Statistiques spectrales pour des systèmes aléatoires dans le régime localisé

F. Klopp

Université Paris 13

Séminaire de Mathématiques Appliquées
Collège de France
Le 29/04/2011

Plan de l'exposé :

Le prototype : le modèle d'Anderson

Sur $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, on considère le modèle d'Anderson $H_\omega = -\Delta + \lambda V_\omega$ où, pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}^d} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$,

- $-\Delta$ est le Laplacien discret $(-\Delta u)_n = \sum_{|m-n|=1} u_m$;
- V_ω est potentiel aléatoire $(V_\omega u)_n = \omega_n u_n$;
  les variables aléatoires $(\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ sont i.i.d. et admettent une densité bornée à support compact, disons, g.

Pour $L \in \mathbb{N}$, soit $H_\omega(\Lambda)$ l'opérateur H_ω restreint à Λ (où $\Lambda = \Lambda_L = [0,L]^d$).

But de l'exposé : décrire le comportement statistique des valeurs propres et vecteurs propres de $H_\omega(\Lambda)$ quand $|\Lambda| \to +\infty$.

Quelques résultats typiques : Soit N la densité d'état intégrée de H_ω définie par

$$N(E) := \lim_{|\Lambda|\to+\infty} \frac{\#\{\text{v.p. de } H_\omega(\Lambda) \text{ inférieures à E}\}}{|\Lambda|}$$

N est la fonction de répartition d'une mesure de probabilité de support Σ, le spectre presque sûr de H_ω.

Soient $E_1(\omega,\Lambda) \leq E_2(\omega,\Lambda) \leq \cdots \leq E_{|\Lambda|}(\omega,\Lambda)$ les valeurs propres de $H_\omega(\Lambda)$ (répétées selon leur multiplicité).

V.p. renormalisées : $N(E_1(\omega,\Lambda)) \leq N(E_2(\omega,\Lambda)) \leq \cdots \leq N(E_{|\Lambda|}(\omega,\Lambda)) \leq \cdots$

Les statistiques locales : Fixons E_0 une énergie telle qu'il existe $\tilde\rho \geq 0$ tel que l'on ait

$$\forall a > b,\ \exists C(a,b) > 0,\ \exists \varepsilon_0 > 0, \forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0), \quad |N(E_0 + a\varepsilon) - N(E_0 + b\varepsilon)| \geq C(a,b)\varepsilon^{1+\tilde\rho}.$$

Considérons le processus ponctuel $\Xi(\omega,\Lambda) = \sum_{n=1}^{|\Lambda|} \delta_{|\Lambda|[N(E_n(\omega,\Lambda))-N(E_0)]}$. Alors, on a

Théorème (Ge-Kl :11)

Si λ est suffisamment grand, quand $|\Lambda| \to +\infty$, le processus ponctuel $\Xi(\omega,\Lambda)$ converge faiblement vers le processus de Poisson d'intensité 1 sur $\mathbb{R}$.

Prouvé par Minami (96) si $\frac{dN}{dE}(E_0) > 0$.

Distribution empirique des espacement de niveaux renormalisés :

On définit $DEN(x;\Lambda,\omega) = \dfrac{\#\{j;\ \delta E_j(\Lambda,\omega) \geq x\}}{|\Lambda|}$
où $\delta E_j(\Lambda,\omega) = |\Lambda|(N(E_{j+1}(\Lambda,\omega)) - N(E_j(\Lambda,\omega))) \geq 0$.
On montre

Théorème (Kl :10)

ω-presque sûrement, $DEN(x;\Lambda,\omega)$ converge uniformément vers $e^{-x}\mathbf{1}_{x\geq 0}$.

Ergodicité asymptotique : Pour ω fixé, considérons le processus ponctuel
$\Xi(\omega,t,\Lambda) = \sum_{n=1}^{|\Lambda|} \delta_{|\Lambda|[N(E_n(\omega,\Lambda))-t]}$ sous la distribution uniforme en $t \in [0,1]$.

Théorème (Kl :10)

Pour λ suffisamment grand, ω-ps, quand $|\Lambda| \to +\infty$, la loi du processus $\Xi(\omega,\cdot,\Lambda)$ sous la loi uniforme$\mathbf{1}_{[0,1]}(t)dt$ converge vers la loi du processus de Poisson d'intensité 1 sur $\mathbb{R}$.

Conjecturé par Minami (06).

Le modèle aléatoire

Considérons H_ω, un opérateur $\mathbb{Z}^d$-ergodique sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ or $L^2(\mathbb{Z}^d)$ de spectre presque sûr Σ.

(IAD) il existe $R_0 > 0$ tel que si $\text{dist}(\Lambda,\Lambda') > R_0$ alors $H_\omega(\Lambda)$ et $H_\omega(\Lambda')$ indépendants

Supposons que H_ω admette une densité d'états intégrée (DEI) i.e.

$$N(E) := \lim_{|\Lambda|\to+\infty} \frac{\#\{\text{v.p. de } H_\omega(\Lambda) \text{ inférieures à E}\}}{|\Lambda|}.$$

Sur I un intervalle compact, on suppose

(W) une estimée de Wegner i.e. pour $J \subset I$,

$$\mathbb{E}\left[\text{tr}(\mathbf{1}_J(H_\omega(\Lambda)))\right] \leq C|J|\,|\Lambda|$$

Conséquences :

- $\mathbb{P}(\sigma(H_\omega(\Lambda)) \cap J \neq \emptyset\}) \leq \mathbb{E}\left[\text{tr}(\mathbf{1}_J(H_\omega(\Lambda)))\right] \leq C|J|\,|\Lambda|$.
- N fonction de répartition d'une mesure a.c. de densité ν bornée.

(M) une estimée de Minami i.e. pour $J \subset I$,

$$\mathbb{E}\left[\operatorname{tr}(\mathbf{1}_J(H_\omega(\Lambda))) \cdot (\operatorname{tr}(\mathbf{1}_J(H_\omega(\Lambda))) - 1)\right] \leq C(|J|\,|\Lambda|)^2.$$

Conséquence : $\mathbb{P}(\#(\sigma(H_\omega(\Lambda)) \cap J) \geq 2\}) \leq C(|J|\,|\Lambda|)^2$.

Le régime localisé : le spectre dans I est purement ponctuel et les fonctions propres sont exp. déc.

(Loc) Il existe $\xi \in (0,1]$ et $\gamma > 0$ tels que, pour tout $p > 0$, il existe $q > 0$ tel que, pour $L \geq 1$, avec une probabilité supérieure à $1 - L^{-p}$, si
- $\varphi_{n,\omega}$ est un vecteur propre normalisé de $H_\omega(\Lambda_L)$ associé à $E_{n,\omega} \in I$,
- $x_n(\omega) \in \Lambda_L$ est un maximum de $x \mapsto \|\varphi_{n,\omega}\|_{x+C}$ on Λ_L

alors, pour $x \in \Lambda_L$, on a $\|\varphi_{n,\omega}\|_{x+C} \leq L^q e^{-\gamma|x-x_n(\omega)|^\xi}$.

MMF permet $\xi = 1$, AME ξ arbitrairement proche de 1.

Quelques exemples :
- Le modèle d'Anderson discret.
- Le modèle d'Anderson continu :
  - $H_\omega = -\Delta + V_\omega$
  - $-\Delta$ est le Laplacien sur $\mathbb{R}^d$,
  - $V_\omega = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} \omega_\gamma u(\cdot - \gamma)$
    - $(\omega_\gamma)_\gamma$ v.a. i.i.d. avec une distribution assez régulière,
    - u bornée à support compact et de signe fixé.

Les questions :

Statistique locale des niveaux : Soit $E_0 \in I \cap \Sigma$.

Niveaux renormalisés en E_0 :

$$\xi_j(E_0,\omega,\Lambda) = |\Lambda|\,(N(E_j(\omega,\Lambda)) - N(E_0)).$$

Processus ponctuel : $\Xi(\xi,E_0,\omega,\Lambda) = \sum_{j=1}^{N} \delta_{\xi_j(E_0,\omega,\Lambda)}(\xi)$.

Statistique des centres de localisation : Soit $\varphi_{n,\omega}$ un vecteur propre normalisé associé à $E_{n,\omega} \in I$.

Centre de localisation pour $E_{n,\omega}$: maximum de $x \mapsto \|\varphi_{n,\omega}\|_{x+C}$.

À priori pas unique !

Centres de localisation contenus dans une boule de rayon $\asymp (\log L)^{1/\xi}$.

Processus ponctuel : on fixe $x_0 \in [0,1]^d$

$$\Xi^c(\xi,x;E_0,\Lambda_L) = \sum_{j=1}^{N} \delta_{(x_j(\omega)-Lx_0)/L}(x).$$

Statistiques jointes : processus ponctuel :

$$\Xi^2(\xi,x;E_0,\Lambda_L) = \sum_{j=1}^{N} \delta_{\xi_j(E_0,\omega,\Lambda)}(\xi) \otimes \delta_{(x_j(\omega)-Lx_0)/L}(x).$$

Statistiques jointes : on peut changer d'échelle. Fixons une fonction d'échelle $\Lambda \mapsto \ell_\Lambda$ t.q.

- $\ell_\Lambda \to +\infty$ quand $|\Lambda| \to +\infty$,
- ℓ_Λ pas trop grand, ni trop petit,

Processus ponctuel :

$$\Xi^2_\Lambda(\xi, x; E_0, \ell) = \sum_{j=1}^{N} \delta_{\ell^d_\Lambda(N(E_j(\omega,\Lambda))-N(E_0))}(\xi) \otimes \delta_{(x_j(\omega)-Lx_0)/\ell_\Lambda}(x).$$

Statistiques des espacements de niveaux : Soient $(E_j(\Lambda,\omega))_{1\leq j\leq N}$ les v.p. dans $I = [a,b]$ ordonnées de façon croissante ; on définit $N_I = (N(\cdot) - N(a))/|N(I)|$.

Espacements de niveaux renormalisés

$$\delta E_j(\Lambda,\omega) = |\Lambda|(N_I(E_{j+1}(\Lambda,\omega)) - N_I(E_j(\Lambda,\omega))) \geq 0.$$

Distribution empirique : $DEN(x;\Lambda,\omega) = \dfrac{\#\{j;\ \delta E_j(\Lambda,\omega) \geq x\}}{N}$.

Un autre point de vue : le spectre de H_ω dans I est p.p. ; les fonct. prop. décroissent exp. Centres de localisation bien définis.
Pour un ω typique, on considère les v.p. dans I dont le centre de localisation se trouve dans Λ_L.
Les questions restent les mêmes ; les réponses aussi !

Statistique locale des niveaux :

Théorème (Ge-Kl :10)

Supposons (IAD), (W), (M) et (Loc). Soit $E_0 \in I$ telle qu'il existe $\tilde\rho \in [0, 1/(1+d))$ t.q.

$$\forall a > b,\ \exists C(a,b) > 0,\ \exists \varepsilon_0 > 0, \forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0), \quad |N(E_0+a\varepsilon) - N(E_0+b\varepsilon)| \geq C(a,b)\varepsilon^{1+\tilde\rho}.$$

Quand $|\Lambda| \to +\infty$, $\Xi(\xi, E_0, \omega, \Lambda)$ converge faiblement vers un processus de Poisson sur $\mathbb{R}$ de densité la mesure de Lebesgue.

Connu pour certains modèles si $\dfrac{dN}{dE}(E_0) > 0$ (Molchanov, Minami, Combes-Germinet-Klein).

Distribution jointes des valeurs propres et des centres de localisation :

Théorème (Ge-Kl :10)

Supposons (IAD), (W), (M) et (Loc). Soit $E_0 \in I$ comme dans le théorème précédent. Quand $|\Lambda| \to +\infty$, $\Xi^2(\xi, E_0, \omega, L)$ converge faiblement vers un processus de Poisson sur $\mathbb{R} \times [-1,1]^d$ de densité la mesure de Lebesgue.

Connu pour certains modèles si $\dfrac{dN}{dE}(E_0) > 0$ (Nakano, Nakano-Killip).

Distributions jointes à différentes échelles

Fixons une suite d'échelles $\ell = (\ell_\Lambda)_\Lambda$ telle que

$$\frac{(\ell_\Lambda)^\xi}{\log|\Lambda|} \underset{|\Lambda|\to+\infty}{\to} +\infty \quad \text{and} \quad \ell_\Lambda \leq |\Lambda|^{1/d}.$$

Soit $E_0 \in I$ t.q. $\nu(E_0) > 0$; rappelons que

$$\Xi^2_\Lambda(\xi, x; E_0, \ell) = \sum_{j=1}^N \delta_{\ell^d_\Lambda(E_j(\omega,\Lambda)-E_0)}(\xi) \otimes \delta_{(x_j(\omega)-Lx_0)/\ell_\Lambda}(x).$$

Ce processus est à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. On définit $c_\ell = \lim_{|\Lambda|\to+\infty} |\Lambda|^{1/d}\ell_\Lambda^{-1} \in [1, +\infty]$.

Théorème (Ge-Kl :10)

Sous les hyp. du théorème précédent, $\Xi^2_\Lambda(\xi, x; E_0, \ell)$ converge faiblement vers un processus de Poisson sur $\mathbb{R} \times (-c_\ell, c_\ell)^d$ de densité la mesure de Lebesgue.

Pour des échelles différentes : soient $\ell = (\ell_\Lambda)_\Lambda$ et $\ell' = (\ell'_\Lambda)_\Lambda$ comme ci-dessus.
Distribution :

$$\Xi^2_\Lambda(\xi, x; E_0, \ell, \ell') = \sum_{j=1}^N \delta_{\ell^d_\Lambda(N(E_j(\omega,\Lambda))-N(E_0))}(\xi) \otimes \delta_{(x_j(\omega)-Lx_0)/\ell'_\Lambda}(x).$$

Théorème

Soient J et X respectivement des ouverts bornées de $\mathbb{R}$ et $(-c_{\ell'}, c_{\ell'})^d \subset \mathbb{R}^d$. On a

- *si $\ell'_\Lambda/\ell_\Lambda \to 0$ alors, dans L^1_ω,*

$$\int_{J\times X} \Xi^2_\Lambda(\xi, x; E_0, \ell, \ell') d\xi dx \underset{|\Lambda|\to+\infty}{\to} 0;$$

- *si $\ell'_\Lambda/\ell_\Lambda \to +\infty$ alors, dans L^1_ω,*

$$\left(\frac{\ell_\Lambda}{\ell'_\Lambda}\right)^d \int_{J\times X} \Xi^2_\Lambda(\xi, x; E_0, \ell, \ell') d\xi dx \underset{|\Lambda|\to+\infty}{\to} |J| \cdot |X|.$$

Ergodicité asymptotique universelle : le processus ponctuel :

Soit $J = [a,b]$ un intervalle compact tel que $N(b) - N(a) =: |N(J)| > 0$. Posons $N_J(\cdot) := |N(J)|^{-1}[N(\cdot) - N(a)]$. Considérons les valeurs propres de $H_\omega(\Lambda)$ dans J.

V.p. renormalisées : $N_J(E_n(\omega,\Lambda)) \le N_J(E_{n+1}(\omega,\Lambda)) \le \cdots \le N_J(E_m(\omega,\Lambda)) \le \cdots$
Centres de localisation : $x_n(\omega,\Lambda), \quad x_{n+1}(\omega,\Lambda), \quad \cdots, \quad x_m(\omega,\Lambda), \quad \cdots$

Fixons $\alpha > 1$ et une suite croissante d'échelles $\ell = (\ell_\Lambda)_\Lambda$ ($\Lambda = \Lambda_L$) telles que

- $(\log L)^\alpha \le \ell_\Lambda \le L$,
- la limite suivante existe $\lim_{L\to+\infty} L^{-1}\ell_\Lambda =: c \in [0,1]$.

Soient $g_E : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ and $g_X : [0,1]^d \to \mathbb{R}^+$ deux densités de probabilité.
Pour une configuration ω fixée, considérons le processus ponctuel

$$\Xi^2_\Lambda(e,x;\ell,\omega) = \sum_{j=1}^{N} \delta_{|N(J)|\ell^d_\Lambda[N_J(E_j(\omega,\Lambda))-e]} \otimes \delta_{(x_j(\omega,\Lambda)-Lx)/\ell_\Lambda}.$$

sous la loi de densité $g_E \otimes g_X$ sur $\Lambda \times [0,1]^{d+1}$.

Ergodicité asymptotique universelle : les quantités renormalisés

Théorème (Kl :11)

Supposons (IAD), (W), (M) et (Loc). Supposons que $J \subset I$, la région de localisation, et que $|N(J)| > 0$.
Alors, ω-ps, la loi du processus $\Xi^2_\Lambda(\cdot,\cdot;\ell,\omega)$ sous la loi $g_E \otimes g_X$ converge converge vers la loi du processus Poisson d'intensité 1 sur $\mathbb{R} \times [-1/c, 1/c]^d$.

Statistiques des valeurs propres et des centres de localisation :

Théorème (Kl :11)

Supposons (IAD), (W), (M) et (Loc). Supposons que $J \subset I$, la région de localisation, et que $|N(J)| > 0$.
Définissons

- *la densité $\nu_J := \dfrac{1}{|N(J)|}\nu(E)\mathbf{1}_J(E)$ où $\nu = \dfrac{dN}{dE}$;*
- *le processus $\tilde{\Xi}^2_J(E,x;\omega,\ell,\Lambda) = \sum_{E_n(\omega,\Lambda)\in J} \delta_{\nu(E)\ell^d_\Lambda[E_n(\omega,\Lambda)-E]} \otimes \delta_{(x_j(\omega,\Lambda)-Lx)/\ell_\Lambda}.$*

Alors, ω-ps, la loi du processus $\tilde{\Xi}^2_J(\cdot,\cdot;\omega,\ell,\Lambda)$ sous la loi $\nu_J \otimes g_X$ converge converge vers la loi du processus Poisson d'intensité 1 sur $\mathbb{R} \times [-1/c, 1/c]^d$..

Distribution des espacements des niveaux renormalisés :

Soit $(E_j(\omega,\Lambda))_{1\leq j\leq \tilde{N}}$ v.p. ordonnées dans J (choisi comme ci-avant).
Espacements renormalisés : $\delta E_j(\omega,\Lambda) = |\Lambda|(N_J(E_{j+1}(\omega,\Lambda)) - N_J(E_j(\omega,\Lambda))) \geq 0$.

Distribution empirique : $DEN(x;\omega,\Lambda) = \dfrac{\#\{j;\ \delta E_j(\omega,\Lambda) \geq x\}}{\tilde{N}}$ pour $x > 0$.

Théorème (Kl :11)

Quand $|\Lambda| \to +\infty$, la distribution empirique des espacements $DEN(x;\omega,\Lambda)$ converge uniformément en probabilité vers la distribution $x \mapsto e^{-x}\mathbf{1}_{x\geq 0}$.

Résultat de [Ge-Kl :10] sous hypothèse de régularité sur N.

Distribution des espacements de niveaux : Distribution empirique des espacements $\delta_J E_j(\omega,\Lambda) = |\Lambda|\,|N(J)|\,(E_{j+1}(\omega,\Lambda) - E_j(\omega,\Lambda))$ notée $DEN'(x;\omega,\Lambda)$.

Théorème (Kl :11)

Quand $|\Lambda| \to +\infty$, $DEN'(x;\omega,\Lambda)$ converge en probabilité uniformément vers la distribution $x \mapsto g_{\nu,J}(x)$ définie par

$$g_{\nu,J}(x) = \frac{1}{|J|}\int_J \mathrm{e}^{-\nu_J(E)x}\nu_J(E)dE \quad \text{et} \quad \nu_J = \frac{|J|}{|N(J)|}\frac{dN}{dE}.$$

L'opérateur sur tout l'espace :

Considérons l'opérateur H_ω et $J \subset \Sigma$ un intervalle où H_ω satisfait (Loc).

Alors, ω-ps, $\sigma(H_\omega) \cap J$ fait de valeurs propres associées à des fonctions propres à décroissance exponentielle.

Proposition (Ge-Kl :10)

Supposons (IAD), (M), (W) et (Loc).
Avec probabilité 1, si $E \in J$ et φ une fonction propre normalisée associée à E alors, il existe $x(E,\omega) \in \mathbb{R}^d$ (ou $\mathbb{Z}^d$), un maximum de $x \mapsto \|\varphi\|_x$, et $C_\omega > 0$ tels que, pour $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\|\varphi\|_x \leq C_\omega(1 + |x(E,\omega)|^2)^{q/2} e^{-\gamma|x-x(E,\omega)|^\xi}.$$

De plus, si $N(J,L)$ est le nombre de valeurs propres de H_ω ayant un centre de localisation dans Λ_L, alors $N(J,L) = |N(J)|\,|\Lambda_L|\,(1+o(1))$.

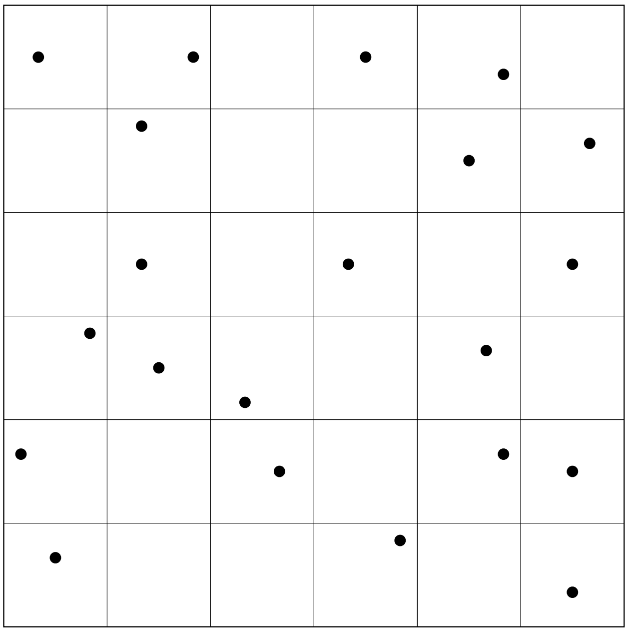
Énumérons les valeurs propres de H_ω dans J avec centre de localisation dans Λ_L :
$E_1(\omega,\Lambda) \leq E_2(\omega,\Lambda) \leq \cdots \leq E_n(\omega,\Lambda)$ et leurs centres de localisation.

Les statistiques sont alors les mêmes que celles des v.p. et c.l. de $H_\omega(\Lambda)$.

Caractérisation des valeurs propres comme variables indépendantes : l'heuristique

Régime localisé $\Rightarrow$ v.p. ne dépend que du contexte local du potentiel $\Rightarrow$ description explicite des valeurs propres dans I en terme des valeurs propres sur des cubes indépendants.

- Choisir un cube de côté L
- Trouver les centres de localisation
- Découper le grand cube en petits cubes de taille ℓ
- Difficultés :
  - plusieurs centres dans un petit cube peu probable à cause de l'estimée de Minami : $\ell^{2d}|I|^2(L/\ell)^d = \ell^d L^d |I|^2$
  - les centres sont près du bord du cube peu probable à cause de l'estimée de Wegner : $l \cdot L^{d-1} \cdot |I|$
- Avec une grande probabilité, ces difficultés n'existent pas.



Donc, avec une grande probabilité, dans I, v.p sur le grand cube sont données par v.p. sur les petits cubes.