Quelques résultats d'hypocoercivité en théorie cinétique collisionnelle

Clément Mouhot

CNRS & CEREMADE, Univ. Paris IX Dauphine

Collège de France, 14 décembre, 2007

Baranger-CM (RMI), CM (CPDE), CM (CMP), CM-Strain (JMPA), CM-Neumann (Nonlinearity), Dolbeault-CM-Schmeiser (prépublication)

Motivations issues de la physique (1)

- Équations avec une structure du type

$$\boxed{\partial_t f + Tf = Q(f) \qquad f = f(t,x,v) \geq 0, \quad x, v \in \mathbb{R}^d}$$

- Partie collision : $Q(f)$ local en t, x
  Effet dissipatif (théorème H) avec noyau plus large que l'équilibre global (lois de conservations locales) : Boltzmann, Landau, Fokker-Planck, BGK...
- Partie transport : $T = v \cdot \nabla_x f - \nabla_x V \cdot \nabla_v f$
  Avec existence d'un équilibre global intégrable (V confinant)
  Ne préserve pas les invariants de collision ("noyau de Q")
- (Avec conditions limites appropriées) Collision + transport imposent la convergence vers une unique équilibre global.
- $\hookrightarrow$ But : Quantifier ce retour à l'équilibre

Motivations issues de la physique (2)

- Cela signifie :
  Inégalité fonctionnelle sur Q (sans x) puis $Q - T$ qui quantifient le processus de production d'entropie (théo. H).
- Deux axes complémentaires :
  (a) Quantifier le théorème H directement sous forme non-linéaire : *Carlen, Carvalho, Desvillettes, Toscani, Villani, etc.*
  $\longrightarrow$ progrès récents (premiers résults explicites non perturbatifs) mais ne semblent pas fournir les échelles de temps physiques (retour exp.)
  (b) Quantifier le théorème H au niveau linéarisé : approche de cet exposé.

  Connection pour le processus de collision (sans x) *CM'06*, ouvert pour collision + transport (problème de cadre fonctionnel).

La notion d'hypocoercivité (1)

Terme de Thierry Gallay (*Villani, Mem. AMS*)

$$\boxed{\partial_t f + Tf = L(f) \qquad f = f(t,x,v) \geq 0, \quad x, v \in \mathbb{R}^d}$$

avec L dissipatif dégénéré (noyau) et T (antisymétrique) conservatif.

Situation très classique en ÉDP.

Cadre hypoelliptique (cf. *Hörmander'67*...) :

$$\partial_t f + Tf = D^2 f$$

avec D elliptique dégénéré mais $[T, D] + D^2$ elliptique

Exemple typique : $\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \Delta_v f \ldots$

Nombreux travaux : sujet d'étude est la régularisation.

La notion d'hypocoercivité (2)

Dans les cadres où $\exists$ éq. global (confinement), souvent hypocoercivité (retour à l'équilibre) et hypoellipticité (régularisation) sont liées.
Mais utile de séparer ces notions car ne se produisent pas toujours en même temps (ici L pourra être d'ordre 0, voir section suivante), et $\exists$ questions, problèmes et résultats spécifiques à l'hypocoercivité.
$\hookrightarrow$ En particulier :
- Forme particulière des noyaux de la partie dissipatives et l'action de partie transport sur ceux-ci (cf. équations de NS ...)
- Opérateur de collision intégraux (Boltzmann, Landau) non locaux en vitesse, pour lesquels les techniques de commutateurs algébriques ne s'adaptent pas simplement...

L'opérateur intégral linéarisé de Boltzmann (1)

Linéarisation autour d'une distribution "Maxwellienne" normalisée $M(v) = e^{-|v|^2}$:

$$L(h) = M^{-1}\left[Q(Mh, M) + Q(M, Mh)\right]$$

$$f = M + Mh, \quad h(v) \in L^2(M).$$

On obtient comme formule pour L :

$$L(h) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1}} \left[h' + h'_* - h - h_*\right] B\, M_*\, dv_*\, d\sigma.$$

avec la convention $h' = h(v')$, $h'_* = h(v'_*)$, $h_* = h(v_*)$

L'opérateur intégral linéarisé de Boltzmann (2)

Géométrie de la collision (conservation de la masse, quantité de mouvement et énergie cinétique lors du choc) :

$$v' = \frac{v+v_*}{2} + \frac{|v-v_*|}{2}\,\sigma, \quad v'_* = \frac{v+v_*}{2} - \frac{|v-v_*|}{2}\,\sigma.$$

Fréquences dictées par noyau de collision $B = B(|v-v_*|, \sigma)$ (paramètre libre σ dans la géométrie ci-dessus).
Cas physique fondamental : $B = \Phi(|v-v_*|)\, b(\cos\theta)$ avec Φ puissance et $\cos\theta = \sigma \cdot (v-v_*)/|v-v_*|$.

L'opérateur intégral linéarisé de Boltzmann (3)

- L est symmétrique sur l'espace de Hilbert $h \in L^2(M)$.
- Il est négatif (théorème H linéarisé) :

$$D(h) = -\langle h, L(h) \rangle = \frac{1}{4} \int_{v,v_*,\sigma} \left| h' + h'_* - h - h_* \right|^2 M\, M_*\, B \geq 0$$

- Noyau de dim. $d+2$ engendré par les invariants de collision $1, v_1, \dots, v_d, |v|^2$.
- D'où question de l'existence d'un trou spectral : distance > 0 isolant $\{0\}$ du reste du spectre (cf. "linearized entropy estimates").

Noyaux de collision issus de la physique

- Potentiels d'interaction en puissance inverse et sphères dures :

$$B = \Phi(|v - v_*|)\, b(\cos\theta), \quad \Phi(z) = z^\gamma, \quad b \sim_{\theta\sim 0} b_0\, \theta^{-(d-1)-\alpha}$$

avec $\gamma \in]-d, +\infty[$ et $\alpha \in]-\infty, 2)$

- Formellement noyaux localement intégrable pour $\sim \alpha < 0$, et Landau pour $\sim \alpha \to 2$ (cf. limite de collision rasante).
- Formules en dimension $d = 3$:

$$\text{Potential} \quad \phi(r) = r^{-(s-1)} \; : \; \gamma = \frac{s-5}{s-1}, \; \alpha = \frac{2}{s-1}, \quad s > 2$$

Potentiels "durs" $s > 5$, molécules "maxwelliennes" $s = 5$, potentiels "mous" $s < 5$. Formellement sphères dures pour $s \to +\infty$ et Coulomb $s \to 2$.

L'opérateur de Landau

Opérateur de Boltzmann non défini pour le potentiel de Coulomb $V(x-y) = |x-y|^{-1}$ $(s=2)$.
Limite de collision rasante "$b \rightharpoonup \delta_{\theta=0}$" $\longrightarrow$ op. de Landau :

$$Q(f,f)(v) = \nabla_v \cdot \left(\int_{v_* \in \mathbb{R}^N} \mathbf{a}(v-v_*) \left[f_* \, (\nabla f) - f \, (\nabla f)_* \right] dv_* \right),$$

avec

$$\mathbf{a}(z) = |z|^2 \, \Phi(z) \, \Pi_{z^\perp}, \qquad (\Pi_{z^\perp})_{i,j} = \delta_{i,j} - \frac{z_i z_j}{|z|^2}$$

et $\Phi(z) = |z|^\gamma$ for power-law interactions (Coulomb : $\gamma = -3$).
Derivé en physique des plasmas : *Landau 1936*.
Limite de collision rasante : *Desvillettes, Alexandre, Villani* ...

Conséquences du noyau de collision sur les propriétés de coercivité

- Opérateur intégral compliqué avec noyau singulier (lorsque $\alpha \geq 0$ et / ou $\gamma < 0$) and avec croissance ou décroissance polynômiale (cf. γ).
- Comparaison avec un opérateur différentiel (Bobylev) : α relié à l'ordre de différentiation (fractionnaire) et γ à la croissance ou décroissance polynômiale des coefficients.
- D'après ce parallèle naturel d'espérer que $D(h)$ contrôle par en-dessous normes $L^2_\gamma(M)$ norme et $H^{\alpha/2}_{loc}$: cf. proof (with constructive bounds) *Baranger-CM'05*, *CM'06*.
- En fait (cf. Laplacien dans $L^2(M)$) naturel d'espérer qu'il contrôle aussi $L^2_{\gamma+\alpha}(M)$ (voir ci-dessous)

Brefs rappels sur les résultats précédents (1)

- *Hilbert'1912* (sphères dures) : découpage entre parties locales et non-locales, "complete continuity" de la partie non-locale (compacité), utilisé ensuite avec la théorie de Fredholm pour construire le "développement de Hilbert"
- *Carleman'57* (sphères dures) : introduction du théorème de Weyl pour prouver l'existence d'un trou spectral (TS)
- *Grad'62* (sphères dures et potentiels durs avec cutoff) : introduction du "cutoff angulaire de Grad", compacité de la partie non-locale et existence du TS
- *Wang-Chang, Uhlenbeck'70, Bobylev'88* : lorsque $\gamma = 0$ (noyau B indépendant de $|v - v_*|$) diagonalisation explicite et calcul du TS

Brefs rappels sur les résultats précédents (2)

- *Pao'74* (potentiels en puissance inverse) : existence d'un TS pour $s > 3$ en dimension $d = 3$ par calculs pseudo-differentiels (compacité résolvante). Controversé (*Klaus'77*)...
- *Caflisch'80* (potentiels mous cutoff) : pas de TS (mais taux de retour en e^{-t^β}, $\beta \in (0,1)$), cf. *Strain-Guo* ...
- Opérateur Landau : *Degond-Lemou'97*, *Lemou'00*, *Guo'02*, et bornes constructives *CM'06*, *CM-Strain*.

Les premières études : de Hilbert à Grad

Pour b localement intégrable, décomposition local / non-local
Hilbert'12 : $L = K - \nu$
avec ν la fréquence de collision

$$\nu(v) = \int b(\cos\theta)\, \Phi(|v - v_*|)\, M(v_*)\, dv_*\, d\sigma,$$

qui vérifie pour un noyau $B = |v - v_*|^\gamma\, b$:

$$C_1\,(1 + |v|)^\gamma \le \nu(v) \le C_2\,(1 + |v|)^\gamma, \qquad C_1, C_2 > 0.$$

Hilbert'12, Grad'63 : K compact.
Carleman'33, Grad'63, Caflisch'80 : spectre essentiel de L est $\nu(\mathbb{R}^N)$ (théorème de Weyl)
Problèmes de cette approche : Géométrie du spectre (en particulier $\exists$ ou non du TS) mais non constructif $\longrightarrow$ pas d'estimations

Molécules maxwelliennes

- Modète introduit par Maxwell en 1867
- Noyau de collision B indépendant de $|v - v_*|$ $(\Phi \equiv 1)$, par le potentiel en puissance inverse $V(x-y) = |x-y|^{-5}$ $(\gamma = 0)$.
- $\hookrightarrow$ fonctions et valeurs propres de L ont été calculées explicitement *Wang-Chang/Uhlenbeck'70, Bobylev'88*.
- On obtient

$$SG_{\text{maxw}} = \pi \int_0^{\pi} b(\cos\theta)\, \sin^3\theta \, d\theta.$$

- Outils spécifiques ici : transformation de Fourier et distances de Wasserstein. . .

Remarque sur l'interprétation de l'opérateur de collision de Boltzmann

$$Q(f,f)(v) = \int_{v_* \in \mathbb{R}^N} \int_{\sigma \in \mathbb{S}^{N-1}} B \left[f'_* f' - f_* f \right] dv_* \, d\sigma$$

avec un noyau de collision $B = B(|v - v_*|, \cos\theta)$.

Comparaison *Bobylev* :

- ordre de singularité de $\cos\theta$ $\sim$ ordre d'un opérateur différentiel ;
- dépendance en $|v - v_*|$ $\sim$ variations des coefficients d'un opérateur différentiel (en particulier molécules maxweliennes $\sim$ opérateurs différentiels à coefficients constants).
- Tout ceci va être quantifié précisément ci-dessous

Nouvelles estimations de TS

Theorem (Baranger-CM, '05)

Sous (essentiellement) une hypothèse de "potentiel dur généralisé"

$$\boxed{(H)\ \ \exists\, R \geq 0,\ c_\Phi > 0 \ /\ \forall\, r \geq R, \quad \Phi(r) \geq c_\phi}$$

on a $SG_B \geq C_B\, SG_0$*, avec* SG_0 *le TS pour un noyau de collision constant, et* C_B *explicit à partir de* B*.*

- (H) proche d'être optimal dans le cas cutoff : $\exists$ TS $\Leftrightarrow$ $\forall\, v \in \mathbb{R}^N,\ \nu(v) \geq \nu_0 > 0$.
- Même résultat pour Landau avec potentiels durs par limite de collision rasante (précédemment approche based par le théorème de Weyl *Degond-Lemou'97, Guo'02*).

Idées de la preuve

- N'utilise pas la décomposition locale / non-locale et la théorème de Weyl, basé sur un argument physique pour l'opérateur complet
- Forme de Dirichlet (FD) monotone par rapport à b et Φ.
- Stratégie : contrôle par en-dessous de la FD par la FD pour les molécules maxwelliennes, puis utilisation des résultats explicites sur cette dernière
- Difficulté : régions où $B = b\,\Phi$ s'annule $\longrightarrow$ Φ en $v \sim v_*$ (cf. $\Phi(v - v_*) = |v - v_*|^\gamma$, $\gamma > 0$ pour les potentiels durs).
- Introduction de "collisions intermédiaires" pour "éviter" les régions de petite vitesse relative $v - v_*$ où Φ s'annule (et idem pour les annulations de b...)

Nouvelles estimations de coercivité pour le fortement collisionnel ($\gamma > 0$)

- Idée : Pour un noyau de collision avec croissance polynômiale en $|v - v_*|$ (cf. potentiels durs $\gamma > 0$), comment améliorer l'inégalité $D(h) \geq \lambda \|h\|^2_{L^2(M)}$ $(h \in \mathrm{Ker}(L)^\perp)$?
- Lemme élémentaire : Si
  (i) L possède un TS avec borne inférieure explicite,
  (ii) $L = K - \Lambda$ avec K borné (explicitement) et Λ positif,
  Alors on a $D(h) \geq \lambda \langle \Lambda(h), h\rangle^2_{L^2(M)}$ $(h \in \mathrm{Ker}(L)^\perp)$, avec constante explicite.
- Conséquences : Pour $\Phi(|v - v_*|) = |v - v_*|^\gamma$, $\gamma \geq 0$, on déduit $D(h) \geq \lambda \|(1 + |v|)^{\gamma/2} h\|^2_{L^2(M)}$ $(h \in \mathrm{Ker}(L)^\perp)$, avec constantes explicites

Nouvelles estimations de coercivité pour le faiblement collisionnel ($\gamma < 0$)

- Idée : pour un noyau de collision cutoff avec décroissance poly. en $|v - v_*|$ (cf. potentiels mous $\gamma < 0$), pas de TS.
- Mais naturel d'espérer TS dégénéré : borne inf. de la FD par norme plus faible que $L^2(M)$.
- Preuve non constructive (théo. Weyl) : *Golse-Poupaud'86*.

Theorem (CM, '06)

Sous (essentiellement) hypothèse $\Phi \geq |v - v_*|^\gamma$ avec $\gamma \in]-d, 1[$, on a $D(h) \geq \lambda \, \|(1 + |v|)^{\gamma/2} h\|^2_{L^2(M)}$ ($h \in Ker(L)^\perp$), avec constante explicite.

$\rightarrow$ même résultat pour l'opérateur de Landau linéarisé (y compris le cas Coulomb).

Idées de la preuve

- reduction au cas cutoff ;
- décomposition local / non-local $L = K - \nu$, et montrer $K_R \to 0$ en un sens adapté, avec K_R modification de K par la troncature $\mathbf{1}_{|v-v_*|\geq R}$ du noyau ;
- décomposition de la forme de Dirichlet selon $(R > 1)$

$$\mathbf{1} = \mathbf{1}_{|v-v_*|\geq R} + \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{R^n \leq |v-v_*| \leq R^{n+1}};$$

- sur chaque anneau utiliser le TS des molécules maxwelliennes (à des termes d'erreur près) pour contrôler $h\mathbf{1}_{|\cdot|\geq R^n}$.

Theorem (CM-Strain'07)

Supposons $B = \Phi(|v - v*|)\, b(\cos\theta)$ *avec*

$$\Phi(z) \geq C_\Phi\, z^\gamma, \quad b \geq b_0\,(\sin\theta/2)^{-(d-1)-\alpha} \text{ near } \theta \sim 0.$$

Alors

- $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\ C_{B,\varepsilon} > 0$ *(preuve constructive) tq*

$$D(h) \geq C_{B,\varepsilon}\, \|h - \Pi(h)\|^2_{L^2_{\gamma+\alpha-\varepsilon}(M)}$$

  où Π *projection orthogonale sur* $Ker(L)$*.*

- $\exists\ C_{B,0}$ *(preuve non constructive) tq*

$$D(h) \geq C_{B,0}\, \|h - \Pi(h)\|^2_{L^2_{\gamma+\alpha}(M)}.$$

Conséquences du théorème sur le spectre

- Estimations constructives de TS dès que $\gamma + \alpha > 0$. En dimension $d = 3$, cette condition correspond à

$$\frac{s-5}{s-1} + \frac{2}{s-1} > 0 \quad \text{that is} \quad s > 3.$$

  Donc premières estimations explicites de TS pour les potentiels modérément mous $3 < s < 5$.

- Quand $\alpha + \gamma > 0$ et $\alpha > 0$, estimations de coercivité dans les normes $L^2_{(\gamma+\alpha)/2}(M)$, et $H^{\alpha/2}$ par *CM'06*, d'où compacité de la résolvante et spectre discret.
  $\hookrightarrow$ Retrouve, simplifie et améliore les résultats non constructifs de Pao.

Questions laissées ouvertes

- Preuve constructive dans le cas limite $\gamma + \alpha$?
- Spectre discret pour $\gamma + \alpha > 0$, et géométrie du spectre connue pour les noyaux cutoff
  $\longrightarrow$ geometry for $\gamma + \alpha \leq 0$, $\alpha \geq 0$?
- Plus fondamentalement :
  Conjecture : Existence du TS $L^2(M)$ pour Boltzmann linéarisé $\Leftrightarrow \gamma + \alpha \geq 0$.
  Une implication par le théorème précédent, construction de contre-exemples pour montrer l'autre sens ?
- Identification de l'espace fonctionnel relié à la forme de Dirichlet (dérivé fractionnaire et poids mélangés...)
  $\hookrightarrow$ cf. pb. de construction solutions perturbatives régulières pour Boltzmann sans cutoff...

Lien avec la production d'entropie et la conjecture de Cercignani

- Entropie pour l'équation de Boltzmann (sans x)
  $E(f) = -H(f) = -\int_v f \, \log f$.
- Fonctionnelles de production d'entropie :
  $\mathcal{D}(f) = \int_{v,v_*,\sigma} (f'f'_* - ff_*) \, \log \frac{f'f'_*}{ff_*} \, B$.
- Conjecture de Cercignani (80') : $\mathcal{D}(f) \geq K \, |H(f) - H(M_f)|$.
- Nombreux travaux :*Carlen*, *Carvalho*, *Toscani*, contre-exemples *Bobylev-Cercignani'99*, "almost true" *Toscani-Villani'99* ...
- Preuve conjecture pour $B \geq (1 + |v - v_*|^2)$ *Villani'03*.
- En cours avec Desvillettes (conj. Villani) : CC vraie pour $\gamma + \alpha \geq 2$ (en incluant le cas cutoff et le cas Landau).
- Différence entre les conditions pour TS "linéaire" et "non-linéaire" (CC) à comprendre...

Introduction au problème

Rappel du cadre :

$$\boxed{\partial_t f + Tf = L(f) \qquad f = f(t,x,v) \geq 0, \quad x, v \in \mathbb{R}^d}$$

avec L dissipatif dégénéré (noyau) et T (antisym.) conservatif.
Dissipativité de L mesurée par les estimations de coercivité préc.
$L - T$ non auto-adjoint (non sectoriel égalt en général)
But ici : traiter des opérateurs de collisions de type Boltzmann.
$\hookrightarrow$ techniques d'hypoelliptique ne s'applique pas...
Deux sources principales de difficultés ici (liées car intéragissent)
- complexité de l'opérateur de transport confinant (potentiel, domaine ...)
- complexité du noyau de L (cf. nombre d'invariants de collision)
On va donner deux résultats qui attaque l'une ou l'autre...

Précédents résultats non constructifs sur Boltzmann

- Linéarisation :

$$\partial_t h + v \cdot \nabla_x h = Lh + \Gamma(h,h), \quad x \in \Omega, \ v \in \mathbb{R}^N,$$

avec L auto-adjoint négatif sur $h \in L^2(M)$ (*i.e.*, $f \in L^2(M^{-1})$), local in x, de noyau $Ker(L)$ engendré par les invariants de collision $\{1, v_i, |v|^2\}$.
- Question de l'existence de trou spectral pour $L - T$ (non sectoriel)
- But à l'origine : stabilité non-linéaire pour construire des solutions perturbatives
- Transformation de Fourrier en espace puis argument de compacité : *Ukai'74* pour un confinement par le tore (taux exponentiel de relaxation en sphères dures)

Quelques travaux récents (1)

Plusieurs approches développées indépendt pour les éq. cinétiques depuis début 2000', qui montrent des convergences importantes :

- Pour équations cinétiques hypoelliptiques avec potentiels confinant (un seul invariant) méthodes (constructives) : Fokker-Planck *Hérau-Nier'04* (premier résultats quantitatifs généraux sur FP), *Helffer-Nier'05* (voir également *Eckmann-Hairer'03*), Relaxation Boltzmann *Hérau'06*
  $\hookrightarrow$ outils proches hypoellipticité

Quelques travaux récents (2)

- Yan Guo (seul puis avec Strain) *2002-2006* a parallèlement développé nouvelle méthode pour construire solutions perturbatives (but initial) et obtenir taux de retour pour diverses équations de type Boltzmann et Landau (premiers résultats de ce type pour Landau).
  $\hookrightarrow$ Invariants complets de collision, décomposition "fluide-cinétique" (autour d'un équilibre global), étude d'un système elliptique pour la partie fluide

Quelques travaux récents (3)

- Liu, Ukai, Yang, Yu *2004-...* ont développé parallèlement une méthode (perturbative) pour l'étude de phénomène de propagation pour Boltzmann : premier résultat de positivité pour les profils de choc ($\exists$ *Caflisch-Nicolaenko'82*), étude L^∞ des fonctions de Green et stabilité L^∞, nouveau résultat de stabilité pour les couches limites de Knudsen...
  $\hookrightarrow$ décomposition "micro-macro" (autour d'équilibre global ou local), introduction d'outils de la théorie de NS compressible...

Quelques travaux récents (4)

- Approche par construction de Lyapunov modifiée : FP *Desvillettes-Villani'2001* (taux $(t^{-\infty})$), Boltzmann non-linéaire a priori *Desvillettes-Villani'2005*, puis Boltzmann-Landau-FP perturbatif dans le tore *CM-Neumann'2006*, FP avec potentiel *Villani*, Relaxation Boltzmann - FP avec potentiel *Dolbeault-CM-Schmeiser* : premiers résultats de retour exponentiel explicite pour relaxation avec potentiels très confinants (polynômes ordre élevé)
$\hookrightarrow$ contruction de Lyapunov à partir de la fonctionnelle H (non-linéaire) ou de normes L^2 / H^s à poids adaptées (linéaires) en modifiant (sur la partie macro) par des termes dominés / d'ordre moins élevés, usage crucial de commutateurs. . .

Idées communes et décomposition micro-macro

- Idées communes sous différents formes de décomposition micro-macro et usage de commutateurs (cf. méthode de Kawashima pour obtenir coercivité sur la densité pour NS compressible)
- Remarque sur la décomposition micro pour $\partial_t f + Tf = Lf$: structure Hilbertienne orthogonale pour L, projecteur orthogonal Π_l sur noyau de L
  $\longrightarrow$ Equation globalement coercive sur $(1 - \Pi_l)f$
  $\longrightarrow$ Equation sur la partie macro :

$$\partial_f \Pi_l f + \Pi_l T \Pi_l f + \Pi_l T \tilde{L}^{-1} (1 - \Pi_l) T \Pi_l f = U((1 - \Pi_l) f)$$

  Structure NS à gauche : complexité dépend du nombre d'invariants de collision (Π) et du confinement (V ou domaine)

Cadre abstrait ($x \in \mathbb{T}^d$, pas de potentiel)

H1. (Décomposition)
$L = K - \Lambda$ fermé auto-adjoint sur L^2_v, local en t, x, avec

$$\langle \Lambda(h), h \rangle_{L^2} =: \|h\|^2_\Lambda \geq C_\Lambda \|h\|^2_{L^2}, \; C_\Lambda > 0 \quad \text{(coercivité de } \Lambda\text{)},$$

$$\langle L(h), g \rangle_{L^2_v} \leq C_L \|h\|_{\Lambda_v} \|g\|_{\Lambda_v}, \; C_L > 0 \quad (L \text{ borné relativement à } \Lambda).$$

H2. (Propriété de mélange en vitesse)

$$\forall \delta > 0, \; \exists\, C(\delta) > 0 \text{ t.q. } \langle \nabla_v K(h), \nabla_v h \rangle_{L^2_v} \leq C(\delta) \|h\|^2_{L^2_v} + \delta \|\nabla_v h\|^2_{L^2_v}$$

$\hookrightarrow$ structure "partie mélangeante + partie coercive"

H3. (Relaxation (coercivité) locale)
Dans L^2_v, on suppose $N(L) = \text{Span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$
et avec Π_l projection $\perp$ sur $Ker(L)$, alors

$$\langle L(h), h \rangle_{L^2_v} \leq -\lambda \|h - \Pi_l(h)\|^2_{\Lambda_v}, \quad \lambda > 0.$$

Theorem (CM-Neumann, '06)

$S = L - v \cdot \nabla_x$ vérifie (Π_g projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(T)$ dans L^2)

$$\langle Sh, h\rangle_{\mathcal{H}^1} \leq -C_T \left(\|h - \Pi_g(h)\|^2_\Lambda + \|\nabla_{x,v}(h - \Pi_g(h))\|^2_\Lambda \right)$$

pour une norme de Hilbert (explicite) $\mathcal{H}^1$ équivalente à H^1, et une constante explicite $C_T > 0$ (et résultat similaire dans H^k).

- Décroissance exponentielle du semi-groupe de S (si $\|\cdot\|_\Lambda$ plus fort que L^2).
- $\hookrightarrow$ Stabilité non-linéaire si non-linéairité Γ vérifie (k assez gd)

H4. $$\langle \Gamma(h,h), h\rangle_{\mathcal{H}^k} \leq C_\Gamma \|h\|_{H^k} \left(\sum_{|j|+|l|\leq k} \|\partial^j_l h\|^2_\Lambda \right).$$

Applications du cadre abstrait

- Modèles de relaxation classiques ou semi-classiques ;
- éq. de Boltzmann equation sphères dures ou potentiels durs cutoff ;
- idem sans cutoff (mais sans non-linéarité Γ : question ouverte de montrer **H4.** sur Γ ;
- éq. de Landau pour potentiels durs ou modérément mous. . . ;
- éq. de Fokker-Planck, modèles de transfert radiatif . . .
- $\hookrightarrow$ inclut modèles d'intéraction à longue portée.
- Méthode constructive dès que la coercivité sur L l'est (cf. section préc.)

Idées de la preuve du théorème abstrait (1)

Exemple le plus simple pour comprendre la preuve :
un seul invariant de collision (masse), $Ker(L) = \text{Vect}\,\{M^{1/2}\}$

$$\hookrightarrow \quad \Pi_l(h) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} h M^{1/2}\, dv \right) M^{1/2} \quad \text{et} \quad Lh = \Pi_l - \text{Id} = -\Pi_l^{\perp}.$$

Estimations élémentaires sur h t.q. $\Pi_g(h) = 0$:

$$\frac{d}{dt} \|h\|^2_{L^2} \leq -2\,\lambda\, \|h - \Pi_l h\|^2_\Lambda$$

$$\frac{d}{dt} \|\nabla_x h\|^2_{L^2} \leq -2\,\lambda\, \|\nabla_x h - \Pi_l(\nabla_x h)\|^2_\Lambda$$

$$\frac{d}{dt} \|\nabla_v h\|^2_{L^2} \leq C_1\, \|h - \Pi_l(h)\|^2_\Lambda + C_2\, \|\nabla_x h\|^2_{L^2} - C_3\, \|\nabla_v h\|^2_\Lambda$$

$$\frac{d}{dt} \langle \nabla_x h, \nabla_v h \rangle \leq -\, \|\nabla_x h\|^2_{L^2} + C_L\, \eta\, \|\nabla_x h - \Pi_l(\nabla_x h)\|^2_\Lambda + C_L\, \eta^{-1}\, \|\nabla_v h\|^2_\Lambda$$

Idées de la preuve du théorème abstrait (2)

Combinaison linéaire pour des coefficients $A, B, C, D > 0$:

$$\mathcal{F}(t) = A\,\|h\|^2_{L^2} + B\,\|\nabla_x h\|^2_{L^2} + C\,\|\nabla_v h\|^2_{L^2} + D\,\langle \nabla_x h, \nabla_v h\rangle.$$

Ajuster les constantes

▷ pour tuer les termes positifs dans la borne sur $\mathcal{F}'(t)$,

▷ en gardant la forme quadratique sur les gradients définie positive.

↪ Pour ce choix $\mathcal{F}(t) \sim \|h\|^2_{H^1}$ et

$$\mathcal{F}'(t) \leq -K\,\left(\|h - \Pi_l h\|^2_\Lambda + \|\nabla_x h - \Pi_l(\nabla_x h)\|^2_\Lambda + \|\nabla_v h\|^2_\Lambda + \|\nabla_x h\|^2_{L^2}\right)$$

Finalement avec l'inégalité de Poincaré :

$$\mathcal{F}'(t) \leq -K\,\left(\|h - \Pi_g h\|^2_\Lambda + \|\nabla_{x,v} h - \Pi_g(\nabla_{x,v} h)\|^2_\Lambda\right).$$

Conclut la preuve.

Cadre abstrait ($x \in \mathbb{R}^d$, potentiel V confinant) (1)

H1. (Balance global compatible avec le transport)
$\exists\ f_\infty \in L^1_+$ t.q. $Tf_\infty = Lf_\infty = 0$

H2. (Conservation de la masse)

$$\forall\, g, \quad \int_{\mathbb{R}^d} Lg \, dv = 0$$

H3. (Coercivité microscopique)
$L \leq 0$ dans $L^2(f_\infty^{-1})$ avec

$$\langle L(h), h \rangle_{L^2(f_\infty^{-1})} \leq -\lambda_m \, \|h - \Pi_l(h)\|^2_\Lambda, \quad \lambda > 0$$

et L borné relativement à Λ

Cadre abstrait ($x \in \mathbb{R}^d$, potentiel V confinant) (2)

H4. (Coercivité macroscopique)
"$\exists$ TS pour l'équation diffusive limite sur ρ" soit inégalité de Poincaré du type

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \nabla_x \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right) \right| m(x)\, dx \geq \lambda_M \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\rho^2}{\rho_\infty}\, dx, \qquad \int \rho\, dx = 0$$

H5. (Estimation elliptique sur la partie macro)
On introduit $bh = \Pi_l(vh)$, $ah = bTh$, $\hat{a}h = -\Pi_l(\nabla_x h)$ et $A = (1 + \hat{a} \cdot a\Pi_l)^{-1}\, \hat{a}b$ et on suppose $AT(1-\Pi)$ borné.

Theorem (Dolbeault-CM-Schmeiser, prépublication)

$S = L - T$ vérifie (Π_g projection orthogonale sur $Ker(S)$ dans L^2)

$$\langle Sh, h\rangle_{\mathcal{L}^2} \leq -C_S \left(\|h - \Pi_l(h)\|_\Lambda^2 + \|\Pi_l(h)\|_{L^2}^2 \right)$$

pour une norme de Hilbert (explicite) $\mathcal{L}^2$ équivalente à $L^2(f_\infty^{-1})$, et une constante explicite $C_S > 0$.

- Décroissance exponentielle du semi-groupe de s (si $\|\cdot\|_\Lambda$ plus fort que $L^2(f_\infty^{-1})$).
- Résultat plus fin que préc. : pas de dérivée, estimations macro indépendante de L mais dépend uniqut de f_∞...

Applications du cadre abstrait (1)

- Modèles de relaxation classiques ou semi-classiques, de scattering plus généralement ;
- Éq. de Fokker-Planck, modèles de transfert radiatif ...
- Méthode constructive dès que la coercivité sur L et l'inégalité de Poincaré modifiée le sont.

Applications du cadre abstrait (2)

- Stabilité linéarisée de modèles de relaxation de diffusion non-linéaire introduit dans *Dolbeault-Markowitch-Oelz-Schmeiser'07* :

$$\partial_f + Tf = \gamma\left(\frac{|v|^2}{2} - \bar{\mu}(\rho_f)\right) - f$$

avec profil *gamma* et $\bar{\mu}$ t.q. $\rho = \int_v \gamma(|v|^2/2 - \bar{\mu}(\rho)$.
$\hookrightarrow$ Global Gibbs state $f_\infty(x,v) = \gamma(|v|^2/2 + V(x) - \mu_*)$ à variables x et v non séparées (idem pour le linéarisé)

- Hypothèses sur V pour équilibre à variable séparée $e^{-V(x)-|v|^2/2}$: strictement convexe à l'infini & $|\nabla^2 V| \leq C\,(1 + |\nabla V|)$ (polynômes ok)

Idées de la preuve du théorème abstrait (1)

Exemple le plus simple pour comprendre la preuve :
un seul invariant de collision (masse), $Ker(L) = \text{Vect}\,\{M^{1/2}\}$

$$\hookrightarrow \; \Pi_I(h) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} h M^{1/2}\, dv \right) M^{1/2} \quad \text{et} \quad Lh = \Pi_I - \text{Id} = -\Pi_I^{\perp}.$$

Équilibre $f_\infty = e^{-V(x)/2 - |v|^2/2}$.
Introduction d'opérateurs auxiliaires :
$bh = \Pi_I(vh)$
$ah = bTh$
$\hat{a}h = -\Pi_I(\nabla_x h)$.
$A = (1 + \hat{a} \cdot a\Pi_I)^{-1}\, \hat{a} b$

Idées de la preuve du théorème abstrait (2)

Introduction de la fonction de Lyapunov

$$H(h) = \frac{1}{2} \|h\|^2_{L^2(f_\infty^{-1})} + \varepsilon \langle Ah, h \rangle_{L^2(f_\infty^{-1})}$$

et calcul

$$\frac{dH(h)}{dt} \leq -\lambda_m \|(1-\Pi_l)h\|^2_\Lambda - \varepsilon \langle AT\Pi_l\, h, h\rangle_{L^2(f_\infty^{-1})}$$

$$-\varepsilon \langle AT(1-\Pi_l)h, h\rangle_{L^2(f_\infty^{-1})}$$

$$+\varepsilon \langle TAh, h\rangle_{L^2(f_\infty^{-1})} + \varepsilon \langle Lh, (A+A^*)h\rangle_{L^2(f_\infty^{-1})}.$$

Lemme : A et TA bornés relativement à $(1-\Pi_l)$.

Ajuster ε pour conclure.

Perspectives

- Hypocoercivité pour domaine avec bord ? (limite de potentiel "mur" ?) dépendance par rapport à la géométrie et conditions limites ?
- Question d'étendre le dernier théo. à plusieurs lois de conservations : intéraction avec le champ de transport plus complexe, travail en cours *Dolb.-CM-Schmeiser*
- Connection des théories linéarisées et non-linéaires (approches non-linéaires non optimales pour le taux de retour). $\hookrightarrow$ cadre linéarisé du type $L^2(f_\infty^{-1})$ non adapté au pb d'évolution non-linéaire...