Convergence entropique et inégalités fonctionnelles.

Ivan Gentil, Université Paris-Dauphine

Collège de France, vendredi 13 juin 2008

Introduction

Convergence entropique et inégalité de log-Sobolev faible

Equation des milieux poreux à poids

Introduction

Considérons l'EDS

$$dX_t = \sqrt{2}dB_t - \nabla\varphi(X_t)dt, \quad X_0 = \nu.$$

et

$$P_t f(x) = E_x(f(X_t)) \quad \text{où} \quad \nu = \delta_x.$$

La formule d'Ito prouve que le semi-groupe d'**Ornstein-Uhlenbeck** vérifie l'EDP suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u &= \Delta u - \nabla\varphi(x)\cdot\nabla u \\ &:= Lu, \qquad \text{avec} \quad u(0,x) = f(x). \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'opérateur adjoint de $(P_t^*(\cdot))_{t\geqslant 0}$ dans $L^2(dx)$

$$\int P_t(f)d\nu = \int f dP_t^*(\nu), \quad \int P_t(f) g dx = \int f P_t^*(g) dx$$

Si ν est une probabilité on a $P_t^*(\nu) = Loi(X_t)$ et $P_t^*(g)$ vérifie l'EDP de **Fokker-Planck** suivante

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t,x) &= \Delta u + \mathrm{div}(\mathrm{u}\nabla\varphi(\mathrm{x})) \\ &:= L^* u, \qquad \text{avec} \quad \mathrm{u}(0,\mathrm{x}) = \mathrm{g}(\mathrm{x}). \end{aligned}$$

On a $L^*(e^{-\varphi}) = 0$, $e^{-\varphi}$ est un état stationnaire,

$$Loi(X_t) \to d\mu_\varphi := \frac{1}{Z} e^{-\varphi} dx?$$

- $u(t,x) \to 0$ si $\int e^{-\varphi} = \infty$, ex: $\varphi = 0$, **équation de la chaleur**.
- $u(t,x) \to \int u_0 d\mu_\varphi$ si $\int e^{-\varphi} < \infty$ où

$$d\mu_\varphi(x) := \frac{exp(-\varphi(x))}{Z_\varphi} dx, \quad Z_\varphi = \int exp(-\varphi(x))dx$$

ex: $\nabla\varphi(x) = x$, l'équation classique d'Ornstein-Uhlenbeck.

Le "bon" espace pour étudier O-U est $L^2(\mu_\varphi)$, en effet L est autoadjoint :

$$\int f\, Lg\, d\mu_\varphi = \int g\, Lf\, d\mu_\varphi = -\int \nabla f \cdot \nabla g d\mu_\varphi.$$

et par suite

$$L^*(g) = e^{-\varphi} L(e^\varphi g) \quad P_t^*(g) = e^{-\varphi} P_t(e^\varphi g).$$

Notons que la masse totale est conservée pour le semi-groupe O-U:

$$\forall t \geqslant 0, \int u(t,x) d\mu_\varphi(x) = \int u_0 d\mu_\varphi.$$

Cadre : on ici que suppose $\int e^{-\varphi} = 1 < \infty$ et $\mu_\varphi(x)dx = e^{-\varphi(x)}dx$.

Comprendre la convergence du semi-groupe d'Orstein-Uhlenbeck.
Vitesse, espace...

Théorème (Convergence L^2)

L'inégalité de Poincaré *ou de* **trou spectral** *:*

$$\forall f, \quad \mathbf{Var}_{\mu_\varphi}(f) := \int \left(f - \int f d\mu_\varphi \right)^2 d\mu_\varphi \leqslant C_P \int |\nabla f|^2 d\mu_\varphi,$$

est **équivalente** *à la décroissance exponentielle dans L^2 de u vers $\int u_0 d\mu_\varphi$:*

$$\int \left(u(t,x) - \int u_0 d\mu_\varphi \right)^2 d\mu_\varphi \leqslant e^{-2t/C_P} \mathbf{Var}_{\mu_\varphi}(u_0).$$

Preuve : il suffit de dériver la variance :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Var}_{\mu_\varphi}(u) = -2\int |\nabla u|^2 d\mu_\varphi$$

et l'inégalité de Poincaré donne

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Var}_{\mu_\varphi}(u) \leq -\frac{2}{C_P}\mathbf{Var}_{\mu_\varphi}(u)$$

Il reste à appliquer le lemme de Gronwall.

La réciproque est juste la dérivation de l'inégalité au temps $t = 0$.

Remarque : ici il faut considérer u_0 dans L^2 et Poincaré.

Théorème (Convergence dans $L\log L$)

L'inégalité de Sobolev logarithmique *:*

$$\forall f>0, \quad \mathbf{Ent}_{\mu_\varphi}(f) := \int f \log \frac{f}{\int f d\mu_\varphi} d\mu_\varphi \leqslant C_{LS} \int \frac{|\nabla f|^2}{f} d\mu_\varphi,$$

est **équivalente** *à la décroissance exponentielle de l'entropie de u vers $\int u_0 d\mu_\varphi$:*

$$\mathbf{Ent}_{\mu_\varphi}(u) \leqslant e^{-t/C_{LS}} \mathbf{Ent}_{\mu_\varphi}(u_0).$$

La preuve est la même sachant que

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Ent}_{\mu_\varphi}(u) = -\int \frac{|\nabla u|^2}{u} d\mu_\varphi.$$

Quand vérifie-t-on une inégalité de Poincaré ou de Sobolev logarithmique?

Exemples

- *La mesure Gaussienne en dimension n vérifié* $C_{SL} = 2$ *et* $C_P = 1$.
- *Dimension n:* $\mathrm{Hess}(\varphi) \geqslant \lambda \mathrm{Id}$ *avec* $\lambda > 0$ *alors* $C_{LS} \leqslant 2/\lambda$ *et* $C_P \leqslant 1/\lambda$. *Critère de Bakry-Emery (1984).*
- *En dimension* 1 *on peut "caractériser" les mesures qui vérifient ces inégalités, critère de Hardy ou de Muckenhoupt.*
- *Fonction de Lyapunov : si on trouve une fonction* $V \geq 1$*, telle que* $LV \leq -\lambda V + b1_C$ *alors Poincaré est vérifiée (Bakry-Cattiaux-Guillin 08).*

Convergence entropique et inégalité de log-Sobolev faible

Que peut-on dire lorsque μ_φ ne vérifie pas l'inégalité de Sobolev logarithmique?

Definition (Inégalité de Log-Sobolev faible)

μ une probabilité sur M, μ vérifie une inégalité de Sobolev logarithmique faible, **LSF**, *s'il existe $\beta_{LSF}(s) \geqslant 0$ décroissante telle que*

$$\mathbf{Ent}_\mu(f^2) := \int f^2 \log\left(\frac{f^2}{\int f^2 d\mu}\right) d\mu \leqslant \beta_{LSF}(s) \int |\nabla f|^2 d\mu + s\,\mathbf{Osc}^2(f),$$

$\mathbf{Osc(f)} = \sup(\mathbf{f}) - \inf(\mathbf{f})$.

<u>But :</u> avoir une convergence entropique pour presque toutes les fonctions φ.

Supposons que φ est de classe $\mathcal{C}^3$

$|\nabla\varphi|^2(x) - \Delta\varphi(x) \geqslant -C_{min} > -\infty$ existence du processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$.

Théorème (Cattiaux,G.,Guillin,2007)

Soit $d\mu = e^{-\varphi}dx$ vérifiant **LSF** *de fonction β_{LSF} et soit ξ définie par $\xi^{-1}(r) = -\frac{1}{2}\beta_{LSF}(r)\log(r)$, pour r assez petit.*
Supposons que la condition initiale $u_0 \geqslant 0$ soit assez "régulière" alors $\forall 1 \geqslant \varepsilon > 0$ et $k > 0$, $\exists C(\varepsilon, k)$, et $t_\varepsilon > 0$ tq

$$\forall t > t_\varepsilon \quad \mathbf{Ent}_\mu(\mathbf{P}_{kt}u_0) \leqslant \frac{C(\varepsilon, k)}{\log^{k(1-\varepsilon)}(1/\xi(t))}.$$

Prouvons et caractérisons Sobolev logarithmique faible avec les inégalités de type capacité-mesure.

Qu'est-ce que c'est qu'une capacité?
Soit μ une mesure de probabilités et ν une mesure positive sur M.
Si $A \subset \Omega \subset M$,

$$Cap_\nu(A,\Omega) := \inf\left\{\int |\nabla f|^2 d\nu;\ f\in\mathcal{C}^1(M),\ \mathbf{1}_A \leqslant f \leqslant \mathbf{1}_\Omega\right\}.$$

Le principe d'une inégalité capacité-mesure : dans le cas où $\Omega = M$

$$\forall A\subset M,\ \ \mu(A) \leq C_{Cap}\, Cap_\nu(A,M)$$

$$\int f^2 d\mu \leqslant C_{Sob} \int |\nabla f|^2 d\nu$$

alors $C_{Cap} \leqslant C_{Sob} \leqslant 4C_{Cap}$.(Maz'ja 1985)

Barthe-Roberto (2003) et Barthe-Cattiaux-Roberto (2006).

- Si $\forall \Omega$, $\mu(\Omega) = 1/2$, $\forall A \subset \Omega$,

$$\mu(A) \leq C_{Cap}\, Cap_\nu(A, \Omega),$$

$$\mathbf{Var}_\mu(f) \leqslant C_{Poin} \int |\nabla f|^2 d\nu,$$

Alors $C_{Poin} \leqslant C_{Cap} \leqslant 4C_{Poin}$

- Si $\forall \Omega$, $\mu(\Omega) = 1/2$, $\forall A \subset \Omega$,

$$\mu(A) \log\left(1 + \frac{e^2}{\mu(A)}\right) \leq C_{Cap}\, Cap_\nu(A, \Omega)$$

$$\mathbf{Ent}_\mu(f) \leqslant C_{LS} \int \frac{|\nabla f|^2}{f} d\nu$$

Alors $\alpha C_{LS} \leqslant C_{Cap} \leqslant \beta C_{LS}$

Théorème (Cattiaux,G.,Guillin,2007)

Si μ *vérifie* **LSF** *avec une fonction* β_{LSF}*. Pour tout* $A \subset M$ *tq* $\mu(M) \leqslant 1/2$*, alors*

$$\forall s > 0, \quad \left(\mu(A) \log\left(1 + \frac{1}{2\mu(A)}\right) - s\right) / \beta_{LSF}(s) \leqslant Cap_\mu(A, M).$$

Réciproquement, si β *décroissante tq* $\forall A \subset M$ *avec* $\mu(M) \leqslant 1/2$*,*

$$\forall s > 0, \quad \left(\mu(A) \log\left(1 + \frac{e^2}{\mu(A)}\right) - s\right) / \beta(s) \leqslant Cap_\mu(A, M).$$

Alors μ *vérifie LSF avec la fonction* $\beta_{LSF}(s) = 16\beta(3s/14)$*.*

En résumé : $\alpha_1 \dfrac{\mu(A) \log\left(1 + \frac{\alpha_2}{\mu(A)}\right)}{\beta_{WL}\left(\alpha_1 \mu(A) \log\left(1 + \frac{\alpha_2}{\mu(A)}\right)\right)} \leqslant Cap_\mu(A, M) \leftrightarrow$ LSF.

Proposition (Cas particulier de la dimension 1)

Soit $\mu = \rho_\mu dx$ une probabilité symétrique sur $\mathbb{R}$, β_{LSF} décroissante positive . Soit C optimale tq

$$\forall s > 0, \forall f, \quad \mathbf{Ent}_\mu(f^2) \leq C\beta_{LSF}(s) \int |\nabla f|^2 d\mu + s\,\mathbf{Osc}^2(f).$$

Alors $b \leq C \leq B$, où

$$\begin{aligned} b &:= \sup_{x>0} \frac{\frac{\mu([x,+\infty))}{2} \log\left(1 + \frac{1}{2\mu([x,+\infty))}\right)}{\beta_{LSF}\left(\frac{\mu([x,+\infty))}{2} \log\left(1 + \frac{1}{2\mu([x,+\infty))}\right)\right)} \int_0^x \frac{1}{\rho_\mu} \\ B &:= \sup_{x>0} \frac{16\mu([x,+\infty)) \log\left(1 + \frac{e^2}{\mu([x,+\infty))}\right)}{\beta_{LSF}\left(\frac{14}{3}\mu([x,+\infty)) \log\left(1 + \frac{e^2}{\mu([x,+\infty))}\right)\right)} \int_0^x \frac{1}{\rho_\mu}. \end{aligned}$$

Exemples

- *Pour $\alpha > 0$, la mesure $dm_\alpha(t) = \alpha(1+|t|)^{-1-\alpha}dt/2,\ t \in \mathbb{R}$ vérifie* **LSF** *avec la fonction*

$$\forall s > 0, \quad \beta_{LSF}(s) = C\frac{(\log 1/s)^{1+2/\alpha}}{s^{2/\alpha}},$$

où $C > 0$ est une constante.

- *Pour $\alpha \in (0,2)$, définissons la mesure de probabilité $d\mu_\alpha(t) = Z_\alpha e^{-|t|^\alpha}dt,\ t \in \mathbb{R}$, (où Z_α est la constante de normalisation). Alors μ_α vérifie* **LSF** *avec la fonction*

$$\forall s > 0, \quad \beta_{LSF}(s) = C(\log 1/s)^{(2-\alpha)/\alpha},$$

Equation des milieux poreux à poids

Equation des milieux poreux ($u_t = \Delta u^m$) peut être considérée comme une généralisation de l'équation de la chaleur.
Nous considérons ici la généralisation du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck: **l'équation des milieux poreux à poids (WPME)**.

Soit $m \geqslant 1$: condition initiale $u(0,x) = u_0(x) > 0$,

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \Delta u^m - \nabla \varphi(x) \cdot \nabla u^m = L(u^m).$$

Quelques questions :

- Existence.
- Comportement asymptotique (convergence L^2 ou entropique).
- ... et quelles sont les inégalités fonctionnelles associées?

Existence

Théorème (Dolbeault,G.,Guillin,Wang,08)

Soit u_0 une fonction positive $\mathcal{C}^\infty$ dans $L^{m+1}_{\mu_\varphi}(\mathbb{R}^d)$ alors il existe une unique solution classique de WPME, admettant u_0 comme condition initiale.
Rappelons ici que μ_φ est une mesure de probabilités.

- Ce n'est pas difficile mais nous n'avons pas trouvé de référence.
- La preuve est basée sur un cours donné par J.L. Vásquez à Montréal (1990):
  - On commence sur un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et pour une condition initiale bornée.
  - On utilise un principe de contraction L^1 pour obtenir l'unicité de la solution.
  - Ensuite on étend à $\mathbb{R}^n$ pour toute condition initiale.

Convergence à l'équilibre

Peut-on utiliser la même méthode que dans l'introduction?

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Var}_{\mu_\varphi}(u) = -\frac{8m}{(m+1)^2}\int |\nabla u^{\frac{m+1}{2}}|^2 d\mu_\varphi$$

Poincaré n'est pas suffisant.

$\hookrightarrow$ **Nous avons donc besoin d'une inégalité de Poincaré dans L^q.**

Théorème (Convergence L^2)

L^q-inégalité de Poincaré

$$\forall f \geqslant 0, \qquad \mathbf{Var}_{\mu_\varphi}(f^q)^{1/q} \leqslant C_P \int |\nabla f|^2 d\mu_\varphi,$$

est **équivalente**, *avec $q = 2/(m+1)$ et $u_0 \in L^2(\mu_\varphi)$, à la convergence polynomiale de la norme L^2.*

$$\int \left(u - \int u_0 d\mu_\varphi \right)^2 d\mu_\varphi \leqslant \frac{1}{\left(\mathbf{Var}_{\mu_\varphi}(f)^{-(m-1)/2} + \frac{4mC_P(m-1)}{(m+1)^2} t \right)^{2/(m-1)}}.$$

Preuve: Essayons avec cette inégalité :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Var}_{\mu_\varphi}(u) = -\frac{8m}{(m+1)^2}\int |\nabla u^{\frac{m+1}{2}}|^2 d\mu_\varphi$$

mais L^q-inégalité de Poincaré implique

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{Var}_{\mu_\psi}(u) \leq -\frac{8C_P m}{(m+1)^2}\left(\mathbf{Var}_{\mu_\psi}(u)\right)^{\frac{m+1}{2}}.$$

D'un autre coté la convergence L^2 implique que

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Var}_{\mu_\varphi}(u)(0) \leqslant -\frac{8mC_P}{(m+1)^2}\mathbf{Var}_{\mu_\varphi}(u)(0)^{1+2/(m-1)},$$

ce qui redonne L^q-inégalité de Poincaré.

Conditions et exemples

L^q-Poincaré pour (μ, ν) : μ une probabilité et ν positive.

$$\forall f \geqslant 0, \qquad \mathbf{Var}_\mu(f^q)^{1/q} \leqslant C_P \int |\nabla f|^2 d\nu.$$

La difficulté est donc de prouver ces inégalités.

- Premièrement cette inégalité est intéressante seulement si $q \in (0,1]$, (poser $f = 1 + \epsilon g$).

Proposition (Une hiérarchie)

La fonction $q \mapsto \mathbf{Var}_\mu(f^q)^{1/q}$ est croissante pour $q \in (0,1]$.

- *L^{q_1}-Poincaré $\Longrightarrow$ L^{q_2}-Poincaré pour $0 < q_2 \leqslant q_1 \leqslant 1$.*
- *Poincaré $\Longrightarrow$ L^q-Poincaré $0 < q \leqslant 1$.*

$\hookrightarrow$ **de nouveau les inégalités de type capacité-mesure .**

Soit $q \in (0,1)$ et définissons

$$\beta_P = \sup \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\mu(\Omega_k)^{1/(1-q)}}{Cap_\nu(\Omega_k, \Omega_{k+1})^{q/(1-q)}} \right\}^{(1-q)/q} \in [0, +\infty],$$

où le supremum est pris pour tout $\Omega \subset M$ avec $\mu(\Omega) = 1/2$ et toute suite $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\Omega_k \subset \Omega_{k+1} \subset \Omega$.

A relier avec l'inégalité associée à Poincaré :

$$\frac{\mu(A)}{Cap_\nu(A, \Omega)} \leqslant C_P$$

Théorème (Inégalité capacité-mesure associée)

Soit μ une mesure de probabilité et ν une mesure positive sur M.

- *Soit $q \in [1/2, 1)$ et C_P la meilleur constante de*

$$\mathbf{Var}_\mu(f^q)^{1/q} = \left(\int f^{2q} d\mu - \left(\int f^q d\mu \right)^2 \right)^{1/q} \leqslant C_P \int |\nabla f|^2 d\nu$$

  implique

$$\beta_P \leqslant 2^{1/q} C_P.$$

- *Soit $q \in (0, 1)$ et supposons que $\beta_P < +\infty$. Alors (μ, ν) vérifie L^q-Poincaré avec la constante C avec de plus*

$$C \leqslant C_2 \beta_P.$$

Esquisse de preuve : on découpe en tranches.

- La première partie du théorème (*L^q-Poincaré implique CM*) : fixons (Ω_k) et f_k tels que $\mathbf{1}_{\Omega_k} \leqslant f_k \leqslant \mathbf{1}_{\Omega_{k+1}}$ considérons ensuite

$$f = (\tau_k - \tau_{k+1}) f_k + \tau_{k+1}, \ \textit{on } \Omega_{k+1} \setminus \Omega_k,$$

alors

$$\int |\nabla f|^2 d\nu = \sum_{k=-N}^{N} (\tau_k - \tau_{k+1})^2 \int_{\Omega_{k+1} \setminus \Omega_k} |\nabla f_k|^2 d\nu \ .$$

L^q-Poincaré pour f + un bon choix de (τ_k) + définition $Cap_\nu(\Omega_k, \Omega_{k+1}) \Longrightarrow \beta_P \leqslant 2^{1/q} C_P$.

- La seconde partie *(CM implique L^q-Poincaré)* : soit m la médiane de f, alors

$$\mathbf{Var}_\mu(f^q) \leq \int (f-m)_+^{2q} d\mu + \int (f-m)_-^{2q} d\mu.$$

Posons pour $\rho < 1$, $\Omega_k = \{(f-m)_+ \geq \rho^k\}$ donne

$$\begin{aligned} \int (f-m)_+^q d\mu &= \sum_{\mathbb{Z}} \int_{\rho^{k+1}}^{\rho^k} \mu((f-m)_+^q \geq t) d(t^{2q}) \\ &\leq \frac{1-\rho^{2q}}{\rho^{2q}} \sum_{\mathbb{Z}} \mu(\Omega_k) \rho^{2kq} \\ &\leq \frac{1-\rho^{2q}}{\rho^{2q}} \beta_p^q \left(\sum_{\mathbb{Z}} Cap_\nu(\Omega_k, \Omega_{k+1}) \rho^{2kq} \right)^q \end{aligned}$$

et on retrouve l'énergie par la capacité dans $\Omega_{k+1} \backslash \Omega_k$.

Conclusion: Pour $q \in [1/2, 1)$,

$$\beta_P \sim C_P,$$

Le but maintenant est de calculer β_P.

- En dimension n on peut obtenir des propriétés globales sur les inégalités.

- En dimension 1 on peut estimer la constante.

Théorème (Maz'ja)

Soit $q \in [1/2, 1)$. Alors pour tout $\Omega \in M$ et $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tel que $\Omega_k \subset \Omega_{k+1} \subset \Omega$, consider

$$\Phi(t) = \inf \left\{ Cap_\nu(A, \Omega);\ A \subset \Omega,\ \mu(A) \geqslant t \right\}$$

$$\text{i.e.} \quad \Phi(\mu(\mathrm{A})) \leqslant \mathrm{Cap}_\nu(\mathrm{A}, \Omega)$$

alors

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\mu(\Omega_k)^{1/(1-q)}}{Cap_\nu(\Omega_k, \Omega_{k+1})^{q/(1-q)}} \leqslant \frac{1}{1-q} \int_0^{\mu(\Omega)} \left(\frac{t}{\Phi(t)} \right)^{q/(1-q)} dt,$$

La fonction Φ est donc indispensable pour estimer les inégalités.

- Poincaré faible dans le cas général. Si $s \mapsto \beta(s)$ est positif et décroissante telle que $\forall f$,

$$\forall\, s > 0\,, \quad \mathbf{Var}_\mu(f) \leqslant \beta(s) \int |\nabla f|^2 \, d\nu + s \left[\mathbf{Osc}(f)\right]^2 .$$

est équivalent à l'inégalité de capacité-mesure $\mu(\Omega) = 1/2$,

$$\forall A, \ \frac{\mu(A)}{\tilde\beta(\mu(A))} \leqslant Cap_\nu(A, \Omega)$$

(voir Barthe-Cattiaux-Roberto 2005)

L^q-Poincaré $\Longrightarrow$ Poincaré faible avec $\beta(s) = C\, s^{\frac{q-1}{q}}$ $\Longrightarrow$ $L^{q'}$-Poincaré $\forall\, q' \in (0, q)$.

- Les inégalités de Hardy donnent le résultat en dimension 1 : on calcule explicitement la capacité d'un ensemble.

$$R(x) := \mu([x, +\infty)), \quad r(x) := \int_0^x \frac{1}{\rho_\nu}\, dx,$$

ρ_ν est la densité de ν et μ que nous supposerons ici symétrique.

Proposition

Soit $q \in [1/2, 1]$, (μ, ν) satisfaisant une L^q-inégalité de Poincaré si

$$\int_0^\infty |\, r\, R\,|^{q/(1-q)}\, d\mu < \infty.$$

Preuve : il faut calculer

$$\frac{1}{1-q} \int_0^{1/2} \left(\frac{t}{\Phi(t)} \right)^{q/(1-q)} dt.$$

Exemple

Soit $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \log(1 + |x_i|^{1+\alpha}) + W(x_1, \cdots, x_n)$ *avec* W *bornée*

$$d\mu_\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + |x_i|^{1+\alpha}} \right) e^{W(x_1, \cdots, x_n)} dx_1 \cdots dx_n,$$

La mesure μ_φ *vérifie une* L^q*-inégalité de Poincaré avec* $q \in [1/2, 1)$ *si* $\alpha > 2q/(1-q)$.
Alors la solution de **l'équation des milieux poreux à poids**

$$\frac{d}{dt} u(t,x) = \Delta u^m - \nabla\varphi(x) \cdot \nabla u^m.$$

converge avec une vitesse polynomiale dans L^2 *si* $m > (\alpha + 4)/\alpha$.

Nous avons la même chose pour les L^q-inégalités de Sobolev logarithmiques.

$$\mathbf{Ent}_\mu\left(f^{2q}\right)^{1/q} := \left(\int f^{2q}\, \frac{\log f^{2q}}{\int f^{2q}\, d\mu}\, d\mu\right)^{1/q} \leqslant C_{LSI} \int |\nabla f|^2\, d\nu,$$

$$\beta_{SL} = \sup\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\left[\mu(\Omega_k)\, \log\left(1+\frac{e^2}{\mu(\Omega_k)}\right)\right]^{1/(1-q)}}{\left[Cap_\nu(\Omega_k,\Omega_{k+1})\right]^{q/(1-q)}}\right\}^{(1-q)/q},$$

Pour $q\in(0,1)$ alors

$$C_{LSI} \leqslant \kappa_{LS}\, \beta_{SL},$$

$$L^q\text{-Log Sobolev} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c}\text{Log-Sobolev faible}\\ \text{avec } \beta_{WL}(s) = C\, s^{\frac{q-1}{q}}\end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} L^{q'}\text{-Log Sobolev} \\ \forall\, q'\in(0,q)\end{array}.$$