Bornes inférieures pour le temps de vie des solutions de modèles de fluides incompressibles non visqueux

Raphaël Danchin, Université Paris-Est Créteil

Séminaire de mathématiques appliquées, Collège de France

7 janvier 2011

I. Le système d'Euler incompressible "classique"

L'évolution d'un fluide parfait incompressible homogène est régie par

$$(E) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla \Pi = 0, \\ \operatorname{div} u = 0. \end{array} \right. \qquad \text{dans} \quad (T_-, T_+) \times \mathbb{R}^d$$

I. Le système d'Euler incompressible "classique"

L'évolution d'un fluide parfait incompressible homogène est régie par

$$(E) \qquad \begin{cases} \partial_t u + u\cdot\nabla u + \nabla\Pi = 0, \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases} \qquad \text{dans} \quad (T_-, T_+)\times\mathbb{R}^d$$

Théorème

Existence : *Si la donnée initiale u_0 (t.q. $\operatorname{div} u_0 = 0$) appartient à un espace de Banach X "raisonnable" inclus dans $C^{0,1}$ alors (E) admet une unique solution locale $(u, \nabla\Pi)$ dans $L^\infty(]-T,T[;X)$.*

Critère d'explosion: (si $T<\infty$) :

- *si $\displaystyle\int_0^T \|\nabla u\|_{L^\infty}\,dt < \infty$ alors la solution peut se prolonger au-delà de T;*
- *si l'espace X n'est pas "critique" alors on peut remplacer ∇u par le tourbillon $\omega := \operatorname{rot} u$ dans le critère d'explosion.*

Existence globale : *en dimension deux, on a $T=+\infty$.*

I. Le système d'Euler incompressible "classique"

L'évolution d'un fluide parfait incompressible homogène est régie par

$$(E) \qquad \begin{cases} \partial_t u + u\cdot\nabla u + \nabla\Pi = 0, \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases} \qquad \text{dans} \quad (T_-, T_+)\times\mathbb{R}^d$$

Théorème

Existence : Si la donnée initiale u_0 (t.q. $\operatorname{div} u_0 = 0$) appartient à un espace de Banach X "raisonnable" inclus dans $C^{0,1}$ alors (E) admet une unique solution locale $(u, \nabla\Pi)$ dans $L^\infty(]-T,T[;X)$.

Critère d'explosion: (si $T<\infty$) :

- *si $\displaystyle\int_0^T \|\nabla u\|_{L^\infty}\,dt < \infty$ alors la solution peut se prolonger au-delà de T;*
- *si l'espace X n'est pas "critique" alors on peut remplacer ∇u par le tourbillon $\omega := \operatorname{rot} u$ dans le critère d'explosion.*

Existence globale : en dimension deux, on a $T=+\infty$.

Exemples d'espaces X : espaces de Besov $B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d)$ ou de Triebel-Lizorkin $F^s_{p,r}(\mathbb{R}^d)$ avec $s > 1 + d/p$, espaces de Besov critiques $B^{\frac{d}{p}+1}_{p,1}(\mathbb{R}^d)$.

Le cas de la dimension deux

Propriété fondamentale : si $d=2$, le tourbillon est transporté par le flot:

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0.$$

Donc toutes les normes L^a de ω sont constantes au cours de l'évolution, en particulier la norme L^∞. Cela donne l'existence globale (Wolibner 1930, Yudovich 1963).

Le cas de la dimension deux

Propriété fondamentale : si $d = 2$, le tourbillon est transporté par le flot:

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0.$$

Donc toutes les normes L^a de ω sont constantes au cours de l'évolution, en particulier la norme L^∞. Cela donne l'existence globale (Wolibner 1930, Yudovich 1963).

Mais on a un très mauvais contrôle des normes d'ordre élevé de u. Typiquement,

$$\|u(t)\|_X \leq C e^{C e^{Ct}}.$$

Preuve de l'existence globale dans l'espace de Besov critique $B^1_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$

La loi de Biot-Savart permet de reconstruire le champ de vitesses à partir du tourbillon. On a par exemple

$$\|u\|_{B^1_{\infty,1}} \lesssim \|\omega\|_{L^a} + \|\omega\|_{B^0_{\infty,1}} \quad \text{si} \quad a < 2.$$

Donc il s'agit essentiellement de borner $\omega(t)$ dans $B^0_{\infty,1}$.

Preuve de l'existence globale dans l'espace de Besov critique $B^1_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$

La loi de Biot-Savart permet de reconstruire le champ de vitesses à partir du tourbillon. On a par exemple

$$\|u\|_{B^1_{\infty,1}} \lesssim \|\omega\|_{L^a} + \|\omega\|_{B^0_{\infty,1}} \quad \text{si} \quad a < 2.$$

Donc il s'agit essentiellement de borner $\omega(t)$ dans $B^0_{\infty,1}$.

Si u est de divergence nulle, alors $\|\omega(t)\|_{L^a} = \|\omega_0\|_{L^a}$. Mais s'il s'agit d'estimer la régularité, on a (typiquement)

$$\|\omega(t)\|_Y \leq \|\omega_0\|_Y e^{C\int_0^t \|\nabla u\|_{L^\infty}\,d\tau}.$$

Preuve de l'existence globale dans l'espace de Besov critique $B^1_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$

La loi de Biot-Savart permet de reconstruire le champ de vitesses à partir du tourbillon. On a par exemple

$$\|u\|_{B^1_{\infty,1}} \lesssim \|\omega\|_{L^a} + \|\omega\|_{B^0_{\infty,1}} \quad \text{si} \quad a < 2.$$

Donc il s'agit essentiellement de borner $\omega(t)$ dans $B^0_{\infty,1}$.

Si u est de divergence nulle, alors $\|\omega(t)\|_{L^a} = \|\omega_0\|_{L^a}$. Mais s'il s'agit d'estimer la régularité, on a (typiquement)

$$\|\omega(t)\|_Y \leq \|\omega_0\|_Y e^{C\int_0^t \|\nabla u\|_{L^\infty}\,d\tau}.$$

Observation de M. Vishik: si Y est un espace de Besov d'indice 0, on a

$$\|\omega(t)\|_Y \leq \|\omega_0\|_Y \left(1 + C\int_0^t \|\nabla u\|_{L^\infty}\,d\tau\right).$$

La démonstration originale de M. Vishik repose sur une formule explicite pour $\omega(t)$ en fonction de ω_0 et du flot de u. Mais on peut appliquer un argument d'interpolation dynamique (T. Hmidi et S. Keraani) plus robuste.

Par linéarité, $\omega = \sum_j \omega_j$ avec

$$\partial_t \omega_j + u \cdot \nabla \omega_j = 0, \qquad \omega_{j\,|t=0} = \Delta_j \omega_0.$$

Donc

$$\|\omega(t)\|_{B^0_{\infty,1}} \leq \sum_j \|\omega_j(t)\|_{B^0_{\infty,1}} \leq \sum_{j,k} \|\Delta_k \omega_j(t)\|_{L^\infty}.$$

Par linéarité, $\omega = \sum_j \omega_j$ avec

$$\partial_t \omega_j + u \cdot \nabla \omega_j = 0, \qquad \omega_{j\,|t=0} = \Delta_j \omega_0.$$

Donc

$$\|\omega(t)\|_{B^0_{\infty,1}} \leq \sum_j \|\omega_j(t)\|_{B^0_{\infty,1}} \leq \sum_{j,k} \|\Delta_k \omega_j(t)\|_{L^\infty}.$$

Pour N entier naturel fixé, on écrit

$$\|\omega\|_{B^0_{\infty,1}} \leq \sum_{|j-k|\leq N} \|\Delta_k \omega_j\|_{L^\infty} + \sum_{|j-k|>N} \|\Delta_k \omega_j\|_{L^\infty}.$$

La première somme peut être majorée par $CN\|\omega_j\|_{L^\infty}$ et l'on sait que $\|\omega_j(t)\|_{L^\infty} = \|\Delta_j \omega_0\|_{L^\infty}.$

Par linéarité, $\omega = \sum_j \omega_j$ avec

$$\partial_t \omega_j + u\cdot\nabla\omega_j = 0, \qquad \omega_{j\,|t=0} = \Delta_j \omega_0.$$

Donc

$$\|\omega(t)\|_{B^0_{\infty,1}} \leq \sum_j \|\omega_j(t)\|_{B^0_{\infty,1}} \leq \sum_{j,k} \|\Delta_k \omega_j(t)\|_{L^\infty}.$$

Pour N entier naturel fixé, on écrit

$$\|\omega\|_{B^0_{\infty,1}} \leq \sum_{|j-k|\leq N} \|\Delta_k \omega_j\|_{L^\infty} + \sum_{|j-k|>N} \|\Delta_k \omega_j\|_{L^\infty}.$$

La première somme peut être majorée par $CN\|\omega_j\|_{L^\infty}$ et l'on sait que $\|\omega_j(t)\|_{L^\infty} = \|\Delta_j \omega_0\|_{L^\infty}$. Pour la deuxième somme, on utilise l'estimation

$$\|\omega_j(t)\|_{B^{\pm\frac12}_{\infty,1}} \leq \|\Delta_j \omega_0\|_{B^{\pm\frac12}_{\infty,1}} e^{C\int_0^t \|\nabla u\|_{L^\infty}\,d\tau}.$$

En revenant à la définition de $B^0_{\infty,1}$, cela donne

$$\|\Delta_k \omega_j(t)\|_{L^\infty} \leq c_k 2^{\pm(\frac{j-k}{2})} \|\Delta_j \omega_0\|_{L^\infty} e^{C\int_0^t \|\nabla u\|_{L^\infty}\,d\tau} \quad \text{avec} \quad \sum c_k = 1.$$

Pour N entier naturel fixé, on écrit

$$\|\omega\|_{B^0_{\infty,1}} \leq \sum_{|j-k|\leq N} \|\Delta_k \omega_j\|_{L^\infty} + \sum_{|j-k|>N} \|\Delta_k \omega_j\|_{L^\infty}.$$

La première somme peut être majorée par $CN\|\omega_j\|_{L^\infty}$ et l'on sait que $\|\omega_j(t)\|_{L^\infty} = \|\Delta_j \omega_0\|_{L^\infty}$. Pour la deuxième somme, on utilise l'estimation

$$\|\omega_j(t)\|_{B^{\pm\frac12}_{\infty,1}} \leq \|\Delta_j \omega_0\|_{B^{\pm\frac12}_{\infty,1}} e^{C\int_0^t \|\nabla u\|_{L^\infty}\,d\tau}.$$

En revenant à la définition de $B^0_{\infty,1}$, cela donne

$$\|\Delta_k \omega_j(t)\|_{L^\infty} \leq c_k 2^{\pm(\frac{j-k}{2})} \|\Delta_j \omega_0\|_{L^\infty} e^{C\int_0^t \|\nabla u\|_{L^\infty}\,d\tau} \quad \text{avec} \quad \sum c_k = 1.$$

Donc finalement

$$\|\omega(t)\|_{B^0_{\infty,1}} \leq C\|\omega_0\|_{B^0_{\infty,1}} \left(N + 2^{-N/2} e^{C\int_0^t \|\nabla u\|_{L^\infty}\,d\tau}\right).$$

Il ne reste plus qu'à choisir N tel que $C2^{-N/2} e^{C\int_0^t \|\nabla u\|_{L^\infty}\,d\tau} \approx 1$ pour trouver

$$\|\omega(t)\|_{B^0_{\infty,1}} \leq \|\omega_0\|_{B^0_{\infty,1}} \left(1 + C\int_0^t \|\nabla u\|_{L^\infty}\,d\tau\right).$$

1. On vient de voir que
$$\|\omega(t)\|_{B^0_{\infty,1}} \leq \|\omega_0\|_{B^0_{\infty,1}}\biggl(1+C\int_0^t \|\nabla u\|_{L^\infty}\,d\tau\biggr).$$

2. D'après la loi de Biot-Savart, si $a<\infty$,
$$\|\nabla u\|_{L^\infty} \leq C\|\omega\|_{L^a\cap B^0_{\infty,1}}.$$

3. On a $\|\omega(t)\|_{L^a}=\|\omega_0\|_{L^a}$ tant que la solution est définie.

1. On vient de voir que

$$\|\omega(t)\|_{B^0_{\infty,1}} \leq \|\omega_0\|_{B^0_{\infty,1}} \left(1 + C\int_0^t \|\nabla u\|_{L^\infty}\,d\tau\right).$$

2. D'après la loi de Biot-Savart, si $a < \infty$,

$$\|\nabla u\|_{L^\infty} \leq C\|\omega\|_{L^a \cap B^0_{\infty,1}}.$$

3. On a $\|\omega(t)\|_{L^a} = \|\omega_0\|_{L^a}$ tant que la solution est définie.

Donc

$$\Omega(t) \leq \Omega_0\left(1 + C\int_0^t \Omega\,d\tau\right) \quad \text{avec} \quad \Omega(t) := \|\omega(t)\|_{L^a \cap B^0_{\infty,1}}.$$

Puis, par Gronwall,

$$\Omega(t) \leq \Omega_0 e^{Ct\Omega_0}.$$

1. On vient de voir que

$$\|\omega(t)\|_{B^0_{\infty,1}} \leq \|\omega_0\|_{B^0_{\infty,1}} \left(1 + C\int_0^t \|\nabla u\|_{L^\infty}\,d\tau\right).$$

2. D'après la loi de Biot-Savart, si $a < \infty$,

$$\|\nabla u\|_{L^\infty} \leq C\|\omega\|_{L^a \cap B^0_{\infty,1}}.$$

3. On a $\|\omega(t)\|_{L^a} = \|\omega_0\|_{L^a}$ tant que la solution est définie.

Donc

$$\Omega(t) \leq \Omega_0\left(1 + C\int_0^t \Omega\,d\tau\right) \quad \text{avec} \quad \Omega(t) := \|\omega(t)\|_{L^a \cap B^0_{\infty,1}}.$$

Puis, par Gronwall,

$$\Omega(t) \leq \Omega_0 e^{Ct\Omega_0}.$$

Ce résultat est-il robuste ???

II. Fluides incompressibles non visqueux et non homogènes

Le système d'Euler incompressible à densité variable s'écrit

$$(IE) \qquad \begin{cases} \partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = 0, \\ \rho(\partial_t u + u \cdot \nabla u) + \nabla \Pi = 0, \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases}$$

II. Fluides incompressibles non visqueux et non homogènes

Le système d'Euler incompressible à densité variable s'écrit

$$(IE) \qquad \begin{cases} \partial_t \rho + u\cdot\nabla\rho = 0, \\ \rho(\partial_t u + u\cdot\nabla u) + \nabla\Pi = 0, \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases}$$

En gros, si $\inf \rho_0 > 0$, on peut le résoudre *localement* dans les mêmes espaces fonctionnels que le système d'Euler incompressible homogène. Estimer la pression présente cependant quelques difficultés supplémentaires car Π vérifie une équation elliptique à coefficients peu réguliers:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla\Pi}{\rho}\right) = -\operatorname{div}(u\cdot\nabla u).$$

II. Fluides incompressibles non visqueux et non homogènes

Le système d'Euler incompressible à densité variable s'écrit

$$(IE) \qquad \begin{cases} \partial_t\rho + u\cdot\nabla\rho = 0, \\ \rho(\partial_t u + u\cdot\nabla u) + \nabla\Pi = 0, \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases}$$

Théorème (D., Fanelli)

Soit X un espace de Besov s'injectant dans $C^{0,1}$. Soit (ρ_0, u_0) dans X avec de plus $\operatorname{div} u_0 = 0$ et $u_0 \in L^2$, et $\inf \rho_0 > 0$. Alors il existe $T > 0$ tel que (IE) ait une unique solution $(\rho, u, \nabla\Pi)$ dans $L^\infty(]-T, T[; X)$. De plus, si

$$\int_0^T \Big(\|\nabla u\|_{L^\infty} + \|\nabla\Pi\|_{B^0_{\infty,1}} \Big)\, dt < \infty$$

alors la solution peut se prolonger au-delà de T.

On suppose que (ρ_0, u_0) sont dans $B^1_{\infty,1}$ et, de plus, $u_0 \in L^2$ (pour simplifier).

Gérer la pression est la difficulté principale. Pour cela, on écrit

$$\Delta\Pi = -\rho \mathrm{div}\,(u\cdot\nabla u) + \nabla\Pi\cdot\nabla\log\rho.$$

Si χ est une troncature spectrale basses fréquences, on a:

$$\|\nabla\Pi\|_{B^1_{\infty,1}} \leq \|\nabla(\chi(D)\Pi)\|_{L^\infty} + C\|(\mathrm{Id}-\chi(D))\Delta\Pi\|_{B^0_{\infty,1}}.$$

Donc

$$\|\nabla\Pi\|_{B^1_{\infty,1}} \lesssim \|\nabla\Pi\|_{L^2} + \|\rho \mathrm{div}\,(u\cdot\nabla u)\|_{B^0_{\infty,1}} + \|\nabla\Pi\cdot\nabla\log\rho\|_{B^0_{\infty,1}}.$$

On suppose que (ρ_0, u_0) sont dans $B^1_{\infty,1}$ et, de plus, $u_0 \in L^2$ (pour simplifier).

Gérer la pression est la difficulté principale. Pour cela, on écrit

$$\Delta\Pi = -\rho \mathrm{div}\,(u\cdot\nabla u) + \nabla\Pi\cdot\nabla\log\rho.$$

Si χ est une troncature spectrale basses fréquences, on a:

$$\|\nabla\Pi\|_{B^1_{\infty,1}} \leq \|\nabla(\chi(D)\Pi)\|_{L^\infty} + C\|(\mathrm{Id}-\chi(D))\Delta\Pi\|_{B^0_{\infty,1}}.$$

Donc

$$\|\nabla\Pi\|_{B^1_{\infty,1}} \lesssim \|\nabla\Pi\|_{L^2} + \|\rho \mathrm{div}\,(u\cdot\nabla u)\|_{B^0_{\infty,1}} + \|\nabla\Pi\cdot\nabla\log\rho\|_{B^0_{\infty,1}}.$$

Le terme vert contient encore $\nabla\Pi$ mais est d'ordre inférieur. Par un argument d'interpolation et lois de produits dans les Besov, on obtient

$$\|\nabla\Pi\|_{B^1_{\infty,1}} \lesssim \big(1+\|\rho\|^\gamma_{B^1_{\infty,1}}\big)\big(\|\nabla\Pi\|_{L^2} + \|u\|^2_{B^1_{\infty,1}}\big).$$

On suppose que (ρ_0, u_0) sont dans $B^1_{\infty,1}$ et, de plus, $u_0 \in L^2$ (pour simplifier).

Gérer la pression est la difficulté principale. Pour cela, on écrit

$$\Delta\Pi = -\rho \mathrm{div}\,(u \cdot \nabla u) + \nabla\Pi \cdot \nabla \log \rho.$$

Si χ est une troncature spectrale basses fréquences, on a:

$$\|\nabla\Pi\|_{B^1_{\infty,1}} \leq \|\nabla(\chi(D)\Pi)\|_{L^\infty} + C\|(\mathrm{Id} - \chi(D))\Delta\Pi\|_{B^0_{\infty,1}}.$$

Donc

$$\|\nabla\Pi\|_{B^1_{\infty,1}} \lesssim \|\nabla\Pi\|_{L^2} + \|\rho \mathrm{div}\,(u \cdot \nabla u)\|_{B^0_{\infty,1}} + \|\nabla\Pi \cdot \nabla \log \rho\|_{B^0_{\infty,1}}.$$

Le terme vert contient encore $\nabla\Pi$ mais est d'ordre inférieur. Par un argument d'interpolation et lois de produits dans les Besov, on obtient

$$\|\nabla\Pi\|_{B^1_{\infty,1}} \lesssim \big(1 + \|\rho\|^\gamma_{B^1_{\infty,1}}\big)(\|\nabla\Pi\|_{L^2} + \|u\|^2_{B^1_{\infty,1}}).$$

Le terme $\|\nabla\Pi\|_{L^2}$ est d'ordre inférieur et se majore simplement par

$$\|\nabla\Pi\|_{L^2} \leq \|\rho\|_{L^\infty} \|u \cdot \nabla u\|_{L^2} \leq \|\rho\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^\infty}.$$

On suppose que (ρ_0, u_0) sont dans $B^1_{\infty,1}$ et, de plus, $u_0 \in L^2$ (pour simplifier).

Gérer la pression est la difficulté principale. Pour cela, on écrit

$$\Delta\Pi = -\rho \mathrm{div}\,(u \cdot \nabla u) + \nabla\Pi \cdot \nabla \log \rho.$$

Si χ est une troncature spectrale basses fréquences, on a:

$$\|\nabla\Pi\|_{B^1_{\infty,1}} \leq \|\nabla(\chi(D)\Pi)\|_{L^\infty} + C\|(\mathrm{Id} - \chi(D))\Delta\Pi\|_{B^0_{\infty,1}}.$$

Donc

$$\|\nabla\Pi\|_{B^1_{\infty,1}} \lesssim \|\nabla\Pi\|_{L^2} + \|\rho \mathrm{div}\,(u \cdot \nabla u)\|_{B^0_{\infty,1}} + \|\nabla\Pi \cdot \nabla \log \rho\|_{B^0_{\infty,1}}.$$

Le terme vert contient encore $\nabla\Pi$ mais est d'ordre inférieur. Par un argument d'interpolation et lois de produits dans les Besov, on obtient

$$\|\nabla\Pi\|_{B^1_{\infty,1}} \lesssim \left(1 + \|\rho\|^{\gamma}_{B^1_{\infty,1}}\right)\left(\|\nabla\Pi\|_{L^2} + \|u\|^2_{B^1_{\infty,1}}\right).$$

Le terme $\|\nabla\Pi\|_{L^2}$ est d'ordre inférieur et se majore simplement par

$$\|\nabla\Pi\|_{L^2} \leq \|\rho\|_{L^\infty}\|u \cdot \nabla u\|_{L^2} \leq \|\rho\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^\infty}.$$

L'égalité d'énergie standard pour Euler donne

$$\|\sqrt{\rho(t)}u(t)\|_{L^2} = \|\sqrt{\rho_0}u_0\|_{L^2}.$$

Les normes de ρ et de u dans $B^1_{\infty,1}$ peuvent se majorer à l'aide des estimations a priori classiques pour les équations de transport.

A propos de l'existence locale

Un argument de changement d'échelle montre que si u_0 est de taille ε alors le temps de vie est au moins en $\mathcal{O}(1/\varepsilon)$.

Mais la dimension deux ne semble pas meilleure.

En dimension deux, le tourbillon vérifie

$$\partial_t\omega + u\cdot\nabla\omega + \nabla(1/\rho)\wedge\nabla\Pi = 0.$$

En dimension trois, on aurait

$$\partial_t\omega + u\cdot\nabla\omega + \nabla(1/\rho)\wedge\nabla\Pi = \omega\cdot\nabla u.$$

En dimension deux, le tourbillon vérifie

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega + \nabla(1/\rho) \wedge \nabla \Pi = 0.$$

En dimension trois, on aurait

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega + \nabla(1/\rho) \wedge \nabla \Pi = \omega \cdot \nabla u.$$

La dimension deux est-elle “meilleure” que la dimension trois ???

On considère un fluide faiblement non homogène (i.e. $1/\rho_0 = 1 + b_0$ avec b_0 petit) en dimension deux. On a donc

$$\begin{cases} \partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega + \nabla b \wedge \nabla \Pi = 0, \\ \partial_t b + u \cdot \nabla b = 0. \end{cases}$$

Rappel : si $b_0 = 0$ alors la solution est globale.

On considère un fluide faiblement non homogène (i.e. $1/\rho_0 = 1 + b_0$ avec b_0 petit) en dimension deux. On a donc

$$\begin{cases} \partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega + \nabla b \wedge \nabla \Pi = 0, \\ \partial_t b + u \cdot \nabla b = 0. \end{cases}$$

Rappel : si $b_0 = 0$ alors la solution est globale.

1. Estimation a priori pour le tourbillon:

$$(1) \quad \|\omega(t)\|_{B^0_{\infty,1}} \leq C \left(\|\omega_0\|_{B^0_{\infty,1}} + \int_0^t \|b\|_{B^1_{\infty,1}} \|\nabla \Pi\|_{B^1_{\infty,1}} \, d\tau \right) \left(1 + \int_0^t \|\nabla u\|_{L^\infty} \, d\tau \right) \cdot$$

2. Estimation a priori pour b:

$$(2) \qquad \|b(t)\|_{B^1_{\infty,1}} \leq \|b_0\|_{B^1_{\infty,1}} \exp \left(\int_0^t \|u\|_{B^1_{\infty,1}} \, d\tau \right) \cdot$$

3. La pression vérifie

$$\Delta \Pi = -\mathrm{div}\,(u \cdot \nabla u) - \mathrm{div}\,(b \nabla \Pi).$$

Le terme vert peut être absorbé si $\|b\|_{B^1_{\infty,1}} \ll 1$. Donc

$$\|\nabla \Pi\|_{B^1_{\infty,1} \cap L^2} \lesssim \|u\|^2_{B^1_{\infty,1} \cap L^2} \cdot$$

1. Estimation a priori pour le tourbillon:

$$(1)\quad \|\omega(t)\|_{B^0_{\infty,1}} \leq C\left(\|\omega_0\|_{B^0_{\infty,1}} + \int_0^t \|b\|_{B^1_{\infty,1}} \|\nabla\Pi\|_{B^1_{\infty,1}}\, d\tau\right)\left(1 + \int_0^t \|\nabla u\|_{L^\infty}\, d\tau\right)\cdot$$

2. Estimation a priori pour b:

$$(2)\qquad \|b(t)\|_{B^1_{\infty,1}} \leq \|b_0\|_{B^1_{\infty,1}} \exp\left(\int_0^t \|u\|_{B^1_{\infty,1}}\, d\tau\right)\cdot$$

3. La pression vérifie

$$\Delta\Pi = -\mathrm{div}\,(u\cdot\nabla u) - \mathrm{div}\,(b\nabla\Pi).$$

Le terme vert peut être absorbé si $\|b\|_{B^1_{\infty,1}} \ll 1$. Donc

$$\|\nabla\Pi\|_{B^1_{\infty,1}\cap L^2} \lesssim \|u\|^2_{B^1_{\infty,1}\cap L^2}\cdot$$

On injecte tout cela dans (1), et on utilise (2) et le fait que (cf Biot-Savart):

$$\|u\|_{B^1_{\infty,1}} \lesssim \|u\|_{L^2} + \|\omega\|_{B^0_{\infty,1}},$$

et l'égalité d'énergie. Cela donne:

$$X(t) \leq C\left(X_0 + \|b_0\|_{B^1_{\infty,1}} \int_0^t X^2 e^{C\int_0^\tau X\, d\tau'}\, d\tau\right)\left(1 + \int_0^t X\, d\tau\right),$$

avec $X(t) := \|u\|_{L^2} + \|u\|_{B^1_{\infty,1}}$.

On injecte tout cela dans (1), et on utilise (2) et le fait que (cf Biot-Savart):

$$\|u\|_{B^1_{\infty,1}} \lesssim \|u\|_{L^2} + \|\omega\|_{B^0_{\infty,1}},$$

et l'égalité d'énergie. Cela donne:

$$X(t) \leq C\biggl(X_0 + \|b_0\|_{B^1_{\infty,1}} \int_0^t X^2 e^{C\int_0^\tau X\,d\tau'}\,d\tau\biggr)\biggl(1 + \int_0^t X\,d\tau\biggr),$$

avec $X(t) := \|u\|_{L^2} + \|u\|_{B^1_{\infty,1}}$.

Théorème (D., Fanelli)

Si $\|b_0\|_{B^1_{\infty,1}}$ est assez petit alors le temps de vie T^* de la solution vérifie

$$T^* \geq \frac{c}{\|u_0\|_{L^2\cap B^1_{\infty,1}}} \log\log \frac{1}{\|b_0\|_{B^1_{\infty,1}}}.$$

Donc si u_0 est d'ordre 1 et b_0 d'ordre ε, le temps de vie est au moins en $\log\log 1/\varepsilon$.

III. Système de Boussinesq non visqueux

Il s'agit de

$$(B)\qquad \begin{cases} \partial_t v + v\cdot\nabla v + \nabla\Pi = \theta\vec{e}_d, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ \partial_t\theta + v\cdot\nabla\theta = 0. \end{cases}$$

- C'est un modèle jouet pour les fluides géophysiques. Le terme vert traduit la stratification.
- Similarité formelle entre Boussinesq 2D et Euler incompressible 3D axisymétrique.

III. Système de Boussinesq non visqueux

Il s'agit de

$$(B) \qquad \begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v + \nabla \Pi = \theta \vec{e}_d, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ \partial_t \theta + v \cdot \nabla \theta = 0. \end{cases}$$

- C'est un modèle jouet pour les fluides géophysiques. Le terme vert traduit la stratification.
- Similarité formelle entre Boussinesq 2D et Euler incompressible 3D axisymétrique.

Théorème (Existence locale en dimension quelconque)

Soit (θ_0, v_0) (avec $\operatorname{div} v_0 = 0$) dans un espace de Banach X dans lequel on sait résoudre Euler incompressible. Alors (B) admet une unique solution locale en temps à valeurs dans X, et l'on dispose de critères d'explosion du type précédent.

III. Système de Boussinesq non visqueux

Il s'agit de

$$(B) \qquad \begin{cases} \partial_t v + v\cdot\nabla v + \nabla\Pi = \theta\vec{e}_d, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ \partial_t\theta + v\cdot\nabla\theta = 0. \end{cases}$$

- C'est un modèle jouet pour les fluides géophysiques. Le terme vert traduit la stratification.
- Similarité formelle entre Boussinesq 2D et Euler incompressible 3D axisymétrique.

Théorème (Existence locale en dimension quelconque)

Soit (θ_0, v_0) (avec $\operatorname{div} v_0 = 0$) dans un espace de Banach X dans lequel on sait résoudre Euler incompressible. Alors (B) admet une unique solution locale en temps à valeurs dans X, et l'on dispose de critères d'explosion du type précédent.

- Un argument de changement d'échelle montre que si $\theta_0 = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ et $u_0 = \mathcal{O}(\varepsilon)$ alors le temps de vie est minoré par $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$.
- On remarque que $\theta \equiv 0$ redonne Euler incompressible, et il y a donc existence globale en dimension deux. Si $\theta \not\equiv 0$, la dimension deux est-elle encore meilleure ?

Le tourbillon vérifie

$$\partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega = \partial_1 \theta$$

alors qu'en dimension trois, il y aurait en plus $\omega \cdot \nabla v$ dans le membre de droite.

Le tourbillon vérifie

$$\partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega = \partial_1 \theta$$

alors qu'en dimension trois, il y aurait en plus $\omega \cdot \nabla v$ dans le membre de droite.

Donc

$$\|\omega(t)\|_{B^0_{\infty,1}\cap L^2} \leq \left(\|\omega_0\|_{B^0_{\infty,1}\cap L^2} + \int_0^t \|\partial_1 \theta\|_{B^0_{\infty,1}\cap L^2}\, d\tau \right)\left(1 + \int_0^t \|\nabla v\|_{L^\infty}\, d\tau\right).$$

Le tourbillon vérifie

$$\partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega = \partial_1 \theta$$

alors qu'en dimension trois, il y aurait en plus $\omega \cdot \nabla v$ dans le membre de droite.

Donc

$$\|\omega(t)\|_{B^0_{\infty,1}\cap L^2} \leq \left(\|\omega_0\|_{B^0_{\infty,1}\cap L^2} + \int_0^t \|\partial_1 \theta\|_{B^0_{\infty,1}\cap L^2}\, d\tau \right)\left(1 + \int_0^t \|\nabla v\|_{L^\infty}\, d\tau\right).$$

Par la loi de Biot-Savart,

$$\|\nabla v\|_{L^\infty} \lesssim \|\nabla v\|_{B^0_{\infty,1}} \lesssim \|\omega\|_{B^0_{\infty,1}\cap L^2}.$$

Par les estimations classiques de transport,

$$\|\nabla \theta(t)\|_{B^0_{\infty,1}\cap L^2} \leq \|\nabla \theta_0\|_{B^0_{\infty,1}\cap L^2}\, e^{C \int_0^t \|\nabla v\|_{B^0_{\infty,1}}\, d\tau}.$$

Donc, en notant $\Omega(t) := \|\omega(t)\|_{L^2 \cap B^0_{\infty,1}}$,

$$\Omega(t) \leq C \left(\Omega_0 + t \|\nabla \theta_0\|_{B^0_{\infty,1}\cap L^2}\, e^{C \int_0^t \Omega\, d\tau} \right)\left(1 + \int_0^t \Omega\, d\tau\right).$$

Par la loi de Biot-Savart,

$$\|\nabla v\|_{L^\infty} \lesssim \|\nabla v\|_{B^0_{\infty,1}} \lesssim \|\omega\|_{B^0_{\infty,1}\cap L^2}.$$

Par les estimations classiques de transport,

$$\|\nabla\theta(t)\|_{B^0_{\infty,1}\cap L^2} \leq \|\nabla\theta_0\|_{B^0_{\infty,1}\cap L^2} e^{C\int_0^t \|\nabla v\|_{B^0_{\infty,1}}\,d\tau}.$$

Donc, en notant $\Omega(t) := \|\omega(t)\|_{L^2\cap B^0_{\infty,1}}$,

$$\Omega(t) \leq C\Big(\Omega_0 + t\|\nabla\theta_0\|_{B^0_{\infty,1}\cap L^2} e^{C\int_0^t \Omega\,d\tau}\Big)\Big(1+\int_0^t \Omega\,d\tau\Big).$$

D'où la minoration suivante du temps de vie :

$$T^* \geq \frac{c}{\|\omega_0\|_{L^2\cap B^0_{\infty,1}}} \log\log \frac{\|\omega_0\|^2_{L^2\cap B^0_{\infty,1}}}{\|\nabla\theta_0\|_{B^0_{\infty,1}\cap L^2}}.$$

Si $v_0 = \mathcal{O}(1)$ et $\theta_0 = \mathcal{O}(\varepsilon)$, on obtient encore une borne inférieure en $\log\log 1/\varepsilon$.

IV. Le système d'Euler incompressible axisymétrique avec swirl

On s'intéresse aux solutions d'Euler incompressible 3D de la forme

$$u = u^r(r,z)\vec{e}_r + u^\theta(r,z)\vec{e}_\theta + u^z(r,z)\vec{e}_z$$

avec (r,θ,z) système de coordonnées cylindriques.

IV. Le système d'Euler incompressible axisymétrique avec swirl

On s'intéresse aux solutions d'Euler incompressible 3D de la forme

$$u = u^r(r,z)\vec{e}_r + u^\theta(r,z)\vec{e}_\theta + u^z(r,z)\vec{e}_z$$

avec (r,θ,z) système de coordonnées cylindriques.
Le vecteur tourbillon ω s'écrit alors

$$\omega = -\partial_z u^\theta \vec{e}_r + \omega^\theta \vec{e}_\theta + r^{-1}\partial_r(ru^\theta)\vec{e}_z \quad \text{avec} \quad \omega^\theta := \partial_z u^r - \partial_r u^z.$$

Les quantités $\Gamma := (ru^\theta)^2$ et $\zeta := r^{-1}\omega^\theta$ vérifient

$$\begin{cases} (\partial_t + u^r\partial_r + u^z\partial_z)\Gamma = 0, \\ (\partial_t + u^r\partial_r + u^z\partial_z)\zeta = \frac{1}{r^4}\partial_z\Gamma. \end{cases}$$

IV. Le système d'Euler incompressible axisymétrique avec swirl

On s'intéresse aux solutions d'Euler incompressible 3D de la forme

$$u = u^r(r,z)\vec{e}_r + u^\theta(r,z)\vec{e}_\theta + u^z(r,z)\vec{e}_z$$

avec (r,θ,z) système de coordonnées cylindriques.
Le vecteur tourbillon ω s'écrit alors

$$\omega = -\partial_z u^\theta \vec{e}_r + \omega^\theta \vec{e}_\theta + r^{-1}\partial_r(ru^\theta)\vec{e}_z \quad \text{avec} \quad \omega^\theta := \partial_z u^r - \partial_r u^z.$$

Les quantités $\Gamma := (ru^\theta)^2$ et $\zeta := r^{-1}\omega^\theta$ vérifient

$$\begin{cases} (\partial_t + u^r\partial_r + u^z\partial_z)\Gamma = 0, \\ (\partial_t + u^r\partial_r + u^z\partial_z)\zeta = \frac{1}{r^4}\partial_z\Gamma. \end{cases}$$

Remarque

Dans le cas $u^\theta \equiv 0$ (axisymétrique sans swirl) l'équation pour ζ est la même que l'équation pour le tourbillon en dimension deux. Cela permet de démontrer l'existence globale (Ukhovskiì-Yudovich, 1968).

IV. Le système d'Euler incompressible axisymétrique avec swirl

On s'intéresse aux solutions d'Euler incompressible 3D de la forme

$$u = u^r(r,z)\vec{e}_r + u^\theta(r,z)\vec{e}_\theta + u^z(r,z)\vec{e}_z$$

avec (r,θ,z) système de coordonnées cylindriques.

Le vecteur tourbillon ω s'écrit alors

$$\omega = -\partial_z u^\theta \vec{e}_r + \omega^\theta \vec{e}_\theta + r^{-1}\partial_r(ru^\theta)\vec{e}_z \quad \text{avec} \quad \omega^\theta := \partial_z u^r - \partial_r u^z.$$

Les quantités $\Gamma := (ru^\theta)^2$ et $\zeta := r^{-1}\omega^\theta$ vérifient

$$\begin{cases} (\partial_t + u^r\partial_r + u^z\partial_z)\Gamma = 0, \\ (\partial_t + u^r\partial_r + u^z\partial_z)\zeta = \frac{1}{r^4}\partial_z\Gamma. \end{cases}$$

Cas général : Si l'on peut reconstruire (u^r, u^z) à partir de ω^θ par une loi de type Biot-Savart, le système vérifié par (Γ,ζ) est le système de Boussinesq en formulation tourbillon, au terme singulier $1/r^4$ près.

IV. Le système d'Euler incompressible axisymétrique avec swirl

On s'intéresse aux solutions d'Euler incompressible 3D de la forme

$$u = u^r(r,z)\vec{e}_r + u^\theta(r,z)\vec{e}_\theta + u^z(r,z)\vec{e}_z$$

avec (r,θ,z) système de coordonnées cylindriques.

Le vecteur tourbillon ω s'écrit alors

$$\omega = -\partial_z u^\theta \vec{e}_r + \omega^\theta \vec{e}_\theta + r^{-1}\partial_r(ru^\theta)\vec{e}_z \quad \text{avec} \quad \omega^\theta := \partial_z u^r - \partial_r u^z.$$

Les quantités $\Gamma := (ru^\theta)^2$ et $\zeta := r^{-1}\omega^\theta$ vérifient

$$\begin{cases} (\partial_t + u^r\partial_r + u^z\partial_z)\Gamma = 0, \\ (\partial_t + u^r\partial_r + u^z\partial_z)\zeta = \frac{1}{r^4}\partial_z\Gamma. \end{cases}$$

Cas général : Si l'on peut reconstruire (u^r, u^z) à partir de ω^θ par une loi de type Biot-Savart, le système vérifié par (Γ, ζ) est le système de Boussinesq en formulation tourbillon, au terme singulier $1/r^4$ près.

Résultat préliminaire : si l'on considère Euler 3D axisymétrique dans un cylindre creux $\{(r,\theta,z)\ t.q.\ 0 < r_- < r < r_+\}$ alors on a les mêmes bornes inférieures pour le temps de vie, que pour le système de Boussinesq:

$$T^* \geq c \log\log 1/\varepsilon \quad \text{si} \quad \zeta_0 = \mathcal{O}(1) \quad \text{et} \quad \Gamma_0 = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Problèmes ouverts

- A-t-on encore la même borne inférieure pour Euler 3D axisymétrique dans un domaine axisymétrique contenant l'axe ?
- Optimalité de la borne inférieure en $\log\log 1/\varepsilon$ pour les systèmes étudiés ? Dans cet exposé, nous n'avons absolument pas utilisé la structure de $\nabla b \wedge \nabla \Pi$ ou de $\partial_1 \theta \dots$