Une théorie continue pour le trafic congestionné : modèles, équilibre, numérique et régularité.

Filippo Santambrogio

Université Paris-Dauphine,
filippo@ceremade.dauphine.fr

Séminaire de Mathématiques Appliquées
Collège de France
15 mai

1. Modèles discrets pour le trafic congestionné
   - Equilibres de Nash - Wardrop
   - Optimisation convexe
2. Modèles continus (avec G. Carlier et C. Jimenez)
   - Intensité de trafic
   - Equilibre et transport optimal
   - Finitude de l'énergie
3. Equivalence avec un problème sous contrainte de divergence (avec L. Brasco et G. Carlier)
   - Intensité de trafic vectorielle et scalaire
   - Idées heuristiques
   - Flots plus ou moins réguliers
   - EDP elliptiques très dégénérées
4. Problème dual et simulations numériques (avec F. Benmansour, G. Carlier et G. Peyré)
   - Dualité
   - Discretisation par Fast Marching
   - Dériver par rapport à la métrique
   - Convergences
   - Simulations

1. Modèles discrets pour le trafic congestionné
   - Equilibres de Nash - Wardrop
   - Optimisation convexe
2. Modèles continus (avec G. Carlier et C. Jimenez)
   - Intensité de trafic
   - Equilibre et transport optimal
   - Finitude de l'énergie
3. Equivalence avec un problème sous contrainte de divergence (avec L. Brasco et G. Carlier)
   - Intensité de trafic vectorielle et scalaire
   - Idées heuristiques
   - Flots plus ou moins réguliers
   - EDP elliptiques très dégénérées
4. Problème dual et simulations numériques (avec F. Benmansour, G. Carlier et G. Peyré)
   - Dualité
   - Discretisation par Fast Marching
   - Dériver par rapport à la métrique
   - Convergences
   - Simulations

1. Modèles discrets pour le trafic congestionné
   - Equilibres de Nash - Wardrop
   - Optimisation convexe
2. Modèles continus (avec G. Carlier et C. Jimenez)
   - Intensité de trafic
   - Equilibre et transport optimal
   - Finitude de l'énergie
3. Equivalence avec un problème sous contrainte de divergence (avec L. Brasco et G. Carlier)
   - Intensité de trafic vectorielle et scalaire
   - Idées heuristiques
   - Flots plus ou moins réguliers
   - EDP elliptiques très dégénérées
4. Problème dual et simulations numériques (avec F. Benmansour, G. Carlier et G. Peyré)
   - Dualité
   - Discretisation par Fast Marching
   - Dériver par rapport à la métrique
   - Convergences
   - Simulations

1. Modèles discrets pour le trafic congestionné
   - Equilibres de Nash - Wardrop
   - Optimisation convexe
2. Modèles continus (avec G. Carlier et C. Jimenez)
   - Intensité de trafic
   - Equilibre et transport optimal
   - Finitude de l'énergie
3. Equivalence avec un problème sous contrainte de divergence (avec L. Brasco et G. Carlier)
   - Intensité de trafic vectorielle et scalaire
   - Idées heuristiques
   - Flots plus ou moins réguliers
   - EDP elliptiques très dégénérées
4. Problème dual et simulations numériques (avec F. Benmansour, G. Carlier et G. Peyré)
   - Dualité
   - Discretisation par Fast Marching
   - Dériver par rapport à la métrique
   - Convergences
   - Simulations

1. Modèles discrets pour le trafic congestionné
   - Equilibres de Nash - Wardrop
   - Optimisation convexe
2. Modèles continus (avec G. Carlier et C. Jimenez)
   - Intensité de trafic
   - Equilibre et transport optimal
   - Finitude de l'énergie
3. Equivalence avec un problème sous contrainte de divergence (avec L. Brasco et G. Carlier)
   - Intensité de trafic vectorielle et scalaire
   - Idées heuristiques
   - Flots plus ou moins réguliers
   - EDP elliptiques très dégénérées
4. Problème dual et simulations numériques (avec F. Benmansour, G. Carlier et G. Peyré)
   - Dualité
   - Discretisation par Fast Marching
   - Dériver par rapport à la métrique
   - Convergences
   - Simulations

1. Modèles discrets pour le trafic congestionné
   - Equilibres de Nash - Wardrop
   - Optimisation convexe
2. Modèles continus (avec G. Carlier et C. Jimenez)
   - Intensité de trafic
   - Equilibre et transport optimal
   - Finitude de l'énergie
3. Equivalence avec un problème sous contrainte de divergence (avec L. Brasco et G. Carlier)
   - Intensité de trafic vectorielle et scalaire
   - Idées heuristiques
   - Flots plus ou moins réguliers
   - EDP elliptiques très dégénérées
4. Problème dual et simulations numériques (avec F. Benmansour, G. Carlier et G. Peyré)
   - Dualité
   - Discretisation par Fast Marching
   - Dériver par rapport à la métrique
   - Convergences
   - Simulations

1. Modèles discrets pour le trafic congestionné
   - Equilibres de Nash - Wardrop
   - Optimisation convexe
2. Modèles continus (avec G. Carlier et C. Jimenez)
   - Intensité de trafic
   - Equilibre et transport optimal
   - Finitude de l'énergie
3. Equivalence avec un problème sous contrainte de divergence (avec L. Brasco et G. Carlier)
   - Intensité de trafic vectorielle et scalaire
   - Idées heuristiques
   - Flots plus ou moins réguliers
   - EDP elliptiques très dégénérées
4. Problème dual et simulations numériques (avec F. Benmansour, G. Carlier et G. Peyré)
   - Dualité
   - Discretisation par Fast Marching
   - Dériver par rapport à la métrique
   - Convergences
   - Simulations

1. Modèles discrets pour le trafic congestionné
   - Equilibres de Nash - Wardrop
   - Optimisation convexe
2. Modèles continus (avec G. Carlier et C. Jimenez)
   - Intensité de trafic
   - Equilibre et transport optimal
   - Finitude de l'énergie
3. Equivalence avec un problème sous contrainte de divergence (avec L. Brasco et G. Carlier)
   - Intensité de trafic vectorielle et scalaire
   - Idées heuristiques
   - Flots plus ou moins réguliers
   - EDP elliptiques très dégénérées
4. Problème dual et simulations numériques (avec F. Benmansour, G. Carlier et G. Peyré)
   - Dualité
   - Discretisation par Fast Marching
   - Dériver par rapport à la métrique
   - Convergences
   - Simulations

1. Modèles discrets pour le trafic congestionné
   - Equilibres de Nash - Wardrop
   - Optimisation convexe
2. Modèles continus (avec G. Carlier et C. Jimenez)
   - Intensité de trafic
   - Equilibre et transport optimal
   - Finitude de l'énergie
3. Equivalence avec un problème sous contrainte de divergence (avec L. Brasco et G. Carlier)
   - Intensité de trafic vectorielle et scalaire
   - Idées heuristiques
   - Flots plus ou moins réguliers
   - EDP elliptiques très dégénérées
4. Problème dual et simulations numériques (avec F. Benmansour, G. Carlier et G. Peyré)
   - Dualité
   - Discretisation par Fast Marching
   - Dériver par rapport à la métrique
   - Convergences
   - Simulations

1. Modèles discrets pour le trafic congestionné
   - Equilibres de Nash - Wardrop
   - Optimisation convexe
2. Modèles continus (avec G. Carlier et C. Jimenez)
   - Intensité de trafic
   - Equilibre et transport optimal
   - Finitude de l'énergie
3. Equivalence avec un problème sous contrainte de divergence (avec L. Brasco et G. Carlier)
   - Intensité de trafic vectorielle et scalaire
   - Idées heuristiques
   - Flots plus ou moins réguliers
   - EDP elliptiques très dégénérées
4. Problème dual et simulations numériques (avec F. Benmansour, G. Carlier et G. Peyré)
   - Dualité
   - Discretisation par Fast Marching
   - Dériver par rapport à la métrique
   - Convergences
   - Simulations

L'idée

Supposons que deux routes mènent d'une même ville à une autre : l'une est une autoroute toute droite, l'autre un chemin campagnard plus long. Si tout le monde choisis la première, elle sera bientôt remplie et donc moins efficace que l'autre. Au lendemain, tout le monde changera d'avis et empruntera l'autre. Et ça sera encore pire !

Y a-t-il un équilibre ?

Est-ce que l'équilibre garantit le moindre temps de parcours (moyen ?).

L'idée

Supposons que deux routes mènent d'une même ville à une autre : l'une est une autoroute toute droite, l'autre un chemin campagnard plus long.
Si tout le monde choisis la première, elle sera bientôt remplie et donc moins efficace que l'autre. Au lendemain, tout le monde changera d'avis et empruntera l'autre. Et ça sera encore pire !
Y a-t-il un équilibre ?
Est-ce que l'équilibre garantit le moindre temps de parcours (moyen ?).

L'idée

Supposons que deux routes mènent d'une même ville à une autre : l'une est une autoroute toute droite, l'autre un chemin campagnard plus long. Si tout le monde choisis la première, elle sera bientôt remplie et donc moins efficace que l'autre. Au lendemain, tout le monde changera d'avis et empruntera l'autre. Et ça sera encore pire !

Y a-t-il un équilibre ?

Est-ce que l'équilibre garantit le moindre temps de parcours (moyen ?).

L'idée

Supposons que deux routes mènent d'une même ville à une autre : l'une est une autoroute toute droite, l'autre un chemin campagnard plus long. Si tout le monde choisis la première, elle sera bientôt remplie et donc moins efficace que l'autre. Au lendemain, tout le monde changera d'avis et empruntera l'autre. Et ça sera encore pire !
Y a-t-il un équilibre ?
Est-ce que l'équilibre garantit le moindre temps de parcours (moyen ?).

L'idée

Supposons que deux routes mènent d'une même ville à une autre : l'une est une autoroute toute droite, l'autre un chemin campagnard plus long. Si tout le monde choisis la première, elle sera bientôt remplie et donc moins efficace que l'autre. Au lendemain, tout le monde changera d'avis et empruntera l'autre. Et ça sera encore pire !
Y a-t-il un équilibre ?
Est-ce que l'équilibre garantit le moindre temps de parcours (moyen ?).

L'idée

Supposons que deux routes mènent d'une même ville à une autre : l'une est une autoroute toute droite, l'autre un chemin campagnard plus long. Si tout le monde choisis la première, elle sera bientôt remplie et donc moins efficace que l'autre. Au lendemain, tout le monde changera d'avis et empruntera l'autre. Et ça sera encore pire !

Y a-t-il un équilibre ?

Est-ce que l'équilibre garantit le moindre temps de parcours (moyen ?).

L'idée

Supposons que deux routes mènent d'une même ville à une autre : l'une est une autoroute toute droite, l'autre un chemin campagnard plus long. Si tout le monde choisis la première, elle sera bientôt remplie et donc moins efficace que l'autre. Au lendemain, tout le monde changera d'avis et empruntera l'autre. Et ça sera encore pire !
Y a-t-il un équilibre ?
Est-ce que l'équilibre garantit le moindre temps de parcours (moyen ?).

L'idée

Supposons que deux routes mènent d'une même ville à une autre : l'une est une autoroute toute droite, l'autre un chemin campagnard plus long. Si tout le monde choisis la première, elle sera bientôt remplie et donc moins efficace que l'autre. Au lendemain, tout le monde changera d'avis et empruntera l'autre. Et ça sera encore pire !
Y a-t-il un équilibre ?
Est-ce que l'équilibre garantit le moindre temps de parcours (moyen ?).

L'idée

Supposons que deux routes mènent d'une même ville à une autre : l'une est une autoroute toute droite, l'autre un chemin campagnard plus long. Si tout le monde choisis la première, elle sera bientôt remplie et donc moins efficace que l'autre. Au lendemain, tout le monde changera d'avis et empruntera l'autre. Et ça sera encore pire !
Y a-t-il un équilibre ?
Est-ce que l'équilibre garantit le moindre temps de parcours (moyen ?).

Ingrédients

- Un graphe fini avec des arrêtes $e \in E$, un ensemble S de sources et D de destinations,
- l'ensemble $C(s,d) = \{\sigma \text{ de } s \text{ à } d\}$ des chemins possibles de s à d,
- une demande $\gamma(s,d)$ qui donne la quantité de gens qui se rendent de $s \in S$ à $d \in D$,
- une stratégie de repartition inconnue (c'est ça qu'on cherche) $q = (q_\sigma)_\sigma$ telle que $\sum_{\sigma \in C(s,d)} q_\sigma = \gamma(s,d)$,
- une intensité de trafic qui en découle (et qui dépend de q) $i_q = (i_q(e))_e$ donnée par $i_q(e) = \sum_{e \in \sigma} q_\sigma$,
- une fonction croissante $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que $g(i_q(e))$ modélise le coût de l'arrête e, si soumis à congestion,
- le coût de chaque chemin σ, donné par $c(\sigma) = \sum_{e \in \sigma} g(i_q(e)) \,\mathrm{long}(e)$.

Ingrédients

- Un graphe fini avec des arrêtes $e \in E$, un ensemble S de sources et D de destinations,
- l'ensemble $C(s,d) = \{\sigma \text{ de } s \text{ à } d\}$ des chemins possibles de s à d,
- une demande $\gamma(s,d)$ qui donne la quantité de gens qui se rendent de $s \in S$ à $d \in D$,
- une stratégie de repartition inconnue (c'est ça qu'on cherche) $q = (q_\sigma)_\sigma$ telle que $\sum_{\sigma \in C(s,d)} q_\sigma = \gamma(s,d)$,
- une intensité de trafic qui en découle (et qui dépend de q) $i_q = (i_q(e))_e$ donnée par $i_q(e) = \sum_{e \in \sigma} q_\sigma$,
- une fonction croissante $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que $g(i_q(e))$ modélise le coût de l'arrête e, si soumis à congestion,
- le coût de chaque chemin σ, donné par $c(\sigma) = \sum_{e \in \sigma} g(i_q(e)) \operatorname{long}(e)$.

Ingrédients

- Un graphe fini avec des arrêtes $e \in E$, un ensemble S de sources et D de destinations,
- l'ensemble $C(s,d) = \{\sigma \text{ de } s \text{ à } d\}$ des chemins possibles de s à d,
- une demande $\gamma(s,d)$ qui donne la quantité de gens qui se rendent de $s \in S$ à $d \in D$,
- une stratégie de repartition inconnue (c'est ça qu'on cherche) $q = (q_\sigma)_\sigma$ telle que $\sum_{\sigma \in C(s,d)} q_\sigma = \gamma(s,d)$,
- une intensité de trafic qui en découle (et qui dépend de q) $i_q = (i_q(e))_e$ donnée par $i_q(e) = \sum_{e \in \sigma} q_\sigma$,
- une fonction croissante $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que $g(i_q(e))$ modélise le coût de l'arrête e, si soumis à congestion,
- le coût de chaque chemin σ, donné par $c(\sigma) = \sum_{e \in \sigma} g(i_q(e)) \operatorname{long}(e)$.

Ingrédients

- Un graphe fini avec des arrêtes $e \in E$, un ensemble S de sources et D de destinations,
- l'ensemble $C(s,d) = \{\sigma \text{ de } s \text{ à } d\}$ des chemins possibles de s à d,
- une demande $\gamma(s,d)$ qui donne la quantité de gens qui se rendent de $s \in S$ à $d \in D$,
- une stratégie de repartition inconnue (c'est ça qu'on cherche) $q = (q_\sigma)_\sigma$ telle que $\sum_{\sigma \in C(s,d)} q_\sigma = \gamma(s,d)$,
- une intensité de trafic qui en découle (et qui dépend de q) $i_q = (i_q(e))_e$ donnée par $i_q(e) = \sum_{e \in \sigma} q_\sigma$,
- une fonction croissante $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que $g(i_q(e))$ modélise le coût de l'arrête e, si soumis à congestion,
- le coût de chaque chemin σ, donné par $c(\sigma) = \sum_{e \in \sigma} g(i_q(e)) \operatorname{long}(e)$.

Ingrédients

- Un graphe fini avec des arrêtes $e \in E$, un ensemble S de sources et D de destinations,
- l'ensemble $C(s,d) = \{\sigma \text{ de } s \text{ à } d\}$ des chemins possibles de s à d,
- une demande $\gamma(s,d)$ qui donne la quantité de gens qui se rendent de $s \in S$ à $d \in D$,
- une stratégie de repartition inconnue (c'est ça qu'on cherche) $q = (q_\sigma)_\sigma$ telle que $\sum_{\sigma \in C(s,d)} q_\sigma = \gamma(s,d)$,
- une intensité de trafic qui en découle (et qui dépend de q) $i_q = (i_q(e))_e$ donnée par $i_q(e) = \sum_{e \in \sigma} q_\sigma$,
- une fonction croissante $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que $g(i_q(e))$ modélise le coût de l'arrête e, si soumis à congestion,
- le coût de chaque chemin σ, donné par $c(\sigma) = \sum_{e \in \sigma} g(i_q(e)) \operatorname{long}(e)$.

Ingrédients

- Un graphe fini avec des arrêtes $e \in E$, un ensemble S de sources et D de destinations,
- l'ensemble $C(s,d) = \{\sigma \text{ de } s \text{ à } d\}$ des chemins possibles de s à d,
- une demande $\gamma(s,d)$ qui donne la quantité de gens qui se rendent de $s \in S$ à $d \in D$,
- une stratégie de repartition inconnue (c'est ça qu'on cherche) $q = (q_\sigma)_\sigma$ telle que $\sum_{\sigma \in C(s,d)} q_\sigma = \gamma(s,d)$,
- une intensité de trafic qui en découle (et qui dépend de q) $i_q = (i_q(e))_e$ donnée par $i_q(e) = \sum_{e \in \sigma} q_\sigma$,
- une fonction croissante $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que $g(i_q(e))$ modélise le coût de l'arrête e, si soumis à congestion,
- le coût de chaque chemin σ, donné par $c(\sigma) = \sum_{e \in \sigma} g(i_q(e)) \operatorname{long}(e)$.

Ingrédients

- Un graphe fini avec des arrêtes $e \in E$, un ensemble S de sources et D de destinations,
- l'ensemble $C(s,d) = \{\sigma \text{ de } s \text{ à } d\}$ des chemins possibles de s à d,
- une demande $\gamma(s,d)$ qui donne la quantité de gens qui se rendent de $s \in S$ à $d \in D$,
- une stratégie de repartition inconnue (c'est ça qu'on cherche) $q = (q_\sigma)_\sigma$ telle que $\sum_{\sigma \in C(s,d)} q_\sigma = \gamma(s,d)$,
- une intensité de trafic qui en découle (et qui dépend de q) $i_q = (i_q(e))_e$ donnée par $i_q(e) = \sum_{e \in \sigma} q_\sigma$,
- une fonction croissante $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que $g(i_q(e))$ modélise le coût de l'arrête e, si soumis à congestion,
- le coût de chaque chemin σ, donné par $c(\sigma) = \sum_{e \in \sigma} g(i_q(e)) \operatorname{long}(e)$.

Equilibries de Wardrop

La stratégie globale q représente la distribution des choix des voyageurs. Imposer un **équilibre de Nash** (personne ne veut changer d'avis si les autres ne changent pas) donne lieu à la condition :

$$\sigma \in C(s,d),\ q_\sigma > 0 \Rightarrow c(\sigma) = \min\{c(\tilde{\sigma}) \ :\ \tilde{\sigma} \in C(s,d)\}.$$

Cette condition est bien connue sous le nom d'équilibre de Wardrop. **L'existence** d'au moins un équilibre vient du principe variationnel suivant.

Equilibries de Wardrop

La stratégie globale q représente la distribution des choix des voyageurs. Imposer un **équilibre de Nash** (personne ne veut changer d'avis si les autres ne changent pas) donne lieu à la condition :

$$\sigma \in C(s,d),\ q_\sigma > 0 \Rightarrow c(\sigma) = \min\{c(\tilde\sigma)\ :\ \tilde\sigma \in C(s,d)\}.$$

Cette condition est bien connue sous le nom d'équilibre de Wardrop. **L'existence** d'au moins un équilibre vient du principe variationnel suivant.

Equilibries de Wardrop

La stratégie globale q représente la distribution des choix des voyageurs. Imposer un **équilibre de Nash** (personne ne veut changer d'avis si les autres ne changent pas) donne lieu à la condition :

$$\sigma \in C(s,d),\ q_\sigma > 0 \Rightarrow c(\sigma) = \min\{c(\tilde\sigma)\ :\ \tilde\sigma \in C(s,d)\}.$$

Cette condition est bien connue sous le nom d'équilibre de Wardrop. **L'existence** d'au moins un équilibre vient du principe variationnel suivant.

Principe Variationnel

Optimiser un coût global de congestion signifie minimiser une quantité $\sum_e H(i_q(e))\,\mathrm{long}(e)$ ($H : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ étant une fonction croissante : par exemple, avec $H(t) = tg(t)$ on trouve le coût total pour tous les voyageurs) parmi toutes les stratégies possibles q.

Conditions d'optimalité : **si q est optimal, alors il est un équilibre de Wardrop** pour $g = H'$.

Pour trouver un équilibre de Wardrop il est suffisant résoudre un problème d'optimisation convexe (où H sera une primitive de g).

Sauf si $g(t) = t^p$, ce problème **ne correspond pas** à minimiser le coût total des voyageurs !

Principe Variationnel

Optimiser un coût global de congestion signifie minimiser une quantité $\sum_e H(i_q(e))\,\mathrm{long}(e)$ ($H : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ étant une fonction croissante : par exemple, avec $H(t) = tg(t)$ on trouve le coût total pour tous les voyageurs) parmi toutes les stratégies possibles q.
Conditions d'optimalité : **si q est optimal, alors il est un équilibre de Wardrop** pour $g = H'$.
Pour trouver un équilibre de Wardrop il est suffisant résoudre un problème d'optimisation convexe (où H sera une primitive de g).
Sauf si $g(t) = t^p$, ce problème **ne correspond pas** à minimiser le coût total des voyageurs !

Principe Variationnel

Optimiser un coût global de congestion signifie minimiser une quantité $\sum_e H(i_q(e))$ long(e) ($H : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ étant une fonction croissante : par exemple, avec $H(t) = tg(t)$ on trouve le coût total pour tous les voyageurs) parmi toutes les stratégies possibles q.
Conditions d'optimalité : **si q est optimal, alors il est un équilibre de Wardrop** pour $g = H'$.
Pour trouver un équilibre de Wardrop il est suffisant résoudre un problème d'optimisation convexe (où H sera une primitive de g).
Sauf si $g(t) = t^p$, ce problème **ne correspond pas** à minimiser le coût total des voyageurs !

Formulation avec les mesures

Dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ la demande est représentée par des probas $\gamma \in \mathcal{P}(\Omega \times \Omega)$. On se donne un ensemble $\Gamma \subset \mathcal{P}(\Omega \times \Omega)$ de demandes admissibles : typiquement $\Gamma = \{\overline{\gamma}\}$ ou

$$\Gamma = \Pi(\mu, \nu) = \{\gamma \in \mathcal{P}(\Omega \times \Omega)\ :\ (\pi_X)_\sharp \gamma = \mu,\ (\pi_Y)_\sharp \gamma = \nu\}.$$

Posons aussi

$$C = \{\text{chemins Lipschitz } \sigma : [0,1] \to \Omega\}$$
$$C(s,d) = \{\sigma \in C : \sigma(0) = s,, \sigma(1) = d\}.$$

On cherche une proba $Q \in \mathcal{P}(C)$ telle que $(\pi_{0,1})_\sharp Q \in \Gamma$: elle peut s'exprimer comme $Q = Q^{s,d} \otimes \gamma$ avec $Q^{s,d} \in \mathcal{P}(C(s,d))$.
On veut définir une intensité de trafic $i_Q \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ telle que

$$i_Q(A) = \text{“combien ” le mouvement se déroule en } A \ldots$$

Formulation avec les mesures

Dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ la demande est représentée par des probas $\gamma \in \mathcal{P}(\Omega \times \Omega)$. On se donne un ensemble $\Gamma \subset \mathcal{P}(\Omega \times \Omega)$ de demandes admissibles : typiquement $\Gamma = \{\overline{\gamma}\}$ ou

$$\Gamma = \Pi(\mu, \nu) = \{\gamma \in \mathcal{P}(\Omega \times \Omega) \,:\, (\pi_X)_\sharp \gamma = \mu,\, (\pi_Y)_\sharp \gamma = \nu\}.$$

Posons aussi

$$C = \{\text{chemins Lipschitz } \sigma : [0,1] \to \Omega\}$$
$$C(s,d) = \{\sigma \in C : \sigma(0) = s,, \sigma(1) = d\}.$$

On cherche une proba $Q \in \mathcal{P}(C)$ telle que $(\pi_{0,1})_\sharp Q \in \Gamma$: elle peut s'exprimer comme $Q = Q^{s,d} \otimes \gamma$ avec $Q^{s,d} \in \mathcal{P}(C(s,d))$.
On veut définir une intensité de trafic $i_Q \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ telle que

$$i_Q(A) = \text{“combien ” le mouvement se déroule en } A \ldots$$

Formulation avec les mesures

Dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ la demande est représentée par des probas $\gamma \in \mathcal{P}(\Omega \times \Omega)$. On se donne un ensemble $\Gamma \subset \mathcal{P}(\Omega \times \Omega)$ de demandes admissibles : typiquement $\Gamma = \{\overline{\gamma}\}$ ou

$$\Gamma = \Pi(\mu, \nu) = \{\gamma \in \mathcal{P}(\Omega \times \Omega) \,:\, (\pi_X)_\sharp \gamma = \mu,\ (\pi_Y)_\sharp \gamma = \nu\}.$$

Posons aussi

$$C = \{\text{chemins Lipschitz } \sigma : [0,1] \to \Omega\}$$
$$C(s,d) = \{\sigma \in C : \sigma(0) = s,, \sigma(1) = d\}.$$

On cherche une proba $Q \in \mathcal{P}(C)$ telle que $(\pi_{0,1})_\sharp Q \in \Gamma$: elle peut s'exprimer comme $Q = Q^{s,d} \otimes \gamma$ avec $Q^{s,d} \in \mathcal{P}(C(s,d))$.
On veut définir une intensité de trafic $i_Q \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ telle que

$$i_Q(A) = \text{“combien ” le mouvement se déroule en } A \ldots$$

Formulation avec les mesures

Dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ la demande est représentée par des probas $\gamma \in \mathcal{P}(\Omega \times \Omega)$. On se donne un ensemble $\Gamma \subset \mathcal{P}(\Omega \times \Omega)$ de demandes admissibles : typiquement $\Gamma = \{\overline{\gamma}\}$ ou

$$\Gamma = \Pi(\mu, \nu) = \{\gamma \in \mathcal{P}(\Omega \times \Omega) \, : \, (\pi_X)_\sharp \gamma = \mu, \, (\pi_Y)_\sharp \gamma = \nu\}.$$

Posons aussi

$$C = \{\text{chemins Lipschitz } \sigma : [0,1] \to \Omega\}$$
$$C(s,d) = \{\sigma \in C : \sigma(0) = s,, \sigma(1) = d\}.$$

On cherche une proba $Q \in \mathcal{P}(C)$ telle que $(\pi_{0,1})_\sharp Q \in \Gamma$: elle peut s'exprimer comme $Q = Q^{s,d} \otimes \gamma$ avec $Q^{s,d} \in \mathcal{P}(C(s,d))$.
On veut définir une intensité de trafic $i_Q \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ telle que

$$i_Q(A) = \text{“combien ” le mouvement se déroule en } A \ldots$$

Formulation avec les mesures

Dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ la demande est représentée par des probas $\gamma \in \mathcal{P}(\Omega \times \Omega)$. On se donne un ensemble $\Gamma \subset \mathcal{P}(\Omega \times \Omega)$ de demandes admissibles : typiquement $\Gamma = \{\overline{\gamma}\}$ ou

$$\Gamma = \Pi(\mu, \nu) = \{\gamma \in \mathcal{P}(\Omega \times \Omega) \,:\, (\pi_X)_\sharp \gamma = \mu,\, (\pi_Y)_\sharp \gamma = \nu\}.$$

Posons aussi

$$C = \{\text{chemins Lipschitz } \sigma : [0,1] \to \Omega\}$$
$$C(s,d) = \{\sigma \in C : \sigma(0) = s,, \sigma(1) = d\}.$$

On cherche une proba $Q \in \mathcal{P}(C)$ telle que $(\pi_{0,1})_\sharp Q \in \Gamma$: elle peut s'exprimer comme $Q = Q^{s,d} \otimes \gamma$ avec $Q^{s,d} \in \mathcal{P}(C(s,d))$.
On veut définir une intensité de trafic $i_Q \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ telle que

$$i_Q(A) = \text{“combien ” le mouvement se déroule en } A \ldots$$

Intensité de trafic et congestion totale

Pour $\phi \in C^0(\Omega)$ et $\sigma \in C$ posons

$$L_\phi(\sigma) = \int_0^1 \phi(\sigma(t))|\sigma'(t)|dt.$$

Définissons i_Q par

$$< i_Q, \phi >= \int_C L_\phi(\sigma)Q(d\sigma).$$

(P) : Optimisation : on minimise la fonctionnelle convexe

$$F(i_Q) = \begin{cases} \int H(i_q(x))dx & \text{si } i_q << \mathcal{L}^n, \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

parmi toutes les stratégies possibles Q, H étant une fonction convexe, croissante et surlinéaire. Typiquement $H(t) = t^p$ (car c'est simple) ou $H(t) = t + t^p$ (plus raisonnable).

Intensité de trafic et congestion totale

Pour $\phi \in C^0(\Omega)$ et $\sigma \in C$ posons

$$L_\phi(\sigma) = \int_0^1 \phi(\sigma(t))|\sigma'(t)|dt.$$

Définissons i_Q par

$$< i_Q, \phi >= \int_C L_\phi(\sigma) Q(d\sigma).$$

(P) : Optimisation : on minimise la fonctionnelle convexe

$$F(i_Q) = \begin{cases} \int H(i_q(x))dx & \text{si } i_q << \mathcal{L}^n, \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

parmi toutes les stratégies possibles Q, H étant une fonction convexe, croissante et surlinéaire. Typiquement $H(t) = t^p$ (car c'est simple) ou $H(t) = t + t^p$ (plus raisonnable).

Intensité de trafic et congestion totale

Pour $\phi \in C^0(\Omega)$ et $\sigma \in C$ posons

$$L_\phi(\sigma) = \int_0^1 \phi(\sigma(t))|\sigma'(t)|dt.$$

Définissons i_Q par

$$< i_Q, \phi >= \int_C L_\phi(\sigma) Q(d\sigma).$$

(P) : Optimisation : on minimise la fonctionnelle convexe

$$F(i_Q) = \begin{cases} \int H(i_q(x))dx & \text{si } i_q << \mathcal{L}^n, \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

parmi toutes les stratégies possibles Q, H étant une fonction convexe, croissante et surlinéaire. Typiquement $H(t) = t^p$ (car c'est simple) ou $H(t) = t + t^p$ (plus raisonnable).

Conditions d'optimalité

Soit $\overline{Q} = \overline{Q}^{s,d} \otimes \overline{\gamma}$ un minimiseur et $\overline{\xi} = H'(i_{\overline{Q}})$. Pour $\xi \geq 0$ posons

$$c_\xi(s,d) = \inf_{\sigma \in C(s,d)} L_\xi(\sigma)$$

(c'est en fait la métrique Riemanienne engendrée par ξ).

- $\overline{\gamma}$ minimise $\int c_{\overline{\xi}} d\gamma$ sous la contrainte $\gamma \in \Gamma$,
- $\overline{Q}$−p.p. $L_{\overline{\xi}}(\sigma) = c_{\overline{\xi}}(\sigma(0), \sigma(1))$.

Donc $\overline{\gamma}$ résout un **problem de transport (Kantorovitch)** et **presque tout chemin est géodesique** (c'est donc un équilibre de Wardrop avec $g = H'$).
Problème : ξ n'est pas du tout régulier, il est $L^{p'}$.
Solutions : travailler dur pour **définir** c_ξ **pour** $\xi \in L^{p'}$ ou bien prouver de la régularité...

Conditions d'optimalité

Soit $\overline{Q} = \overline{Q}^{s,d} \otimes \overline{\gamma}$ un minimiseur et $\overline{\xi} = H'(i_{\overline{Q}})$. Pour $\xi \geq 0$ posons

$$c_\xi(s,d) = \inf_{\sigma \in C(s,d)} L_\xi(\sigma)$$

(c'est en fait la métrique Riemanienne engendrée par ξ).

- $\overline{\gamma}$ minimise $\int c_{\overline{\xi}} d\gamma$ sous la contrainte $\gamma \in \Gamma$,
- $\overline{Q}$−p.p. $L_{\overline{\xi}}(\sigma) = c_{\overline{\xi}}(\sigma(0), \sigma(1))$.

Donc $\overline{\gamma}$ résout un **problem de transport (Kantorovitch)** et **presque tout chemin est géodesique** (c'est donc un équilibre de Wardrop avec $g = H'$).
Problème : ξ n'est pas du tout régulier, il est $L^{p'}$.
Solutions : travailler dur pour **définir** c_ξ **pour** $\xi \in L^{p'}$ ou bien prouver de la régularité...

Conditions d'optimalité

Soit $\overline{Q} = \overline{Q}^{s,d} \otimes \overline{\gamma}$ un minimiseur et $\overline{\xi} = H'(i_{\overline{Q}})$. Pour $\xi \geq 0$ posons

$$c_\xi(s,d) = \inf_{\sigma \in C(s,d)} L_\xi(\sigma)$$

(c'est en fait la métrique Riemanienne engendrée par ξ).

- $\overline{\gamma}$ minimise $\int c_{\overline{\xi}} d\gamma$ sous la contrainte $\gamma \in \Gamma$,
- $\overline{Q}-$p.p. $L_{\overline{\xi}}(\sigma) = c_{\overline{\xi}}(\sigma(0), \sigma(1))$.

Donc $\overline{\gamma}$ résout un **problem de transport (Kantorovitch)** et **presque tout chemin est géodesique** (c'est donc un équilibre de Wardrop avec $g = H'$).
Problème : ξ n'est pas du tout régulier, il est $L^{p'}$.
Solutions : travailler dur pour **définir** c_ξ **pour** $\xi \in L^{p'}$ ou bien prouver de la régularité...

Conditions d'optimalité

Soit $\overline{Q} = \overline{Q}^{s,d} \otimes \overline{\gamma}$ un minimiseur et $\overline{\xi} = H'(i_{\overline{Q}})$. Pour $\xi \geq 0$ posons

$$c_\xi(s,d) = \inf_{\sigma \in C(s,d)} L_\xi(\sigma)$$

(c'est en fait la métrique Riemanienne engendrée par ξ).

- $\overline{\gamma}$ minimise $\int c_{\overline{\xi}} d\gamma$ sous la contrainte $\gamma \in \Gamma$,
- $\overline{Q}-$p.p. $L_{\overline{\xi}}(\sigma) = c_{\overline{\xi}}(\sigma(0), \sigma(1))$.

Donc $\overline{\gamma}$ résout un **problem de transport (Kantorovitch)** et **presque tout chemin est géodesique** (c'est donc un équilibre de Wardrop avec $g = H'$).
Problème : ξ n'est pas du tout régulier, il est $L^{p'}$.
Solutions : travailler dur pour **définir** c_ξ **pour** $\xi \in L^{p'}$ ou bien prouver de la régularité...

Conditions d'optimalité

Soit $\overline{Q} = \overline{Q}^{s,d} \otimes \overline{\gamma}$ un minimiseur et $\overline{\xi} = H'(i_{\overline{Q}})$. Pour $\xi \geq 0$ posons

$$c_\xi(s,d) = \inf_{\sigma \in C(s,d)} L_\xi(\sigma)$$

(c'est en fait la métrique Riemanienne engendrée par ξ).

- $\overline{\gamma}$ minimise $\int c_{\overline{\xi}} d\gamma$ sous la contrainte $\gamma \in \Gamma$,
- $\overline{Q}-$p.p. $L_{\overline{\xi}}(\sigma) = c_{\overline{\xi}}(\sigma(0), \sigma(1))$.

Donc $\overline{\gamma}$ résout un **problem de transport (Kantorovitch)** et **presque tout chemin est géodesique** (c'est donc un équilibre de Wardrop avec $g = H'$).

Problème : ξ n'est pas du tout régulier, il est $L^{p'}$.

Solutions : travailler dur pour **définir** c_ξ **pour** $\xi \in L^{p'}$ ou bien prouver de la régularité. . .

Conditions d'optimalité

Soit $\overline{Q} = \overline{Q}^{s,d} \otimes \overline{\gamma}$ un minimiseur et $\overline{\xi} = H'(i_{\overline{Q}})$. Pour $\xi \geq 0$ posons

$$c_\xi(s,d) = \inf_{\sigma \in C(s,d)} L_\xi(\sigma)$$

(c'est en fait la métrique Riemanienne engendrée par ξ).

- $\overline{\gamma}$ minimise $\int c_{\overline{\xi}} d\gamma$ sous la contrainte $\gamma \in \Gamma$,
- $\overline{Q}-$p.p. $L_{\overline{\xi}}(\sigma) = c_{\overline{\xi}}(\sigma(0), \sigma(1))$.

Donc $\overline{\gamma}$ résout un **problem de transport (Kantorovitch)** et **presque tout chemin est géodesique** (c'est donc un équilibre de Wardrop avec $g = H'$).
Problème : ξ n'est pas du tout régulier, il est $L^{p'}$.
Solutions : travailler dur pour **définir** c_ξ **pour** $\xi \in L^{p'}$ ou bien prouver de la régularité...

Conditions d'optimalité

Soit $\overline{Q} = \overline{Q}^{s,d} \otimes \overline{\gamma}$ un minimiseur et $\overline{\xi} = H'(i_{\overline{Q}})$. Pour $\xi \geq 0$ posons

$$c_\xi(s,d) = \inf_{\sigma \in C(s,d)} L_\xi(\sigma)$$

(c'est en fait la métrique Riemanienne engendrée par ξ).

- $\overline{\gamma}$ minimise $\int c_{\overline{\xi}} d\gamma$ sous la contrainte $\gamma \in \Gamma$,
- $\overline{Q}-$p.p. $L_{\overline{\xi}}(\sigma) = c_{\overline{\xi}}(\sigma(0), \sigma(1))$.

Donc $\overline{\gamma}$ résout un **problem de transport (Kantorovitch)** et **presque tout chemin est géodesique** (c'est donc un équilibre de Wardrop avec $g = H'$).
Problème : ξ n'est pas du tout régulier, il est $L^{p'}$.
Solutions : travailler dur pour **définir** c_ξ **pour** $\xi \in L^{p'}$ ou bien prouver de la régularité...

Finitude du minimum

Pour applique la théorie, on veut $\min F(i_Q) < +\infty$.

- si $\Gamma = \Pi(\mu, \nu)$, alors on peut prendre Q optimal pour le problème de Monge et appliquer les résultats de De Pascale - Pratelli pour avoir des estimations L^p sur la **densité de transport** ;
- si $\Gamma = \{\overline{\gamma}\}$ et $\mu = \nu = \mathcal{L}^n$ on peut utiliser la mécanique des fluides incompressibles et trouver un Q concentré sur des courbes $L-$Lipschitz avec $(\pi_t)_\sharp Q = \mu$, ce qui donne $i_Q \in L^\infty$ (et, en composant avec des difféos, on arrive jusqu'à $\mu, \nu \in L^p$) ;
- si $\Gamma = \{\overline{\gamma}\}$ et μ et ν sont discrètes on peut faire à la main un Q tel que $i_Q(x) \approx |x - x_i|^{-1}$ près des atomes x_i, ce qui donne $i_Q \in L^p$ pour $p < n$.

Finitude du minimum

Pour applique la théorie, on veut $\min F(i_Q) < +\infty$.

- si $\Gamma = \Pi(\mu, \nu)$, alors on peut prendre Q optimal pour le problème de Monge et appliquer les résultats de De Pascale - Pratelli pour avoir des estimations L^p sur la **densité de transport** ;
- si $\Gamma = \{\overline{\gamma}\}$ et $\mu = \nu = \mathcal{L}^n$ on peut utiliser la mécanique des fluides incompressibles et trouver un Q concentré sur des courbes $L-$Lipschitz avec $(\pi_t)_\sharp Q = \mu$, ce qui donne $i_Q \in L^\infty$ (et, en composant avec des difféos, on arrive jusqu'à $\mu, \nu \in L^p$) ;
- si $\Gamma = \{\overline{\gamma}\}$ et μ et ν sont discrètes on peut faire à la main un Q tel que $i_Q(x) \approx |x - x_i|^{-1}$ près des atomes x_i, ce qui donne $i_Q \in L^p$ pour $p < n$.

Finitude du minimum

Pour applique la théorie, on veut min $F(i_Q) < +\infty$.

- si $\Gamma = \Pi(\mu,\nu)$, alors on peut prendre Q optimal pour le problème de Monge et appliquer les résultats de De Pascale - Pratelli pour avoir des estimations L^p sur la **densité de transport** ;
- si $\Gamma = \{\overline{\gamma}\}$ et $\mu = \nu = \mathcal{L}^n$ on peut utiliser la mécanique des fluides incompressibles et trouver un Q concentré sur des courbes $L-$Lipschitz avec $(\pi_t)_\sharp Q = \mu$, ce qui donne $i_Q \in L^\infty$ (et, en composant avec des difféos, on arrive jusqu'à $\mu,\ \nu \in L^p$) ;
- si $\Gamma = \{\overline{\gamma}\}$ et μ et ν sont discrètes on peut faire à la main un Q tel que $i_Q(x) \approx |x - x_i|^{-1}$ près des atomes x_i, ce qui donne $i_Q \in L^p$ pour $p < n$.

Finitude du minimum

Pour applique la théorie, on veut $\min F(i_Q) < +\infty$.

- si $\Gamma = \Pi(\mu, \nu)$, alors on peut prendre Q optimal pour le problème de Monge et appliquer les résultats de De Pascale - Pratelli pour avoir des estimations L^p sur la **densité de transport** ;
- si $\Gamma = \{\overline{\gamma}\}$ et $\mu = \nu = \mathcal{L}^n$ on peut utiliser la mécanique des fluides incompressibles et trouver un Q concentré sur des courbes $L-$Lipschitz avec $(\pi_t)_\sharp Q = \mu$, ce qui donne $i_Q \in L^\infty$ (et, en composant avec des difféos, on arrive jusqu'à $\mu,\ \nu \in L^p$) ;
- si $\Gamma = \{\overline{\gamma}\}$ et μ et ν sont discrètes on peut faire à la main un Q tel que $i_Q(x) \approx |x - x_i|^{-1}$ près des atomes x_i, ce qui donne $i_Q \in L^p$ pour $p < n$.

Applications

Où utiliser un modèle continu plutôt que des réseaux ?

Dans le mouvement des foules et des **pietons**, par exemple.

En tant que **limite à grande échelle** des modèles pour les véhicules.

G. Carlier, C. Jimenez , F. Santambrogio, *Optimal transportation with traffic congestion and Wardrop equilibria,* SIAM Journal on Control and Opt. **47** (3) : 1330–1350, 2008.

Applications

Où utiliser un modèle continu plutôt que des réseaux ?
Dans le mouvement des foules et des **pietons**, par exemple.
En tant que **limite à grande échelle** des modèles pour les véhicules.

G. Carlier, C. Jimenez , F. Santambrogio, *Optimal transportation with traffic congestion and Wardrop equilibria,* SIAM Journal on Control and Opt. **47** (3) : 1330–1350, 2008.

Applications

Où utiliser un modèle continu plutôt que des réseaux ?
Dans le mouvement des foules et des **pietons**, par exemple.
En tant que **limite à grande échelle** des modèles pour les véhicules.

G. Carlier, C. Jimenez , F. Santambrogio, *Optimal transportation with traffic congestion and Wardrop equilibria,* SIAM Journal on Control and Opt. **47** (3) : 1330–1350, 2008.

Applications

Où utiliser un modèle continu plutôt que des réseaux ?
Dans le mouvement des foules et des **pietons**, par exemple.
En tant que **limite à grande échelle** des modèles pour les véhicules.

G. Carlier, C. Jimenez , F. Santambrogio, *Optimal transportation with traffic congestion and Wardrop equilibria,* SIAM Journal on Control and Opt. **47** (3) : 1330–1350, 2008.

Applications

Où utiliser un modèle continu plutôt que des réseaux ?
Dans le mouvement des foules et des **pietons**, par exemple.
En tant que **limite à grande échelle** des modèles pour les véhicules.

G. Carlier, C. Jimenez , F. Santambrogio, *Optimal transportation with traffic congestion and Wardrop equilibria,* SIAM Journal on Control and Opt. **47** (3) : 1330–1350, 2008.

Problème vectoriel

Définissons une espèce d'intensité de trafic vectorielle : soit $\lambda_q \in \mathcal{M}^n(\Omega)$ donnée par

$$< \lambda_Q, \phi >= \int_C \left(\int_0^1 \phi(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt \right) Q(d\sigma)$$

pour tout $\phi \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$.
On peut vérifier $\nabla \cdot \lambda_Q = (\pi_0)_\# Q - (\pi_1)_\# Q = \mu - \nu$. De plus, $|\lambda_Q| \leq i_Q$.
Question : peut-on remplacer i_Q avec $|\lambda_Q|$? peut-on minimiser parmi tous les $\lambda \in \mathcal{M}^n(\Omega)$ avec $\nabla \cdot \lambda = \mu - \nu$?
Soit $\mathcal{H}(z) = H(|z|)$: on considère

$$(PV) : \qquad \min \int \mathcal{H}(\lambda) \;:\; \nabla \cdot \lambda = \mu - \nu.$$

Attention : ceci marche pour $\Gamma = \Pi(\mu, \nu)$ seulement.

Problème vectoriel

Définissons une espèce d'intensité de trafic vectorielle : soit $\lambda_q \in \mathcal{M}^n(\Omega)$ donnée par

$$< \lambda_Q, \phi >= \int_C \left(\int_0^1 \phi(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt \right) Q(d\sigma)$$

pour tout $\phi \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

On peut vérifier $\nabla \cdot \lambda_Q = (\pi_0)_\# Q - (\pi_1)_\# Q = \mu - \nu$. De plus, $|\lambda_Q| \leq i_Q$.

Question : peut-on remplacer i_Q avec $|\lambda_Q|$? peut-on minimiser parmi tous les $\lambda \in \mathcal{M}^n(\Omega)$ avec $\nabla \cdot \lambda = \mu - \nu$?

Soit $\mathcal{H}(z) = H(|z|)$: on considère

$$(PV) : \qquad \min \int \mathcal{H}(\lambda) \ : \ \nabla \cdot \lambda = \mu - \nu.$$

Attention : ceci marche pour $\Gamma = \Pi(\mu, \nu)$ seulement.

Problème vectoriel

Définissons une espèce d'intensité de trafic vectorielle : soit $\lambda_q \in \mathcal{M}^n(\Omega)$ donnée par

$$< \lambda_Q, \phi >= \int_C \left(\int_0^1 \phi(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt \right) Q(d\sigma)$$

pour tout $\phi \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$.
On peut vérifier $\nabla \cdot \lambda_Q = (\pi_0)_\# Q - (\pi_1)_\# Q = \mu - \nu$. De plus, $|\lambda_Q| \leq i_Q$.
Question : peut-on remplacer i_Q avec $|\lambda_Q|$? peut-on minimiser parmi tous les $\lambda \in \mathcal{M}^n(\Omega)$ avec $\nabla \cdot \lambda = \mu - \nu$?
Soit $\mathcal{H}(z) = H(|z|)$: on considère

$$(PV) : \qquad \min \int \mathcal{H}(\lambda) \ : \ \nabla \cdot \lambda = \mu - \nu.$$

Attention : ceci marche pour $\Gamma = \Pi(\mu, \nu)$ seulement.

Problème vectoriel

Définissons une espèce d'intensité de trafic vectorielle : soit $\lambda_q \in \mathcal{M}^n(\Omega)$ donnée par

$$< \lambda_Q, \phi >= \int_C \left(\int_0^1 \phi(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt \right) Q(d\sigma)$$

pour tout $\phi \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$.
On peut vérifier $\nabla \cdot \lambda_Q = (\pi_0)_\# Q - (\pi_1)_\# Q = \mu - \nu$. De plus, $|\lambda_Q| \leq i_Q$.
Question : peut-on remplacer i_Q avec $|\lambda_Q|$? peut-on minimiser parmi tous les $\lambda \in \mathcal{M}^n(\Omega)$ avec $\nabla \cdot \lambda = \mu - \nu$?
Soit $\mathcal{H}(z) = H(|z|)$: on considère

$$(PV): \qquad \min \int \mathcal{H}(\lambda) \; : \; \nabla \cdot \lambda = \mu - \nu.$$

Attention : ceci marche pour $\Gamma = \Pi(\mu, \nu)$ seulement.

Problème vectoriel

Définissons une espèce d'intensité de trafic vectorielle : soit $\lambda_q \in \mathcal{M}^n(\Omega)$ donnée par

$$< \lambda_Q, \phi >= \int_C \left(\int_0^1 \phi(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt \right) Q(d\sigma)$$

pour tout $\phi \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$.
On peut vérifier $\nabla \cdot \lambda_Q = (\pi_0)_\# Q - (\pi_1)_\# Q = \mu - \nu$. De plus, $|\lambda_Q| \leq i_Q$.
Question : peut-on remplacer i_Q avec $|\lambda_Q|$? peut-on minimiser parmi tous les $\lambda \in \mathcal{M}^n(\Omega)$ avec $\nabla \cdot \lambda = \mu - \nu$?
Soit $\mathcal{H}(z) = H(|z|)$: on considère

$$(PV) : \qquad \min \int \mathcal{H}(\lambda) \ : \ \nabla \cdot \lambda = \mu - \nu.$$

Attention : ceci marche pour $\Gamma = \Pi(\mu, \nu)$ seulement.

Problème vectoriel

Définissons une espèce d'intensité de trafic vectorielle : soit $\lambda_q \in \mathcal{M}^n(\Omega)$ donnée par

$$< \lambda_Q, \phi >= \int_C \left(\int_0^1 \phi(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt \right) Q(d\sigma)$$

pour tout $\phi \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$.
On peut vérifier $\nabla \cdot \lambda_Q = (\pi_0)_\# Q - (\pi_1)_\# Q = \mu - \nu$. De plus, $|\lambda_Q| \leq i_Q$.
Question : peut-on remplacer i_Q avec $|\lambda_Q|$? peut-on minimiser parmi tous les $\lambda \in \mathcal{M}^n(\Omega)$ avec $\nabla \cdot \lambda = \mu - \nu$?
Soit $\mathcal{H}(z) = H(|z|)$: on considère

$$(PV) : \qquad \min \int \mathcal{H}(\lambda) \ : \ \nabla \cdot \lambda = \mu - \nu.$$

Attention : ceci marche pour $\Gamma = \Pi(\mu, \nu)$ seulement.

Problème vectoriel

Définissons une espèce d'intensité de trafic vectorielle : soit $\lambda_q \in \mathcal{M}^n(\Omega)$ donnée par

$$< \lambda_Q, \phi >= \int_C \left(\int_0^1 \phi(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt \right) Q(d\sigma)$$

pour tout $\phi \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$.
On peut vérifier $\nabla \cdot \lambda_Q = (\pi_0)_\# Q - (\pi_1)_\# Q = \mu - \nu$. De plus, $|\lambda_Q| \leq i_Q$.
Question : peut-on remplacer i_Q avec $|\lambda_Q|$? peut-on minimiser parmi tous les $\lambda \in \mathcal{M}^n(\Omega)$ avec $\nabla \cdot \lambda = \mu - \nu$?
Soit $\mathcal{H}(z) = H(|z|)$: on considère

$$(PV): \qquad \min \int \mathcal{H}(\lambda) \ : \ \nabla \cdot \lambda = \mu - \nu.$$

Attention : ceci marche pour $\Gamma = \Pi(\mu, \nu)$ seulement.

Problème vectoriel

Définissons une espèce d'intensité de trafic vectorielle : soit $\lambda_q \in \mathcal{M}^n(\Omega)$ donnée par

$$< \lambda_Q, \phi >= \int_C \left(\int_0^1 \phi(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt \right) Q(d\sigma)$$

pour tout $\phi \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$.
On peut vérifier $\nabla \cdot \lambda_Q = (\pi_0)_\# Q - (\pi_1)_\# Q = \mu - \nu$. De plus, $|\lambda_Q| \leq i_Q$.
Question : peut-on remplacer i_Q avec $|\lambda_Q|$? peut-on minimiser parmi tous les $\lambda \in \mathcal{M}^n(\Omega)$ avec $\nabla \cdot \lambda = \mu - \nu$?
Soit $\mathcal{H}(z) = H(|z|)$: on considère

$$(PV): \qquad \min \int \mathcal{H}(\lambda) \; : \; \nabla \cdot \lambda = \mu - \nu.$$

Attention : ceci marche pour $\Gamma = \Pi(\mu, \nu)$ seulement.

Equivalence

Evidemment on a $(PV) \leq (P)$. Prenons $\overline{\lambda}$ un minimiseur de (PV) et construisons un Q tel que $i_Q \leq |\overline{\lambda}|$.
Idée formelle : pour tout $x \in \Omega$ résoudre

$$\begin{cases} \sigma_x'(t) = \frac{\overline{\lambda}(\sigma_x(t))}{(1-t)\mu(\sigma_x(t))+t\nu(\sigma_x(t))} \\ \sigma_x(0) = x. \end{cases}$$

Soit $T : \Omega \to C$ l'application $x \mapsto \sigma_x$. La mesure $Q = T_\# \mu$ satisfait $(\pi_t)_\# Q = \mu_t := (1-t)\mu + t\nu$ (comme dans Evans-Gangbo). De plus

$$\begin{aligned} \int \phi di_Q &= \int \int_0^1 \phi(\sigma_x(t))|\sigma_x'(t)|\,dt\,d\mu = \int_0^1 dt \int \phi(\sigma_x(t)) \frac{|\overline{\lambda}(\sigma_x(t))|}{\mu_t(\sigma_x(t))}\,d\mu \\ &= \int_0^1 dt \int \phi \frac{|\overline{\lambda}|}{\mu_t}\,d\mu_t = \int \phi |\overline{\lambda}|. \end{aligned}$$

Equivalence

Evidemment on a $(PV) \leq (P)$. Prenons $\overline{\lambda}$ un minimiseur de (PV) et construisons un Q tel que $i_Q \leq |\overline{\lambda}|$.

Idée formelle : pour tout $x \in \Omega$ résoudre

$$\begin{cases} \sigma_x'(t) = \frac{\overline{\lambda}(\sigma_x(t))}{(1-t)\mu(\sigma_x(t))+t\nu(\sigma_x(t))} \\ \sigma_x(0) = x. \end{cases}$$

Soit $T : \Omega \to C$ l'application $x \mapsto \sigma_x$. La mesure $Q = T_\# \mu$ satisfait $(\pi_t)_\# Q = \mu_t := (1-t)\mu + t\nu$ (comme dans Evans-Gangbo). De plus

$$\begin{aligned} \int \phi di_Q &= \int \int_0^1 \phi(\sigma_x(t))|\sigma_x'(t)|\,dt\,d\mu = \int_0^1 dt \int \phi(\sigma_x(t)) \frac{|\overline{\lambda}(\sigma_x(t))|}{\mu_t(\sigma_x(t))}\,d\mu \\ &= \int_0^1 dt \int \phi \frac{|\overline{\lambda}|}{\mu_t}\,d\mu_t = \int \phi|\overline{\lambda}|. \end{aligned}$$

Equivalence

Evidemment on a $(PV) \leq (P)$. Prenons $\overline{\lambda}$ un minimiseur de (PV) et construisons un Q tel que $i_Q \leq |\overline{\lambda}|$.
Idée formelle : pour tout $x \in \Omega$ résoudre

$$\begin{cases} \sigma_x'(t) = \frac{\overline{\lambda}(\sigma_x(t))}{(1-t)\mu(\sigma_x(t))+t\nu(\sigma_x(t))} \\ \sigma_x(0) = x. \end{cases}$$

Soit $T : \Omega \to C$ l'application $x \mapsto \sigma_x$. La mesure $Q = T_\# \mu$ satisfait $(\pi_t)_\# Q = \mu_t := (1-t)\mu + t\nu$ (comme dans Evans-Gangbo). De plus

$$\begin{aligned} \int \phi di_Q &= \int \int_0^1 \phi(\sigma_x(t))|\sigma_x'(t)|\, dt\, d\mu = \int_0^1 dt \int \phi(\sigma_x(t)) \frac{|\overline{\lambda}(\sigma_x(t))|}{\mu_t(\sigma_x(t))}\, d\mu \\ &= \int_0^1 dt \int \phi \frac{|\overline{\lambda}|}{\mu_t}\, d\mu_t = \int \phi |\overline{\lambda}|. \end{aligned}$$

Equivalence

Evidemment on a $(PV) \leq (P)$. Prenons $\bar\lambda$ un minimiseur de (PV) et construisons un Q tel que $i_Q \leq |\bar\lambda|$.
Idée formelle : pour tout $x \in \Omega$ résoudre

$$\begin{cases} \sigma_x'(t) = \frac{\bar\lambda(\sigma_x(t))}{(1-t)\mu(\sigma_x(t))+t\nu(\sigma_x(t))} \\ \sigma_x(0) = x. \end{cases}$$

Soit $T : \Omega \to C$ l'application $x \mapsto \sigma_x$. La mesure $Q = T_\# \mu$ satisfait $(\pi_t)_\# Q = \mu_t := (1-t)\mu + t\nu$ (comme dans Evans-Gangbo). De plus

$$\begin{aligned} \int \phi\, di_Q &= \int \int_0^1 \phi(\sigma_x(t))|\sigma_x'(t)|\,dt\,d\mu = \int_0^1 dt \int \phi(\sigma_x(t))\frac{|\bar\lambda(\sigma_x(t))|}{\mu_t(\sigma_x(t))}\,d\mu \\ &= \int_0^1 dt \int \phi \frac{|\bar\lambda|}{\mu_t}\,d\mu_t = \int \phi|\bar\lambda|. \end{aligned}$$

Equivalence

Evidemment on a $(PV) \leq (P)$. Prenons $\overline{\lambda}$ un minimiseur de (PV) et construisons un Q tel que $i_Q \leq |\overline{\lambda}|$.
Idée formelle : pour tout $x \in \Omega$ résoudre

$$\begin{cases} \sigma_x'(t) = \frac{\overline{\lambda}(\sigma_x(t))}{(1-t)\mu(\sigma_x(t))+t\nu(\sigma_x(t))} \\ \sigma_x(0) = x. \end{cases}$$

Soit $T : \Omega \to C$ l'application $x \mapsto \sigma_x$. La mesure $Q = T_\# \mu$ satisfait $(\pi_t)_\# Q = \mu_t := (1-t)\mu + t\nu$ (comme dans Evans-Gangbo). De plus

$$\begin{aligned} \int \phi \, di_Q &= \int \int_0^1 \phi(\sigma_x(t)) |\sigma_x'(t)| \, dt \, d\mu = \int_0^1 dt \int \phi(\sigma_x(t)) \frac{|\overline{\lambda}(\sigma_x(t))|}{\mu_t(\sigma_x(t))} \, d\mu \\ &= \int_0^1 dt \int \phi \frac{|\overline{\lambda}|}{\mu_t} \, d\mu_t = \int \phi |\overline{\lambda}|. \end{aligned}$$

Equivalence

Evidemment on a $(PV) \leq (P)$. Prenons $\overline{\lambda}$ un minimiseur de (PV) et construisons un Q tel que $i_Q \leq |\overline{\lambda}|$.
Idée formelle : pour tout $x \in \Omega$ résoudre

$$\begin{cases} \sigma_x'(t) = \frac{\overline{\lambda}(\sigma_x(t))}{(1-t)\mu(\sigma_x(t))+t\nu(\sigma_x(t))} \\ \sigma_x(0) = x. \end{cases}$$

Soit $T : \Omega \to C$ l'application $x \mapsto \sigma_x$. La mesure $Q = T_\# \mu$ satisfait $(\pi_t)_\# Q = \mu_t := (1-t)\mu + t\nu$ (comme dans Evans-Gangbo). De plus

$$\begin{aligned} \int \phi di_Q &= \int \int_0^1 \phi(\sigma_x(t))|\sigma_x'(t)|\,dt\,d\mu = \int_0^1 dt \int \phi(\sigma_x(t)) \frac{|\overline{\lambda}(\sigma_x(t))|}{\mu_t(\sigma_x(t))}\,d\mu \\ &= \int_0^1 dt \int \phi \frac{|\overline{\lambda}|}{\mu_t}\,d\mu_t = \int \phi|\overline{\lambda}|. \end{aligned}$$

Besoin de régularité

Tout marcherait si $\overline{\lambda}/\mu_t$ était Lipschitz.
$\overline{\lambda}$ satisfait $\nabla\mathcal{H}(\overline{\lambda}) = \nabla u$ (perturbations à divergence nulle).

$$\overline{\lambda} = \mathcal{H}^*(\nabla u); \quad \nabla\cdot\nabla\mathcal{H}^*(\nabla u) = \mu - \nu.$$

Si $H(t) = t^2$: **régularité elliptique standard !**
Si $H(t) = t^p$: $p'-$**Laplacien !**
Et si $H(t) = t + t^p$? Dans ce cas $\mathcal{H}^*(z) = 0$ pour tout $z \in B_1$.
Moins que Lipschitz peut suffir ? oui, on peut se contenter de la **théorie de DiPerna Lions**. Il faut $\overline{\lambda}/\mu_t \in W^{1,1}$ et $\nabla\cdot\left(\overline{\lambda}/\mu_t\right) \in L^\infty$.
A cause de $\nabla\cdot\left(\overline{\lambda}/\mu_t\right) = \nabla\cdot\overline{\lambda}/\mu_t - \overline{\lambda}\cdot\nabla\mu_t/\mu_t^2$ on suppose $\mu,\nu \geq c > 0$ et μ,ν Lipschitz.

Besoin de régularité

Tout marcherait si $\overline{\lambda}/\mu_t$ était Lipschitz.
$\overline{\lambda}$ satisfait $\nabla\mathcal{H}(\overline{\lambda}) = \nabla u$ (perturbations à divergence nulle).

$$\overline{\lambda} = \mathcal{H}^*(\nabla u); \quad \nabla\cdot\nabla\mathcal{H}^*(\nabla u) = \mu - \nu.$$

Si $H(t) = t^2$: **régularité elliptique standard !**
Si $H(t) = t^p$: $p'-$**Laplacien !**
Et si $H(t) = t + t^p$? Dans ce cas $\mathcal{H}^*(z) = 0$ pour tout $z \in B_1$.
Moins que Lipschitz peut suffir ? oui, on peut se contenter de la **théorie de DiPerna Lions**. Il faut $\overline{\lambda}/\mu_t \in W^{1,1}$ et $\nabla\cdot\left(\overline{\lambda}/\mu_t\right) \in L^\infty$.
A cause de $\nabla\cdot\left(\overline{\lambda}/\mu_t\right) = \nabla\cdot\overline{\lambda}/\mu_t - \overline{\lambda}\cdot\nabla\mu_t/\mu_t^2$ on suppose $\mu,\nu \geq c > 0$ et μ,ν Lipschitz.

Besoin de régularité

Tout marcherait si $\overline{\lambda}/\mu_t$ était Lipschitz.
$\overline{\lambda}$ satisfait $\nabla\mathcal{H}(\overline{\lambda}) = \nabla u$ (perturbations à divergence nulle).

$$\overline{\lambda} = \mathcal{H}^*(\nabla u); \quad \nabla\cdot\nabla\mathcal{H}^*(\nabla u) = \mu - \nu.$$

Si $H(t) = t^2$: **régularité elliptique standard !**
Si $H(t) = t^p$: $p'-$**Laplacien !**
Et si $H(t) = t + t^p$? Dans ce cas $\mathcal{H}^*(z) = 0$ pour tout $z \in B_1$.
Moins que Lipschitz peut suffir ? oui, on peut se contenter de la **théorie de DiPerna Lions**. Il faut $\overline{\lambda}/\mu_t \in W^{1,1}$ et $\nabla\cdot\left(\overline{\lambda}/\mu_t\right) \in L^\infty$.
A cause de $\nabla\cdot\left(\overline{\lambda}/\mu_t\right) = \nabla\cdot\overline{\lambda}/\mu_t - \overline{\lambda}\cdot\nabla\mu_t/\mu_t^2$ on suppose $\mu,\nu \geq c > 0$ et μ,ν Lipschitz.

Besoin de régularité

Tout marcherait si $\overline{\lambda}/\mu_t$ était Lipschitz.
$\overline{\lambda}$ satisfait $\nabla\mathcal{H}(\overline{\lambda}) = \nabla u$ (perturbations à divergence nulle).

$$\overline{\lambda} = \mathcal{H}^*(\nabla u); \quad \nabla\cdot\nabla\mathcal{H}^*(\nabla u) = \mu - \nu.$$

Si $H(t) = t^2$: **régularité elliptique standard !**
Si $H(t) = t^p$: $p'-$**Laplacien !**
Et si $H(t) = t + t^p$? Dans ce cas $\mathcal{H}^*(z) = 0$ pour tout $z \in B_1$.
Moins que Lipschitz peut suffir ? oui, on peut se contenter de la **théorie de DiPerna Lions**. Il faut $\overline{\lambda}/\mu_t \in W^{1,1}$ et $\nabla\cdot\left(\overline{\lambda}/\mu_t\right) \in L^\infty$.
A cause de $\nabla\cdot\left(\overline{\lambda}/\mu_t\right) = \nabla\cdot\overline{\lambda}/\mu_t - \overline{\lambda}\cdot\nabla\mu_t/\mu_t^2$ on suppose $\mu,\nu \geq c > 0$ et μ,ν Lipschitz.

Besoin de régularité

Tout marcherait si $\overline{\lambda}/\mu_t$ était Lipschitz.
$\overline{\lambda}$ satisfait $\nabla\mathcal{H}(\overline{\lambda}) = \nabla u$ (perturbations à divergence nulle).

$$\overline{\lambda} = \mathcal{H}^*(\nabla u); \quad \nabla\cdot\nabla\mathcal{H}^*(\nabla u) = \mu - \nu.$$

Si $H(t) = t^2$: **régularité elliptique standard !**
Si $H(t) = t^p$: $p'-$**Laplacien !**
Et si $H(t) = t + t^p$? Dans ce cas $\mathcal{H}^*(z) = 0$ pour tout $z \in B_1$.
Moins que Lipschitz peut suffir ? oui, on peut se contenter de la **théorie de DiPerna Lions**. Il faut $\overline{\lambda}/\mu_t \in W^{1,1}$ et $\nabla\cdot(\overline{\lambda}/\mu_t) \in L^\infty$.
A cause de $\nabla\cdot(\overline{\lambda}/\mu_t) = \nabla\cdot\overline{\lambda}/\mu_t - \overline{\lambda}\cdot\nabla\mu_t/\mu_t^2$ on suppose $\mu,\nu \geq c > 0$ et μ,ν Lipschitz.

Besoin de régularité

Tout marcherait si $\overline{\lambda}/\mu_t$ était Lipschitz.
$\overline{\lambda}$ satisfait $\nabla\mathcal{H}(\overline{\lambda}) = \nabla u$ (perturbations à divergence nulle).

$$\overline{\lambda} = \mathcal{H}^*(\nabla u); \quad \nabla \cdot \nabla\mathcal{H}^*(\nabla u) = \mu - \nu.$$

Si $H(t) = t^2$: **régularité elliptique standard !**
Si $H(t) = t^p$: $p'-$**Laplacien !**
Et si $H(t) = t + t^p$? Dans ce cas $\mathcal{H}^*(z) = 0$ pour tout $z \in B_1$.
Moins que Lipschitz peut suffir ? oui, on peut se contenter de la **théorie de DiPerna Lions**. Il faut $\overline{\lambda}/\mu_t \in W^{1,1}$ et $\nabla \cdot (\overline{\lambda}/\mu_t) \in L^\infty$.
A cause de $\nabla \cdot (\overline{\lambda}/\mu_t) = \nabla \cdot \overline{\lambda}/\mu_t - \overline{\lambda} \cdot \nabla\mu_t/\mu_t^2$ on suppose $\mu, \nu \geq c > 0$ et μ, ν Lipschitz.

Besoin de régularité

Tout marcherait si $\overline{\lambda}/\mu_t$ était Lipschitz.
$\overline{\lambda}$ satisfait $\nabla\mathcal{H}(\overline{\lambda}) = \nabla u$ (perturbations à divergence nulle).

$$\overline{\lambda} = \mathcal{H}^*(\nabla u); \quad \nabla \cdot \nabla\mathcal{H}^*(\nabla u) = \mu - \nu.$$

Si $H(t) = t^2$: **régularité elliptique standard !**
Si $H(t) = t^p$: $p'-$**Laplacien !**
Et si $H(t) = t + t^p$? Dans ce cas $\mathcal{H}^*(z) = 0$ pour tout $z \in B_1$.
Moins que Lipschitz peut suffir ? oui, on peut se contenter de la **théorie de DiPerna Lions**. Il faut $\overline{\lambda}/\mu_t \in W^{1,1}$ et $\nabla \cdot (\overline{\lambda}/\mu_t) \in L^\infty$.
A cause de $\nabla \cdot (\overline{\lambda}/\mu_t) = \nabla \cdot \overline{\lambda}/\mu_t - \overline{\lambda} \cdot \nabla\mu_t/\mu_t^2$ on suppose $\mu, \nu \geq c > 0$ et μ, ν Lipschitz.

Besoin de régularité

Tout marcherait si $\overline{\lambda}/\mu_t$ était Lipschitz.
$\overline{\lambda}$ satisfait $\nabla\mathcal{H}(\overline{\lambda}) = \nabla u$ (perturbations à divergence nulle).

$$\overline{\lambda} = \mathcal{H}^*(\nabla u); \quad \nabla \cdot \nabla\mathcal{H}^*(\nabla u) = \mu - \nu.$$

Si $H(t) = t^2$: **régularité elliptique standard !**
Si $H(t) = t^p$: $p'-$**Laplacien !**
Et si $H(t) = t + t^p$? Dans ce cas $\mathcal{H}^*(z) = 0$ pour tout $z \in B_1$.
Moins que Lipschitz peut suffir ? oui, on peut se contenter de la **théorie de DiPerna Lions**. Il faut $\overline{\lambda}/\mu_t \in W^{1,1}$ et $\nabla \cdot (\overline{\lambda}/\mu_t) \in L^\infty$.
A cause de $\nabla \cdot (\overline{\lambda}/\mu_t) = \nabla \cdot \overline{\lambda}/\mu_t - \overline{\lambda} \cdot \nabla\mu_t/\mu_t^2$ on suppose $\mu, \nu \geq c > 0$ et μ, ν Lipschitz.

Besoin de régularité

Tout marcherait si $\overline{\lambda}/\mu_t$ était Lipschitz.
$\overline{\lambda}$ satisfait $\nabla\mathcal{H}(\overline{\lambda}) = \nabla u$ (perturbations à divergence nulle).

$$\overline{\lambda} = \mathcal{H}^*(\nabla u); \quad \nabla\cdot\nabla\mathcal{H}^*(\nabla u) = \mu - \nu.$$

Si $H(t) = t^2$: **régularité elliptique standard !**
Si $H(t) = t^p$: $p'-$**Laplacien !**
Et si $H(t) = t + t^p$? Dans ce cas $\mathcal{H}^*(z) = 0$ pour tout $z \in B_1$.
Moins que Lipschitz peut suffir ? oui, on peut se contenter de la **théorie de DiPerna Lions**. Il faut $\overline{\lambda}/\mu_t \in W^{1,1}$ et $\nabla\cdot(\overline{\lambda}/\mu_t) \in L^\infty$.
A cause de $\nabla\cdot(\overline{\lambda}/\mu_t) = \nabla\cdot\overline{\lambda}/\mu_t - \overline{\lambda}\cdot\nabla\mu_t/\mu_t^2$ on suppose $\mu,\nu \geq c > 0$ et μ,ν Lipschitz.

Besoin de régularité

Tout marcherait si $\overline{\lambda}/\mu_t$ était Lipschitz.
$\overline{\lambda}$ satisfait $\nabla\mathcal{H}(\overline{\lambda}) = \nabla u$ (perturbations à divergence nulle).

$$\overline{\lambda} = \mathcal{H}^*(\nabla u); \quad \nabla \cdot \nabla\mathcal{H}^*(\nabla u) = \mu - \nu.$$

Si $H(t) = t^2$: **régularité elliptique standard !**
Si $H(t) = t^p$: p'**−Laplacien !**
Et si $H(t) = t + t^p$? Dans ce cas $\mathcal{H}^*(z) = 0$ pour tout $z \in B_1$.
Moins que Lipschitz peut suffir ? oui, on peut se contenter de la **théorie de DiPerna Lions**. Il faut $\overline{\lambda}/\mu_t \in W^{1,1}$ et $\nabla \cdot (\overline{\lambda}/\mu_t) \in L^\infty$.
A cause de $\nabla \cdot (\overline{\lambda}/\mu_t) = \nabla \cdot \overline{\lambda}/\mu_t - \overline{\lambda} \cdot \nabla\mu_t/\mu_t^2$ on suppose $\mu, \nu \geq c > 0$ et μ, ν Lipschitz.

Besoin de régularité

Tout marcherait si $\overline{\lambda}/\mu_t$ était Lipschitz.
$\overline{\lambda}$ satisfait $\nabla\mathcal{H}(\overline{\lambda}) = \nabla u$ (perturbations à divergence nulle).

$$\overline{\lambda} = \mathcal{H}^*(\nabla u); \quad \nabla \cdot \nabla\mathcal{H}^*(\nabla u) = \mu - \nu.$$

Si $H(t) = t^2$: **régularité elliptique standard !**
Si $H(t) = t^p$: $p'-$**Laplacien !**
Et si $H(t) = t + t^p$? Dans ce cas $\mathcal{H}^*(z) = 0$ pour tout $z \in B_1$.
Moins que Lipschitz peut suffir ? oui, on peut se contenter de la **théorie de DiPerna Lions**. Il faut $\overline{\lambda}/\mu_t \in W^{1,1}$ et $\nabla \cdot \left(\overline{\lambda}/\mu_t\right) \in L^\infty$.
A cause de $\nabla \cdot \left(\overline{\lambda}/\mu_t\right) = \nabla \cdot \overline{\lambda}/\mu_t - \overline{\lambda} \cdot \nabla\mu_t/\mu_t^2$ on suppose $\mu, \nu \geq c > 0$ et μ, ν Lipschitz.

Besoin de régularité

Tout marcherait si $\overline{\lambda}/\mu_t$ était Lipschitz.
$\overline{\lambda}$ satisfait $\nabla\mathcal{H}(\overline{\lambda}) = \nabla u$ (perturbations à divergence nulle).

$$\overline{\lambda} = \mathcal{H}^*(\nabla u); \quad \nabla\cdot\nabla\mathcal{H}^*(\nabla u) = \mu - \nu.$$

Si $H(t) = t^2$: **régularité elliptique standard !**
Si $H(t) = t^p$: $p'-$**Laplacien !**
Et si $H(t) = t + t^p$? Dans ce cas $\mathcal{H}^*(z) = 0$ pour tout $z \in B_1$.
Moins que Lipschitz peut suffir ? oui, on peut se contenter de la **théorie de DiPerna Lions**. Il faut $\overline{\lambda}/\mu_t \in W^{1,1}$ et $\nabla\cdot\left(\overline{\lambda}/\mu_t\right) \in L^\infty$.
A cause de $\nabla\cdot\left(\overline{\lambda}/\mu_t\right) = \nabla\cdot\overline{\lambda}/\mu_t - \overline{\lambda}\cdot\nabla\mu_t/\mu_t^2$ on suppose $\mu,\nu \geq c > 0$ et μ,ν Lipschitz.

Besoin de régularité

Tout marcherait si $\overline{\lambda}/\mu_t$ était Lipschitz.
$\overline{\lambda}$ satisfait $\nabla\mathcal{H}(\overline{\lambda}) = \nabla u$ (perturbations à divergence nulle).

$$\overline{\lambda} = \mathcal{H}^*(\nabla u); \quad \nabla \cdot \nabla\mathcal{H}^*(\nabla u) = \mu - \nu.$$

Si $H(t) = t^2$: **régularité elliptique standard !**
Si $H(t) = t^p$: $p'-$**Laplacien !**
Et si $H(t) = t + t^p$? Dans ce cas $\mathcal{H}^*(z) = 0$ pour tout $z \in B_1$.
Moins que Lipschitz peut suffir ? oui, on peut se contenter de la **théorie de DiPerna Lions**. Il faut $\overline{\lambda}/\mu_t \in W^{1,1}$ et $\nabla \cdot \left(\overline{\lambda}/\mu_t\right) \in L^\infty$.
A cause de $\nabla \cdot \left(\overline{\lambda}/\mu_t\right) = \nabla \cdot \overline{\lambda}/\mu_t - \overline{\lambda} \cdot \nabla\mu_t/\mu_t^2$ on suppose $\mu, \nu \geq c > 0$ et μ, ν Lipschitz.

Voilà

Régularité pour une équation très dégénérée :

$$\nabla \cdot G(\nabla u) = f$$

avec $G(z) = (|z| - 1)_+^{p'-1} \frac{z}{|z|}$ et $f \in W^{1,p}$: $G(\nabla u) \in W^{1,2} \cap L^\infty$. Pour la preuve : adaption des méthodes des increments pour le $p-$Laplacien.
L. Brasco, G. Carlier, F. Santambrogio, *Congested traffic dynamics, weak flows and very degenerate elliptic equations*, J. Math. Pures et Appl., to appear.

$$\nabla \cdot G(\nabla u) = f$$

avec $G = \nabla H$, $D^2H(z) \geq c_\delta I_n$ pour tout $z \notin B_{1+\delta}$, $f \in L^{2+\varepsilon}$, $n = 2$: $G(\nabla u) \in W^{1,2} \Rightarrow g(\nabla u) \in C^0$ pour tout $g \in C^0(\mathbb{R}^2)$ avec $g = 0$ sur B_1.
F. Santambrogio, V. Vespri, *Continuity in two dimensions for a very degenerate elliptic equation*, en préparation.

Voilà

Régularité pour une équation très dégénérée :

$$\nabla \cdot G(\nabla u) = f$$

avec $G(z) = (|z| - 1)_+^{p'-1} \frac{z}{|z|}$ et $f \in W^{1,p}$: $G(\nabla u) \in W^{1,2} \cap L^\infty$. Pour la preuve : adaption des méthodes des increments pour le $p-$Laplacien.
L. Brasco, G. Carlier, F. Santambrogio, *Congested traffic dynamics, weak flows and very degenerate elliptic equations*, J. Math. Pures et Appl., to appear.

$$\nabla \cdot G(\nabla u) = f$$

avec $G = \nabla H$, $D^2H(z) \geq c_\delta I_n$ pour tout $z \notin B_{1+\delta}$, $f \in L^{2+\varepsilon}$, $n = 2$: $G(\nabla u) \in W^{1,2} \Rightarrow g(\nabla u) \in C^0$ pour tout $g \in C^0(\mathbb{R}^2)$ avec $g = 0$ sur B_1.
F. Santambrogio, V. Vespri, *Continuity in two dimensions for a very degenerate elliptic equation*, en préparation.

Voilà

Régularité pour une équation très dégénérée :

$$\nabla \cdot G(\nabla u) = f$$

avec $G(z) = (|z| - 1)_+^{p'-1} \frac{z}{|z|}$ et $f \in W^{1,p}$: $G(\nabla u) \in W^{1,2} \cap L^\infty$. Pour la preuve : adaption des méthodes des increments pour le $p-$Laplacien.
L. Brasco, G. Carlier, F. Santambrogio, *Congested traffic dynamics, weak flows and very degenerate elliptic equations*, J. Math. Pures et Appl., to appear.

$$\nabla \cdot G(\nabla u) = f$$

avec $G = \nabla H$, $D^2H(z) \geq c_\delta I_n$ pour tout $z \notin B_{1+\delta}$, $f \in L^{2+\varepsilon}$, $n = 2$: $G(\nabla u) \in W^{1,2} \Rightarrow g(\nabla u) \in C^0$ pour tout $g \in C^0(\mathbb{R}^2)$ avec $g = 0$ sur B_1.
F. Santambrogio, V. Vespri, *Continuity in two dimensions for a very degenerate elliptic equation*, en préparation.

Voilà

Régularité pour une équation très dégénérée :

$$\nabla \cdot G(\nabla u) = f$$

avec $G(z) = (|z|-1)_+^{p'-1}\frac{z}{|z|}$ et $f \in W^{1,p}$: $G(\nabla u) \in W^{1,2} \cap L^\infty$. Pour la preuve : adaption des méthodes des increments pour le $p-$Laplacien.
L. Brasco, G. Carlier, F. Santambrogio, *Congested traffic dynamics, weak flows and very degenerate elliptic equations*, J. Math. Pures et Appl., to appear.

$$\nabla \cdot G(\nabla u) = f$$

avec $G = \nabla H$, $D^2 H(z) \geq c_\delta I_n$ pour tout $z \notin B_{1+\delta}$, $f \in L^{2+\varepsilon}$, $n = 2$: $G(\nabla u) \in W^{1,2} \Rightarrow g(\nabla u) \in C^0$ pour tout $g \in C^0(\mathbb{R}^2)$ avec $g = 0$ sur B_1.
F. Santambrogio, V. Vespri, *Continuity in two dimensions for a very degenerate elliptic equation*, en préparation.

Voilà

Régularité pour une équation très dégénérée :

$$\nabla \cdot G(\nabla u) = f$$

avec $G(z) = (|z| - 1)_+^{p'-1} \frac{z}{|z|}$ et $f \in W^{1,p}$: $G(\nabla u) \in W^{1,2} \cap L^\infty$. Pour la preuve : adaption des méthodes des increments pour le $p-$Laplacien.
L. Brasco, G. Carlier, F. Santambrogio, *Congested traffic dynamics, weak flows and very degenerate elliptic equations*, J. Math. Pures et Appl., to appear.

$$\nabla \cdot G(\nabla u) = f$$

avec $G = \nabla H$, $D^2H(z) \geq c_\delta I_n$ pour tout $z \notin B_{1+\delta}$, $f \in L^{2+\varepsilon}$, $n = 2$: $G(\nabla u) \in W^{1,2} \Rightarrow g(\nabla u) \in C^0$ pour tout $g \in C^0(\mathbb{R}^2)$ avec $g = 0$ sur B_1.
F. Santambrogio, V. Vespri, *Continuity in two dimensions for a very degenerate elliptic equation*, en préparation.

Voilà

Régularité pour une équation très dégénérée :

$$\nabla \cdot G(\nabla u) = f$$

avec $G(z) = (|z| - 1)_+^{p'-1} \frac{z}{|z|}$ et $f \in W^{1,p}$: $G(\nabla u) \in W^{1,2} \cap L^\infty$. Pour la preuve : adaption des méthodes des increments pour le $p-$Laplacien.
L. Brasco, G. Carlier, F. Santambrogio, *Congested traffic dynamics, weak flows and very degenerate elliptic equations*, J. Math. Pures et Appl., to appear.

$$\nabla \cdot G(\nabla u) = f$$

avec $G = \nabla H$, $D^2H(z) \geq c_\delta I_n$ pour tout $z \notin B_{1+\delta}$, $f \in L^{2+\varepsilon}$, $n = 2$: $G(\nabla u) \in W^{1,2} \Rightarrow g(\nabla u) \in C^0$ pour tout $g \in C^0(\mathbb{R}^2)$ avec $g = 0$ sur B_1.
F. Santambrogio, V. Vespri, *Continuity in two dimensions for a very degenerate elliptic equation*, en préparation.

Voilà

Régularité pour une équation très dégénérée :

$$\nabla \cdot G(\nabla u) = f$$

avec $G(z) = (|z| - 1)_+^{p'-1} \frac{z}{|z|}$ et $f \in W^{1,p}$: $G(\nabla u) \in W^{1,2} \cap L^\infty$. Pour la preuve : adaption des méthodes des increments pour le $p-$Laplacien.
L. Brasco, G. Carlier, F. Santambrogio, *Congested traffic dynamics, weak flows and very degenerate elliptic equations*, J. Math. Pures et Appl., to appear.

$$\nabla \cdot G(\nabla u) = f$$

avec $G = \nabla H$, $D^2 H(z) \geq c_\delta I_n$ pour tout $z \notin B_{1+\delta}$, $f \in L^{2+\varepsilon}$, $n = 2$: $G(\nabla u) \in W^{1,2} \Rightarrow g(\nabla u) \in C^0$ pour tout $g \in C^0(\mathbb{R}^2)$ avec $g = 0$ sur B_1.
F. Santambrogio, V. Vespri, *Continuity in two dimensions for a very degenerate elliptic equation*, en préparation.

Voilà

Régularité pour une équation très dégénérée :

$$\nabla \cdot G(\nabla u) = f$$

avec $G(z) = (|z| - 1)_+^{p'-1} \frac{z}{|z|}$ et $f \in W^{1,p}$: $G(\nabla u) \in W^{1,2} \cap L^\infty$. Pour la preuve : adaption des méthodes des increments pour le $p-$Laplacien.
L. Brasco, G. Carlier, F. Santambrogio, *Congested traffic dynamics, weak flows and very degenerate elliptic equations*, J. Math. Pures et Appl., to appear.

$$\nabla \cdot G(\nabla u) = f$$

avec $G = \nabla H$, $D^2H(z) \geq c_\delta I_n$ pour tout $z \notin B_{1+\delta}$, $f \in L^{2+\varepsilon}$, $n = 2$: $G(\nabla u) \in W^{1,2} \Rightarrow g(\nabla u) \in C^0$ pour tout $g \in C^0(\mathbb{R}^2)$ avec $g = 0$ sur B_1.
F. Santambrogio, V. Vespri, *Continuity in two dimensions for a very degenerate elliptic equation*, en préparation.

Voilà

Régularité pour une équation très dégénérée :

$$\nabla \cdot G(\nabla u) = f$$

avec $G(z) = (|z| - 1)_+^{p'-1} \frac{z}{|z|}$ et $f \in W^{1,p}$: $G(\nabla u) \in W^{1,2} \cap L^\infty$. Pour la preuve : adaption des méthodes des increments pour le $p-$Laplacien.
L. Brasco, G. Carlier, F. Santambrogio, *Congested traffic dynamics, weak flows and very degenerate elliptic equations*, J. Math. Pures et Appl., to appear.

$$\nabla \cdot G(\nabla u) = f$$

avec $G = \nabla H$, $D^2 H(z) \geq c_\delta I_n$ pour tout $z \notin B_{1+\delta}$, $f \in L^{2+\varepsilon}$, $n = 2$: $G(\nabla u) \in W^{1,2} \Rightarrow g(\nabla u) \in C^0$ pour tout $g \in C^0(\mathbb{R}^2)$ avec $g = 0$ sur B_1.
F. Santambrogio, V. Vespri, *Continuity in two dimensions for a very degenerate elliptic equation*, en préparation.

Voilà

Régularité pour une équation très dégénérée :

$$\nabla \cdot G(\nabla u) = f$$

avec $G(z) = (|z| - 1)_+^{p'-1} \frac{z}{|z|}$ et $f \in W^{1,p}$: $G(\nabla u) \in W^{1,2} \cap L^\infty$. Pour la preuve : adaption des méthodes des increments pour le $p-$Laplacien.
L. Brasco, G. Carlier, F. Santambrogio, *Congested traffic dynamics, weak flows and very degenerate elliptic equations*, J. Math. Pures et Appl., to appear.

$$\nabla \cdot G(\nabla u) = f$$

avec $G = \nabla H$, $D^2 H(z) \geq c_\delta I_n$ pour tout $z \notin B_{1+\delta}$, $f \in L^{2+\varepsilon}$, $n = 2$:
$G(\nabla u) \in W^{1,2} \Rightarrow g(\nabla u) \in C^0$ pour tout $g \in C^0(\mathbb{R}^2)$ avec $g = 0$ sur B_1.
F. Santambrogio, V. Vespri, *Continuity in two dimensions for a very degenerate elliptic equation*, en préparation.

Voilà

Régularité pour une équation très dégénérée :

$$\nabla \cdot G(\nabla u) = f$$

avec $G(z) = (|z| - 1)_+^{p'-1} \frac{z}{|z|}$ et $f \in W^{1,p}$: $G(\nabla u) \in W^{1,2} \cap L^\infty$. Pour la preuve : adaption des méthodes des increments pour le $p-$Laplacien.
L. Brasco, G. Carlier, F. Santambrogio, *Congested traffic dynamics, weak flows and very degenerate elliptic equations*, J. Math. Pures et Appl., to appear.

$$\nabla \cdot G(\nabla u) = f$$

avec $G = \nabla H$, $D^2 H(z) \geq c_\delta I_n$ pour tout $z \notin B_{1+\delta}$, $f \in L^{2+\varepsilon}$, $n = 2$: $G(\nabla u) \in W^{1,2} \Rightarrow g(\nabla u) \in C^0$ pour tout $g \in C^0(\mathbb{R}^2)$ avec $g = 0$ sur B_1.
F. Santambrogio, V. Vespri, *Continuity in two dimensions for a very degenerate elliptic equation*, en préparation.

Voilà

Régularité pour une équation très dégénérée :

$$\nabla \cdot G(\nabla u) = f$$

avec $G(z) = (|z| - 1)_+^{p'-1} \frac{z}{|z|}$ et $f \in W^{1,p}$: $G(\nabla u) \in W^{1,2} \cap L^\infty$. Pour la preuve : adaption des méthodes des increments pour le $p-$Laplacien.
L. Brasco, G. Carlier, F. Santambrogio, *Congested traffic dynamics, weak flows and very degenerate elliptic equations*, J. Math. Pures et Appl., to appear.

$$\nabla \cdot G(\nabla u) = f$$

avec $G = \nabla H$, $D^2H(z) \geq c_\delta I_n$ pour tout $z \notin B_{1+\delta}$, $f \in L^{2+\varepsilon}$, $n = 2$: $G(\nabla u) \in W^{1,2} \Rightarrow g(\nabla u) \in C^0$ pour tout $g \in C^0(\mathbb{R}^2)$ avec $g = 0$ sur B_1.
F. Santambrogio, V. Vespri, *Continuity in two dimensions for a very degenerate elliptic equation*, en préparation.

Le problème dual

$$
\begin{aligned}
(P) &= \min_{Q \text{ admissible}} \int_\Omega H(i_Q); \\
(D) &= \max_{\xi \geq 0} - \int H^*(\xi) + \left(\min_{\gamma \in \Gamma} \int c_\xi \, d\gamma \right).
\end{aligned}
$$

Si $\Gamma = \Pi(\mu, \nu)$ alors $\min_{\gamma \in \Gamma} \int c_\xi d\gamma = W_{c_\xi}(\mu, \nu)$ est la **valeur d'un problème de trasnport**. Si $\Gamma = \{\overline{\gamma}\}$ on a évidemment $(D) = \max_{\xi \geq 0} - \int H^*(\xi) + \int c_\xi d\overline{\gamma}$.

$$\text{Dualité :} \quad (P) = (D).$$

Remarque : $(DV) = \max_u \int uf - \int \mathcal{H}^*(\nabla u)$; et, si $\Gamma = \Pi(\mu, \nu)$, $(D) = \max_{u, \xi \,:\, |\nabla u| \leq \xi} \int uf - \int H^*(\xi)$.

Le problème dual

$$(P) = \min_{Q \text{ admissible}} \int_\Omega H(i_Q);$$

$$(D) = \max_{\xi \geq 0} - \int H^*(\xi) + \left(\min_{\gamma \in \Gamma} \int c_\xi \, d\gamma \right).$$

Si $\Gamma = \Pi(\mu, \nu)$ alors $\min_{\gamma \in \Gamma} \int c_\xi d\gamma = W_{c_\xi}(\mu, \nu)$ est la **valeur d'un problème de trasnport**. Si $\Gamma = \{\overline{\gamma}\}$ on a évidemment $(D) = \max_{\xi \geq 0} - \int H^*(\xi) + \int c_\xi d\overline{\gamma}$.

$$\text{Dualité :} \quad (P) = (D).$$

Remarque : $(DV) = \max_u \int uf - \int \mathcal{H}^*(\nabla u)$; et, si $\Gamma = \Pi(\mu, \nu)$, $(D) = \max_{u, \xi \,:\, |\nabla u| \leq \xi} \int uf - \int H^*(\xi)$.

Le problème dual

$$(P) = \min_{Q \text{ admissible}} \int_\Omega H(i_Q);$$
$$(D) = \max_{\xi \geq 0} - \int H^*(\xi) + \left(\min_{\gamma \in \Gamma} \int c_\xi \, d\gamma \right).$$

Si $\Gamma = \Pi(\mu, \nu)$ alors $\min_{\gamma\in\Gamma} \int c_\xi d\gamma = W_{c_\xi}(\mu,\nu)$ est la **valeur d'un problème de trasnport**. Si $\Gamma = \{\overline{\gamma}\}$ on a évidemment $(D) = \max_{\xi\geq 0} - \int H^*(\xi) + \int c_\xi d\overline{\gamma}$.

Dualité : $(P) = (D)$.

Remarque : $(DV) = \max_u \int uf - \int \mathcal{H}^*(\nabla u)$; et, si $\Gamma = \Pi(\mu,\nu)$, $(D) = \max_{u,\xi \,:\, |\nabla u| \leq \xi} \int uf - \int H^*(\xi)$.

Le problème dual

$$(P) = \min_{Q \text{ admissible}} \int_\Omega H(i_Q);$$
$$(D) = \max_{\xi \geq 0} - \int H^*(\xi) + \left(\min_{\gamma \in \Gamma} \int c_\xi \, d\gamma \right).$$

Si $\Gamma = \Pi(\mu, \nu)$ alors $\min_{\gamma \in \Gamma} \int c_\xi \, d\gamma = W_{c_\xi}(\mu, \nu)$ est la **valeur d'un problème de trasnport**. Si $\Gamma = \{\overline{\gamma}\}$ on a évidemment $(D) = \max_{\xi \geq 0} - \int H^*(\xi) + \int c_\xi \, d\overline{\gamma}$.

$$\text{Dualité :} \quad (P) = (D).$$

Remarque : $(DV) = \max_u \int uf - \int \mathcal{H}^*(\nabla u)$; et, si $\Gamma = \Pi(\mu, \nu)$, $(D) = \max_{u, \xi \,:\, |\nabla u| \leq \xi} \int uf - \int H^*(\xi)$.

Le problème dual

$$(P) = \min_{Q \text{ admissible}} \int_\Omega H(i_Q);$$

$$(D) = \max_{\xi \geq 0} - \int H^*(\xi) + \left(\min_{\gamma \in \Gamma} \int c_\xi \, d\gamma \right).$$

Si $\Gamma = \Pi(\mu, \nu)$ alors $\min_{\gamma \in \Gamma} \int c_\xi d\gamma = W_{c_\xi}(\mu, \nu)$ est la **valeur d'un problème de trasnport**. Si $\Gamma = \{\overline{\gamma}\}$ on a évidemment $(D) = \max_{\xi \geq 0} - \int H^*(\xi) + \int c_\xi d\overline{\gamma}$.

$$\text{Dualité :} \quad (P) = (D).$$

Remarque : $(DV) = \max_u \int uf - \int \mathcal{H}^*(\nabla u)$; et, si $\Gamma = \Pi(\mu, \nu)$, $(D) = \max_{u, \xi \,:\, |\nabla u| \leq \xi} \int uf - \int H^*(\xi)$.

Le problème dual

$$
\begin{aligned}
(P) &= \min_{Q \text{ admissible}} \int_\Omega H(i_Q); \\
(D) &= \max_{\xi \geq 0} - \int H^*(\xi) + \left(\min_{\gamma \in \Gamma} \int c_\xi \, d\gamma \right).
\end{aligned}
$$

Si $\Gamma = \Pi(\mu, \nu)$ alors $\min_{\gamma \in \Gamma} \int c_\xi \, d\gamma = W_{c_\xi}(\mu, \nu)$ est la **valeur d'un problème de trasnport**. Si $\Gamma = \{\overline{\gamma}\}$ on a évidemment $(D) = \max_{\xi \geq 0} - \int H^*(\xi) + \int c_\xi \, d\overline{\gamma}$.

$$
\text{Dualité :} \quad (P) = (D).
$$

Remarque : $(DV) = \max_u \int uf - \int \mathcal{H}^*(\nabla u)$; et, si $\Gamma = \Pi(\mu, \nu)$, $(D) = \max_{u, \xi \,:\, |\nabla u| \leq \xi} \int uf - \int H^*(\xi)$.

Dualité et numérique

Dans le cas discret (réseaux) le problème dual est souvent analysé plutôt que le primal. D'un ξ optimal on peut retrouver la densité de trafic par $H'(i_Q) = \xi$.

Le problème dual demande le calcul des distances géodésiques selon ξ, (solution de viscosité de $|\nabla \mathcal{U}| = \xi$).

Calcul numérique par Fast Marching Method : résolution du système

$$(D_x\mathcal{U})^2_{i,j} + (D_y\mathcal{U})^2_{i,j} = h^2(\xi_{i,j})^2,$$
$$(D_x\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i-1,j}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i+1,j}), 0\}/h,$$
$$(D_y\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j-1}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j+1}), 0\}/h.$$

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré, F. Santambrogio,
Numerical Approximation of Continuous Traffic Congestion Equilibria, Net. Het. Media, à paraître.
Derivatives with respect to metrics and applications : Subgradient Marching Algorithm, soumis

Dualité et numérique

Dans le cas discret (réseaux) le problème dual est souvent analysé plutôt que le primal. D'un ξ optimal on peut retrouver la densité de trafic par $H'(i_Q) = \xi$.

Le problème dual demande le calcul des distances géodésiques selon ξ, (solution de viscosité de $|\nabla \mathcal{U}| = \xi$).

Calcul numérique par Fast Marching Method : résolution du système

$$\begin{gathered}(D_x\mathcal{U})^2_{i,j} + (D_y\mathcal{U})^2_{i,j} = h^2(\xi_{i,j})^2,\\ (D_x\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i-1,j}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i+1,j}), 0\}/h,\\ (D_y\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j-1}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j+1}), 0\}/h.\end{gathered}$$

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré, F. Santambrogio,
Numerical Approximation of Continuous Traffic Congestion Equilibria, Net. Het. Media, à paraître.
Derivatives with respect to metrics and applications : Subgradient Marching Algorithm, soumis

Dualité et numérique

Dans le cas discret (réseaux) le problème dual est souvent analysé plutôt que le primal. D'un ξ optimal on peut retrouver la densité de trafic par $H'(i_Q) = \xi$.

Le problème dual demande le calcul des distances géodésiques selon ξ, (solution de viscosité de $|\nabla \mathcal{U}| = \xi$).

Calcul numérique par Fast Marching Method : résolution du système

$$(D_x\mathcal{U})_{i,j}^2 + (D_y\mathcal{U})_{i,j}^2 = h^2(\xi_{i,j})^2,$$
$$(D_x\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i-1,j}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i+1,j}), 0\}/h,$$
$$(D_y\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j-1}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j+1}), 0\}/h.$$

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré, F. Santambrogio, *Numerical Approximation of Continuous Traffic Congestion Equilibria*, Net. Het. Media, à paraître.
Derivatives with respect to metrics and applications : Subgradient Marching Algorithm, soumis

Dualité et numérique

Dans le cas discret (réseaux) le problème dual est souvent analysé plutôt que le primal. D'un ξ optimal on peut retrouver la densité de trafic par $H'(i_Q) = \xi$.

Le problème dual demande le calcul des distances géodésiques selon ξ, (solution de viscosité de $|\nabla \mathcal{U}| = \xi$).

Calcul numérique par Fast Marching Method : résolution du système

$$(D_x\mathcal{U})^2_{i,j} + (D_y\mathcal{U})^2_{i,j} = h^2(\xi_{i,j})^2,$$
$$(D_x\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i-1,j}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i+1,j}), 0\}/h,$$
$$(D_y\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j-1}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j+1}), 0\}/h.$$

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré, F. Santambrogio, *Numerical Approximation of Continuous Traffic Congestion Equilibria*, Net. Het. Media, à paraître.
Derivatives with respect to metrics and applications : Subgradient Marching Algorithm, soumis

Dualité et numérique

Dans le cas discret (réseaux) le problème dual est souvent analysé plutôt que le primal. D'un ξ optimal on peut retrouver la densité de trafic par $H'(i_Q) = \xi$.
Le problème dual demande le calcul des distances géodésiques selon ξ, (solution de viscosité de $|\nabla \mathcal{U}| = \xi$).
Calcul numérique par Fast Marching Method : résolution du système

$$(D_x\mathcal{U})^2_{i,j} + (D_y\mathcal{U})^2_{i,j} = h^2(\xi_{i,j})^2,$$
$$(D_x\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i-1,j}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i+1,j}), 0\}/h,$$
$$(D_y\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j-1}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j+1}), 0\}/h.$$

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré, F. Santambrogio,
Numerical Approximation of Continuous Traffic Congestion Equilibria, Net. Het. Media, à paraître.
Derivatives with respect to metrics and applications : Subgradient Marching Algorithm, soumis

Dualité et numérique

Dans le cas discret (réseaux) le problème dual est souvent analysé plutôt que le primal. D'un ξ optimal on peut retrouver la densité de trafic par $H'(i_Q) = \xi$.

Le problème dual demande le calcul des distances géodésiques selon ξ, (solution de viscosité de $|\nabla\mathcal{U}| = \xi$).

Calcul numérique par Fast Marching Method : résolution du système

$$(D_x\mathcal{U})^2_{i,j} + (D_y\mathcal{U})^2_{i,j} = h^2(\xi_{i,j})^2,$$

$$(D_x\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i-1,j}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i+1,j}), 0\}/h,$$

$$(D_y\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j-1}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j+1}), 0\}/h.$$

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré, F. Santambrogio,
Numerical Approximation of Continuous Traffic Congestion Equilibria, Net. Het. Media, à paraître.
Derivatives with respect to metrics and applications : Subgradient Marching Algorithm, soumis

Dualité et numérique

Dans le cas discret (réseaux) le problème dual est souvent analysé plutôt que le primal. D'un ξ optimal on peut retrouver la densité de trafic par $H'(i_Q) = \xi$.

Le problème dual demande le calcul des distances géodésiques selon ξ, (solution de viscosité de $|\nabla \mathcal{U}| = \xi$).

Calcul numérique par Fast Marching Method : résolution du système

$$
\begin{gathered}
(D_x\mathcal{U})^2_{i,j} + (D_y\mathcal{U})^2_{i,j} = h^2(\xi_{i,j})^2,\\
(D_x\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i-1,j}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i+1,j}), 0\}/h,\\
(D_y\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j-1}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j+1}), 0\}/h.
\end{gathered}
$$

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré, F. Santambrogio,
Numerical Approximation of Continuous Traffic Congestion Equilibria, Net. Het. Media, à paraître.
Derivatives with respect to metrics and applications : Subgradient Marching Algorithm, soumis

Dualité et numérique

Dans le cas discret (réseaux) le problème dual est souvent analysé plutôt que le primal. D'un ξ optimal on peut retrouver la densité de trafic par $H'(i_Q) = \xi$.
Le problème dual demande le calcul des distances géodésiques selon ξ, (solution de viscosité de $|\nabla \mathcal{U}| = \xi$).
Calcul numérique par Fast Marching Method : résolution du système

$$
\begin{gathered}
(D_x\mathcal{U})^2_{i,j} + (D_y\mathcal{U})^2_{i,j} = h^2(\xi_{i,j})^2, \\
(D_x\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i-1,j}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i+1,j}), 0\}/h, \\
(D_y\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j-1}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j+1}), 0\}/h.
\end{gathered}
$$

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré, F. Santambrogio,
Numerical Approximation of Continuous Traffic Congestion Equilibria, Net. Het. Media, à paraître.
Derivatives with respect to metrics and applications : Subgradient Marching Algorithm, soumis

Dualité et numérique

Dans le cas discret (réseaux) le problème dual est souvent analysé plutôt que le primal. D'un ξ optimal on peut retrouver la densité de trafic par $H'(i_Q) = \xi$.
Le problème dual demande le calcul des distances géodésiques selon ξ, (solution de viscosité de $|\nabla \mathcal{U}| = \xi$).
Calcul numérique par Fast Marching Method : résolution du système

$$(D_x\mathcal{U})^2_{i,j} + (D_y\mathcal{U})^2_{i,j} = h^2(\xi_{i,j})^2,$$
$$(D_x\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i-1,j}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i+1,j}), 0\}/h,$$
$$(D_y\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j-1}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j+1}), 0\}/h.$$

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré, F. Santambrogio,
Numerical Approximation of Continuous Traffic Congestion Equilibria, Net. Het. Media, à paraître.
Derivatives with respect to metrics and applications : Subgradient Marching Algorithm, soumis

Calcul du sous-gradient par FMM

On veut calculer $\mathcal{U}_{x_0,\xi}(y)$ et puis laisser ξ varier. Dans le cas continu, si ξ est remplacé par $\xi + \varepsilon h$, on a

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{U}_{x_0,\xi+\varepsilon h}(y) = \int_0^1 h(\sigma_{x_0,y}(t))|\sigma'_{x_0,y}(t)|\,dt$$

le long d'une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ (par rapport à ξ).
Ici en tout point y on peut écrire

soit $(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1))^2+(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))^2 = \xi^2(y)$ soit $\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1) = h\xi(y)$,

Pour un ou deux parents y_1, y_2. Si ξ varie on a soit

$$\delta\mathcal{U}(y) = \frac{2h^2\xi(y)\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)) + \delta\mathcal{U}(y_2)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))}{2\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)-\mathcal{U}(y_2)}$$

soit $\delta\mathcal{U}(y) = h\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)$. On peut donc calculer $\nabla_\xi\mathcal{U}(y)$ de manière recursive, dans le même cycle du FMM.

Calcul du sous-gradient par FMM

On veut calculer $\mathcal{U}_{x_0,\xi}(y)$ et puis laisser ξ varier. Dans le cas continu, si ξ est remplacé par $\xi + \varepsilon h$, on a

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{U}_{x_0,\xi+\varepsilon h}(y) = \int_0^1 h(\sigma_{x_0,y}(t))|\sigma'_{x_0,y}(t)|\,dt$$

le long d'une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ (par rapport à ξ).
Ici en tout point y on peut écrire

soit $(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1))^2+(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))^2 = \xi^2(y)$ soit $\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1) = h\xi(y)$,

Pour un ou deux parents y_1, y_2. Si ξ varie on a soit

$$\delta\mathcal{U}(y) = \frac{2h^2\xi(y)\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)) + \delta\mathcal{U}(y_2)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))}{2\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)-\mathcal{U}(y_2)}$$

soit $\delta\mathcal{U}(y) = h\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)$. On peut donc calculer $\nabla_\xi\mathcal{U}(y)$ de manière recursive, dans le même cycle du FMM.

Calcul du sous-gradient par FMM

On veut calculer $\mathcal{U}_{x_0,\xi}(y)$ et puis laisser ξ varier. Dans le cas continu, si ξ est remplacé par $\xi + \varepsilon h$, on a

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{U}_{x_0,\xi+\varepsilon h}(y) = \int_0^1 h(\sigma_{x_0,y}(t))|\sigma'_{x_0,y}(t)|\, dt$$

le long d'une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ (par rapport à ξ).
Ici en tout point y on peut écrire

soit $(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1))^2+(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))^2 = \xi^2(y)$ soit $\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1) = h\xi(y)$,

Pour un ou deux parents y_1, y_2. Si ξ varie on a soit

$$\delta\mathcal{U}(y) = \frac{2h^2\xi(y)\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)) + \delta\mathcal{U}(y_2)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))}{2\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)-\mathcal{U}(y_2)}$$

soit $\delta\mathcal{U}(y) = h\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)$. On peut donc calculer $\nabla_\xi\mathcal{U}(y)$ de manière recursive, dans le même cycle du FMM.

Calcul du sous-gradient par FMM

On veut calculer $\mathcal{U}_{x_0,\xi}(y)$ et puis laisser ξ varier. Dans le cas continu, si ξ est remplacé par $\xi + \varepsilon h$, on a

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{U}_{x_0,\xi+\varepsilon h}(y) = \int_0^1 h(\sigma_{x_0,y}(t))|\sigma'_{x_0,y}(t)|\,dt$$

le long d'une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ (par rapport à ξ).
Ici en tout point y on peut écrire

soit $(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1))^2+(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))^2 = \xi^2(y)$ soit $\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1) = h\xi(y)$,

Pour un ou deux parents y_1, y_2. Si ξ varie on a soit

$$\delta\mathcal{U}(y) = \frac{2h^2\xi(y)\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)) + \delta\mathcal{U}(y_2)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))}{2\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)-\mathcal{U}(y_2)}$$

soit $\delta\mathcal{U}(y) = h\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)$. On peut donc calculer $\nabla_\xi\mathcal{U}(y)$ de manière recursive, dans le même cycle du FMM.

Calcul du sous-gradient par FMM

On veut calculer $\mathcal{U}_{x_0,\xi}(y)$ et puis laisser ξ varier. Dans le cas continu, si ξ est remplacé par $\xi + \varepsilon h$, on a

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{U}_{x_0,\xi+\varepsilon h}(y) = \int_0^1 h(\sigma_{x_0,y}(t))|\sigma'_{x_0,y}(t)|\,dt$$

le long d'une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ (par rapport à ξ).
Ici en tout point y on peut écrire

soit $(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1))^2+(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))^2 = \xi^2(y)$ soit $\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1) = h\xi(y)$,

Pour un ou deux parents y_1, y_2. Si ξ varie on a soit

$$\delta\mathcal{U}(y) = \frac{2h^2\xi(y)\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)) + \delta\mathcal{U}(y_2)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))}{2\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)-\mathcal{U}(y_2)}$$

soit $\delta\mathcal{U}(y) = h\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)$. On peut donc calculer $\nabla_\xi\mathcal{U}(y)$ de manière recursive, dans le même cycle du FMM.

Calcul du sous-gradient par FMM

On veut calculer $\mathcal{U}_{x_0,\xi}(y)$ et puis laisser ξ varier. Dans le cas continu, si ξ est remplacé par $\xi + \varepsilon h$, on a

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{U}_{x_0,\xi+\varepsilon h}(y) = \int_0^1 h(\sigma_{x_0,y}(t))|\sigma'_{x_0,y}(t)|\,dt$$

le long d'une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ (par rapport à ξ).
Ici en tout point y on peut écrire

soit $(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1))^2+(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))^2 = \xi^2(y)$ soit $\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1) = h\xi(y)$,

Pour un ou deux parents y_1, y_2. Si ξ varie on a soit

$$\delta\mathcal{U}(y) = \frac{2h^2\xi(y)\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)) + \delta\mathcal{U}(y_2)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))}{2\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)-\mathcal{U}(y_2)}$$

soit $\delta\mathcal{U}(y) = h\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)$. On peut donc calculer $\nabla_\xi\mathcal{U}(y)$ de manière recursive, dans le même cycle du FMM.

Calcul du sous-gradient par FMM

On veut calculer $\mathcal{U}_{x_0,\xi}(y)$ et puis laisser ξ varier. Dans le cas continu, si ξ est remplacé par $\xi + \varepsilon h$, on a

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{U}_{x_0,\xi+\varepsilon h}(y) = \int_0^1 h(\sigma_{x_0,y}(t))|\sigma'_{x_0,y}(t)|\, dt$$

le long d'une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ (par rapport à ξ).
Ici en tout point y on peut écrire

soit $(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1))^2+(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))^2 = \xi^2(y)$ soit $\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1) = h\xi(y)$,

Pour un ou deux parents y_1, y_2. Si ξ varie on a soit

$$\delta\mathcal{U}(y) = \frac{2h^2\xi(y)\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)) + \delta\mathcal{U}(y_2)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))}{2\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)-\mathcal{U}(y_2)}$$

soit $\delta\mathcal{U}(y) = h\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)$. On peut donc calculer $\nabla_\xi\mathcal{U}(y)$ de manière recursive, dans le même cycle du FMM.

Calcul du sous-gradient par FMM

On veut calculer $\mathcal{U}_{x_0,\xi}(y)$ et puis laisser ξ varier. Dans le cas continu, si ξ est remplacé par $\xi + \varepsilon h$, on a

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{U}_{x_0,\xi+\varepsilon h}(y) = \int_0^1 h(\sigma_{x_0,y}(t))|\sigma'_{x_0,y}(t)|\,dt$$

le long d'une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ (par rapport à ξ).
Ici en tout point y on peut écrire

soit $(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1))^2+(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))^2 = \xi^2(y)$ soit $\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1) = h\xi(y)$,

Pour un ou deux parents y_1, y_2. Si ξ varie on a soit

$$\delta\mathcal{U}(y) = \frac{2h^2\xi(y)\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)) + \delta\mathcal{U}(y_2)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))}{2\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)-\mathcal{U}(y_2)}$$

soit $\delta\mathcal{U}(y) = h\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)$. On peut donc calculer $\nabla_\xi\mathcal{U}(y)$ de manière recursive, dans le même cycle du FMM.

Calcul du sous-gradient par FMM

On veut calculer $\mathcal{U}_{x_0,\xi}(y)$ et puis laisser ξ varier. Dans le cas continu, si ξ est remplacé par $\xi + \varepsilon h$, on a

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{U}_{x_0,\xi+\varepsilon h}(y) = \int_0^1 h(\sigma_{x_0,y}(t))|\sigma'_{x_0,y}(t)|\,dt$$

le long d'une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ (par rapport à ξ).
Ici en tout point y on peut écrire

soit $(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1))^2+(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))^2 = \xi^2(y)$ soit $\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1) = h\xi(y)$,

Pour un ou deux parents y_1, y_2. Si ξ varie on a soit

$$\delta\mathcal{U}(y) = \frac{2h^2\xi(y)\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)) + \delta\mathcal{U}(y_2)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))}{2\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)-\mathcal{U}(y_2)}$$

soit $\delta\mathcal{U}(y) = h\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)$. On peut donc calculer $\nabla_\xi\mathcal{U}(y)$ de manière recursive, dans le même cycle du FMM.

Calcul du sous-gradient par FMM

On veut calculer $\mathcal{U}_{x_0,\xi}(y)$ et puis laisser ξ varier. Dans le cas continu, si ξ est remplacé par $\xi + \varepsilon h$, on a

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{U}_{x_0,\xi+\varepsilon h}(y) = \int_0^1 h(\sigma_{x_0,y}(t))|\sigma'_{x_0,y}(t)|\,dt$$

le long d'une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ (par rapport à ξ).
Ici en tout point y on peut écrire

soit $(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1))^2+(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))^2 = \xi^2(y)$ soit $\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1) = h\xi(y)$,

Pour un ou deux parents y_1, y_2. Si ξ varie on a soit

$$\delta\mathcal{U}(y) = \frac{2h^2\xi(y)\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)) + \delta\mathcal{U}(y_2)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))}{2\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)-\mathcal{U}(y_2)}$$

soit $\delta\mathcal{U}(y) = h\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)$. On peut donc calculer $\nabla_\xi\mathcal{U}(y)$ de manière recursive, dans le même cycle du FMM.

Calcul du sous-gradient par FMM

On veut calculer $\mathcal{U}_{x_0,\xi}(y)$ et puis laisser ξ varier. Dans le cas continu, si ξ est remplacé par $\xi + \varepsilon h$, on a

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{U}_{x_0,\xi+\varepsilon h}(y) = \int_0^1 h(\sigma_{x_0,y}(t))|\sigma'_{x_0,y}(t)|\,dt$$

le long d'une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ (par rapport à ξ).
Ici en tout point y on peut écrire

soit $(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1))^2+(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))^2 = \xi^2(y)$ soit $\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1) = h\xi(y)$,

Pour un ou deux parents y_1, y_2. Si ξ varie on a soit

$$\delta\mathcal{U}(y) = \frac{2h^2\xi(y)\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)) + \delta\mathcal{U}(y_2)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))}{2\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)-\mathcal{U}(y_2)}$$

soit $\delta\mathcal{U}(y) = h\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)$. On peut donc calculer $\nabla_\xi\mathcal{U}(y)$ de manière recursive, dans le même cycle du FMM.

Convergences

On utilise un **algorithme de sous-gradient** sur une discrétisation du problème dual. La convergence vers le minimiseur est assuré par des hypothèses standard sur les pas ρ.

$$\xi^{(1)} = 1; \quad \xi^{(k+1)} = \max\{0, \xi^{(k)} - \rho_k w^{(k)}\}$$

$$\text{où} \quad (w^{(k)})_{i,j} = (H^*)'(\xi^{(k)}_{i,j}) + (v^{(k)})_{i,j} \in \partial J(\xi^{(k)})$$

et$v^{(k)}$ appartient au sous-différentiel de la partie avec $\mathcal{U}$
Et la convergence quand le pas de la grille $h \longrightarrow 0$? Nous prouvons **Γ-convergence** à la De Giorgi.
Ingrédient principaux : si $\xi \in C^0$ le FMM donne une approximation de $\mathcal{U}_\xi$; si $\xi_h \rightharpoonup \xi$ dans L^p (fonctions constantes sur les cellules de la grille), et $\mathcal{U}_h$ sont les solutions calculées par le FMM, alors

$$\limsup_{h \longrightarrow 0} \mathcal{U}_h(y) \leq \mathcal{U}_\xi(y),$$

où $\mathcal{U}_\xi$ est la solution de $|\nabla \mathcal{U}| = \xi$ (à définir, car ξ n'est que L^p).

Convergences

On utilise un **algorithme de sous-gradient** sur une discrétisation du problème dual. La convergence vers le minimiseur est assuré par des hypothèses standard sur les pas ρ.

$$\xi^{(1)} = 1; \quad \xi^{(k+1)} = \max\{0, \xi^{(k)} - \rho_k w^{(k)}\}$$

$$\text{où} \quad (w^{(k)})_{i,j} = (H^*)'(\xi^{(k)}_{i,j}) + (v^{(k)})_{i,j} \in \partial J(\xi^{(k)})$$

et$v^{(k)}$ appartient au sous-différentiel de la partie avec $\mathcal{U}$
Et la convergence quand le pas de la grille $h \to 0$? Nous prouvons
Γ-**convergence** à la De Giorgi.
Ingrédient principaux : si $\xi \in C^0$ le FMM donne une approximation de $\mathcal{U}_\xi$; si $\xi_h \rightharpoonup \xi$ dans L^p (fonctions constantes sur les cellules de la grille), et $\mathcal{U}_h$ sont les solutions calculées par le FMM, alors

$$\limsup_{h \to 0} \mathcal{U}_h(y) \leq \mathcal{U}_\xi(y),$$

où $\mathcal{U}_\xi$ est la solution de $|\nabla \mathcal{U}| = \xi$ (à définir, car ξ n'est que L^p).

Convergences

On utilise un **algorithme de sous-gradient** sur une discrétisation du problème dual. La convergence vers le minimiseur est assuré par des hypothèses standard sur les pas ρ.

$$\xi^{(1)} = 1; \quad \xi^{(k+1)} = \max\{0, \xi^{(k)} - \rho_k w^{(k)}\}$$

$$\text{où} \quad (w^{(k)})_{i,j} = (H^*)'(\xi^{(k)}_{i,j}) + (v^{(k)})_{i,j} \in \partial J(\xi^{(k)})$$

et$v^{(k)}$ appartient au sous-différentiel de la partie avec $\mathcal{U}$

Et la convergence quand le pas de la grille $h \longrightarrow 0$? Nous prouvons Γ-**convergence** à la De Giorgi.

Ingrédient principaux : si $\xi \in C^0$ le FMM donne une approximation de $\mathcal{U}_\xi$; si $\xi_h \rightharpoonup \xi$ dans L^p (fonctions constantes sur les cellules de la grille), et $\mathcal{U}_h$ sont les solutions calculées par le FMM, alors

$$\limsup_{h \longrightarrow 0} \mathcal{U}_h(y) \leq \mathcal{U}_\xi(y),$$

où $\mathcal{U}_\xi$ est la solution de $|\nabla \mathcal{U}| = \xi$ (à définir, car ξ n'est que L^p).

Convergences

On utilise un **algorithme de sous-gradient** sur une discrétisation du problème dual. La convergence vers le minimiseur est assuré par des hypothèses standard sur les pas ρ.

$$\xi^{(1)} = 1; \quad \xi^{(k+1)} = \max\{0, \xi^{(k)} - \rho_k w^{(k)}\}$$

$$\text{où} \quad (w^{(k)})_{i,j} = (H^*)'(\xi^{(k)}_{i,j}) + (v^{(k)})_{i,j} \in \partial J(\xi^{(k)})$$

et$v^{(k)}$ appartient au sous-différentiel de la partie avec $\mathcal{U}$
Et la convergence quand le pas de la grille $h \to 0$? Nous prouvons **Γ-convergence** à la De Giorgi.
Ingrédient principaux : si $\xi \in C^0$ le FMM donne une approximation de $\mathcal{U}_\xi$; si $\xi_h \rightharpoonup \xi$ dans L^p (fonctions constantes sur les cellules de la grille), et $\mathcal{U}_h$ sont les solutions calculées par le FMM, alors

$$\limsup_{h \to 0} \mathcal{U}_h(y) \leq \mathcal{U}_\xi(y),$$

où $\mathcal{U}_\xi$ est la solution de $|\nabla \mathcal{U}| = \xi$ (à définir, car ξ n'est que L^p).

Convergences

On utilise un **algorithme de sous-gradient** sur une discrétisation du problème dual. La convergence vers le minimiseur est assuré par des hypothèses standard sur les pas ρ.

$$\xi^{(1)} = 1; \quad \xi^{(k+1)} = \max\{0, \xi^{(k)} - \rho_k w^{(k)}\}$$

$$\text{où} \quad (w^{(k)})_{i,j} = (H^*)'(\xi^{(k)}_{i,j}) + (v^{(k)})_{i,j} \in \partial J(\xi^{(k)})$$

et$v^{(k)}$ appartient au sous-différentiel de la partie avec $\mathcal{U}$
Et la convergence quand le pas de la grille $h \to 0$? Nous prouvons Γ-**convergence** à la De Giorgi.
Ingrédient principaux : si $\xi \in C^0$ le FMM donne une approximation de $\mathcal{U}_\xi$; si $\xi_h \rightharpoonup \xi$ dans L^p (fonctions constantes sur les cellules de la grille), et $\mathcal{U}_h$ sont les solutions calculées par le FMM, alors

$$\limsup_{h\to 0} \mathcal{U}_h(y) \leq \mathcal{U}_\xi(y),$$

où $\mathcal{U}_\xi$ est la solution de $|\nabla \mathcal{U}| = \xi$ (à définir, car ξ n'est que L^p).

Convergences

On utilise un **algorithme de sous-gradient** sur une discrétisation du problème dual. La convergence vers le minimiseur est assuré par des hypothèses standard sur les pas ρ.

$$\xi^{(1)} = 1; \quad \xi^{(k+1)} = \max\{0, \xi^{(k)} - \rho_k w^{(k)}\}$$

$$\text{où} \quad (w^{(k)})_{i,j} = (H^*)'(\xi^{(k)}_{i,j}) + (v^{(k)})_{i,j} \in \partial J(\xi^{(k)})$$

et$v^{(k)}$ appartient au sous-différentiel de la partie avec $\mathcal{U}$
Et la convergence quand le pas de la grille $h \to 0$? Nous prouvons
Γ-**convergence** à la De Giorgi.
Ingrédient principaux : si $\xi \in C^0$ le FMM donne une approximation de $\mathcal{U}_\xi$; si $\xi_h \rightharpoonup \xi$ dans L^p (fonctions constantes sur les cellules de la grille), et $\mathcal{U}_h$ sont les solutions calculées par le FMM, alors

$$\limsup_{h \to 0} \mathcal{U}_h(y) \leq \mathcal{U}_\xi(y),$$

où $\mathcal{U}_\xi$ est la solution de $|\nabla \mathcal{U}| = \xi$ (à définir, car ξ n'est que L^p).

Convergences

On utilise un **algorithme de sous-gradient** sur une discrétisation du problème dual. La convergence vers le minimiseur est assuré par des hypothèses standard sur les pas ρ.

$$\xi^{(1)} = 1; \quad \xi^{(k+1)} = \max\{0, \xi^{(k)} - \rho_k w^{(k)}\}$$

$$\text{où} \quad (w^{(k)})_{i,j} = (H^*)'(\xi^{(k)}_{i,j}) + (v^{(k)})_{i,j} \in \partial J(\xi^{(k)})$$

et$v^{(k)}$ appartient au sous-différentiel de la partie avec $\mathcal{U}$
Et la convergence quand le pas de la grille $h \to 0$? Nous prouvons **Γ-convergence** à la De Giorgi.
Ingrédient principaux : si $\xi \in C^0$ le FMM donne une approximation de $\mathcal{U}_\xi$; si $\xi_h \rightharpoonup \xi$ dans L^p (fonctions constantes sur les cellules de la grille), et $\mathcal{U}_h$ sont les solutions calculées par le FMM, alors

$$\limsup_{h \to 0} \mathcal{U}_h(y) \leq \mathcal{U}_\xi(y),$$

où $\mathcal{U}_\xi$ est la solution de $|\nabla \mathcal{U}| = \xi$ (à définir, car ξ n'est que L^p).

Convergences

On utilise un **algorithme de sous-gradient** sur une discrétisation du problème dual. La convergence vers le minimiseur est assuré par des hypothèses standard sur les pas ρ.

$$\xi^{(1)} = 1; \quad \xi^{(k+1)} = \max\{0, \xi^{(k)} - \rho_k w^{(k)}\}$$

$$\text{où} \quad (w^{(k)})_{i,j} = (H^*)'(\xi^{(k)}_{i,j}) + (v^{(k)})_{i,j} \in \partial J(\xi^{(k)})$$

et$v^{(k)}$ appartient au sous-différentiel de la partie avec $\mathcal{U}$
Et la convergence quand le pas de la grille $h \to 0$? Nous prouvons **Γ-convergence** à la De Giorgi.
Ingrédient principaux : si $\xi \in C^0$ le FMM donne une approximation de $\mathcal{U}_\xi$; si $\xi_h \rightharpoonup \xi$ dans L^p (fonctions constantes sur les cellules de la grille), et $\mathcal{U}_h$ sont les solutions calculées par le FMM, alors

$$\limsup_{h \to 0} \mathcal{U}_h(y) \leq \mathcal{U}_\xi(y),$$

où $\mathcal{U}_\xi$ est la solution de $|\nabla \mathcal{U}| = \xi$ (à définir, car ξ n'est que L^p).

Convergences

On utilise un **algorithme de sous-gradient** sur une discrétisation du problème dual. La convergence vers le minimiseur est assuré par des hypothèses standard sur les pas ρ.

$$\xi^{(1)} = 1; \quad \xi^{(k+1)} = \max\{0, \xi^{(k)} - \rho_k w^{(k)}\}$$
$$\text{où} \quad (w^{(k)})_{i,j} = (H^*)'(\xi^{(k)}_{i,j}) + (v^{(k)})_{i,j} \in \partial J(\xi^{(k)})$$

et$v^{(k)}$ appartient au sous-différentiel de la partie avec $\mathcal{U}$
Et la convergence quand le pas de la grille $h \to 0$? Nous prouvons Γ-**convergence** à la De Giorgi.
Ingrédient principaux : si $\xi \in C^0$ le FMM donne une approximation de $\mathcal{U}_\xi$; si $\xi_h \rightharpoonup \xi$ dans L^p (fonctions constantes sur les cellules de la grille), et $\mathcal{U}_h$ sont les solutions calculées par le FMM, alors

$$\limsup_{h \to 0} \mathcal{U}_h(y) \leq \mathcal{U}_\xi(y),$$

où $\mathcal{U}_\xi$ est la solution de $|\nabla \mathcal{U}| = \xi$ (à définir, car ξ n'est que L^p).

Et maintenant . . .

. . .résultats numériques