Laboratoire de Mathématiques et
Physique Théorique (UMR 6083)
Fédération Denis Poisson (FR 2964)

Quelques résultats récents sur les équations elliptiques et paraboliques non linéaires

G. Barles

Collège de France
Vendredi 26 juin 2009

Équations elliptiques à croissances sur-quadratiques

Équation modèle :

$$-\mathrm{Tr}(A(x)D^2u) + |Du|^m + \lambda u = f(x) \quad \text{dans } \Omega$$

où $m > 2$, $\lambda \geq 0$, f, A sont des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ à valeurs respectivement dans $I\!R$ et dans l'ensemble des matrices symétriques positives (et pas nécessairement définies positives).

Questions :

(i) Régularité locale et globale

(ii) Résolution du problème de Dirichlet

(iii) Problèmes asymptotiques,...etc

Régularité : I. Capuzzo Dolcetta, F. Leoni et A. Porretta

Théorème : Toute sous-solution de l'équation est dans $C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$ avec $\alpha = \dfrac{m-2}{m-1}$ et les bornes locales dans $C^{0,\alpha}$ dépendent seulement des normes L^∞ de A, f et λu^-.

NB :
(i) En particulier, si $\lambda = 0$ ou si $u \geq 0$, les bornes locales dans $C^{0,\alpha}$ ne dépendent pas de u mais seulement des normes L^∞ de A et de f.
(ii) On ne suppose pas que l'équation est non dégénérée... Dans le cas uniformément elliptique, on a les résultats de régularité de Lasry & Lions, mais pour des solutions.

Preuve :

• La fonction u est sous-solution de :

$$-||A||_\infty \sum_{\lambda_i(D^2u)>0} \lambda_i(D^2u) + |Du|^m \le R \quad \text{dans } B(x,r) \subset \Omega$$

avec $R = ||(f-\lambda u)^+||_{L^\infty(B(x,r))}$.

• Dans toute boule de $\mathbb{R}^N$, il existe des "sursolutions universelles" de cette équation. Dans $B(0,1) - \{0\}$:

$$w_1(x) := C_1|x|^\alpha + C_2(d^\alpha(0) - d^\alpha(x))$$

où $d(x) = 1 - |x|$ sur $B(0,1) - B(0,1/2)$ et on régularise cette fonction dans $B(0,1/2)$.

• $u(y) \le u(x) + r^\alpha w_1(\frac{y-x}{r}) \quad \text{dans } B(x,r)$

Remarques :

(i) Preuve simple, s'appuyant sur le terme $|Du|^m$, qui donne donc la régularité

(ii) Si le bord est assez régulier ($C^{1,1}$), les sous-solutions bornées sont régulières jusqu'au bord (et réciproquement dans certains cas...).
Conséquence : on ne peut pas résoudre le problème de Dirichlet pour toute donnée au bord.

(iii) Ce résultat a de nombreuses variantes, en particulier dans le cas fortement non linéaire.

Interprétation de la régularité : contrôlabilité $\simeq$ pont brownien

On suppose que $A \equiv Id$ et on introduit la solution $(X_t)_t$ de l'équation différentielle stochastique contrôlée :

$$dX_s = \beta_s dt + dW_s \text{ pour } s > 0, \ X_0 = x \in B(0,1)$$

où $(\beta_s)_s$, le contrôle, est un processus progressivement mesurable.

Questions : Peut-on maintenir le processus $(X_s)_s$ à l'intérieur de la boule $B(0,1)$ à l'aide d'un contrôle tel que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\tau |\beta_s|^{\tilde{m}} ds\right] < +\infty$$

où $\tilde{m} = \dfrac{m}{m-1}$ l'exposant conjugué de m ? Et peut-on avoir $X_\tau = 0$ pour un temps d'arrêt τ qui est fini presque sûrement ?

Réponses : Oui si $m > 2$.

Idée formelle : la fonction w_1 construite pour avoir la borne $C^{0,\alpha}$ satisfait :

$$-\Delta w_1 + |Dw_1|^m \geq R > 0 \quad \text{dans } B(0,1) - \{0\}$$

$$w_1(0) = 0, \qquad \frac{\partial w_1}{\partial n} = +\infty \geq \varepsilon^{-1} \quad \text{sur } \partial B(0,1)$$

Donc, pour tout $x \in B(0,1)$ et $t > 0$, si τ est le premier temps où $X_s = 0$, on a :

$$w_1(x) \geq \inf_{(\beta_s)_s} \mathbb{E}\Big[\int_0^{\tau\wedge t} \big[(m-1)m^{-\tilde{m}}|\beta_s|^{\tilde{m}} + R\big]\, ds$$

$$+ \int_0^{\tau\wedge t} \varepsilon^{-1} d|k|_s + \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} w_1(X_t)\Big]$$

où $(k_s)_s$ est le processus à variations bornées associé à la réflexion du processus $(X_s)_s$ suivant la direction normale au bord de la boule.

Quand $\varepsilon \to 0$, on voit que $\int_0^{\tau\wedge t} d|k|_s = 0$ (pour le contrôle optimal).

Quand $t \to +\infty$, on voit que $\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau\wedge t} R ds\right]$ reste fini, d'où τ est fini p.s. (pour le contrôle optimal).

Conclusion : La borne $C^{0,\alpha}$ est due au phénomène de contrôlabilité : on peut maintenir le processus dans la boule et l'amener en 0 en temps fini.

Remarque : si $m < 2$, on peut encore maintenir le processus dans la boule mais on ne peut pas l'amener en 0 en temps fini.

Application 1 : Problème de Dirichlet

Théorème : On suppose que l'ouvert Ω est régulier avec un bord de classe C^3. Pour toutes données A, f, λ, g satisfaisant :

- $A = \sigma\sigma^T$, $\sigma \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ où $\gamma > 1 - \alpha/2$ avec $\alpha = \frac{m-2}{m-1}$
- $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega)$
- $\lambda > 0$,

il existe une unique solution du problème de Dirichlet :

$$-\mathrm{Tr}(A(x)D^2u) + |Du|^m + \lambda u = f \quad \text{dans } \Omega$$

$$u = g \quad \text{sur } \partial\Omega$$

Problème de Dirichlet ? (I)

Si on considère le problème approché + régularisé :

$$\begin{aligned} -\mathrm{Tr}(A_\varepsilon(x) + \varepsilon^2 Id)D^2u^\varepsilon) + |Du^\varepsilon|^m \wedge \varepsilon^{-1} + \lambda u^\varepsilon &= f \text{ dans } \Omega \\ u^\varepsilon &= g \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

alors on se retrouve dans un cas standard. On a, de plus des bornes L^∞ uniformes sur les u^ε

$$||u^\varepsilon||_\infty \leq \max(\lambda^{-1}||f||_\infty, ||g||_\infty)$$

Quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, u^ε converge formellement vers la solution du problème de Dirichlet généralisé :

Problème de Dirichlet généralisé :

On note $E(u) = -\mathrm{Tr}(A(x)D^2u) + |Du|^m + \lambda u - f$:

$$\min(E(u), u-g) \leq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,$$
$$\max(E(u), u-g) \geq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

On voit facilement que la condition de sous-solution se réduit à :

$$u \leq g \quad \text{sur } \partial\Omega$$

alors que, si A est non dégénérée sur $\partial\Omega$, la condition de sursolution signifie (formellement) :

$$u \geq g \text{ sur } \partial\Omega \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = +\infty$$

Preuve du Théorème : classique.
Résultat de “comparaison fort” + méthode de Perron.

Problème de Dirichlet ? (II)

On note $(X_t)_t$ la solution de l'équation différentielle stochastique contrôlée :

$$dX_s = \beta_s dt + \sqrt{2}\sigma(X_s)dW_s \text{ pour } s > 0, \; X_0 = x \in \Omega$$

où $(\beta_s)_s$, le contrôle, est un processus progressivement mesurable.

La solution du problème de Dirichlet est donnée par :

$$u(x) = \inf_{(\beta_s)_s} \mathbb{E}_x \Big\{ \int_0^\tau \big[(m-1)m^{-\tilde{m}}|\beta_s|^{\tilde{m}} + f(X_s)\big] \exp(-\lambda s) ds$$

$$+ g(X_\tau) \exp(-\lambda \tau) \Big\}$$

où τ est le premier temps de sortie de la trajectoire $(X_s)_s$ de l'ouvert Ω et $\tilde{m} = \dfrac{m}{m-1}$ est l'exposant conjugué de m.

Application 2 : Homogénéisation

On s'intéresse au problème :

$$-\mathrm{Tr}(\varepsilon A(x, \frac{x}{\varepsilon}) D^2 u_\varepsilon) + |Du_\varepsilon|^m + \lambda u_\varepsilon = f(x, \frac{x}{\varepsilon}) \quad \text{dans } \Omega$$

$$u_\varepsilon = g \quad \text{sur } \partial\Omega$$

où $A(x, y), f(x, y)$ sont $\mathbb{Z}^N$-périodiques en y.

Théorème : Sous les hypothèses précédentes sur A, f, g, λ, les u_ε convergent uniformément vers l'unique solution d'une équation d'Hamilton-Jacobi :

$$H(x, Du) + \lambda u = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$u = g \quad \text{sur } \partial\Omega$$

où H est l'hamiltonien effectif.

NB : Le cas "stationnaire-ergodique" dans $\mathbb{R}^N$ est traité par Lions & Souganidis

Idées de la preuve : méthode de la fonction test-perturbée d'Evans.

Ingrédient principal : Résolution du problème ergodique : trouver une constante c telle qu'il existe une solution $v \in C(\mathbb{R}^N)$ *périodique* de l'équation :

$$-\mathrm{Tr}(A(x,y)D^2_{yy}v) + |D_y v + p|^m = f(x,y) + c \quad \text{dans } \mathbb{R}^N$$

La constante c est unique et on a $H(x,p) = c$.

Deuxième ingrédient : mimer le développement asymptotique formel :

$$u_\varepsilon(x) = u(x) - \varepsilon v(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \cdots$$

via :

$$u_\varepsilon(x) - \phi(x) - \varepsilon v(\varepsilon^{-1} z) - \frac{|x-z|^2}{\beta^2}$$

où $\beta \ll \varepsilon$.

Problème : à cause du terme en $|Du|^m$, cette preuve marche mal... On résout plutôt :

$$\min \left\{ -\mathrm{Tr}(A(x',y')D^2_{yy}v) + |D_y v + p'|^m - f(x',y') \right\} = H_k(x,p)$$

(ou max) où le min (ou le max) est pris sur les x', y', p' tels que :

$$|p'-p| + |y'-y| + |x'-x| \leq k^{-1}$$

Équations paraboliques à croissances sur-quadratiques

Régularité : P. Cannarsa et P. Cardaliaguet

$$u_t - \mathrm{Tr}(A(x,t)D^2u) + b(x,t)|Du|^m = f(x,t) \text{ dans } \mathbb{R}^N \times (0,T)$$

où $A = \sigma\sigma^T$, σ localement lipschitzienne, b, f continues, $b(x,t) > 0$ dans $\mathbb{R}^N$.

Théorème : Les solutions continues de cette équation sont localement höldériennes en espace et en temps. L'exposant et les constantes (locales) de Hölder dépendent des normes $W^{1,\infty}_{loc}$ de σ et des normes L^∞_{loc} de b, b^{-1} et f.

Preuve : contrôle optimal, inégalité de Hölder inverse, pont brownien

Problème de Dirichlet :

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + |Du|^m &= f(x) \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty) \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad \text{sur } \overline{\Omega} \\ u(x,t) &= g(x) \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, +\infty) \end{aligned}$$

Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, $m > 0$ et u_0, g sont des fonctions continues satisfaisant la condition de compatibilité :

$$u_0(x) = g(x) \quad \text{sur } \partial\Omega$$

Théorème :(Da Lio -GB) Il existe une unique solution du problème qui est définie pour tous temps.

NB :

(i) Preuve classique : Méthode de Perron + résultat de comparaison fort

(ii) Mais cette fois les sous-solutions ne sont pas régulières...

(iii) Et on résout un problème avec (probablement) des pertes de conditions aux limites. La solution classique (valant g sur le bord) n'existe pas ou seulement pour des temps courts, d'où des phénomènes d'explosion du gradient sur le bord (Fila & Lieberman, Souplet).

Comportement asymptotique : $m > 2$ (Tabet Tchamba)

Résultat préliminaire : Problème ergodique (Lasry & Lions)

Il existe une unique constante c telle que le problème :

$$
\begin{aligned}
-\Delta\phi + |D\phi|^m &= f(x) + c \quad \text{dans } \Omega \\
-\Delta\phi + |D\phi|^m &\geq f(x) + c \quad \text{sur } \partial\Omega
\end{aligned}
$$

ait une solution ϕ. De plus, cette solution est unique à constante additive près.

= Problème de contrainte d'état.

Théorème : (T. Tabet Tchamba)

(i) **Si $c < 0$** alors la solution u est uniformément bornée sur $\overline{\Omega} \times [0, +\infty)$ et, quand $t \longrightarrow +\infty$, u converge uniformément sur $\overline{\Omega}$ vers une solution du problème stationnaire associé (qui a une unique solution).

(ii) **Si $c > 0$** alors le problème stationnaire associé n'a pas de solution. La fonction $u(x, t) + ct$ est uniformément bornée sur $\overline{\Omega} \times [0, +\infty)$ et, quand $t \longrightarrow +\infty$, $u(x, t) + ct$ converge vers une solution du problème ergodique.

(iii) **Si $c = 0$,** alors u converge uniformément sur $\overline{\Omega}$ vers une solution du problème stationnaire associé qui est de la forme $\phi - C$ où C est une constante telle que $\phi - C \leq g$ sur $\partial\Omega$.

Preuve : Principe du Maximum fort, traitement particulier au voisinage du bord pour la condition aux limites de contrainte d'état (sous-solution stricte)

Problème ouvert : Le cas dégénéré dans Ω :

$$u_t - \mathrm{Tr}(A(x)D^2u) + |Du|^m = f \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty)$$

ou dans $\mathbb{R}^N$ pour le cas périodique.

NB : Pour les équations de Hamilton-Jacobi, le résultat découle de la "théorie KAM faible – ensembles d'Aubry-Mather" (Fathi, Siconolfi, Bernard, ...) avec des variantes plus ou moins edp (Roquejoffre, Evans & Gomes, Davini & Siconolfi, Ishii, Mitake,...) ou des preuves edp pures (Namah & Roquejoffre, Souganidis & GB).

Comportement asymptotique : $m < 2$ (Porretta, Tabet Tchamba & GB)

Résultat préliminaire : Problème ergodique (Lasry & Lions)

Il existe une unique constante c telle que le problème :

$$\begin{aligned} -\Delta\phi + |D\phi|^m &= f(x) + c \quad \text{dans } \Omega \\ \phi(x) \to +\infty & \quad \text{quand } x \to \partial\Omega \end{aligned}$$

ait une solution ϕ. De plus, cette solution est unique à constante additive près.

Théorème : Si le problème stationnaire associé a une solution, alors elle est unique et u converge vers cette solution. Sinon $c \geq 0$ et :

(i) Si $3/2 < m \leq 2$ et $c > 0$ alors $(u(x,t) + ct) - \phi$ reste localement borné dans Ω

(ii) Si $3/2 \leq m \leq 2$ et $c = 0$ alors $\dfrac{u(x,t)}{t} \longrightarrow 0$ dans Ω mais il peut arriver que $u(x,t) + ct \longrightarrow -\infty$ in Ω.

(iii) Si $1 < m \leq 3/2$ et $c \geq 0$ alors $\dfrac{u(x,t)}{t} \longrightarrow c$ in Ω mais il peut arriver que $u(x,t) + ct \longrightarrow -\infty$ dans Ω.

Preuve : Construction de sur et sous-solutions

Ouverts étoilés (par rapport à 0) :

$$w(x,t) := \gamma(t)\phi(r(t)x) \pm H(t)$$

où $\gamma(t), r(t) \longrightarrow 1$ quand $t \longrightarrow +\infty$.

Ouverts non étoilés :

$$w(x,t) = \gamma(t)\phi(x - r(t)n(x))$$

où $\gamma(t), r(t) \longrightarrow 1$ quand $t \longrightarrow +\infty$.

Important : Comportement de ϕ au voisinage du bord

$$\phi(x) \sim C^* d(x)^{-\frac{2-m}{m-1}} \text{ quand } d(x) \longrightarrow 0 \text{ (Lasry-Lions)}$$

$$D\phi(x) \sim c_m d(x)^{-\frac{1}{m-1}} n(x) \text{ quand } d(x) \longrightarrow 0 \text{ (Porretta-Véron)}$$

et : sursolution si $f(x) + c < -\delta < 0$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$