j([u]_{S^j})$ , on a donc

$$|u^j|_{H^1(\Omega^j)} \lesssim |e(u^0)|_{L^2(\Omega^0)} + |e(u^j)|_{L^2(\Omega^j)} + |g^j|_{L^1(S^j)} + \frac{1}{\kappa^j} \Psi^j([u]_{S^j}). \quad (3.1)$$

On voit alors qu'il faut faire une hypothèse supplémentaire sur  $f^j$  du type

$$|f^j|_{L^2(\Omega^j)} \text{ "suffisamment petit" par rapport à } \kappa^j.$$

En fait, si on n'a pas besoin de contrôler la norme  $|u^j|_{L^2(\Omega^j)}$  complète mais seulement  $\int_{\Omega^j} f^j u^j dx$ , on peut faire mieux en utilisant les inégalités plus précises (2.11) ou (2.13).

Pour le cas où  $S^j$  est une surface de révolution cylindrique dont l'axe passe par l'origine, on utilise

$$\begin{aligned} |u^j - \boldsymbol{\ell}(u^j)\mathbf{d} \wedge Id|_{H^1(\Omega^j)} &\lesssim |e(u^j)|_{L^2(\Omega^j)} + |(u^j)_\nu^+|_{L^1(S^j)} \\ &\lesssim |e(u^0)|_{L^2(\Omega^0)} + |e(u^j)|_{L^2(\Omega^j)} + |g^j|_{L^1(S^j)}. \end{aligned}$$

On écrit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^j} f^j(x) u^j(x) dx &= \int_{\Omega^j} f^j(x) (u^j(x) - \boldsymbol{\ell}(u^j)\mathbf{d} \wedge x) dx + \boldsymbol{\ell}(u^j) \left\langle \mathbf{d}, \int_{\Omega^j} x \wedge f^j(x) \right\rangle dx \quad \text{d'où} \\ \int_{\Omega^j} f^j(x) u^j(x) dx &\lesssim |f^j|_{L^2(\Omega^j)} (|e(u^0)|_{L^2(\Omega^0)} + |e(u^j)|_{L^2(\Omega^j)} + |g^j|_{L^1(S^j)}) + |\boldsymbol{\ell}(u^j)| |\mathcal{M}^j(f^j)|, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{M}^j(f^j) = \int_{\Omega^j} f^j(x) (\mathbf{d} \wedge x) dx$  est le moment de  $f^j$  par rapport à l'axe de  $S^j$ .

Il reste à utiliser la majoration  $|\boldsymbol{\ell}(u^j)| \lesssim |u^j|_{H^1(\Omega^j)}$  et l'estimation (3.1) à nouveau, i.e. :

$$|u^j|_{H^1(\Omega^j)} \lesssim |e(u^0)|_{L^2(\Omega^0)} + |e(u^j)|_{L^2(\Omega^j)} + |g^j|_{L^1(S^j)} + \frac{1}{\kappa^j} \Psi^j([u]_{S^j}).$$

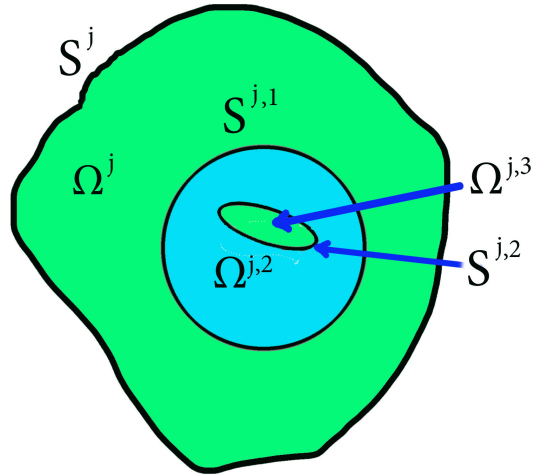
On voit alors que la condition sur  $f^j$  porte uniquement sur son moment:

$$|\mathcal{M}^j(f^j)| \text{ "suffisamment petit" par rapport à } \kappa^j.$$

Si  $\Psi^j$  n'est pas coercive ( $\kappa^j = 0$ ), alors  $\mathcal{M}^j(f^j) = 0$  est encore suffisant.



On peut alors continuer, s'il y a des inclusions en gigogne:



Inclusions en gigogne

Si une interface de révolution est suivie d'une autre interface, la condition sur le moment correspondant ne suffit pas.

La règle du jeu est la suivante:

On descend dans l'arbre des interfaces de l'extérieur vers l'intérieur. On considère chaque interface que l'on rencontre.

Si *l'interface n'est pas de révolution*, aucune condition supplémentaire sur la densité de force dans l'inclusion qui suit (dont l'interface est la composante connexe extérieure du bord).

Si *l'interface est de révolution* et qu'elle est l'extrémité d'une branche, le moment de la densité de force dans l'inclusion correspondante par rapport au centre ou l'axe de de cette interface doit être assez petit (par rapport à la constante de coercivité de la fonction de Tresca  $\Psi$  correspondante). Si elle n'est pas l'extrémité d'une branche, la densité de force correspondante doit être elle même assez petite.

Avec ces hypothèses, on a le résultat suivant:

**Proposition 3.1.** *On suppose  $f$  dans  $L^2(\Omega)$ ,  $g^j$  in  $L^1(S^j)$  pour  $j = 1, \dots, m$  et on fait les hypothèses ci-dessus concernant les  $f^j$ . Il existe alors une solution  $u = (u^0, \dots, u^m)$  dans  $\mathcal{K}$  pour le problème  $\mathcal{P}'$ . L'unicité est garantie pour  $u^0$  et pour les  $u^j - r(u^j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ . De plus, il existe une estimation de  $|u^0|_{H^1(\Omega^j)}$  et de chaque  $|u^j - r(u^j)|_{H^1(\Omega^j)}$  par  $|f|_{L^2(\Omega)} \dots$*

**Remarque sur l'unicité:** Si le contact est saturé sur  $S^j$ , il y a unicité du  $u^j$  correspondant si  $S^j$  n'est pas de révolution. Dans le cas où  $S^j$  est de révolution, si de plus le saut de  $[u_\tau]_{S^j} \equiv 0$  sur un ensemble de mesure non nulle  $\omega$ , il y a aussi unicité du  $u^j$  correspondant.

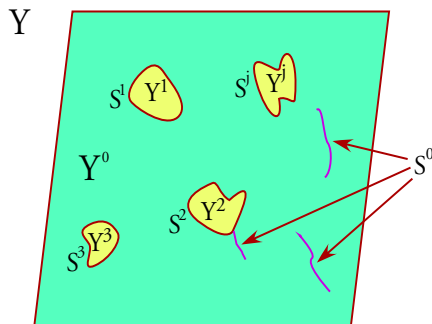
## 4

# Homogénéisation périodique

## 4.1 Géométrie du problème

On considère le problème avec une géométrie simple (sans inclusions en gigogne) dans  $\mathbb{R}^3$ .

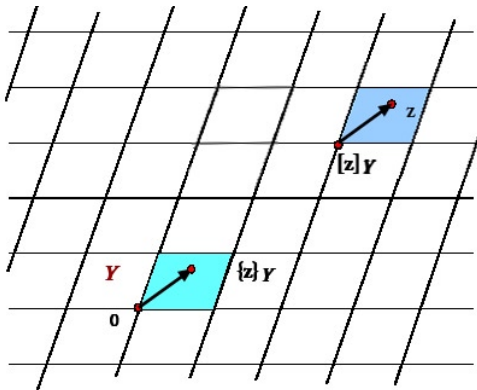
L'ensemble  $Y \subset \mathbb{R}^3$  est ensemble ayant la propriété de pavage pour un groupe discret à 3 générateurs (groupe des périodes), par exemple  $Y = (0, 1)^3$ ,  $Y^*$  est ce qu'il en reste lorsqu'on ôte les fissures  $Y$ . Pour simplifier, on suppose qu'une seule composante connexe  $Y^0$  de  $Y^*$  touche le bord de  $Y$ . Les autres composantes connexes de  $Y^*$ ,  $Y^0, \dots, Y^m$  sont en nombre fini  $m$ . Elles sont des inclusions de bord  $S^1, \dots, S^m$  supposées Lipschitziennes qui sont des composantes connexes du bord de  $Y^0$  (les fissures closes). Dans  $Y^0$  des fissures "ouvertes" peuvent aussi exister. Elles sont supposées être en nombre fini, chacune étant connexe Lipschitzienne. Au cas où elles rencontrent un  $S^j$ , elles ne lui sont pas tangentes. Leur union est dénotée  $S^0$ .



Exemple de cellule de référence  $Y$

On utilise la décomposition en partie entière et fractionnaire sur  $\mathbb{R}^3$ : (presque) tout point  $z \in \mathbb{R}^3$ , s'écrit

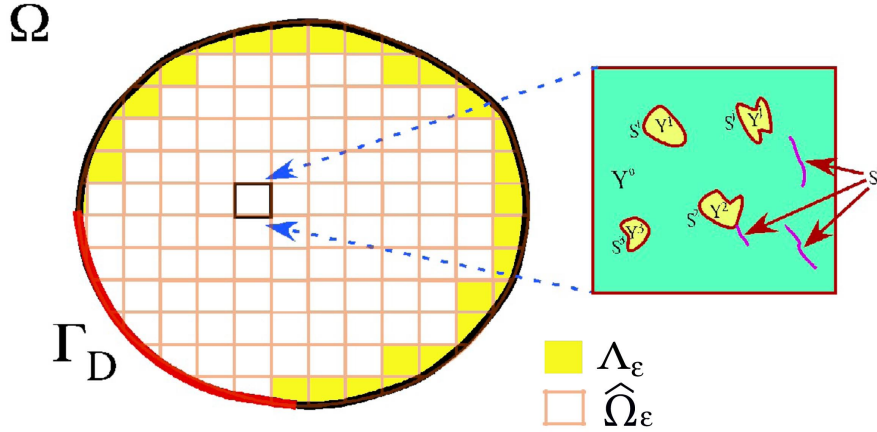
$$z = [z]_Y + \{z\}_Y.$$



Definition de  $[z]_Y$  et  $\{z\}_Y$

Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^3$  à frontière Lipschitzienne, et  $\Gamma_D$  une partie ouverte non vide de  $\partial\Omega$  ( $\Gamma_D$  frontière de Dirichlet, son complémentaire  $\Gamma_N$  est la frontière de Neumann).

Le sous-ensemble ouvert  $\widehat{\Omega}_\varepsilon$  est constitué des points  $x \in \Omega$  tels que la cellule de taille  $\varepsilon$  qui le contient  $(\varepsilon \left[ \frac{x}{\varepsilon} \right]_Y + \varepsilon Y)$  n'intersecte pas  $\Gamma_N$ . Enfin,  $\Lambda_\varepsilon = \Omega \setminus \widehat{\Omega}_\varepsilon$  est le sous-ensemble des points de  $\Omega$  dont la cellule intersecte  $\Gamma_N$ .



Pour  $j = 1, \dots, m$ , on définit les ensembles

$$\Omega_\varepsilon^j = \left\{ x \mid x \in \widehat{\Omega}_\varepsilon \text{ tel que } \left\{ \frac{x}{\varepsilon} \right\}_Y \in Y^j \right\}.$$

La frontière  $\partial\Omega_\varepsilon^j$  est l'ensemble des fissures fermées associées à  $S^j$ ,

$$\partial\Omega_\varepsilon^j \doteq S_\varepsilon^j = \left\{ x \mid x \in \widehat{\Omega}_\varepsilon \text{ tel que } \left\{ \frac{x}{\varepsilon} \right\}_Y \in S^j \right\}.$$

Pour  $j = 0$ , on pose

$$S_\varepsilon^0 = \left\{ x \mid x \in \widehat{\Omega}_\varepsilon \text{ tel que } \left\{ \frac{x}{\varepsilon} \right\}_Y \in S^0 \right\}$$

et

$$\Omega_\varepsilon^0 \doteq \Omega \setminus \left( \bigcup_{j=1, \dots, m} \overline{\Omega_\varepsilon^j} \cup S_\varepsilon^0 \right).$$

L'ensemble de toutes les fissures est  $S_\varepsilon^*$ ,

$$S_\varepsilon^* = \bigcup_{j=0, 1, \dots, m} S_\varepsilon^j.$$

Il n'y a pas de fissures dans  $\Lambda_\varepsilon$ .

Pour une fonction  $v$  définie sur  $\Omega_\varepsilon^*$  on utilisera la notation  $v^j$  pour sa restriction à  $\Omega_\varepsilon^j$  :

$$v^j \doteq v|_{\Omega_\varepsilon^j} \quad \text{pour } j = 0, \dots, m.$$

## 4.2 Le problème à $\varepsilon$ fixé

On se donne une forme bilinéaire symétrique :

$$\mathbf{a}^\varepsilon(e(u), e(v)) \doteq \sum_{j=0}^m \int_{\Omega_\varepsilon^j} \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta=1}^3 a_{\alpha\beta\gamma\delta}^\varepsilon(x) e(u)_{\gamma\delta}(x) e(v)_{\alpha\beta}(x) dx,$$

avec les conditions habituelles:

$$a_{\alpha\beta\gamma\delta}^\varepsilon = a_{\beta\alpha\gamma\delta}^\varepsilon = a_{\alpha\beta\delta\gamma}^\varepsilon = a_{\gamma\delta\alpha\beta}^\varepsilon, \quad \max_{\alpha\beta\gamma\delta} \|a_{\alpha\beta\gamma\delta}^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty, \quad \underline{a} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta} \leq a_{\alpha\beta\gamma\delta}^\varepsilon \eta_{\alpha\beta} \eta_{\gamma\delta}$$

Pour des fonctions non négatives  $g_\varepsilon^j$  données sur  $S_\varepsilon^j$ , soit  $\mathcal{K}^\varepsilon$  le convexe défini par

$$\mathcal{K}^\varepsilon \doteq \left\{ v = (v^0, \dots, v^m) \mid v \in H^1(\Omega_\varepsilon^0; \Gamma_D) \times \dots \times H^1(\Omega_\varepsilon^m), \right. \\ \left. v_\nu^j - v_\nu^0 \leq g_\varepsilon^j \text{ on } S^j \text{ and } [v_\nu^0]_{S^0} \leq g_\varepsilon^0 \right\}, \quad (4.1)$$

On considère aussi la famille de fonctions convexes à valeurs positives ou nulles  $\Psi_\varepsilon^j$ ,  $0 \leq j \leq m$ , où  $\Psi_\varepsilon^0$  est s.c.i. sur  $H^{1/2}(S_\varepsilon^0)$ , et où, pour  $j = 1, \dots, m$ ,  $\Psi_\varepsilon^j$  est continue sur  $H^{1/2}(S_\varepsilon^j)$  et satisfait

$$\Psi_\varepsilon^j(w) \geq M_\varepsilon^j |w|_{L^1(S_\varepsilon^j)}, \quad \text{où les réels } \kappa_\varepsilon^j \text{ sont positifs ou nuls.} \quad (4.2)$$

**Le problème  $\mathcal{P}_\varepsilon$ :** Etant donnés  $f_\varepsilon = (f_\varepsilon^0, \dots, f_\varepsilon^m)$  in  $L^2(\Omega_\varepsilon)$  trouver un minimiseur sur  $\mathcal{K}^\varepsilon$  de la fonctionnelle

$$\mathcal{E}_\varepsilon(v) \doteq \frac{1}{2} \mathbf{a}^\varepsilon(e(v), e(v)) + \sum_{j=0}^m \Psi_\varepsilon^j([v_\tau]_{S_\varepsilon^j}) - \int_{\Omega_\varepsilon^*} f_\varepsilon v \, dx. \quad (4.3)$$

Formulation sous forme d'inéquation variationnelle:

**Problème  $\mathcal{P}'_\varepsilon$ :** trouver  $u_\varepsilon \in \mathcal{K}^\varepsilon$  telle que pour tout  $v \in \mathcal{K}^\varepsilon$ ,

$$\mathbf{a}^\varepsilon(e(u_\varepsilon), e(v - u_\varepsilon)) + \sum_{j=0}^m (\Psi_\varepsilon^j([v_\tau]_{S_\varepsilon^j}) - \Psi_\varepsilon^j([u_{\varepsilon\tau}]_{S_\varepsilon^j})) \geq \int_{\Omega_\varepsilon^*} f_\varepsilon(v - u_\varepsilon) \, dx. \quad (4.4)$$

Pour  $\varepsilon$  fixé, le résultat précédent s'applique avec les hypothèses adéquates sur le second membre  $f$ .

Le problème d'homogénéisation est de trouver le système limite lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Comme les ouverts  $\Omega_\varepsilon^j$  et le convexe  $\mathcal{K}^\varepsilon$  varient (brutalement) avec  $\varepsilon$ , on utilise l'éclatement périodique qui a l'avantage (au prix du doublement de la dimension) de se retrouver dans des ouverts indépendants de  $\varepsilon$ . Les hypothèses sont plus faciles à énoncer sur les fonctions éclatées.<sup>2</sup> L'**opérateur d'éclatement** est défini par:

$$\mathcal{T}_\varepsilon \varphi(x, y) \doteq \varphi\left(\varepsilon \left[ \frac{x}{\varepsilon} \right]_Y + \varepsilon y\right), \text{ pour } (x, y) \in \widehat{\Omega}_\varepsilon \times Y, 0 \text{ ailleurs.}$$

Par exemple, si  $f$  est  $Y$ -périodique, l'éclatée de  $x \mapsto f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  est  $f(y) \dots$

---

<sup>2</sup>Dans [11], un problème similaire est étudié via la convergence à double échelle, mais avec une erreur dans les estimations.



Voici les hypothèses que l'on fait pour le passage à la limite.

- Hypothèses sur les  $g_\varepsilon^j$ : il existe des fonctions  $g^j$  dans  $L^1(S^j)$  telles que

$$g_\varepsilon^j(x) = \varepsilon g^j\left(\left\{\frac{x}{\varepsilon}\right\}\right) 1_{\widehat{\Omega}_\varepsilon}(x) \quad \text{pour } x \in S_\varepsilon^j,$$

- Hypothèse sur  $\Psi_\varepsilon^0$ : il existe une intégrande normale convexe positive  $\psi^0$  sur  $\Omega \times S^0 \times \mathbb{R}^N$  nulle en 0 telle que

$$\Psi_\varepsilon^0(w) \doteq \int_{\Omega \times S^0} \psi^0\left(x, y, \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{T}_\varepsilon(w)(x, y)\right) dx d\sigma(y).$$

- Pour  $j = 1, \dots, m$ , on suppose de façon précise que

$$\Psi_\varepsilon^j(w) = \Theta^j\left(\frac{1}{\varepsilon} w_\tau\right), \quad \text{où } \Theta^j(v) = \int_{\Omega \times S^j} G^j(x, y) |v| dx d\sigma(y),$$

les fonctions  $G^j$  étant positive et continues. Alors,  $\kappa^j \doteq \min G^j$ .

- Hypothèses sur le second membre. On suppose que la suite  $\{f_\varepsilon\}$  converge faiblement dans  $L^2(\Omega)$  vers  $F$ . On suppose de plus que les moments de  $\mathcal{T}_\varepsilon(f_\varepsilon^j)$  restent uniformément très petits par rapport à  $\kappa^j$  (essentiellement nuls) pour les  $S^j$  de révolution.
- Hypothèse sur le tenseur  $a^\varepsilon$ : on suppose qu'ils sont uniformément bornés et coercifs (sur les tenseurs symétriques) et qu'il existe un tenseur  $a^0$  tel que

$$\mathcal{T}_\varepsilon(a^\varepsilon) \rightarrow a^0 \quad \text{p.p dans } \Omega \times Y.$$

**Théoreme 4.1.** *Sous ces hypothèses, il existe une fonction  $\mathcal{E}^{hom}$  de Carathéodory sur  $\Omega \times M_3^S(\mathbb{R})$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et une fonction  $\sigma^{hom}$  de Carathéodory de  $\Omega \times M_3^S(\mathbb{R})$  à valeurs dans  $M_3^S(\mathbb{R})$  telle que la suite  $\{u_\varepsilon\}$  converge faiblement dans  $H^1(\Omega; \Gamma_D)$  vers l'unique minimiseur  $u^0$  sur  $H^1(\Omega; \Gamma_D)$  de la fonctionnelle convexe*

$$\int_{\Omega} \left( \mathcal{E}^{hom}(x, e(v)) - F v \right) dx. \quad (4.5)$$

*Le problème limite peut aussi être vu comme un problème de Leray-Lions*

$$\begin{cases} u^0 \in H^1(\Omega; \Gamma_D), \\ -\operatorname{div} \sigma^{hom}(x, e(u^0)) = F & \text{dans } \Omega \\ \sigma^{hom}(x, e(u^0))(\nu) = 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (4.6)$$

Les fonctions  $\mathcal{E}^{hom}$  et  $\sigma^{hom}$  sont obtenues à partir de problèmes posés dans la cellule  $Y^*$ .

### 4.3 Le problème cellulaire

Soit

$$\widehat{K} \doteq \{(v_0, \dots, v_m) \mid v_0 \in H_{per}^1(Y^0), M_{Y^0}(v_0) = 0, v_j \in H^1(Y^j), j \in \{1, \dots, m\}, \\ [v_0]_{\nu|_{S^0}} \leq g^0, (v_j - v_0)_{\nu|_{S^j}} \leq g^j\}.$$

Pour chaque tenseur symétrique  $\mathcal{U}$  et pour presque tout  $x \in \Omega$ , on notera  $\chi = (\chi^0(x, \cdot), \dots, \chi^m(x, \cdot))$  un minimiseur sur  $\widehat{K}$  de la fonctionnelle convexe

$$\frac{1}{2|Y|} \int_{Y^*} a^0(\mathcal{U} + e_y(W))(\mathcal{U} + e_y(W)) dy + \psi^0(x, [(W^0)_\tau]_{|S^0}) \\ + \sum_{j=1}^m \int_{S^j} G^j(x, y) |(W^j - W^0)_{\tau|_{S^j}}| d\sigma(y), \quad (4.7)$$

**Définition 4.2.** La fonction  $\mathcal{E}^{hom}(x, \mathcal{U})$  est la borne inférieure de la fonctionnelle ci-dessus.

Ce problème de minimisation admet au moins une solution avec unicité pour le tenseur de déformation (de façon analogue au cas du problème original). Ainsi, application  $\mathcal{U} \mapsto (e_y(\chi^0), \dots, e_y(\chi^m))$  est bien définie et elle a les propriétés suivantes:

**Proposition 4.3.** *L'application*

$$(x, y, \mathcal{U}) \mapsto \Xi(x, y, \mathcal{U}) \doteq (e_y(\chi^0), \dots, e_y(\chi^m)),$$

où  $\chi = (\chi^0(x, \cdot), \dots, \chi^m(x, \cdot))$  est un des minimiseurs ci-dessus est de Carathéodory sur  $\Omega^* \times M_3^S(\mathbb{R})$  à valeurs dans  $L^2(Y)$  muni de sa topologie faible.

**Définition 4.4.** *L'application  $\sigma^{hom}$  est définie par*

$$\sigma^{hom}(x, \mathcal{U}) \doteq \frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} a^0(x, y)(\mathcal{U} + \Xi(x, y, \mathcal{U})) dy. \quad (4.8)$$

Elle est par suite de Carathéodory sur  $\Omega \times M_3^S(\mathbb{R})$  à valeurs dans  $M_3^S(\mathbb{R})$ .

Les fonctions  $\sigma^{hom}$  et  $\mathcal{E}^{hom}$  sont liées:

**Proposition 4.5.** *La fonction  $\mathcal{E}^{hom}$  est de Carathéodory sur  $\Omega \times M_3^S(\mathbb{R})$ . Elle est strictement convexe, Gâteaux-différentiable par rapport à son second argument et sa dérivée est  $\sigma^{hom}(x, \mathcal{U})$ .*

## 4.4 Un résultat de correcteur

**Proposition 4.6.** *Il existe des fonctions  $\widehat{u}^0 \in L^2(\Omega, H_{per}^1(Y^0))$  et  $\widehat{u}^j \in L^2(\Omega, H^1(Y^j))$  telles que*

$$T_\varepsilon(e(u_\varepsilon))|_{\Omega \times Y^0} \rightarrow e(u^0) + e_y(\widehat{u}^0) \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega \times Y^0),$$

$$T_\varepsilon(e(u_\varepsilon))|_{\Omega \times Y^j} \rightarrow e_y(\widehat{u}^j) \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega \times Y^j) \text{ for } j = 1, \dots, m.$$

Dans la théorie de l'éclatement périodique (cf. [16] et [18]) cette convergence implique un résultat de correcteur sans hypothèse de régularité supplémentaire :

**Corollaire 4.7.** *Sous les hypothèses précédentes,*

$$\|e(u_\varepsilon) - e(u^0) - \mathcal{U}_\varepsilon(e_y(\widehat{u}^0))\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^0)} \rightarrow 0,$$

$$\|e(u_\varepsilon) - \mathcal{U}_\varepsilon(e_y(\widehat{u}^j))\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^j)} \rightarrow 0 \quad \text{pour } j = 1, \dots, m,$$

où  $\mathcal{U}_\varepsilon$  est l'opérateur de moyennisation, adjoint de  $\mathcal{T}_\varepsilon$  (ainsi que son inverse à droite), donné par la formule

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\Phi)(x) \doteq \begin{cases} \frac{1}{|Y|} \int_Y \Phi \left( \varepsilon \left[ \frac{x}{\varepsilon} \right]_Y + \varepsilon y, \left\{ \frac{x}{\varepsilon} \right\}_Y \right) dy & \text{pour } x \in \widehat{\Omega}_\varepsilon \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

# Conclusion

Inégalités de Korn unilatérales

Problème d'élasticité linéarisée avec non pénétration et frottement de Tresca

Homogénéisation périodique de ce problème

## Bibliographie

### – Références concernant les inégalités de Korn:

- [1] J. Gobert, Une inégalité fondamentale de la théorie de l'élasticité, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, 31, 1962, 182–191
- [2] O. A. Oleinik, A. S. Shamaev and G. A. Yosifian, *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [3] P. Ciarlet & P.-G. Ciarlet, Another approach to linearized elasticity and a new proof of korn's inequality, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* Vol. 15, No. 2 (2005) 259–271
- [4] A. Damlamian, Some unilateral Korn inequalities with application to a contact problem with inclusions, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 350 (2012) 861–865

– **Références concernant les problèmes de contact en élasticité :**

- [5] G. Fichera, Sul problema elastostatico di Signorini con ambigue condizioni al contorno, Rend. Acc. Naz. Lincei, s. VIII, v. XXXIV, fase. 2, febbraio 1963.
- [6] G. Fichera, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali : il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno, Atti Acc. Naz. Lincei, Memoria presentata il 10-IX-63, s. Vili, voi. VII, fase. 5, 1964.
- [7] G. Fichera, Elastostatics problems with unilateral constraints, Séminaire Jean Leray, no 3 (1966-1967), p. 64-68.  
[http://www.numdam.org/item?id=SJL\\_1966-1967\\_\\_3\\_64\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SJL_1966-1967__3_64_0)
- [8] G. Fichera, Unilateral constraints in elasticity, Actes, Congrès intern. Math. Nice, 1970. Tome 3, p. 7
- [9] I. Hlaváček, J. Haslinger, J. Nečas & J. Lovíček *Solution of Variational Inequalities in Mechanics*, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo, 1988 (original published by Alfa Publishers in 1982).
- [10] N. Kikuchi and J.T. Oden, *Contact problems in Elasticity*, SIAM Studies in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1988.
- [11] A. Mikelic, M. Shillor and R. Tapiero, Homogenization of an elastic material with soft inclusions in frictionless contact. Recent advances in contact mechanics, Math. Comput. Modelling, 28 (1998), 4-8, 287-307.

[12] C. Eck, J. Jarušek & M. Krbec, *Unilateral Contact Problems: Variational Methods and Existence Theorems*, CRC Press, Boca Raton, 2005.

[13] D. Cioranescu, A. Damlamian & J. Orlik, Homogenization via unfolding in periodic elasticity with contact on closed and open cracks, *Asymptotic Analysis* 82 (2013) 201–232, [DOI 10.3233/ASY-2012-1141]

– **Références concernant l’homogénéisation de domaines perforés:**

[14] G. A. Yosifian, On some homogenization problems in perforated domains with nonlinear boundary conditions, *Applicable Analysis*, 65, 3-4 (1997), 257-288.

[15] G. A. Yosifian, Some homogenization problems for the system of elasticity with nonlinear boundary conditions in perforated domains, *Applicable Analysis*, 71, 1-4 (1998), 379-411.

– **Références concernant l’éclatement périodique:**

[16] D. Cioranescu, A. Damlamian and G. Griso, Periodic unfolding and homogenization, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I*, 335 (2002), 99-104.

[17] D. Cioranescu, A. Damlamian and G. Griso. *The periodic unfolding method in homogenization*, *SIAM J. of Math. Anal.*, Vol. 40, 4 (2008), 1585-1620.

[18] D. Cioranescu, A. Damlamian, P. Donato, G. Griso, and R. Zaki, The periodic unfolding method in domains with holes, *SIAM J. of Math. Anal.* Vol. 44, 2 (2012), 718-760.