Quantités conservées pour des équations des ondes non linéaires

Frédéric Hélein, Université Paris 7
Institut de Mathématique de Jussieu, UMR 7586

le 29 janvier 2010

La question

- On considère une solution $u : \mathbb{R}^{1+n} \longrightarrow \mathbb{R}$ de l'équation de Klein–Gordon non linéaire :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + m^2 u + V(u, du) = 0$$

La question

- On considère une solution $u : \mathbb{R}^{1+n} \longrightarrow \mathbb{R}$ de l'équation de Klein–Gordon non linéaire :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + m^2 u + V(u, du) = 0$$

- avec les conditions initiales à l'instant $t = 0$:

$$u(0, \vec{x}) = f(\vec{x}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, \vec{x}) = g(\vec{x}).$$

La question

- On considère une solution $u : \mathbb{R}^{1+n} \longrightarrow \mathbb{R}$ de l'équation de Klein–Gordon non linéaire :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + m^2 u + V(u, du) = 0$$

- avec les conditions initiales à l'instant $t = 0$:

$$u(0, \vec{x}) = f(\vec{x}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, \vec{x}) = g(\vec{x}).$$

- Question : pour $y = (t, \vec{y})$ avec $t > 0$, exprimer $u(y)$ en fonction des conditions initiales f et g.

Le cas linéaire

- Supposons d'abord que la non-linéarité $V(u, du)$ soit nulle, alors

$$u(y) = \int_{\{0\}\times\mathbb{R}^n} G(t, \vec{y} - \vec{x})g(\vec{x}) + \frac{\partial G}{\partial t}(t, \vec{y} - \vec{x})f(\vec{x})d\vec{x},$$

Le cas linéaire

- Supposons d'abord que la non-linéarité $V(u, du)$ soit nulle, alors

$$u(y) = \int_{\{0\}\times\mathbb{R}^n} G(t, \vec{y} - \vec{x})g(\vec{x}) + \frac{\partial G}{\partial t}(t, \vec{y} - \vec{x})f(\vec{x})d\vec{x},$$

- où G est solution de :

$$\Box G + m^2 G \quad = \quad 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^{1+n}$$

avec $G(0, \cdot) = 0$ et $\frac{\partial G}{\partial t}(0, \cdot) = \delta_0$.

Le cas linéaire avec second membre

Pour l'équation $\Box u + m^2 u = F$, on a :

$$\begin{aligned} u(y) &= \int_{\{0\}\times\mathbb{R}^n} G(t,\vec{y}-\vec{x})g(\vec{x}) + \frac{\partial G}{\partial t}(t,\vec{y}-\vec{x})f(\vec{x})d\vec{x} \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(t-s,\vec{y}-\vec{z})F(s,\vec{z})d\vec{z}ds. \end{aligned}$$

Un cas non linéaire avec $V(u, du) = \lambda u^2$

Donc pour l'équation $\square u + m^2 u + \lambda u^2 = 0$, si on applique la formule précédente avec $F = -\lambda u^2$:

$$\begin{aligned} u(y) &= \int_{\{0\}\times\mathbb{R}^n} G(t, \vec{y} - \vec{x}) g(\vec{x}) + \frac{\partial G}{\partial t}(t, \vec{y} - \vec{x}) f(\vec{x}) d\vec{x} \\ & \quad -\lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(t - s, \vec{y} - \vec{z}) u(s, \vec{z})^2 d\vec{z} ds. \end{aligned}$$

Introduisons les notations $x = (0, \vec{x})$, $y = (t, \vec{y})$, $z = (s, \vec{z})$ et

$$\begin{aligned}
G(y-x)\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x^0}u(x) &:= G(y-x)\frac{\partial u(x)}{\partial x^0} - \frac{\partial G(y-x)}{\partial x^0}u(x) \\
&= G(y-x)\frac{\partial u}{\partial t}(x) + \frac{\partial G}{\partial t}(y-x)u(x) \\
&= G(y-x)g(\vec{x}) + \frac{\partial G}{\partial t}(y-x)f(\vec{x})
\end{aligned}$$

- Alors la formule pour l'équation $\Box u + m^2 u + \lambda u^2 = 0$ devient :

$$u(y) = \int_{\{0\}\times\mathbb{R}^n} G(y-x)\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x^0}u(x)d\vec{x} - \lambda \int_{[0,t]\times\mathbb{R}^n} G(y-z)u(z)^2 dz.$$

- Alors la formule pour l'équation $\Box u + m^2 u + \lambda u^2 = 0$ devient :

$$u(y) = \int_{\{0\}\times\mathbb{R}^n} G(y-x)\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x^0}u(x)d\vec{x} - \lambda\int_{[0,t]\times\mathbb{R}^n} G(y-z)u(z)^2 dz.$$

- L'idée simple est alors de remplacer $u(z)^2$ à droite par la valeur donnée à gauche...

- Alors la formule pour l'équation $\Box u + m^2 u + \lambda u^2 = 0$ devient :

$$u(y) = \int_{\{0\}\times\mathbb{R}^n} G(y-x)\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x^0}u(x)d\vec{x} - \lambda \int_{[0,t]\times\mathbb{R}^n} G(y-z)u(z)^2 dz.$$

- L'idée simple est alors de remplacer $u(z)^2$ à droite par la valeur donnée à gauche...
- ... de réitérer ...

- Alors la formule pour l'équation $\Box u + m^2 u + \lambda u^2 = 0$ devient :

$$u(y) = \int_{\{0\}\times\mathbb{R}^n} G(y-x)\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x^0}u(x)d\vec{x} - \lambda \int_{[0,t]\times\mathbb{R}^n} G(y-z)u(z)^2 dz.$$

- L'idée simple est alors de remplacer $u(z)^2$ à droite par la valeur donnée à gauche...
- ... de réitérer ...
- ... c'est la méthode de point fixe !

- Alors la formule pour l'équation $\Box u + m^2 u + \lambda u^2 = 0$ devient :

$$u(y) = \int_{\{0\}\times\mathbb{R}^n} G(y-x)\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x^0}u(x)d\vec{x} - \lambda \int_{[0,t]\times\mathbb{R}^n} G(y-z)u(z)^2 dz.$$

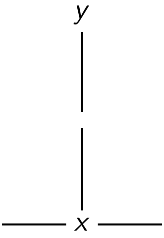
- L'idée simple est alors de remplacer $u(z)^2$ à droite par la valeur donnée à gauche...
- ... de réitérer ...
- ... c'est la méthode de point fixe !
- Cela donne-t-il une formule ?

A la première itération on obtient :

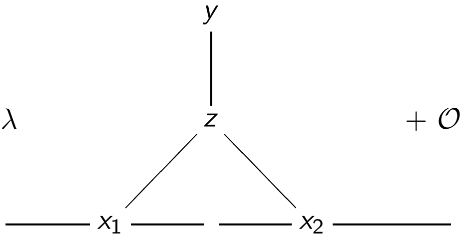
$$\begin{aligned} u(y) &= \int_0 d\vec{x}\, G_x^y \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x^0} u^x \\ &\quad -\lambda \int_{[0,t]} dz G_z^y \int_0 d\vec{x}_1\, G_{x_1}^z \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x_1^0} u^{x_1} \int_0 d\vec{x}_2\, G_{x_2}^z \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x_2^0} u^{x_2} \\ &\quad +\mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned}$$

où on note $\displaystyle\int_0 d\vec{x} = \int_{\{0\}\times\mathbb{R}^n} d\vec{x}$ et $\displaystyle\int_{[0,t]} dz = \int_{[0,t]\times\mathbb{R}^n} dz$
$G_x^y = G(y-x)$, $G_z^y = G(y-z)$, $G_{x_1}^z = G(z-x_1)$, etc.
et $u^x = u(x)$, $u^{x_1} = u(x_1)$, etc.

Cela peut se représenter graphiquement, en utilisant les règles de Feynman, par :



$-\lambda$



$+ \mathcal{O}(\lambda^2)$

Algébriquement, en notant $[u]_t := (u(t,\cdot), \frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot))$, on a :

$$u(y) = \mathcal{F}^y[u]_0 = \mathcal{F}_1^y[u]_0^{\otimes 1} + \mathcal{F}_2^y[u]_0^{\otimes 2} + \cdots$$

Un premier résultat par D. HARRIVEL (Annales IHP, 2006)

- Il existe une famille de séries formelles $(\mathcal{F}^{(t,\vec{y})})_{t\in\mathbb{R}}$ dont la variable est la donnée de Cauchy $[u]_0$ telle que, si u est solution de $\Box u + m^2 u + \lambda u^k = 0$, on a formellement

$$u(y) = u(t,\vec{y}) = \mathcal{F}^{(t,\vec{y})}[u]_0 = \sum_{p=1}^{\infty} \mathcal{F}_p^{(t,\vec{y})}[u]_0^{\otimes p}.$$

Un premier résultat par D. HARRIVEL (Annales IHP, 2006)

- Il existe une famille de séries formelles $(\mathcal{F}^{(t,\vec{y})})_{t\in\mathbb{R}}$ dont la variable est la donnée de Cauchy $[u]_0$ telle que, si u est solution de $\Box u + m^2 u + \lambda u^k = 0$, on a formellement

$$u(y) = u(t,\vec{y}) = \mathcal{F}^{(t,\vec{y})}[u]_0 = \sum_{p=1}^{\infty} \mathcal{F}_p^{(t,\vec{y})}[u]_0^{\otimes p}.$$

- De plus si $s > n/2$ et

$$u \in \mathcal{C}^0([0,T], H^{s+2}(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{C}^1([0,T], H^{s+1}(\mathbb{R}^n)) \text{ et}$$
$$T,\ ||u|| \text{ sont suffisamment petits,}$$

alors cette série est convergente.

Le cas général

$V(u, du)$ est une fonction analytique réelle de u et des dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x^\mu}$

Un cadre plus général

- Notons

$$\mathcal{E}_V := \{u : \mathbb{R}^{1+n} \longrightarrow \mathbb{R} | \ \Box u + m^2 u + V(u, du) = 0\}$$

Un cadre plus général

- Notons

$$\mathcal{E}_V := \{u : \mathbb{R}^{1+n} \longrightarrow \mathbb{R} |\ \Box u + m^2 u + V(u, du) = 0\}$$

- L'évaluation d'une solution $u \in \mathcal{E}$ en un point $y \in \mathbb{R}^{1+n}$ est un exemple de fonctionnelle :

$$\mathcal{E}_V \ni u \longmapsto u(y) \in \mathbb{R}.$$

Un cadre plus général

- Notons

$$\mathcal{E}_V := \{u : \mathbb{R}^{1+n} \longrightarrow \mathbb{R} |\ \Box u + m^2 u + V(u, du) = 0\}$$

- L'évaluation d'une solution $u \in \mathcal{E}$ en un point $y \in \mathbb{R}^{1+n}$ est un exemple de fonctionnelle :

$$\mathcal{E}_V \ni u \longmapsto u(y) \in \mathbb{R}.$$

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous pouvons considérer les fonctionnelles sur $\mathcal{E}_V$ qui s'expriment comme une fonction analytique réelle $\mathcal{F}_t$ de la donnée de Cauchy $[u]_t := (u(t, \cdot), \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot))$:

$$\mathcal{E}_V \ni u \longmapsto \mathcal{F}_t[u]_t \in \mathbb{R}.$$

- (Rappel) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous considérons les fonctionnelles $\mathcal{E}_V \longrightarrow \mathbb{R}$ qui s'expriment comme une fonction analytique réelle $\mathcal{F}_t$ de la donnée de Cauchy $[u]_t := (u(t,\cdot), \frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot))$:

$$\mathcal{E}_V \ni u \longmapsto \mathcal{F}_t[u]_t \in \mathbb{R}.$$

- (Rappel) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous considérons les fonctionnelles $\mathcal{E}_V \longrightarrow \mathbb{R}$ qui s'expriment comme une fonction analytique réelle $\mathcal{F}_t$ de la donnée de Cauchy $[u]_t := (u(t,\cdot), \frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot))$:

$$\mathcal{E}_V \ni u \longmapsto \mathcal{F}_t[u]_t \in \mathbb{R}.$$

- Formellement il doit être possible d'exprimer cette fonctionnelle sous la forme d'une fonction analytique réelle $\mathcal{F}_0$ de $[u]_0$

- (Rappel) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous considérons les fonctionnelles $\mathcal{E}_V \longrightarrow \mathbb{R}$ qui s'expriment comme une fonction analytique réelle $\mathcal{F}_t$ de la donnée de Cauchy $[u]_t := (u(t,\cdot), \frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot))$:

$$\mathcal{E}_V \ni u \longmapsto \mathcal{F}_t[u]_t \in \mathbb{R}.$$

- Formellement il doit être possible d'exprimer cette fonctionnelle sous la forme d'une fonction analytique réelle $\mathcal{F}_0$ de $[u]_0$
- Il s'agit donc de trouver $\mathcal{F}_0$ telle que :

$$\forall u \in \mathcal{E}_V, \quad \mathcal{F}_t[u]_t = \mathcal{F}_0[u]_0.$$

- (Rappel) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous considérons les fonctionnelles $\mathcal{E}_V \longrightarrow \mathbb{R}$ qui s'expriment comme une fonction analytique réelle $\mathcal{F}_t$ de la donnée de Cauchy $[u]_t := (u(t,\cdot), \frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot))$:

$$\mathcal{E}_V \ni u \longmapsto \mathcal{F}_t[u]_t \in \mathbb{R}.$$

- Formellement il doit être possible d'exprimer cette fonctionnelle sous la forme d'une fonction analytique réelle $\mathcal{F}_0$ de $[u]_0$
- Il s'agit donc de trouver $\mathcal{F}_0$ telle que :

$$\forall u \in \mathcal{E}_V, \quad \mathcal{F}_t[u]_t = \mathcal{F}_0[u]_0.$$

- Le résultat précédent en est un exemple avec $\mathcal{F}_t[u]_t = u(t, \vec{y})$.

Dans la suite nous noterons

$$\mathcal{E}_0 := \{u : \mathbb{R}^{1+n} \longrightarrow \mathbb{R} |\ \Box u + m^2 u = 0\}.$$

Un analogue classique des espace de Fock

Nous considérons une algèbre formelle $\mathcal{A}$ engendrée par les symboles $(\phi_\triangleright(x), \phi_\triangleleft(y))_{x,y\in\mathbb{R}^n}$ et agissant sur deux espaces vectoriels $\mathbb{F}$ et $\mathbb{F}^*$ en dualité, tels que :

- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $[\phi_\triangleleft(y), \phi_\triangleright(x)] = G(y - x)$;

Un analogue classique des espace de Fock

Nous considérons une algèbre formelle $\mathcal{A}$ engendrée par les symboles $(\phi_\triangleright(x), \phi_\triangleleft(y))_{x,y\in\mathbb{R}^n}$ et agissant sur deux espaces vectoriels $\mathbb{F}$ et $\mathbb{F}^*$ en dualité, tels que :

- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $[\phi_\triangleleft(y), \phi_\triangleright(x)] = G(y - x)$;
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $[\phi_\triangleleft(x), \phi_\triangleleft(y)] = [\phi_\triangleright(x), \phi_\triangleright(y)] = 0$;

Un analogue classique des espace de Fock

Nous considérons une algèbre formelle $\mathcal{A}$ engendrée par les symboles $(\phi_\triangleright(x), \phi_\triangleleft(y))_{x,y\in\mathbb{R}^n}$ et agissant sur deux espaces vectoriels $\mathbb{F}$ et $\mathbb{F}^*$ en dualité, tels que :

- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $[\phi_\triangleleft(y), \phi_\triangleright(x)] = G(y-x)$;
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $[\phi_\triangleleft(x), \phi_\triangleleft(y)] = [\phi_\triangleright(x), \phi_\triangleright(y)] = 0$;
- $\Box\phi_\triangleright + m^2\phi_\triangleright = \Box\phi_\triangleleft + m^2\phi_\triangleleft = 0$;

Un analogue classique des espace de Fock

Nous considérons une algèbre formelle $\mathcal{A}$ engendrée par les symboles $(\phi_\triangleright(x), \phi_\triangleleft(y))_{x,y\in\mathbb{R}^n}$ et agissant sur deux espaces vectoriels $\mathbb{F}$ et $\mathbb{F}^*$ en dualité, tels que :

- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $[\phi_\triangleleft(y), \phi_\triangleright(x)] = G(y - x)$;
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $[\phi_\triangleleft(x), \phi_\triangleleft(y)] = [\phi_\triangleright(x), \phi_\triangleright(y)] = 0$;
- $\Box\phi_\triangleright + m^2\phi_\triangleright = \Box\phi_\triangleleft + m^2\phi_\triangleleft = 0$;
- $\exists|0\rangle \in \mathbb{F}$, $\exists\langle 0| \in \mathbb{F}^*$, $\langle 0|0\rangle = 1$;

Un analogue classique des espace de Fock

Nous considérons une algèbre formelle $\mathcal{A}$ engendrée par les symboles $(\phi_\triangleright(x), \phi_\triangleleft(y))_{x,y\in\mathbb{R}^n}$ et agissant sur deux espaces vectoriels $\mathbb{F}$ et $\mathbb{F}^*$ en dualité, tels que :

- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $[\phi_\triangleleft(y), \phi_\triangleright(x)] = G(y-x)$;
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $[\phi_\triangleleft(x), \phi_\triangleleft(y)] = [\phi_\triangleright(x), \phi_\triangleright(y)] = 0$;
- $\Box\phi_\triangleright + m^2\phi_\triangleright = \Box\phi_\triangleleft + m^2\phi_\triangleleft = 0$;
- $\exists|0\rangle \in \mathbb{F}$, $\exists\langle 0| \in \mathbb{F}^*$, $\langle 0|0\rangle = 1$;
- $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $\phi_\triangleleft(y)|0\rangle = 0$;

Un analogue classique des espace de Fock

Nous considérons une algèbre formelle $\mathcal{A}$ engendrée par les symboles $(\phi_{\triangleright}(x), \phi_{\triangleleft}(y))_{x,y\in\mathbb{R}^n}$ et agissant sur deux espaces vectoriels $\mathbb{F}$ et $\mathbb{F}^*$ en dualité, tels que :

- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $[\phi_{\triangleleft}(y), \phi_{\triangleright}(x)] = G(y - x)$;
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $[\phi_{\triangleleft}(x), \phi_{\triangleleft}(y)] = [\phi_{\triangleright}(x), \phi_{\triangleright}(y)] = 0$;
- $\Box\phi_{\triangleright} + m^2\phi_{\triangleright} = \Box\phi_{\triangleleft} + m^2\phi_{\triangleleft} = 0$;
- $\exists|0\rangle \in \mathbb{F}$, $\exists\langle 0| \in \mathbb{F}^*$, $\langle 0|0\rangle = 1$;
- $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $\phi_{\triangleleft}(y)|0\rangle = 0$;
- $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\langle 0|\phi_{\triangleright}(x) = 0$.

Une fonction analytique de $[u]_t$...

- Pour tout $|f\rangle \in \mathbb{F}$, $t \in \mathbb{R}$, nous considérons :

$$\mathcal{E}_V \ni u \longmapsto \langle [u]_t | f \rangle \in \mathbb{R}$$

où :

Une fonction analytique de $[u]_t$...

- Pour tout $|f\rangle \in \mathbb{F}$, $t \in \mathbb{R}$, nous considérons :

$$\mathcal{E}_V \ni u \longmapsto \langle [u]_t | f\rangle \in \mathbb{R}$$

où :

- $$\langle [u]_t| := \langle 0|\exp\left(\int_t u(y)\overleftrightarrow{\partial_{y^0}}\phi_\triangleleft(y)\right).$$

Une fonction analytique de $[u]_t$...

- Pour tout $|f\rangle \in \mathbb{F}$, $t \in \mathbb{R}$, nous considérons :

$$\mathcal{E}_V \ni u \longmapsto \langle [u]_t | f\rangle \in \mathbb{R}$$

où :

- $$\langle [u]_t | := \langle 0 | \exp \left(\int_t u(y) \overleftrightarrow{\partial_{y^0}} \phi_{\triangleleft}(y) \right).$$
- Noter que $\langle [u]_t | f\rangle$ est un exemple de série formelle $\mathcal{F}_t[u]_t$ en la donnée de Cauchy $[u]_t$.

Une fonction analytique de $[u]_0$...

- A présent nous définisssons :

$$\langle [u]_0 | \overleftarrow{S}_0^t | f \rangle := \langle [u]_0 | T\exp\left(\int_0^t V(\phi_\triangleright(z), d\phi_\triangleright(z))\phi_\triangleleft(z) \right) | f \rangle,$$

où T indique le produit chronologique et :

Une fonction analytique de $[u]_0$...

- A présent nous définisssons :

$$\langle [u]_0 | \overleftarrow{S}\,_0^t | f \rangle := \langle [u]_0 | T\exp\left(\int_0^t V(\phi_\triangleright(z), d\phi_\triangleright(z))\phi_\triangleleft(z) \right) |f\rangle,$$

où T indique le produit chronologique et :

-

$$\langle [u]_0 | := \langle 0 | \exp\left(\int_0 u(x) \overleftrightarrow{\partial}_{x^0} \phi_\triangleleft(x) \right).$$

Une fonction analytique de $[u]_0$...

- A présent nous définisssons :

$$\langle [u]_0 | \overleftarrow{S}\,_0^t | f \rangle := \langle [u]_0 | T \exp \left(\int_0^t V(\phi_\triangleright(z), d\phi_\triangleright(z)) \phi_\triangleleft(z) \right) | f \rangle,$$

où T indique le produit chronologique et :

-

$$\langle [u]_0 | := \langle 0 | \exp \left(\int_0 u(x) \overleftrightarrow{\partial}_{x^0} \phi_\triangleleft(x) \right).$$

- Ainsi $\langle [u]_0 | f \rangle$ est une série formelle $\mathcal{F}_0[u]_0$ en $[u]_0$.

... qui coïncident si u est solution de $\Box u + m^2 u + V(u, du) = 0$

Théorème (R.D. Harrivel, F.H., arXiv:0704.2674)

- Si $u \in \mathcal{E}_V$, alors on a, au sens des séries formelles, pour tout $|f\rangle \in \mathbb{F}$:

$$\langle [u]_t | f \rangle = \langle [u]_0 | \overleftarrow{S}_0^t | f \rangle$$

... qui coïncident si u est solution de $\Box u + m^2 u + V(u, du) = 0$

Théorème (R.D. HARRIVEL, F.H., arXiv:0704.2674)

- Si $u \in \mathcal{E}_V$, alors on a, au sens des séries formelles, pour tout $|f\rangle \in \mathbb{F}$:
$$\langle [u]_t | f\rangle = \langle [u]_0 | \overleftarrow{S}\,{}_0^t | f\rangle$$
- De plus si $s > n/2$, sous certaines hypothèses sur $|f\rangle$ et si
$$u \in \mathcal{C}^0([0,T], H^{s+1}(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{C}^1([0,T], H^s(\mathbb{R}^n)) \text{ et}$$
$$T,\ ||u|| \text{ sont suffisamment petits,}$$
alors les deux séries $\langle [u]_t | f\rangle$ et $\langle [u]_0 | \overleftarrow{S}\,{}_0^t | f\rangle$ convergent et coïncident.

Hypothèse sur $|f\rangle$

Pour que ces séries convergent, il suffit de prendre, par exemple :

$$|f\rangle = |f_\varphi\rangle := \int_{y^0=t} \phi_\triangleright(x)\overleftrightarrow{\partial_{x^0}}\varphi(y)d\vec{y}\ |0\rangle,$$

où $\varphi \in \mathcal{C}^0([0,T], H^{-s}(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{C}^1([0,T], H^{-s-1}(\mathbb{R}^n))$.

Un exemple

- Si $\varphi|_t = 0$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial t}|_t = \delta_{\vec{y}}$, alors

$$\langle [u]_t | f_\varphi \rangle = u(t, \vec{y}) = u(y)$$

Un exemple

- Si $\varphi|_t = 0$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial t}|_t = \delta_{\vec{y}}$, alors

$$\langle [u]_t | f_\varphi \rangle = u(t, \vec{y}) = u(y)$$

- donc nous obtenons :

Un exemple

- Si $\varphi|_t = 0$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial t}|_t = \delta_{\vec{y}}$, alors
$$\langle [u]_t | f_\varphi \rangle = u(t, \vec{y}) = u(y)$$
- donc nous obtenons :
-
$$u(y) = \langle [u]_0 | T\exp\left(\int_0^t V(\phi_\triangleright(z), d\phi_\triangleright(z))\phi_\triangleleft(z) \right) \phi_\triangleright(x) | f_\varphi \rangle,$$

Un exemple

- Si $\varphi|_t = 0$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial t}|_t = \delta_{\vec{y}}$, alors
$$\langle [u]_t | f_\varphi \rangle = u(t, \vec{y}) = u(y)$$
- donc nous obtenons :
-
$$u(y) = \langle [u]_0 | T\exp \left(\int_0^t V(\phi_\triangleright(z), d\phi_\triangleright(z))\phi_\triangleleft(z) \right) \phi_\triangleright(x) | f_\varphi \rangle,$$
- Remarque : pour développer $\langle [u]_0 | \overleftarrow{S}\,{}_0^t | f \rangle$, il est commode d'utiliser un théorème de Wick.

Comment cela marche ?

La stratégie

- $\mathbb{F}$ est l'ensemble (en fait une famille d'ensembles) des fonctionnelles réelle analytiques sur $\mathcal{E}_0$

La stratégie

- $\mathbb{F}$ est l'ensemble (en fait une famille d'ensembles) des fonctionnelles réelle analytiques sur $\mathcal{E}_0$
- $|0\rangle \in \mathbb{F}$ est la fonctionnelle constante sur $\mathcal{E}_0$ égale à 1 partout

La stratégie

- $\mathbb{F}$ est l'ensemble (en fait une famille d'ensembles) des fonctionnelles réelle analytiques sur $\mathcal{E}_0$
- $|0\rangle \in \mathbb{F}$ est la fonctionnelle constante sur $\mathcal{E}_0$ égale à 1 partout
- $\langle 0| : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'évaluation en $0 \in \mathcal{E}_0$ (la masse de en $\mathcal{E}_0$)

La stratégie

- $\mathbb{F}$ est l'ensemble (en fait une famille d'ensembles) des fonctionnelles réelle analytiques sur $\mathcal{E}_0$
- $|0\rangle \in \mathbb{F}$ est la fonctionnelle constante sur $\mathcal{E}_0$ égale à 1 partout
- $\langle 0| : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'évaluation en $0 \in \mathcal{E}_0$ (la masse de en $\mathcal{E}_0$)
- $\phi_\triangleright(x) : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ est la multiplication par la functionelle $\varphi \longmapsto \varphi(x)$

La stratégie

- $\mathbb{F}$ est l'ensemble (en fait une famille d'ensembles) des fonctionnelles réelle analytiques sur $\mathcal{E}_0$
- $|0\rangle \in \mathbb{F}$ est la fonctionnelle constante sur $\mathcal{E}_0$ égale à 1 partout
- $\langle 0| : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'évaluation en $0 \in \mathcal{E}_0$ (la masse de en $\mathcal{E}_0$)
- $\phi_\triangleright(x) : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ est la multiplication par la functionelle $\varphi \longmapsto \varphi(x)$
- $\phi_\triangleleft(y) : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ est la dérivation par rapport à $[x \longmapsto G(y-x)] \in \mathcal{E}_0$

La stratégie

- $\mathbb{F}$ est l'ensemble (en fait une famille d'ensembles) des fonctionnelles réelle analytiques sur $\mathcal{E}_0$
- $|0\rangle \in \mathbb{F}$ est la fonctionnelle constante sur $\mathcal{E}_0$ égale à 1 partout
- $\langle 0| : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'évaluation en $0 \in \mathcal{E}_0$ (la masse de en $\mathcal{E}_0$)
- $\phi_\triangleright(x) : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ est la multiplication par la functionelle $\varphi \longmapsto \varphi(x)$
- $\phi_\triangleleft(y) : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ est la dérivation par rapport à $[x \longmapsto G(y-x)] \in \mathcal{E}_0$
- Remarque : en fait $\langle [u]_t|$ est la masse de Dirac en l'unique solution $\varphi_{[u]_t} \in \mathcal{E}_0$ de $\Box\varphi + m^2\varphi = 0$ qui la même donnée de Cauchy que u à l'instant t.

Une première difficulté

- Les opérateurs de "création" $\phi_\triangleright(x)$ et d'"annihilation" $\phi_\triangleleft(y)$ ne peuvent pas être définis simultanément;
  - la construction de $\phi_\triangleright(x)$ requiert au moins que les fonctions dans $\mathcal{E}_0$ soient continues $\mathbb{R}^n$
  - la construction de $\phi_\triangleleft(y)$ requiert que $\mathcal{E}_0$ contienne des solutions distribution

Une première difficulté

- Les opérateurs de "création" $\phi_\triangleright(x)$ et d'"annihilation" $\phi_\triangleleft(y)$ ne peuvent pas être définis simultanément;
  - la construction de $\phi_\triangleright(x)$ requiert au moins que les fonctions dans $\mathcal{E}_0$ soient continues $\mathbb{R}^n$
  - la construction de $\phi_\triangleleft(y)$ requiert que $\mathcal{E}_0$ contienne des solutions distribution
- Solution : nous choisissons $\mathcal{E}_0$ comme étant :

$$\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, H^{s+1}(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^n)), \text{ pour } s > n/2$$

Une première difficulté

- Les opérateurs de "création" $\phi_\triangleright(x)$ et d'"annihilation" $\phi_\triangleleft(y)$ ne peuvent pas être définis simultanément;
  - la construction de $\phi_\triangleright(x)$ requiert au moins que les fonctions dans $\mathcal{E}_0$ soient continues $\mathbb{R}^n$
  - la construction de $\phi_\triangleleft(y)$ requiert que $\mathcal{E}_0$ contienne des solutions distribution
- Solution : nous choisissons $\mathcal{E}_0$ comme étant :

$$\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, H^{s+1}(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^n)), \text{ pour } s > n/2$$

- alors les $\phi_\triangleright(x)$'s sont bien définis et les $\phi_\triangleleft(y)$'s ne le sont pas mais

$$\int_t u \overleftrightarrow{\partial} \phi_\triangleleft, \quad -\int_t (\Box u + m^2 u)\phi_\triangleleft, \quad \int_t V(\phi_\triangleright, d\phi_\triangleright)\phi_\triangleleft$$

sont bien définis.

Une deuxième difficulté

- Les opérateurs d'annihilation $\int_t u \overleftrightarrow{\partial} \phi_\triangleleft$, $\int_t V(\phi_\triangleright, d\phi_\triangleright)\phi_\triangleleft$, etc. ne sont pas bornés de $\mathbb{F}$ dans lui-même;

Une deuxième difficulté

- Les opérateurs d'annihilation $\int_t u \overleftrightarrow{\partial} \phi_\triangleleft$, $\int_t V(\phi_\triangleright, d\phi_\triangleright)\phi_\triangleleft$, etc. ne sont pas bornés de $\mathbb{F}$ dans lui-même;
- Solution : utiliser une *famille* d'espaces fonctionnels

$$\left(\mathbb{F}_r^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N};r\in]0,\infty[}$$

où $\mathbb{F}_r^{(k)}$ est l'espace des fonction réelles analytiques sur la boule de rayon r dans $\mathcal{E}_0$ qui sont bornées dans une topologie de type $\mathcal{C}^k$;

Une deuxième difficulté

- Les opérateurs d'annihilation $\int_t u \overleftrightarrow{\partial} \phi_\triangleleft$, $\int_t V(\phi_\triangleright, d\phi_\triangleright)\phi_\triangleleft$, etc. ne sont pas bornés de $\mathbb{F}$ dans lui-même;
- Solution : utiliser une *famille* d'espaces fonctionnels

$$\left(\mathbb{F}_r^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N};r\in]0,\infty[}$$

où $\mathbb{F}_r^{(k)}$ est l'espace des fonction réelles analytiques sur la boule de rayon r dans $\mathcal{E}_0$ qui sont bornées dans une topologie de type $\mathcal{C}^k$;

- Alors les opérateurs d'annihilation $\mathbb{D}$ sont bornés de $\mathbb{F}_r^{(1)}$ dans $\mathbb{F}_r$;

Une deuxième difficulté

- Les opérateurs d'annihilation $\int_t u \overleftrightarrow{\partial} \phi_\triangleleft$, $\int_t V(\phi_\triangleright, d\phi_\triangleright)\phi_\triangleleft$, etc. ne sont pas bornés de $\mathbb{F}$ dans lui-même;
- Solution : utiliser une *famille* d'espaces fonctionnels

$$\left(\mathbb{F}_r^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N};r\in]0,\infty[}$$

  où $\mathbb{F}_r^{(k)}$ est l'espace des fonction réelles analytiques sur la boule de rayon r dans $\mathcal{E}_0$ qui sont bornées dans une topologie de type $\mathcal{C}^k$;
- Alors les opérateurs d'annihilation $\mathbb{D}$ sont bornés de $\mathbb{F}_r^{(1)}$ dans $\mathbb{F}_r$;
- Par conséquent l'exponentielle anti-chronologique d'un opérateur d'annihilation est bornée de $\mathbb{F}_r$ vers $\mathbb{F}_{e^{-tX}(r)}$, où $X(r) := ||\mathbb{D}||_{\mathbb{F}_r^{(1)}\to\mathbb{F}_r}\frac{d}{dr}$.

Structure de la démonstration I

$\langle 0|$

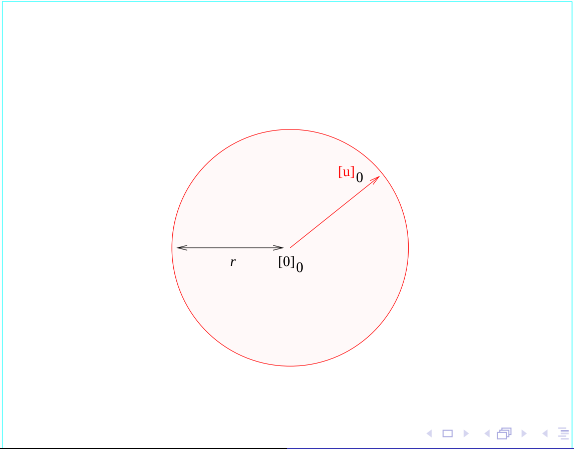
$[0]_0$

Structure de la démonstration II

$$\langle 0|\exp\left(\int_0 u(x)\overleftrightarrow{\partial_x}\phi_\triangleleft(x)\right)$$

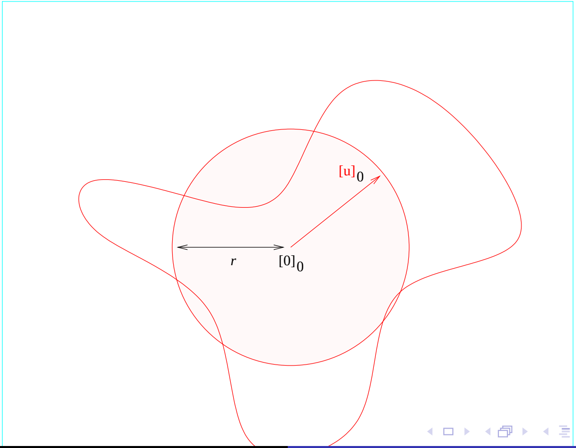
Structure de la démonstration III

$$\langle 0|\exp\left(\int_0 u(x)\overleftrightarrow{\partial_x}\phi_\triangleleft(x)\right)$$



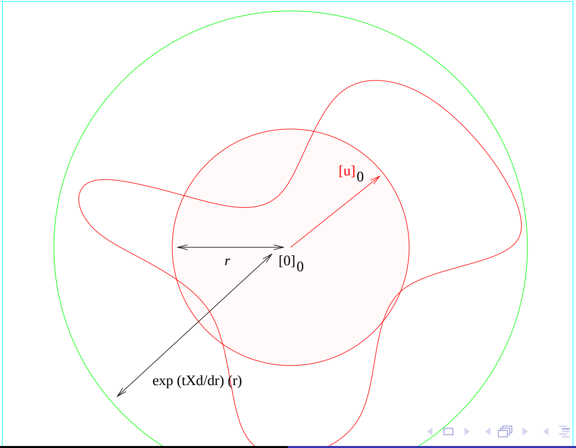
Structure de la démonstration IV

$$\langle 0| \exp\left(\int_0 u(x)\overleftrightarrow{\partial_x}\phi_\triangleleft(x)\right) T\exp\left(\int_0^t V(\phi_\triangleright(z), d\phi_\triangleright(z))\phi_\triangleleft(z)\right)$$



Structure de la démonstration V

$$\langle 0| \exp\left(\int_0 u(x)\overleftrightarrow{\partial_x}\phi_\triangleleft(x)\right) T\exp\left(\int_0^t V(\phi_\triangleright(z), d\phi_\triangleright(z))\phi_\triangleleft(z)\right)|f\rangle$$



Sur l'usage des séries

Pour les solutions d'EDO non linéaires :

- K.T. Chen (1957), Chen–Fliess (M. Fliess, 1981), W. Magnus (1954) (nombreuses applications à la théorie du contrôle)
- les séries de Butcher qui expliquent la structure des méthodes de Runge–Kutta : J.C. Butcher, E. Hairer et G. Wanner (1974). Relation avec l'algèbre de Hopf algebra de D. Kreimer (1998) de la renormalisation découverte par C. Brouder (2000)

Pour les EDP non linéaires :

- connus des physiciens depuis J. Schwinger et R. Feynman
- quelques références plus précises : M. Dütsch, K. Fredenhagen (2003)
- première preuve rigoureuse (i.e. avec un résultat de convergence de la série) par D. Harrivel.

Perspectives

- Pour certaines non linéarités particulières (par exemple u^3 en dimension $3+1$) prouver la convergence de la série pour tout temps;

Perspectives

- Pour certaines non linéarités particulières (par exemple u^3 en dimension $3+1$) prouver la convergence de la série pour tout temps;
- Etendre aux théorie de jauge;

Perspectives

- Pour certaines non linéarités particulières (par exemple u^3 en dimension $3+1$) prouver la convergence de la série pour tout temps;
- Etendre aux théorie de jauge;
- Trouver les formes normales de Birkhoff (relations avec un travail récent de R. Carles et I. Gallagher généralisant un travail antérieur de J. Baez et ZhengFang Zhou);

Perspectives

- Pour certaines non linéarités particulières (par exemple u^3 en dimension $3+1$) prouver la convergence de la série pour tout temps;
- Etendre aux théorie de jauge;
- Trouver les formes normales de Birkhoff (relations avec un travail récent de R. Carles et I. Gallagher généralisant un travail antérieur de J. Baez et ZhengFang Zhou);
- Quantifier...