Méthodes d'Analyse multifractale pour la classification de signaux et d'images

Stéphane Jaffard

Université Paris Est Créteil (France)

Collaboration avec:

Patrice Abry CNRS, Laboratoire de Physique, ENS Lyon

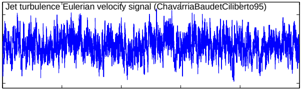
Herwig Wendt CNRS IRIT, Toulouse

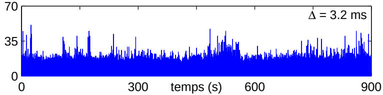
Séminaire de Mathématiques Appliquées

Collège de France

27 janvier 2012

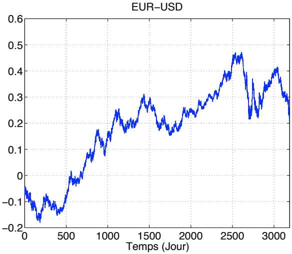
Signaux et images partout irréguliers



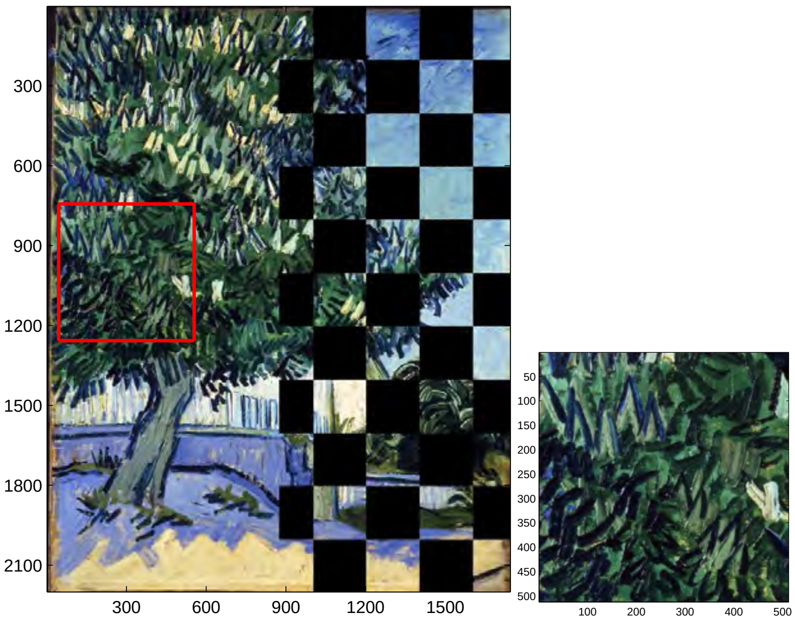


Turbulence pleinement développée

Trafic internet

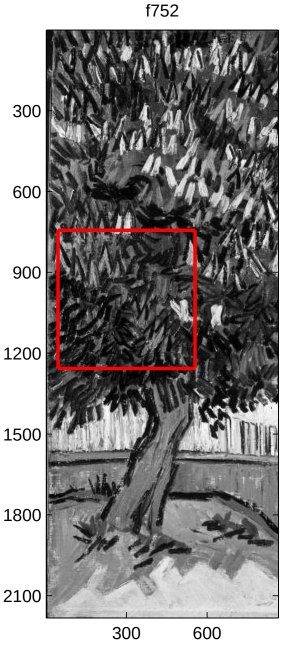


f752

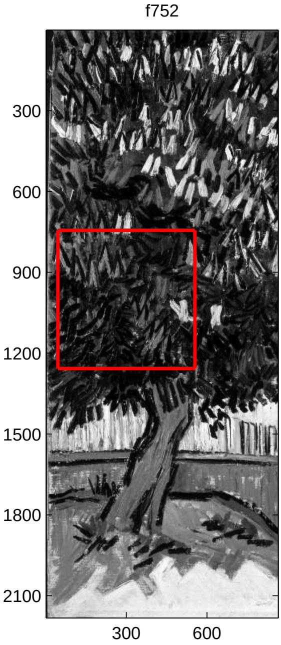


300
600
900
1200
1500
1800
2100
300
600
900
1200
1500
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
100
200
300
400
500

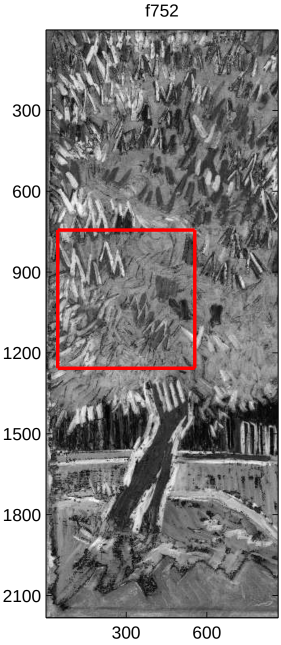
Niveaux de gris



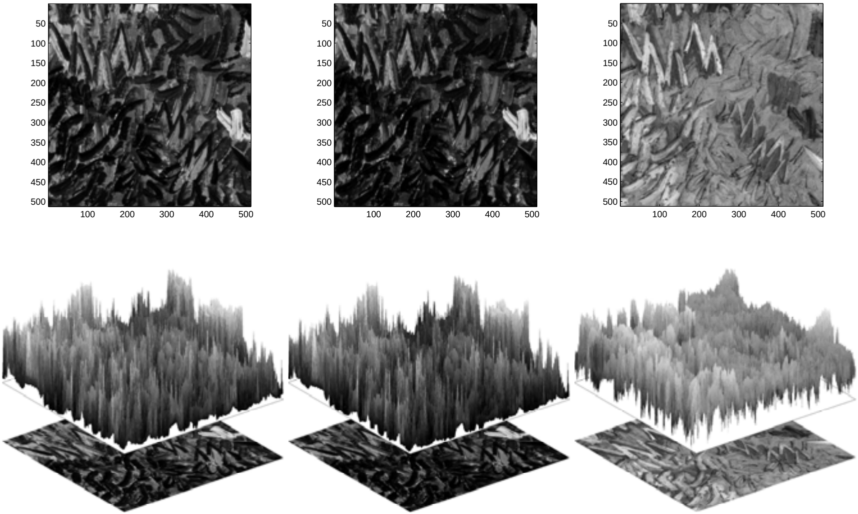
Canal rouge



Canal Saturation



Niveaux de gris | Canal rouge | Canal Saturation



La nature, les sciences et les arts fournissent de nombreux exemples de fonctions “rugueuses”

La fonction d'échelle $\zeta_f(p)$ (N. Kolmogorov 1941)

Définition heuristique

$$\int |f(x+\delta) - f(x)|^p dx \sim |\delta|^{\zeta_f(p)} \qquad \text{quand} \qquad \delta \to 0$$

La fonction d'échelle $\zeta_f(p)$ (N. Kolmogorov 1941)

Définition heuristique

$$\int |f(x+\delta) - f(x)|^p dx \sim |\delta|^{\zeta_f(p)} \qquad \text{quand} \qquad \delta \to 0$$

Définition utilisée en traitement du signal

$$\int |f(x+\delta) - f(x)|^p dx = |\delta|^{\zeta_f(p)+o(1)} \qquad \text{quand} \qquad \delta \to 0$$

Autosimilarité en moyenne dans la limite des petites échelles

La fonction d'échelle $\zeta_f(p)$ (N. Kolmogorov 1941)

Définition heuristique

$$\int |f(x+\delta) - f(x)|^p dx \sim |\delta|^{\zeta_f(p)} \quad \text{quand} \quad \delta \to 0$$

Définition utilisée en traitement du signal

$$\int |f(x+\delta) - f(x)|^p dx = |\delta|^{\zeta_f(p)+o(1)} \quad \text{quand} \quad \delta \to 0$$

Autosimilarité en moyenne dans la limite des petites échelles

Définition mathématique générale

$$\zeta_f(p) = \liminf_{\delta \to 0} \frac{\log\left(\int |f(x+\delta) - f(x)|^p dx\right)}{\log(|\delta|)}$$

Fonction d'échelle du FBM

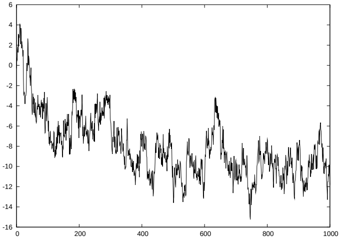
$B_H(x)$ est l'unique processus gaussien centré tel que

$$\mathbb{E}(|B_H(x) - B_H(y)|^2) = |x - y|^{2H}$$

Donc

$$|B_H(x+\delta) - B_H(x)| \sim |\delta|^H$$

$$\int |B_H(x+\delta) - B_H(x)|^p dx \sim |\delta|^{Hp}$$



FBM d'exposant $H = 1/3$

Fonction d'échelle du FBM

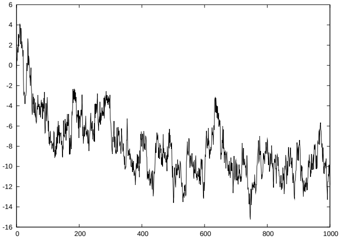
$B_H(x)$ est l'unique processus gaussien centré tel que

$$\mathbb{E}(|B_H(x) - B_H(y)|^2) = |x - y|^{2H}$$

Donc

$$|B_H(x+\delta) - B_H(x)| \sim |\delta|^H$$

$$\int |B_H(x+\delta) - B_H(x)|^p dx \sim |\delta|^{Hp}$$



FBM d'exposant $H = 1/3$

Fonction d'échelle du FBM : $\forall p > 0, \quad \zeta_f(p) = Hp$

Fonction d'échelle du FBM

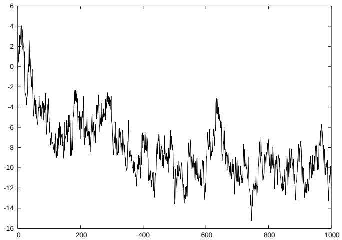
$B_H(x)$ est l'unique processus gaussien centré tel que

$$\mathbb{E}(|B_H(x) - B_H(y)|^2) = |x - y|^{2H}$$

Donc

$$|B_H(x+\delta) - B_H(x)| \sim |\delta|^H$$

$$\int |B_H(x+\delta) - B_H(x)|^p dx \sim |\delta|^{Hp}$$



FBM d'exposant $H = 1/3$

Fonction d'échelle du FBM : $\forall p > 0, \quad \zeta_f(p) = Hp$

La fonction d'échelle de la turbulence est strictement concave

Fonction d'échelle et espaces fonctionnels

Espaces de Lipschitz

Soient $s \in (0,1)$, et $p \in [1,\infty[$

$f \in Lip(s, L^p)$ si $f \in L^p$ et si $\exists C > 0$ tels que

$$\forall \delta > 0, \qquad \int |f(x+\delta) - f(x)|^p dx \leq C\, |\delta|^{sp}$$

Fonction d'échelle et espaces fonctionnels

Espaces de Lipschitz

Soient $s \in (0,1)$, et $p \in [1,\infty[$

$f \in Lip(s, L^p)$ si $f \in L^p$ et si $\exists C > 0$ tels que

$$\forall \delta > 0, \qquad \int |f(x+\delta) - f(x)|^p dx \leq C\, |\delta|^{sp}$$

Si $\zeta_f(p) < p$,

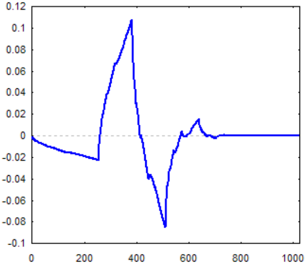
$$\zeta_f(p) = \sup\{s : f \in Lip(s/p, L^p)\}$$

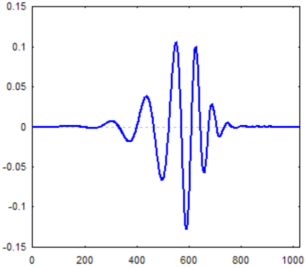
Bases d'ondelettes sur $\mathbb{R}$

Une base d'ondelettes sur $\mathbb{R}$ est engendrée par une fonction ψ régulières et bien localisées telle que les

$$2^{j/2}\psi(2^j x - k), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$





Ondelettes de Daubechies

Bases d'ondelettes en dimension 2

Une base d'ondelettes sur $\mathbb{R}^2$ est de la forme

$$2^j \psi^i (2^j x - k), \qquad i = 1, 2, 3, \; j \in \mathbb{Z}, \; k \in \mathbb{Z}^d$$

où les ψ^i sont trois fonctions régulières et bien localisées

$$\psi^1(x_1, x_2) = \theta(x_1)\varphi(x_2)$$

$$\psi^1(x_1, x_2) = \varphi(x_1)\theta(x_2)$$

$$\psi^1(x_1, x_2) = \theta(x_1)\theta(x_2)$$

Bases d'ondelettes en dimension 2

Une base d'ondelettes sur $\mathbb{R}^2$ est de la forme

$$2^j \psi^i(2^j x - k), \qquad i = 1, 2, 3, \ j \in \mathbb{Z}, \ k \in \mathbb{Z}^d$$

où les ψ^i sont trois fonctions régulières et bien localisées

$$\psi^1(x_1, x_2) = \theta(x_1)\varphi(x_2)$$

$$\psi^1(x_1, x_2) = \varphi(x_1)\theta(x_2)$$

$$\psi^1(x_1, x_2) = \theta(x_1)\theta(x_2)$$

Moments nuls

$$\int \psi(x_1, x_2) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} dx_1 dx_2 = 0$$

si $\alpha_1 + \alpha_2 \leq N$

Notations pour les ondelettes sur $\mathbb{R}^d$

Cubes dyadiques :

$$\text{Si } k = (k_1, ...k_d), \quad \lambda = \left[\frac{k_1}{2^j}, \frac{k_1+1}{2^j}\right[\times \cdots \times \left[\frac{k_d}{2^j}, \frac{k_d+1}{2^j}\right[$$

Notations pour les ondelettes sur $\mathbb{R}^d$

Cubes dyadiques :

$$\text{Si } k = (k_1, ...k_d), \quad \lambda = \left[\frac{k_1}{2^j}, \frac{k_1+1}{2^j}\right[\times \cdots \times \left[\frac{k_d}{2^j}, \frac{k_d+1}{2^j}\right[$$

Ondelettes :

$$\psi_\lambda(x) = \psi^i(2^j x - k)$$

Notations pour les ondelettes sur $\mathbb{R}^d$

Cubes dyadiques :

$$\text{Si } k = (k_1, ...k_d), \quad \lambda = \left[\frac{k_1}{2^j}, \frac{k_1+1}{2^j}\right[\times \cdots \times \left[\frac{k_d}{2^j}, \frac{k_d+1}{2^j}\right[$$

Ondelettes :

$$\psi_\lambda(x) = \psi^i(2^j x - k)$$

Coefficients d'ondelette :

$$c_\lambda = 2^{dj} \int f(x)\psi^i(2^j x - k)dx$$

Notations pour les ondelettes sur $\mathbb{R}^d$

Cubes dyadiques :

$$\text{Si } k = (k_1, ...k_d), \quad \lambda = \left[\frac{k_1}{2^j}, \frac{k_1+1}{2^j}\right[\times \cdots \times \left[\frac{k_d}{2^j}, \frac{k_d+1}{2^j}\right[$$

Ondelettes :

$$\psi_\lambda(x) = \psi^i(2^j x - k)$$

Coefficients d'ondelette :

$$c_\lambda = 2^{dj} \int f(x)\psi^i(2^j x - k)dx$$

Cubes dyadiques à l'échelle j :

$$\Lambda_j = \{\lambda : \quad |\lambda| = 2^{-j}\}$$

Notations pour les ondelettes sur $\mathbb{R}^d$

Cubes dyadiques :

$$\text{Si } k = (k_1, ...k_d), \quad \lambda = \left[\frac{k_1}{2^j}, \frac{k_1+1}{2^j}\right[\times \cdots \times \left[\frac{k_d}{2^j}, \frac{k_d+1}{2^j}\right[$$

Ondelettes :

$$\psi_\lambda(x) = \psi^i(2^j x - k)$$

Coefficients d'ondelette :

$$c_\lambda = 2^{dj} \int f(x)\psi^i(2^j x - k)dx$$

Cubes dyadiques à l'échelle j :

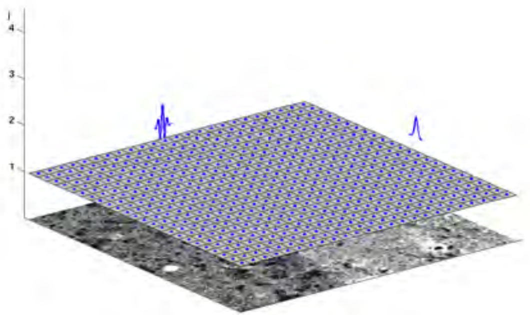
$$\Lambda_j = \{\lambda : \quad |\lambda| = 2^{-j}\}$$

Décomposition en ondelettes de f :

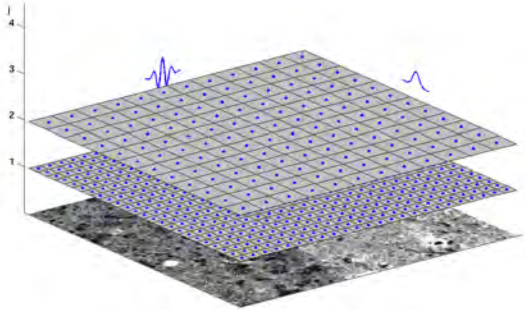
$$f(x) = \sum_j \sum_{\lambda \in \Lambda_j} c_\lambda \psi_\lambda(x)$$

Calcul de coefficients d'ondelette 2D

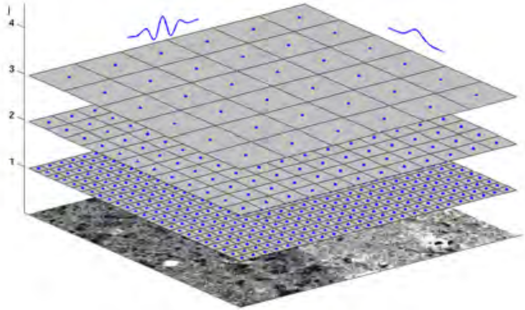
Calcul de coefficients d’ondelette 2D



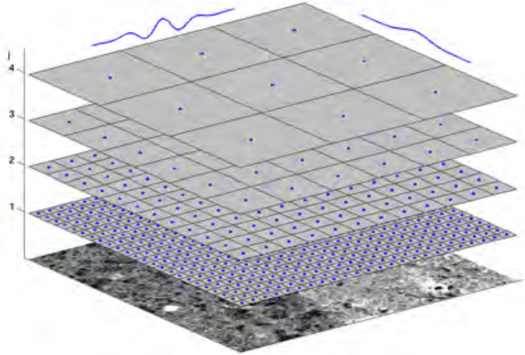
Calcul de coefficients d'ondelette 2D



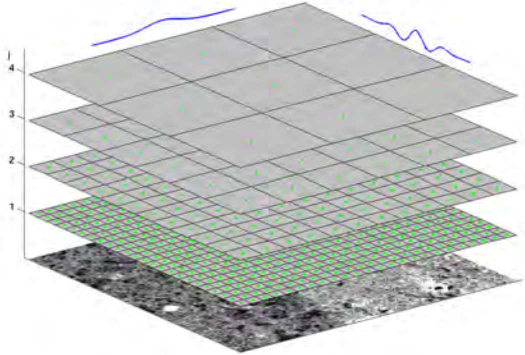
Calcul de coefficients d'ondelette 2D



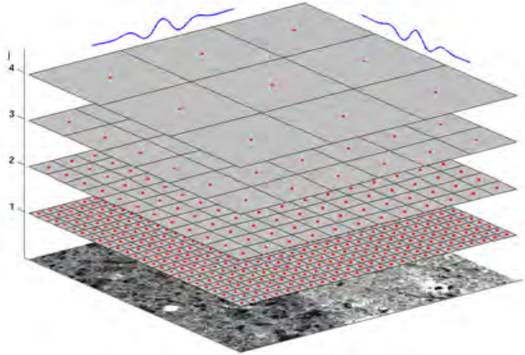
Calcul de coefficients d’ondelette 2D



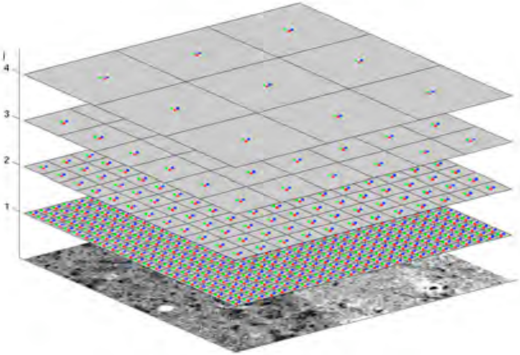
Calcul de coefficients d'ondelette 2D



Calcul de coefficients d'ondelette 2D



Calcul de coefficients d’ondelette 2D



Autosimilarité : Cas déterministe

Fonction de Weierstrass-Mandelbrot

$$W_\alpha(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} 2^{-\alpha j} \sin(2^j x) \qquad 0 < \alpha < 1$$

Autosimilarité : Cas déterministe

Fonction de Weierstrass-Mandelbrot

$$W_\alpha(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} 2^{-\alpha j} \sin(2^j x) \qquad 0 < \alpha < 1$$

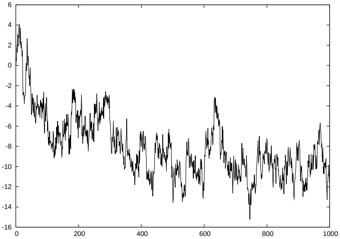
Autosimilarité exacte :

$$W_\alpha(2x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} 2^{-\alpha j} \sin(2^{j+1} x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} 2^{-\alpha(l-1)} \sin(2^l x) = 2^\alpha W_\alpha(x)$$

$$C_{j,k} = \int W_\alpha(x)\, 2^j \psi(2^j x - k) dx = 2^{-\alpha}\ C_{j-1,k}$$

Autosimilarité statistique

Mouvement Brownien Fractionnaire

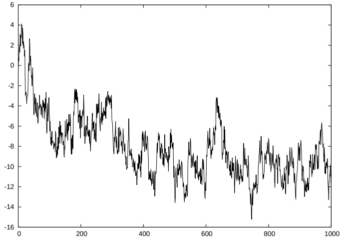


FBM d'exposant

$$H = 1/3$$

Autosimilarité statistique

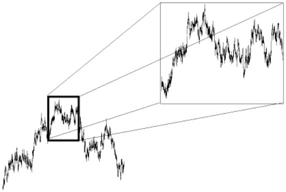
Mouvement Brownien Fractionnaire



FBM d'exposant

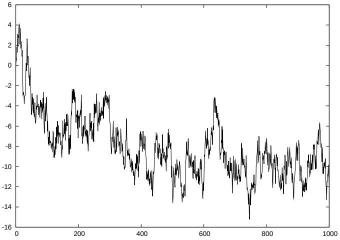
$H = 1/3$

$$B_H(ax) \stackrel{\mathcal{L}}{=} a^H B_H(x)$$



Autosimilarité statistique

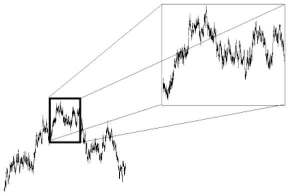
Mouvement Brownien Fractionnaire



FBM d'exposant

$$H = 1/3$$

$B_H(ax) \stackrel{\mathcal{L}}{=} a^H B_H(x)$



Les $2^{Hj} C_{j,k}$ ont la même loi

Espaces fonctionnels et ondelettes

Soit $p \geq 1$ et $s \geq 0$; $f \in Lip(s, L^p)$ si $f \in L^p$ et si $\exists C > 0$ tel que

$$\forall \delta > 0, \qquad \int |f(x+\delta) - f(x)|^p dx \leq C \, |\delta|^{sp}$$

Espaces fonctionnels et ondelettes

Soit $p \geq 1$ et $s \geq 0$; $f \in Lip(s, L^p)$ si $f \in L^p$ et si $\exists C > 0$ tel que

$$\forall \delta > 0, \qquad \int |f(x+\delta) - f(x)|^p dx \leq C \, |\delta|^{sp}$$

Espaces de Besov

$$\forall p > 0 \text{ et } s \in \mathbb{R}, \quad f \in B_p^s \iff \forall j, \; 2^{-dj} \sum_k |c_{j,k}|^p \leq C \, 2^{-spj}$$

Espaces fonctionnels et ondelettes

Soit $p \geq 1$ et $s \geq 0$; $f \in Lip(s, L^p)$ si $f \in L^p$ et si $\exists C > 0$ tel que

$$\forall \delta > 0, \qquad \int |f(x+\delta) - f(x)|^p dx \leq C\, |\delta|^{sp}$$

Espaces de Besov

$$\forall p > 0 \ \text{ et } \ s \in \mathbb{R}, \quad f \in B_p^s \iff \forall j,\ 2^{-dj} \sum_k |c_{j,k}|^p \leq C\, 2^{-spj}$$

$$B_p^{s+\varepsilon} \hookrightarrow Lip(s, L^p) \hookrightarrow B_p^{s-\varepsilon}$$

Espaces fonctionnels et ondelettes

Soit $p \geq 1$ et $s \geq 0$; $f \in Lip(s, L^p)$ si $f \in L^p$ et si $\exists C > 0$ tel que

$$\forall \delta > 0, \qquad \int |f(x+\delta) - f(x)|^p dx \leq C \, |\delta|^{sp}$$

Espaces de Besov

$$\forall p > 0 \ \text{ et } \ s \in \mathbb{R}, \quad f \in B_p^s \iff \forall j, \ 2^{-dj} \sum_k |c_{j,k}|^p \leq C \, 2^{-spj}$$

$$B_p^{s+\varepsilon} \hookrightarrow Lip(s, L^p) \hookrightarrow B_p^{s-\varepsilon}$$

$$\begin{aligned} \zeta_f(p) &= \sup \{ s : f \in Lip(s/p, L^p) \} \\ &= \sup \left\{ s : f \in B_p^{s/p} \right\} \end{aligned}$$

La fonction d'échelle ondelettes

Si

$$S_{p,j} = 2^{-dj} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |c_\lambda|^p,$$

La fonction d'échelle ondelettes est

$$\forall p > 0 \qquad \zeta_f(p) = \liminf_{j \to +\infty} \frac{\log(S_{p,j})}{\log(2^{-j})}.$$

La fonction d'échelle ondelettes

Si

$$S_{p,j} = 2^{-dj} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |c_\lambda|^p,$$

La fonction d'échelle ondelettes est

$$\forall p > 0 \qquad \zeta_f(p) = \liminf_{j \to +\infty} \frac{\log(S_{p,j})}{\log(2^{-j})}.$$

Elle coincide avec la fonction d'échelle de Kolmogorov si $p \geq 1$

La fonction d'échelle ondelettes

Si

$$S_{p,j} = 2^{-dj} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |c_\lambda|^p,$$

La fonction d'échelle ondelettes est

$$\forall p > 0 \qquad \zeta_f(p) = \liminf_{j \to +\infty} \frac{\log(S_{p,j})}{\log(2^{-j})}.$$

Elle coincide avec la fonction d'échelle de Kolmogorov si $p \geq 1$

Elle est définie par une régression log-log à travers les échelles

Exposant de Hölder uniforme

Espaces C^α : Soit $\alpha \in (0,1)$; $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^d)$ si

$$\exists C, \ \ \forall x, y : \qquad\qquad |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$$

Exposant de Hölder uniforme

Espaces C^α : Soit $\alpha \in (0,1)$; $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^d)$ si

$$\exists C, \;\; \forall x, y : \qquad |f(x) - f(y)| \leq |x-y|^\alpha$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \qquad C^\alpha = B^\alpha_\infty$$

Exposant de Hölder uniforme

Espaces C^α : Soit $\alpha \in (0,1)$; $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^d)$ si

$$\exists C, \ \ \forall x, y : \qquad |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \qquad C^\alpha = B^\alpha_\infty$

L' exposant de Hölder uniforme de f est

$$H_f^{min} = \sup \left\{ \alpha : \ f \in C^\alpha(\mathbb{R}^d) \right\}$$

Exposant de Hölder uniforme

Espaces C^α : Soit $\alpha \in (0,1)$; $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^d)$ si

$$\exists C, \quad \forall x, y : \qquad |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \qquad C^\alpha = B^\alpha_\infty$$

L' exposant de Hölder uniforme de f est

$$H_f^{min} = \sup \left\{ \alpha : \ f \in C^\alpha(\mathbb{R}^d) \right\}$$

Calcul numérique :

Soit $\omega_j = \sup_{\lambda \in \Lambda_j} |c_\lambda|$ alors $H_f^{min} = \liminf_{j \to +\infty} \frac{\log(\omega_j)}{\log(2^{-j})}$

p-variation ($d = 1$)

On note $f_a(x) = f(x - a)$. La fonction f a une p-variation finie si

$$\exists C, \;\; \forall a, h \in]0,1], \qquad \sum_n |f_a((n+1)h) - f_a(nh)|^p \leq C$$

p-variation ($d = 1$)

On note $f_a(x) = f(x-a)$. La fonction f a une p-variation finie si

$$\exists C, \quad \forall a, h \in]0,1], \qquad \sum_n |f_a((n+1)h) - f_a(nh)|^p \leq C$$

Définition : Soient $p \geq 1$ et $s \geq 0$; f appartient à $\mathcal{V}_p^s$ si

$$\exists C \quad \forall a, h \in]0,1], \qquad h \sum_n |f_a((n+1)h) - f_a(nh)|^p \leq C|h|^{sp}$$

p-variation ($d = 1$)

On note $f_a(x) = f(x - a)$. La fonction f a une p-variation finie si

$$\exists C, \quad \forall a, h \in]0,1], \qquad \sum_n |f_a((n+1)h) - f_a(nh)|^p \leq C$$

Définition : Soient $p \geq 1$ et $s \geq 0$; f appartient à $\mathcal{V}_p^s$ si

$$\exists C \quad \forall a, h \in]0,1], \qquad h \sum_n |f_a((n+1)h) - f_a(nh)|^p \leq C|h|^{sp}$$

Proposition : Si f appartient à $\mathcal{V}_p^s$, alors :

- f est localement bornée
- $f \in Lip(s, L^p)$

Utilisation de $\zeta_f(p)$ et H_f^{min}

Validation d'hypothèses fonctionnelles

$$\zeta_f(p) = \text{sup} \left\{ s : p \in B_p^{s/p,\infty} \right\} \quad (p > 0)$$

Utilisation de $\zeta_f(p)$ et H_f^{min}

Validation d'hypothèses fonctionnelles

$$\zeta_f(p) = \sup \left\{ s : p \in B_p^{s/p,\infty} \right\} \quad (p > 0)$$

- Si $\zeta_f(1) > 1$, $f \in BV$
- Si $\zeta_f(2) > 0$, $f \in L^2$
- Si $H_f^{min} > 0$, f est continue
- Si $H_f^{min} < 0$, f n'est pas localement bornée
- Si $H_f^{min} < 0$ ou si $\zeta_f(p) < 1$, alors la p-variation de f n'est pasfinie
- Si $\zeta_f(p) > 1$, alors la p-variation de f est finie

Utilisation de $\zeta_f(p)$ et H_f^{min}

Validation d'hypothèses fonctionnelles

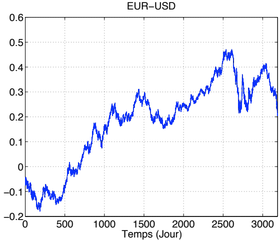
$$\zeta_f(p) = \sup \left\{ s : p \in B_p^{s/p,\infty} \right\} \quad (p > 0)$$

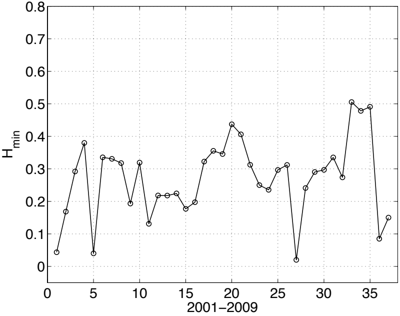
- Si $\zeta_f(1) > 1$, $f \in BV$
- Si $\zeta_f(2) > 0$, $f \in L^2$
- Si $H_f^{min} > 0$, f est continue
- Si $H_f^{min} < 0$, f n'est pas localement bornée
- Si $H_f^{min} < 0$ ou si $\zeta_f(p) < 1$, alors la p-variation de f n'est pasfinie
- Si $\zeta_f(p) > 1$, alors la p-variation de f est finie

Motivations :

- Y. Gousseau, J.-M. Morel : *Are natural images of bounded variation ?* (2001)
- Modèles à sauts et à variation quadratique finie en finance

Exposant de Hölder uniforme

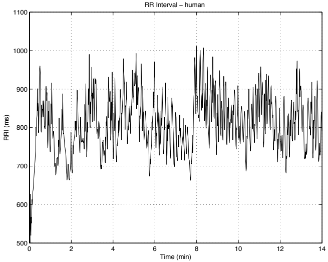




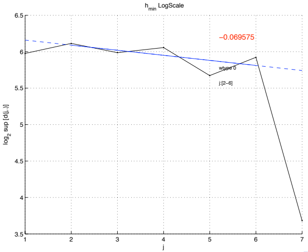
Données fournies par Vivienne Investissement

Classification basée sur l'exposant de Hölder uniforme

Rythme cardiaque : Patient en bonne santé

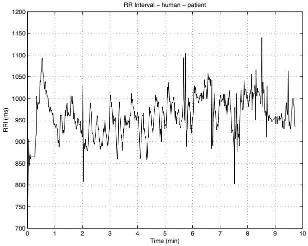


$$H_f^{min} = -0.06$$

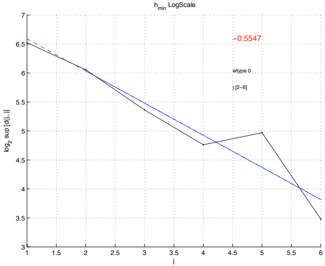


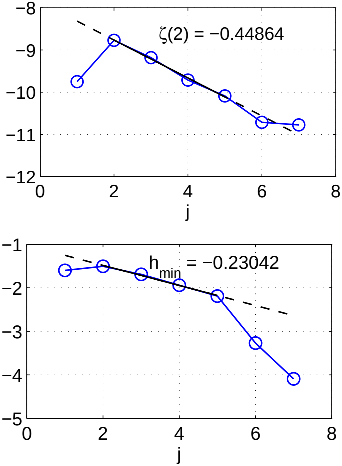
Classification basée sur l’exposant de Hölder uniforme

Anomalie de rythme cardiaque

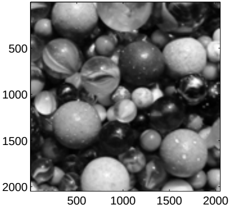


$H_f^{min} = -0.55$

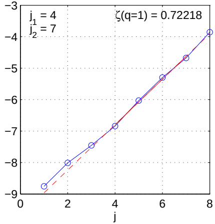




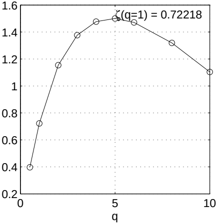
ζ(2) = −0.44864
−8
−9
−10
−11
−12
0
2
4
6
8
j
h min = −0.23042
−1
−2
−3
−4
−5
0
2
4
6
8
j

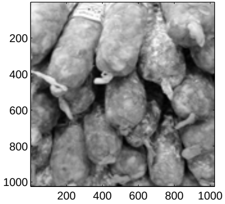


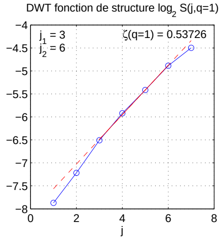
DWT fonction de structure $\log_2 S(j,q=1)$

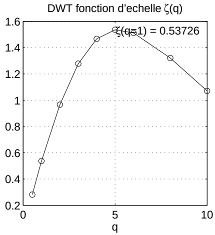


DWT fonction d'echelle ζ(q)




200
400
600
800
1000
200
400
600
800
1000


DWT fonction de structure log2 S(j,q=1)
j1 = 3
j2 = 6
ζ(q=1) = 0.53726
−4
−4.5
−5
−5.5
−6
−6.5
−7
−7.5
−8
0
2
4
6
8
j

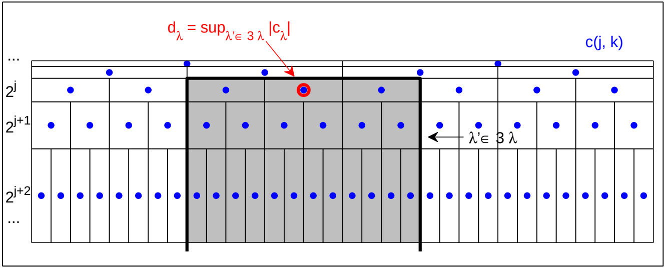

DWT fonction d'echelle ζ(q)
ζ(q=1) = 0.53726
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
5
10
q

Coefficients dominants

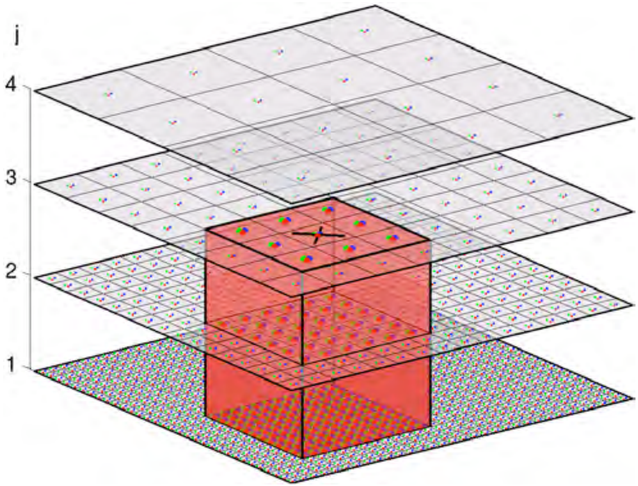
Si λ est un cube dyadique, 3λ est le cube de même centre et trois fois plus large.

Soit f une fonction bornée ; les coefficient dominant de f sont les quantités

$$d_\lambda = \sup_{\lambda' \subset 3\lambda} |c_{\lambda'}|$$



Calcul de coefficients dominants 2D



Les coefficients dominants permettent d'estimer l'exposant de Hölder ponctuel

Spectre de Legendre

Λ_j désigne l'ensemble des cubes dyadiques d'échelle 2^{-j}.

$$T_{p,j} = 2^{-dj} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |d_\lambda|^p \sim 2^{-\eta_f(p) j}$$

Spectre de Legendre

Λ_j désigne l'ensemble des cubes dyadiques d'échelle 2^{-j}.

$$T_{p,j} = 2^{-dj} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |d_\lambda|^p \sim 2^{-\eta_f(p) j}$$

Fonction d'échelle dominante : $\forall p \in \mathbb{R}, \; \eta_f(p) = \liminf_{j \to +\infty} \dfrac{\log(T_{p,j})}{\log(2^{-j})}$

Spectre de Legendre

Λ_j désigne l'ensemble des cubes dyadiques d'échelle 2^{-j}.

$$T_{p,j} = 2^{-dj} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |d_\lambda|^p \sim 2^{-\eta_f(p) j}$$

Fonction d'échelle dominante : $\forall p \in \mathbb{R},\ \eta_f(p) = \liminf_{j \to +\infty} \dfrac{\log(T_{p,j})}{\log(2^{-j})}$

Spectre de Legendre

$$L_f(H) = \inf_{p \in \mathbb{R}} (d + Hp - \eta_f(p))$$

Théorème : Soit $D_f(H)$ la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points où l'exposant de Hölder de f vaut H. Si $f \in C^\varepsilon(\mathbb{R}^d)$, alors

$$D_f(H) \leq L_f(H)$$

Régressions log-log

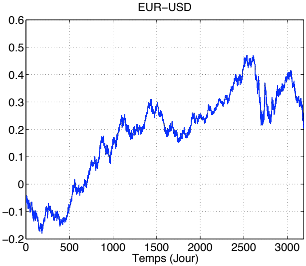
Comportements en loi de puissance :

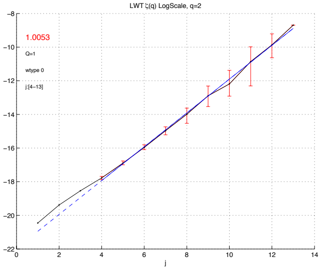
Condition préliminaire pour le calcul de fonctions d'échelle

Régressions log-log

Comportements en loi de puissance :

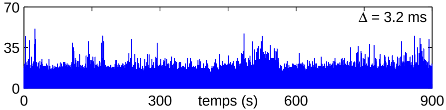
Condition préliminaire pour le calcul de fonctions d'échelle





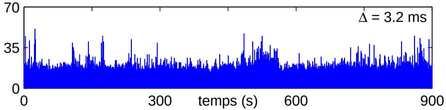
données fournies par Vivienne Investissement

Monohölderianité vs. Multifractalité

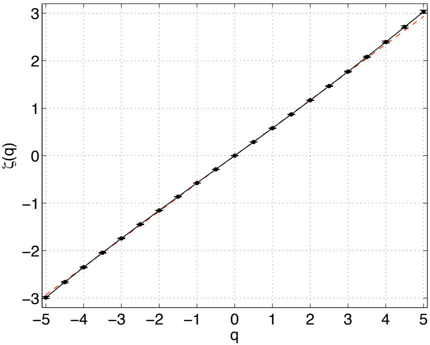


trafic Internet

Monohölderianité vs. Multifractalité



trafic Internet

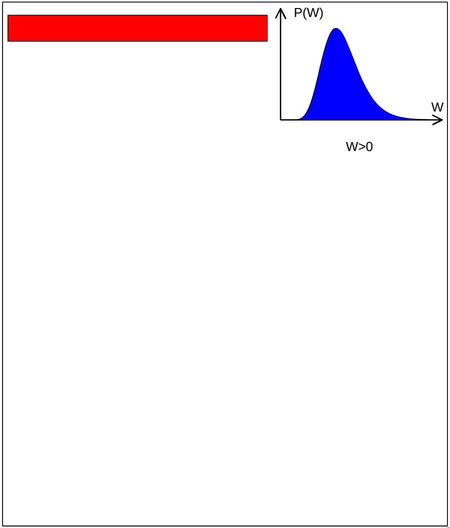


Fonction d'échelle dominante

données de http ://mawi.wide.ad.jp/mawi/

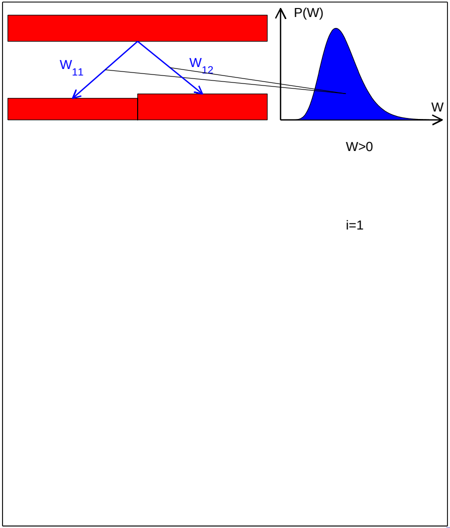
Réfutation de modèles

Cascade multiplicative



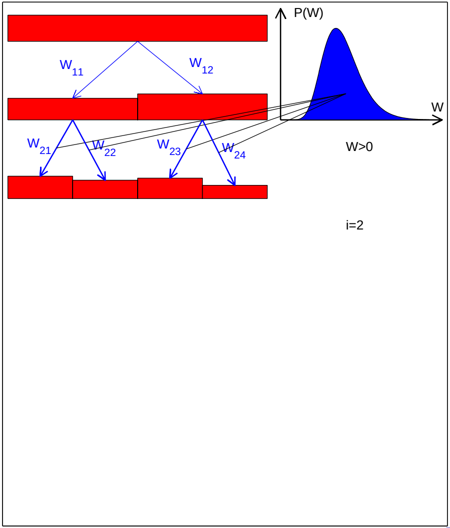
Réfutation de modèles

Cascade multiplicative



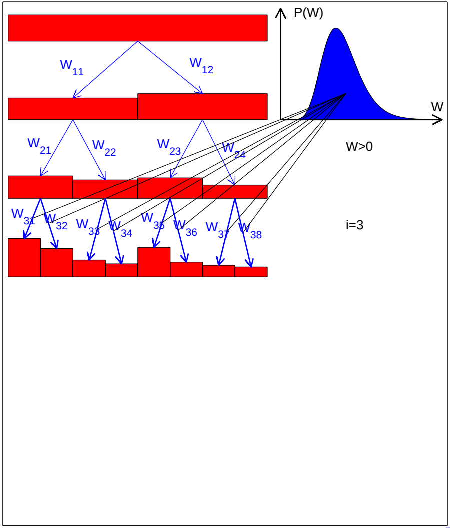
Réfutation de modèles

Cascade multiplicative



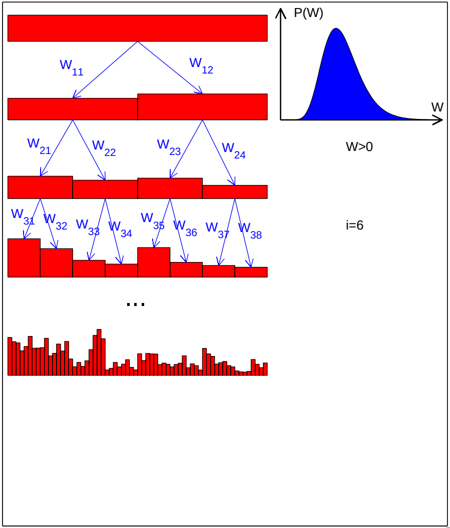
Réfutation de modèles

Cascade multiplicative



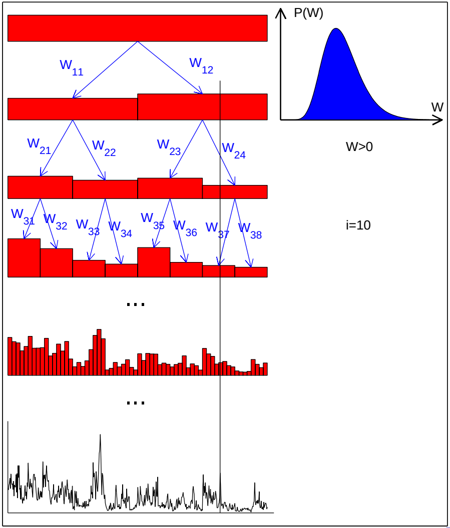
Réfutation de modèles

Cascade multiplicative



Réfutation de modèles

Cascade multiplicative



Processus construits à partir de cascades

Une cascade est une mesure : Elle n'est pas appropriée pour modéliser des signaux oscillants

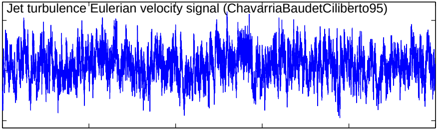
Si $F(t)$ est la fonction de répartition de la mesure, on peut considérer le FBM en temps multifractal

$$X(t) = B_H(F(t))$$

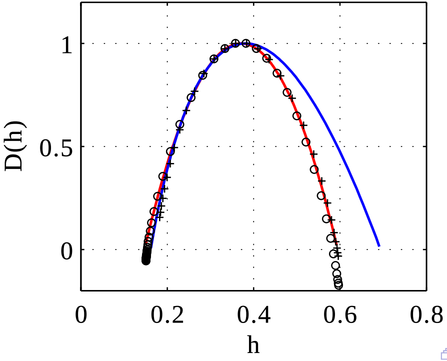
proposé par Calvet, Fisher et Mandelbrot en modélisation financière

Réfutation de modèles

(travail en collaboration avec Bruno Lashermes)



modèle de cascade log-normal vs. log-Poisson



p-oscillation

Soit f une fonction localement bornée. Si A est un intervalle, l'oscillation du premier ordre de f sur A est

$$Os_f(A) = \sup_A f - \inf_A f$$

p-oscillation

Soit f une fonction localement bornée. Si A est un intervalle, l'oscillation du premier ordre de f sur A est

$$Os_f(A) = \sup_A f - \inf_A f$$

Définition : Soit $p \geq 1$; f appartient à V_p^s si

$$\exists C \quad \forall j \qquad 2^{-dj} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} (Os_f(3\lambda))^p \leq C 2^{-spj}$$

Définition : f a une p-oscillation finie si

$$\exists C \quad \forall j \geq 0 \qquad \sum_{\lambda \in \Lambda_j} (Os_f(3\lambda))^p \leq C$$

Donc, si $f \in V_p^{d/p}$, alors f a une p-oscillation finie

p-oscillation

Espaces $\mathcal{O}_p^s$: Soit f localement bornée,

$$f \in \mathcal{O}_p^s(\mathbb{R}^d) \quad \text{si} \qquad 2^{-dj} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |d_\lambda|^p \leq C\, 2^{-spj}$$

Theorem : Soit $p \geq 1$; alors

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad C^\varepsilon \cap V_p^s \hookrightarrow \mathcal{O}_p^s \hookrightarrow V_p^{s+\varepsilon}$$

p-oscillation

Espaces $\mathcal{O}_p^s$: Soit f localement bornée,

$$f \in \mathcal{O}_p^s(\mathbb{R}^d) \quad \text{si} \qquad 2^{-dj} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |d_\lambda|^p \leq C\, 2^{-spj}$$

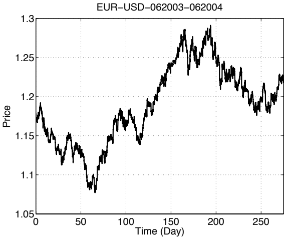
Theorem : Soit $p \geq 1$; alors

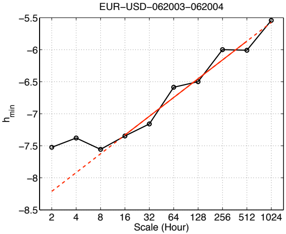
$$\forall \varepsilon > 0 \qquad C^\varepsilon \cap V_p^s \hookrightarrow \mathcal{O}_p^s \hookrightarrow V_p^{s+\varepsilon}$$

Corollaire : Soit $f \in C^\varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$. Alors

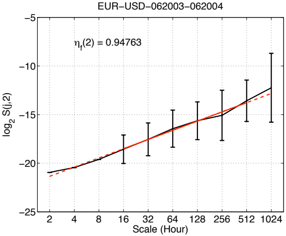
- Si $\eta_f(p) > 1$, f a une p-oscillation finie
- Si $\eta_f(p) < 1$, la p-oscillation de f n'est pas bornée

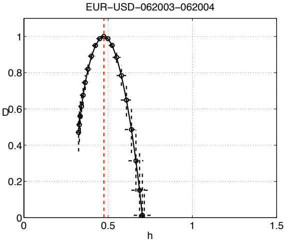
Taux de change USD-Euro : Juin 2003-juin 2004





Regression log-log pour la détermination de H_f^{min}

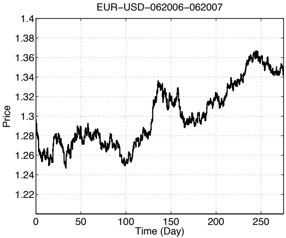


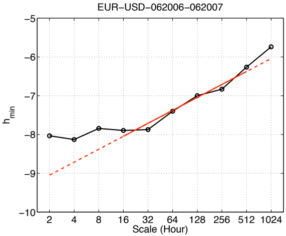


Détermination de $\eta_f(2)$

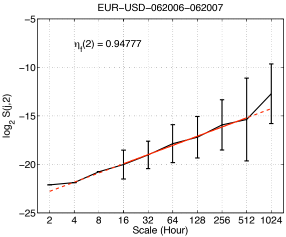
Spectre de Legendre

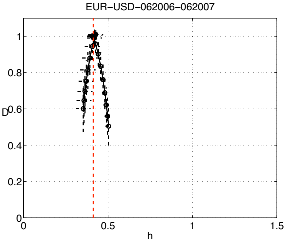
Taux de change USD-Euro : juin 2006-juin 2007





Regression log-log pour la détermination de H_f^{min}



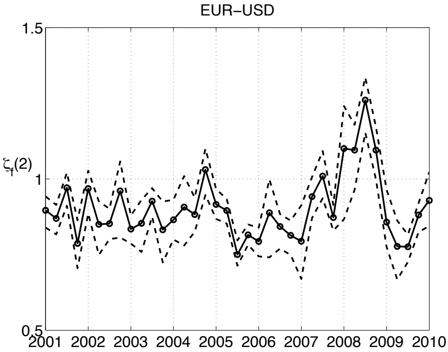


Détermination de $\eta_f(2)$

Spectre de Legendre

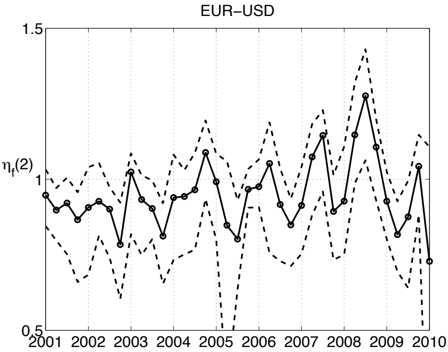
Taux de change USD-Euro

Estimations sur une année avec décallages de 3 mois



$\zeta_f(2)$

(fonction d'échelle ondelette)



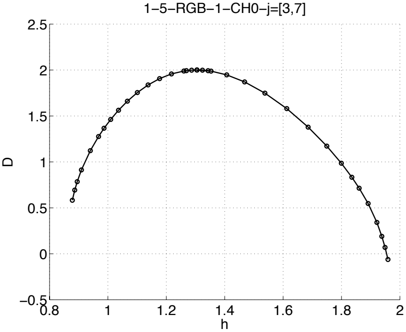
$\eta_f(2)$

(fonction d'échelle dominante)

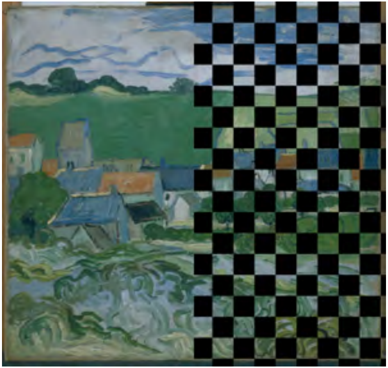
Analyse Multifractale de peintures : Défi Van Gogh

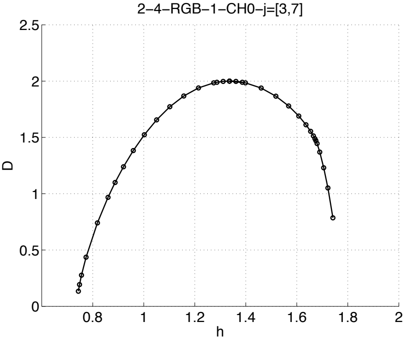
(en collaboration avec D. Rockmore)

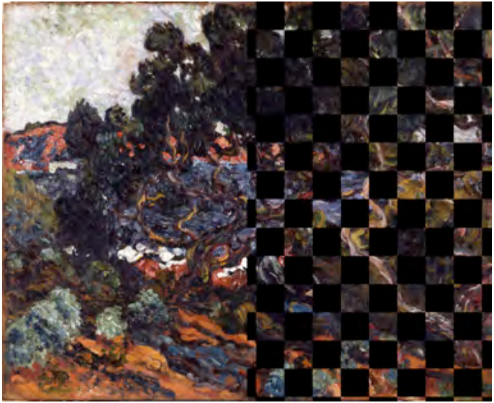
Van Gogh (f415) Arles -Saint Rémy

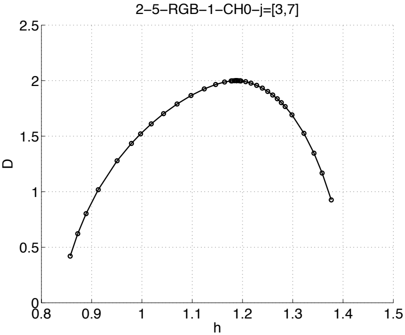


- Van Gogh

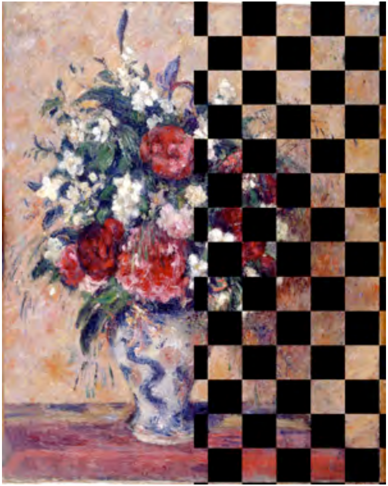


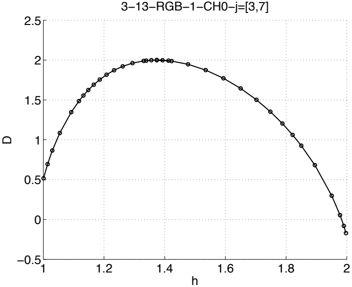






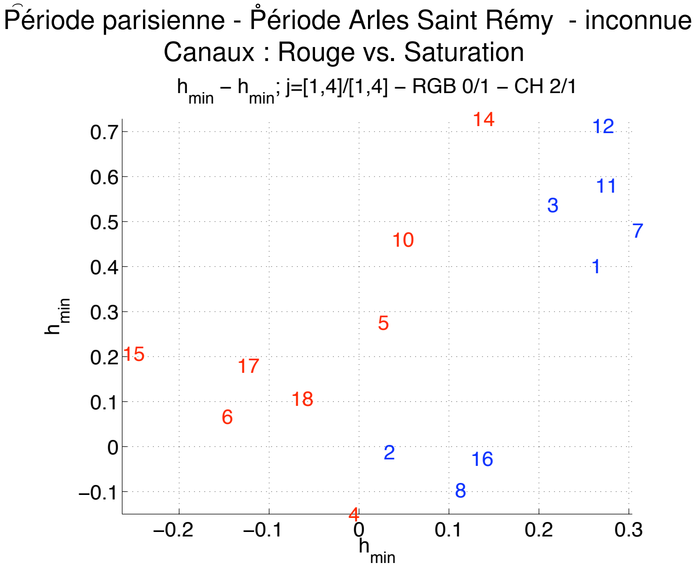
Inconnu





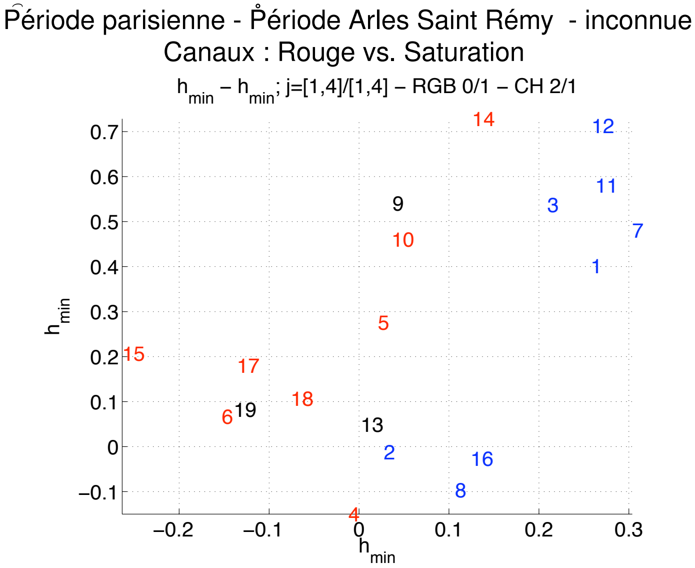
Inconnu

Défi : date



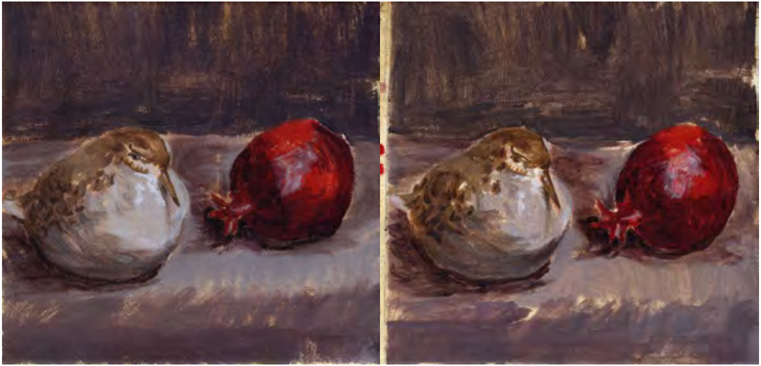
Période parisienne - Période Arles Saint Rémy - inconnue
Canaux : Rouge vs. Saturation
h_min – h_min; j=[1,4]/[1,4] – RGB 0/1 – CH 2/1
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
–0.1
–0.2
–0.1
0
0.1
0.2
0.3
h_min
h_min
14
12
11
3
7
10
1
5
15
17
18
6
2
16
8
4

Défi : date

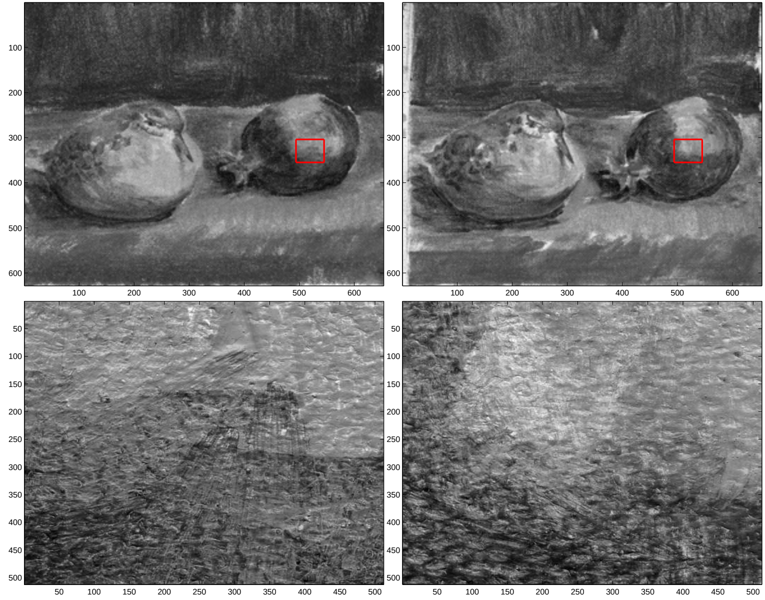


Période parisienne - Période Arles Saint Rémy - inconnue
Canaux : Rouge vs. Saturation
$h_{min} - h_{min}$; j=[1,4]/[1,4] – RGB 0/1 – CH 2/1
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−0.1
−0.2
−0.1
0
0.1
0.2
0.3
h_{min}
h_{min}
14
12
11
9
3
7
10
1
5
15
17
18
6
19
13
2
16
8
4

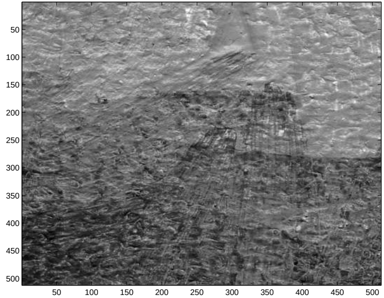
Peinture originale et copie : Charlotte Caspers

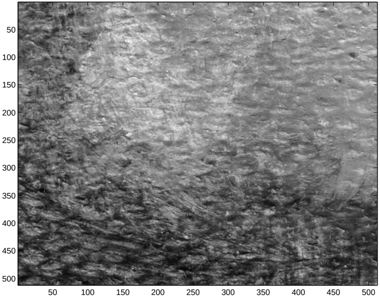


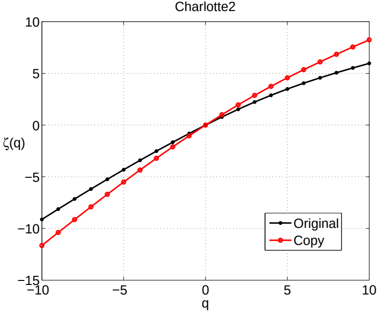
Peinture originale et copie : Charlotte Caspers

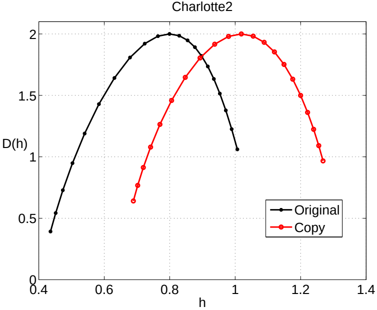


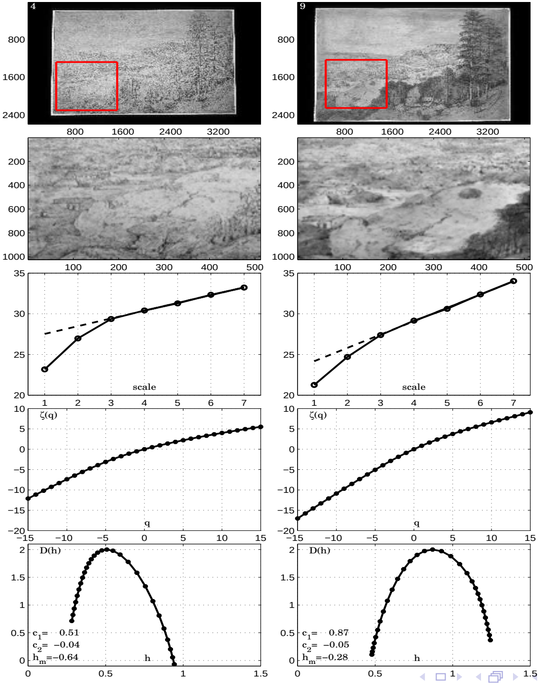
Peinture originale et copie : Charlotte Caspers



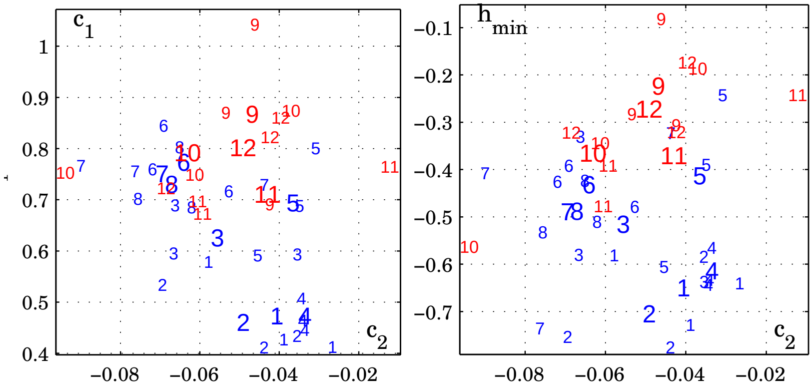




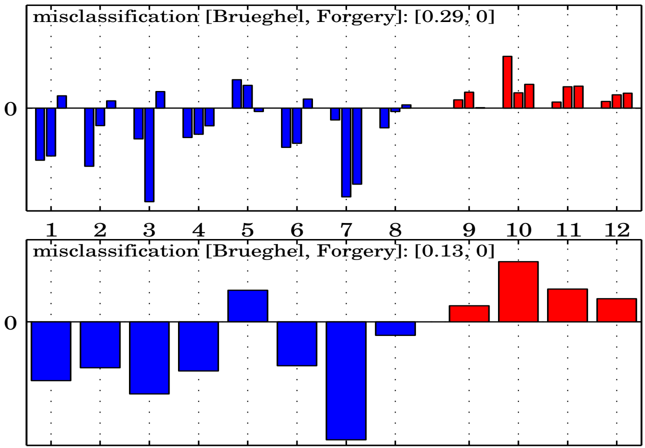




4
9
800
1600
2400
800 1600 2400 3200
200 400 600 800 1000
100 200 300 400 500
scale
ζ(q)
q
D(h)
h
c1= 0.51
c2= −0.04
hm=−0.64
c1= 0.87
c2= −0.05
hm=−0.28



c1
c2
hmin
c2


misclassification [Brueghel, Forgery]: [0.29, 0]
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
misclassification [Brueghel, Forgery]: [0.13, 0]
0