Contrôle optimal singulier de quelques équations aux dérivées partielles

Sergio Guerrero Rodríguez

en collaboration avec J.-M. Coron, O. Glass et G. Lebeau

Collège de France, Février 2008

Problème

- $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert régulier borné, $\omega \subset\subset \Omega$ un ouvert, $T > 0$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial}{\partial t} y + \varepsilon A y + M \cdot \nabla y = u 1_\omega & (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \\ y(x, 0) = y_0(x) & x \in \Omega \end{array} \right. + \text{cond. bord}$$

$M \in \mathbf{R}^N$, $\varepsilon > 0$ ‘petit’, u contrôle, y_0 donnée initiale.

Problème

- $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert régulier borné, $\omega \subset\subset \Omega$ un ouvert, $T > 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} y + \varepsilon A y + M \cdot \nabla y = u 1_\omega & (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ y(x,0) = y_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad + \text{cond. bord}$$

  $M \in \mathbf{R}^N$, $\varepsilon > 0$ ‘petit’, u contrôle, y_0 donnée initiale.

- $\varepsilon = 0$, $u = 0$: $\exists T^*(M, \Omega) > 0$ tel que $y(T^*, x) = 0 \ \forall x \in \Omega$.

Problème

- $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert régulier borné, $\omega \subset\subset \Omega$ un ouvert, $T > 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} y + \varepsilon A y + M \cdot \nabla y = u 1_\omega & (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ y(x,0) = y_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad + \text{cond. bord}$$

  $M \in \mathbf{R}^N$, $\varepsilon > 0$ 'petit', u contrôle, y_0 donnée initiale.
- $\varepsilon = 0,\ u = 0$: $\exists T^*(M, \Omega) > 0$ tel que $y(T^*, x) = 0\ \forall x \in \Omega$.
- $\varepsilon > 0$: $\exists u$ tel que $y(T, x) = 0\ \forall x \in \Omega$ (contrôlabilité à zéro)

Problème

- $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert régulier borné, $\omega \subset\subset \Omega$ un ouvert, $T > 0$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial}{\partial t} y + \varepsilon A y + M \cdot \nabla y = u 1_\omega & (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ y(x,0) = y_0(x) & x \in \Omega \end{array} \right. + \text{cond. bord}$$

  $M \in \mathbf{R}^N$, $\varepsilon > 0$ 'petit', u contrôle, y_0 donnée initiale.

- $\varepsilon = 0,\ u = 0 : \exists T^*(M, \Omega) > 0$ tel que $y(T^*, x) = 0\ \forall x \in \Omega$.
- $\varepsilon > 0 : \exists u$ tel que $y(T, x) = 0\ \forall x \in \Omega$ (contrôlabilité à zéro)

Question 1: Si $T < T^*$, est-ce vrai que le coût de la contrôlabilité à zéro explose quand $\varepsilon \searrow 0$?

Problème

- $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert régulier borné, $\omega \subset\subset \Omega$ un ouvert, $T > 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} y + \varepsilon A y + M \cdot \nabla y = u 1_\omega & (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ y(x,0) = y_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad + \text{cond. bord}$$

  $M \in \mathbf{R}^N$, $\varepsilon > 0$ 'petit', u contrôle, y_0 donnée initiale.

- $\varepsilon = 0,\ u = 0 : \exists T^*(M,\Omega) > 0$ tel que $y(T^*, x) = 0\ \forall x \in \Omega$.
- $\varepsilon > 0 : \exists u$ tel que $y(T,x) = 0\ \forall x \in \Omega$ (contrôlabilité à zéro)

Question 1: Si $T < T^*$, est-ce vrai que le coût de la contrôlabilité à zéro explose quand $\varepsilon \searrow 0$?

Question 2: Si $T > T^*$, est-ce vrai que le coût de la contrôlabilité à zéro est borné (ou tend vers zéro!) quand $\varepsilon \searrow 0$?

Plan

- Equation de la chaleur en dimension 1:
  - Présentation du problème
  - Un résultat d'explosion
  - Un résultat de convergence à zéro

Plan

- Equation de la chaleur en dimension 1:
  - Présentation du problème
  - Un résultat d'explosion
  - Un résultat de convergence à zéro
- Extensions et perspectives:
  - Equation de Burgers.
  - Equation de KdV linéarisé.
  - ...

Partie I: Chaleur

$(\varepsilon, T, L, M) \in (0, +\infty)^4$

- Équation de la chaleur, conditions aux limites Dirichlet, $N = 1$

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xx} + M y_x = 0 & (t,x) \in (0,T) \times (0,L), \\ y(t,0) = u(t), \quad y(t,L) = 0 & t \in (0,T), \\ y(x,0) = y_0(x) & x \in (0,L) \end{cases}$$

$(\varepsilon, T, L, M) \in (0, +\infty)^4$

- Équation de la chaleur, conditions aux limites Dirichlet, $N = 1$

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xx} + M y_x = 0 & (t,x) \in (0,T) \times (0,L), \\ y(t,0) = u(t), \quad y(t,L) = 0 & t \in (0,T), \\ y(x,0) = y_0(x) & x \in (0,L) \end{cases}$$

u contrôle, $y_0 \in L^2(0,L)$ condition initiale

$(\varepsilon, T, L, M) \in (0, +\infty)^4$

- Équation de la chaleur, conditions aux limites Dirichlet, $N = 1$

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xx} + M y_x = 0 & (t,x) \in (0,T) \times (0,L), \\ y(t,0) = u(t), \quad y(t,L) = 0 & t \in (0,T), \\ y(x,0) = y_0(x) & x \in (0,L) \end{cases}$$

u contrôle, $y_0 \in L^2(0,L)$ condition initiale

• Il existe $u \in L^2(0,T)$ tel que $y(T,x) = 0 \quad \forall x \in (0,L)$
(Fursikov-Imanuvilov, 1996).

$(\varepsilon, T, L, M) \in (0, +\infty)^4$

- Équation de la chaleur, conditions aux limites Dirichlet, $N = 1$

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xx} + M y_x = 0 & (t,x) \in (0,T) \times (0,L), \\ y(t,0) = u(t), \quad y(t,L) = 0 & t \in (0,T), \\ y(x,0) = y_0(x) & x \in (0,L) \end{cases}$$

u contrôle, $y_0 \in L^2(0,L)$ condition initiale

• Il existe $u \in L^2(0,T)$ tel que $y(T,x) = 0 \quad \forall x \in (0,L)$ (Fursikov-Imanuvilov, 1996).

• On appele $U(\varepsilon, T, L, M, y_0)$ cet ensemble

Objectif

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xx} + M y_x = 0, \\ y_{|x=0} = u,\ y_{|x=L} = 0, \\ y_{|t=0} = y_0, \end{cases}$$

Objectif

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xx} + M y_x = 0, \\ y_{|x=0} = u, \; y_{|x=L} = 0, \\ y_{|t=0} = y_0, \end{cases}$$

Coût de la contrôlabilité à zéro:

$$K(\varepsilon, T, L, M) = \sup_{\|y_0\|_{L^2(0,L)} \leq 1} \{\min \|u\|_{L^2(0,T)} : u \in U(\varepsilon, T, L, M, y_0)\}$$

Comportement de K quand ε devient petit?

Objectif

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xx} + M y_x = 0, \\ y_{|x=0} = u, \; y_{|x=L} = 0, \\ y_{|t=0} = y_0, \end{cases}$$

Coût de la contrôlabilité à zéro:

$$K(\varepsilon, T, L, M) = \sup_{\|y_0\|_{L^2(0,L)} \leq 1} \{\min \|u\|_{L^2(0,T)} : u \in U(\varepsilon, T, L, M, y_0)\}$$

Comportement de K quand ε devient petit?

Mettons $\varepsilon = 0$:

- $T < L/M \Rightarrow$ la solution ne peut pas être zéro

Objectif

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xx} + M y_x = 0, \\ y_{|x=0} = u,\ y_{|x=L} = 0, \\ y_{|t=0} = y_0, \end{cases}$$

Coût de la contrôlabilité à zéro:

$$K(\varepsilon, T, L, M) = \sup_{\|y_0\|_{L^2(0,L)} \leq 1} \{\min \|u\|_{L^2(0,T)} : u \in U(\varepsilon, T, L, M, y_0)\}$$

Comportement de K quand ε devient petit?

Mettons $\varepsilon = 0$:

- $T < L/M \Rightarrow$ la solution ne peut pas être zéro
- $T \geq L/M \Rightarrow$ la solution devient automatiquement zéro

Résultat négatif

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xx} + M y_x = 0, \\ y_{|x=0} = u,\ y_{|x=L} = 0, \\ y_{|t=0} = y_0, \end{cases}$$

Résultat négatif

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xx} + M y_x = 0, \\ y_{|x=0} = u,\ y_{|x=L} = 0, \\ y_{|t=0} = y_0, \end{cases}$$

Résultat 1:
Supposons que $T < L/M$. Alors,

$$K(\varepsilon, T, L, M) \geq e^{C/\varepsilon} \text{ quand } \varepsilon \searrow 0^+$$

Preuve: Problème adjoint:

$$\begin{cases} -\varphi_t - \varepsilon \varphi_{xx} - M \varphi_x = 0, \\ \varphi_{|x=0} = 0 = \varphi_{|x=L}, \\ \varphi_{|t=T} = \varphi_T, \end{cases}$$

Résultat négatif

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xx} + M y_x = 0, \\ y_{|x=0} = u,\ y_{|x=L} = 0, \\ y_{|t=0} = y_0, \end{cases}$$

Résultat 1:
Supposons que $T < L/M$. Alors,

$$K(\varepsilon, T, L, M) \geq e^{C/\varepsilon} \text{ quand } \varepsilon \searrow 0^+$$

Preuve: Problème adjoint:

$$\begin{cases} -\varphi_t - \varepsilon \varphi_{xx} - M\varphi_x = 0, \\ \varphi_{|x=0} = 0 = \varphi_{|x=L}, \\ \varphi_{|t=T} = \varphi_T, \end{cases}$$

$\|\varphi(0,\cdot)\|_{L^2(0,L)} \leq K^* \|\varphi_{x|x=0}\|_{L^2(0,T)}$ est équivalent à l'existence de $u \in L^2(0,T)$ tel que

$$y(T,x) = 0 \ \forall x \in (0,L), \quad \|u\|_{L^2} \leq \frac{K^*}{\varepsilon} \|y_0\|_{L^2}.$$

Preuve résultat négatif (1/2)

Trouver $\widehat{\varphi}_T$ tel que la solution $\widehat{\varphi}$ de

$$\begin{cases} -\widehat{\varphi}_t - \varepsilon\widehat{\varphi}_{xx} - M\widehat{\varphi}_x = 0, \\ \widehat{\varphi}_{|x=0} = 0 = \widehat{\varphi}_{|x=L}, \\ \widehat{\varphi}_{|t=T} = \widehat{\varphi}_T, \end{cases}$$

satisfasse $\widehat{\varphi}_{|t=0} \sim C$ et $\widehat{\varphi}_{x|x=0} \sim e^{-C/\varepsilon}$

Preuve résultat négatif (1/2)

Trouver $\widehat{\varphi}_T$ tel que la solution $\widehat{\varphi}$ de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\widehat{\varphi}_t - \varepsilon \widehat{\varphi}_{xx} - M \widehat{\varphi}_x = 0, \\ \widehat{\varphi}_{|x=0} = 0 = \widehat{\varphi}_{|x=L}, \\ \widehat{\varphi}_{|t=T} = \widehat{\varphi}_T, \end{array} \right.$$

satisfasse $\widehat{\varphi}_{|t=0} \sim C$ et $\widehat{\varphi}_{x|x=0} \sim e^{-C/\varepsilon}$

Idée: inégalites d'énergie à poids (vitesse finie de propagation, Augmon 1982)

Preuve résultat négatif (1/2)

Trouver $\widehat{\varphi}_T$ tel que la solution $\widehat{\varphi}$ de

$$\begin{cases} -\widehat{\varphi}_t - \varepsilon\widehat{\varphi}_{xx} - M\widehat{\varphi}_x = 0, \\ \widehat{\varphi}_{|x=0} = 0 = \widehat{\varphi}_{|x=L}, \\ \widehat{\varphi}_{|t=T} = \widehat{\varphi}_T, \end{cases}$$

satisfasse $\widehat{\varphi}_{|t=0} \sim C$ et $\widehat{\varphi}_{x|x=0} \sim e^{-C/\varepsilon}$

Idée: inégalites d'énergie à poids (vitesse finie de propagation, Augmon 1982)

On multiply par $\exp\{\zeta(t,x)\varphi\}$ et nous avons pour tout $t \in [0,T]$:

$$\int_0^L e^{\zeta/\varepsilon}|\varphi|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_t^T\int_0^L (\zeta_t + M\zeta_x - |\zeta_x|^2)e^{\zeta/\varepsilon}|\varphi|^2 \leq C\int_0^L e^{\zeta(T,x)/\varepsilon}|\varphi_T|^2$$

Preuve résultat négatif (1/2)

Trouver $\widehat{\varphi}_T$ tel que la solution $\widehat{\varphi}$ de

$$\begin{cases} -\widehat{\varphi}_t - \varepsilon \widehat{\varphi}_{xx} - M \widehat{\varphi}_x = 0, \\ \widehat{\varphi}_{|x=0} = 0 = \widehat{\varphi}_{|x=L}, \\ \widehat{\varphi}_{|t=T} = \widehat{\varphi}_T, \end{cases}$$

satisfasse $\widehat{\varphi}_{|t=0} \sim C$ et $\widehat{\varphi}_{x|x=0} \sim e^{-C/\varepsilon}$

Idée: inégalites d'énergie à poids (vitesse finie de propagation, Augmon 1982)

On multiply par $\exp\{\zeta(t,x)\varphi\}$ et nous avons pour tout $t \in [0,T]$:

$$\int_0^L e^{\zeta/\varepsilon}|\varphi|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_t^T\int_0^L (\zeta_t + M\zeta_x - |\zeta_x|^2) e^{\zeta/\varepsilon}|\varphi|^2 \leq C \int_0^L e^{\zeta(T,x)/\varepsilon}|\varphi_T|^2$$

Choix de $\widehat{\varphi}_T$ et de ζ?

Preuve résultat négatif (2/2)

Soit $r > 0$ tel que $T < -4r + L/M$ et soit $\widehat{\varphi}_T \in C_0^\infty(|x - L| < r)$. Nous cherchons une fonction $\zeta \in C^\infty([0,T] \times [0,L])$ telle que

Preuve résultat négatif (2/2)

Soit $r > 0$ tel que $T < -4r + L/M$ et soit $\widehat{\varphi}_T \in C_0^\infty(|x - L| < r)$. Nous cherchons une fonction $\zeta \in C^\infty([0,T] \times [0,L])$ telle que

$$\zeta \geq 0,\ \zeta_t + M\zeta_x - |\zeta_x|^2 \geq 0 \quad (t,x) \in [0,T] \times [0,L]$$
$$\zeta(t,x) = 0,\ (t,x) \in \{(t, u - M(T-t)) : u \in [L-r, L],\ t \in [0,T]\}$$
$$\zeta(t,x) \geq Cr^2,\ (t,x) \in \{(t, u - M(T-t)) : u \in [0, L-2r],\ t \in [0,T]\}$$

Preuve résultat négatif (2/2)

Soit $r > 0$ tel que $T < -4r + L/M$ et soit $\widehat{\varphi}_T \in C_0^\infty(|x - L| < r)$. Nous cherchons une fonction $\zeta \in C^\infty([0,T] \times [0,L])$ telle que

$$\begin{array}{l} \zeta \geq 0,\ \zeta_t + M\zeta_x - |\zeta_x|^2 \geq 0 \quad (t,x) \in [0,T] \times [0,L] \\ \zeta(t,x) = 0,\ (t,x) \in \{(t, u - M(T-t)) : u \in [L-r, L],\ t \in [0,T]\} \\ \zeta(t,x) \geq Cr^2,\ (t,x) \in \{(t, u - M(T-t)) : u \in [0, L-2r],\ t \in [0,T]\} \end{array}$$

D'après l'inégalite à poids:

$$\int_0^{2r} |\widehat{\varphi}|^2(t,x)\,dx \leq e^{-Cr^2/\varepsilon},\ \forall t \in [0,T]$$

Preuve résultat négatif (2/2)

Soit $r > 0$ tel que $T < -4r + L/M$ et soit $\widehat{\varphi}_T \in C_0^\infty(|x - L| < r)$. Nous cherchons une fonction $\zeta \in C^\infty([0,T] \times [0,L])$ telle que

$$\begin{array}{l} \zeta \geq 0,\ \zeta_t + M\zeta_x - |\zeta_x|^2 \geq 0 \quad (t,x) \in [0,T] \times [0,L] \\ \zeta(t,x) = 0,\ (t,x) \in \{(t, u - M(T-t)) : u \in [L-r, L],\ t \in [0,T]\} \\ \zeta(t,x) \geq Cr^2,\ (t,x) \in \{(t, u - M(T-t)) : u \in [0, L-2r],\ t \in [0,T]\} \end{array}$$

D'après l'inégalite à poids:

$$\int_0^{2r} |\widehat{\varphi}|^2(t,x)\,dx \leq e^{-Cr^2/\varepsilon},\ \forall t \in [0,T]$$

Régularité parabolique: n'importe quelle norme de $\widehat{\varphi}$ autour de $x = 0$ décroit aussi comme $e^{-C/\varepsilon}$.

Preuve résultat négatif (2/2)

Soit $r > 0$ tel que $T < -4r + L/M$ et soit $\widehat{\varphi}_T \in C_0^\infty(|x-L| < r)$. Nous cherchons une fonction $\zeta \in C^\infty([0,T] \times [0,L])$ telle que

$$\zeta \geq 0,\ \zeta_t + M\zeta_x - |\zeta_x|^2 \geq 0 \quad (t,x) \in [0,T] \times [0,L]$$
$$\zeta(t,x) = 0,\ (t,x) \in \{(t, u - M(T-t)) : u \in [L-r, L],\ t \in [0,T]\}$$
$$\zeta(t,x) \geq Cr^2,\ (t,x) \in \{(t, u - M(T-t)) : u \in [0, L-2r],\ t \in [0,T]\}$$

D'après l'inégalite à poids:

$$\int_0^{2r} |\widehat{\varphi}|^2(t,x)\,dx \leq e^{-Cr^2/\varepsilon},\ \forall t \in [0,T]$$

Régularité parabolique: n'importe quelle norme de $\widehat{\varphi}$ autour de $x = 0$ décroit aussi comme $e^{-C/\varepsilon}$. En particulier,

$$\|\widehat{\varphi}_{x|x=0}\|_{L^2(0,T)} \leq e^{-C/\varepsilon}.$$

Remarques au résultat négatif

- Preuve alternative par séries de Fourier (avec J.-M. Coron, 2005)

Remarques au résultat négatif

- Preuve alternative par séries de Fourier
  (avec J.-M. Coron, 2005)
- Le même résultat est vrai si l'on contrôle des deux côtés.

Remarques au résultat négatif

- Preuve alternative par séries de Fourier
(avec J.-M. Coron, 2005)
- Le même résultat est vrai si l'on contrôle des deux côtés.
- Le même résultat est vrai si $M < 0$ et $T < 2/|M|$.

Remarques au résultat négatif

- Preuve alternative par séries de Fourier
(avec J.-M. Coron, 2005)
- Le même résultat est vrai si l'on contrôle des deux côtés.
- Le même résultat est vrai si $M < 0$ et $T < 2/|M|$.
- Extension à dimension N, $M = M(t, x)$ et contrôle interne
(avec G. Lebeau, 2007)

Résultat positif

Résultat 2:

Supposons que $T > (4.3)L/M$. Alors,

$$K(\varepsilon, T, L, M) \leq e^{-C/\varepsilon} \text{ quand } \varepsilon \searrow 0^+$$

Résultat positif

Résultat 2:
Supposons que $T > (4.3)L/M$. Alors,

$$K(\varepsilon, T, L, M) \leq e^{-C/\varepsilon} \text{ quand } \varepsilon \searrow 0^+$$

Preuve: Problème adjoint:

$$\begin{cases} -\varphi_t - \varepsilon\varphi_{xx} - M\varphi_x = 0, \\ \varphi_{|x=0} = 0 = \varphi_{|x=L}, \\ \varphi_{|t=T} = \varphi_T. \end{cases}$$

Résultat positif

Résultat 2:
Supposons que $T > (4.3)L/M$. Alors,

$$K(\varepsilon, T, L, M) \leq e^{-C/\varepsilon} \text{ quand } \varepsilon \searrow 0^+$$

Preuve: Problème adjoint:

$$\begin{cases} -\varphi_t - \varepsilon\varphi_{xx} - M\varphi_x = 0, \\ \varphi_{|x=0} = 0 = \varphi_{|x=L}, \\ \varphi_{|t=T} = \varphi_T. \end{cases}$$

Montrer que la constante K^* de

$$\|\varphi(0,\cdot)\|_{L^2(0,L)} \leq K^* \|\varphi_{x|x=0}\|_{L^2(0,T)}$$

décroit comme $e^{-C/\varepsilon}$ lorsque $\varepsilon \searrow 0$ pour tout $\varphi_T \in L^2(0,L)$.

Preuve résultat positif

Inégalités de Carleman donnent

$$\int_{T/4}^{3T/4}\int_0^L |\varphi|^2 dx\, dt \leq K_1 \int_0^T |\varphi_{x|x=0}|^2 dt \tag{1}$$

avec $K_1 \sim e^{C/\varepsilon},\ C = C(L, M) > 0$.

Preuve résultat positif

Inégalités de Carleman donnent

$$\int_{T/4}^{3T/4}\int_0^L |\varphi|^2 dx\, dt \leq K_1 \int_0^T |\varphi_{x|x=0}|^2 dt \tag{1}$$

avec $K_1 \sim e^{C/\varepsilon},\ C = C(L, M) > 0$.

Lemme: Soient $t_1 < t_2$ avec $t_2 - t_1 > L/M$. Alors

$$\|\varphi_{|t=t_1}\|_{L^2(0,L)} \leq \exp\left\{-\frac{(M(t_2-t_1)-L)^2}{8(t_2-t_1)\varepsilon}\right\} \|\varphi_{|t=t_2}\|_{L^2(0,L)}.$$

Preuve résultat positif

Inégalités de Carleman donnent

$$\int_{T/4}^{3T/4}\int_0^L |\varphi|^2 dx\, dt \leq K_1 \int_0^T |\varphi_{x|x=0}|^2 dt \tag{1}$$

avec $K_1 \sim e^{C/\varepsilon},\ C = C(L, M) > 0$.

Lemme: Soient $t_1 < t_2$ avec $t_2 - t_1 > L/M$. Alors

$$\|\varphi_{|t=t_1}\|_{L^2(0,L)} \leq \exp\left\{-\frac{(M(t_2-t_1)-L)^2}{8(t_2-t_1)\varepsilon}\right\}\|\varphi_{|t=t_2}\|_{L^2(0,L)}.$$

Combiner avec (1) et prendre T assez grand par rapport à L/M.

Preuve résultat positif

Inégalités de Carleman donnent

$$\int_{T/4}^{3T/4}\int_0^L |\varphi|^2 dx\, dt \leq K_1 \int_0^T |\varphi_{x|x=0}|^2 dt \tag{1}$$

avec $K_1 \sim e^{C/\varepsilon},\ C = C(L,M) > 0$.

Lemme: Soient $t_1 < t_2$ avec $t_2 - t_1 > L/M$. Alors

$$\|\varphi_{|t=t_1}\|_{L^2(0,L)} \leq \exp\left\{-\frac{(M(t_2-t_1)-L)^2}{8(t_2-t_1)\varepsilon}\right\}\|\varphi_{|t=t_2}\|_{L^2(0,L)}.$$

Combiner avec (1) et prendre T assez grand par rapport à L/M.

Idée de la preuve du Lemme: inégalité d'énergie à poids avec le poids $\exp\{r(M(T-t)+x)\}$, avec $r > 0$ à choisir

Remarques au résultat positif

- Quelle est la constant optimale devant L/M? (Certainement pas 4.3!)

Remarques au résultat positif

- Quelle est la constant optimale devant L/M? (Certainement pas 4.3!)
- Le même résultat est vrai si $M < 0$ et $T > 58L/|M|$.

Remarques au résultat positif

- Quelle est la constant optimale devant L/M?
  (Certainement pas 4.3!)
- Le même résultat est vrai si $M < 0$ et $T > 58L/|M|$.
- Extension à dimension N, $M = M(t, x)$ et contrôle interne
  (avec G. Lebeau, 2007)

- Burgers, contrôlabilité ‘locale’ à zéro:

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xx} + y y_x + M y_x = 0 & (t,x) \in (0,T) \times (0,L), \\ y(t,0) = u(t), \quad y(t,L) = 0 & t \in (0,T), \\ y(x,0) = y_0(x) & x \in (0,L) \end{cases}$$

Partie II: Extensions

- Burgers, contrôlabilité 'locale' à zéro:

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xx} + y y_x + M y_x = 0 & (t,x) \in (0,T) \times (0,L), \\ y(t,0) = u(t), \quad y(t,L) = 0 & t \in (0,T), \\ y(x,0) = y_0(x) & x \in (0,L) \end{cases}$$

Résultat 3 (avec O. Glass, 2006): $\|y_0\| << 1$, il existe $C_0 > 0$ tel que si $T > C_0 L/|M|$, il existe u avec

$$y(T,x) = 0 \;\; \forall x \in [0,L] \quad \text{et} \quad \|u\|_{L^2} \leq e^{-C/\varepsilon} \|y_0\|_{L^2}.$$

Partie II: Extensions

- Burgers, contrôlabilité ‘locale’ à zéro:

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xx} + y y_x + M y_x = 0 & (t,x) \in (0,T) \times (0,L), \\ y(t,0) = u(t), \quad y(t,L) = 0 & t \in (0,T), \\ y(x,0) = y_0(x) & x \in (0,L) \end{cases}$$

Résultat 3 (avec O. Glass, 2006): $\|y_0\| << 1$, il existe $C_0 > 0$ tel que si $T > C_0 L/|M|$, il existe u avec

$$y(T,x) = 0 \ \ \forall x \in [0,L] \quad \text{et} \quad \|u\|_{L^2} \leq e^{-C/\varepsilon} \|y_0\|_{L^2}.$$

Preuve: travelling waves (Burgers visqueux) + contrôlabilité

- Burgers, contrôlabilité 'locale' à zéro:

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xx} + y y_x + M y_x = 0 & (t,x) \in (0,T)\times(0,L), \\ y(t,0) = u(t), \quad y(t,L) = 0 & t \in (0,T), \\ y(x,0) = y_0(x) & x \in (0,L) \end{cases}$$

Résultat 3 (avec O. Glass, 2006): $\|y_0\| << 1$, il existe $C_0 > 0$ tel que si $T > C_0 L/|M|$, il existe u avec

$$y(T,x) = 0 \;\; \forall x \in [0,L] \quad \text{et} \quad \|u\|_{L^2} \leq e^{-C/\varepsilon} \|y_0\|_{L^2}.$$

Preuve: travelling waves (Burgers visqueux) + contrôlabilité

Résultat négatif? Optimalité de la constante C_0?

Partie II: Extensions

- Korteweg-de-Vries linéarisé:

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xxx} + M y_x = 0 & (t,x) \in (0,T) \times (0,L), \\ y(t,0) = u(t),\ y(t,L) = 0,\ y_x(t,L) = 0 & t \in (0,T), \\ y(x,0) = y_0(x) & x \in (0,L) \end{cases}$$

Partie II: Extensions

- Korteweg-de-Vries linéarisé:

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xxx} + M y_x = 0 & (t,x) \in (0,T) \times (0,L), \\ y(t,0) = u(t),\ y(t,L) = 0,\ y_x(t,L) = 0 & t \in (0,T), \\ y(x,0) = y_0(x) & x \in (0,L) \end{cases}$$

Résultat 4 (avec O. Glass, 2007): $M > 0$, il existe $C_1 > 0$ tel que si $T > C_1 L/M$, il existe u avec

$$y(T,x) = 0 \ \ \forall x \in [0,L] \quad \text{et} \quad \|u\|_{L^2} \leq e^{-C/\varepsilon^{1/2}} \|y_0\|_{L^2}.$$

- Korteweg-de-Vries linéarisé:

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xxx} + M y_x = 0 & (t,x) \in (0,T) \times (0,L), \\ y(t,0) = u(t),\ y(t,L) = 0,\ y_x(t,L) = 0 & t \in (0,T), \\ y(x,0) = y_0(x) & x \in (0,L) \end{cases}$$

Résultat 4 (avec O. Glass, 2007): $M > 0$, il existe $C_1 > 0$ tel que si $T > C_1 L/M$, il existe u avec

$$y(T,x) = 0 \ \ \forall x \in [0,L] \quad \text{et} \quad \|u\|_{L^2} \leq e^{-C/\varepsilon^{1/2}} \|y_0\|_{L^2}.$$

Résultat 5 (avec O. Glass, 2008): si $T < L/M$, le coût de la contrôlabilité à zéro satisfait

$$K \geq e^{C/\varepsilon}.$$

- Modèle de Chaleur-KdV linéarisé ($\delta, \epsilon > 0$):

$$\begin{cases} y_t - \delta y_{xxx} - \varepsilon y_{xx} + M y_x = 0 & (t,x) \in (0,T) \times (0,L), \\ y(t,0) = u(t),\ y(t,L) = 0,\ y_x(t,L) = 0 & t \in (0,T), \\ y(x,0) = y_0(x) & x \in (0,L) \end{cases}$$

Partie II: Extensions

- Modèle de Chaleur-KdV linéarisé ($\delta, \epsilon > 0$):

$$\begin{cases} y_t - \delta y_{xxx} - \varepsilon y_{xx} + M y_x = 0 & (t,x) \in (0,T) \times (0,L), \\ y(t,0) = u(t),\ y(t,L) = 0,\ y_x(t,L) = 0 & t \in (0,T), \\ y(x,0) = y_0(x) & x \in (0,L) \end{cases}$$

Résultat 6 (avec O. Glass, 2008): $M > 0$, il existe $C_2 > 0$ tel que si $T > C_2 L/M$, il existe u avec

$$y(T,x) = 0 \ \ \forall x \in [0,L] \quad \text{et} \quad \|u\|_{L^2} \leq e^{-C/\max\{\varepsilon, \delta^{1/2}\}} \|y_0\|_{L^2}.$$

- Modèle de Chaleur-KdV linéarisé ($\delta, \epsilon > 0$):

$$\begin{cases} y_t - \delta y_{xxx} - \varepsilon y_{xx} + M y_x = 0 & (t,x) \in (0,T) \times (0,L), \\ y(t,0) = u(t),\ y(t,L) = 0,\ y_x(t,L) = 0 & t \in (0,T), \\ y(x,0) = y_0(x) & x \in (0,L) \end{cases}$$

Résultat 6 (avec O. Glass, 2008): $M > 0$, il existe $C_2 > 0$ tel que si $T > C_2 L/M$, il existe u avec

$$y(T,x) = 0 \ \ \forall x \in [0,L] \quad \text{et} \quad \|u\|_{L^2} \leq e^{-C/\max\{\varepsilon,\delta^{1/2}\}} \|y_0\|_{L^2}.$$

Résultat négatif?

Partie II: Extensions

- Système de Stokes, $\Omega \in \mathbf{R}^3$ ouvert borné et régulier, $\gamma \subset\subset \partial\Omega$:

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon \Delta y + M \cdot \nabla y + \nabla p = 0 & (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ y = u(t) 1_\gamma & t \in (0,T) \times \partial\Omega, \\ y(x,0) = y_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

Partie II: Extensions

- Système de Stokes, $\Omega \in \mathbf{R}^3$ ouvert borné et régulier, $\gamma \subset\subset \partial\Omega$:

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon\Delta y + M \cdot \nabla y + \nabla p = 0 & (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ y = u(t)1_\gamma & t \in (0,T) \times \partial\Omega, \\ y(x,0) = y_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

Est-ce que l'on peut dire quelque chose?