Équations aux dérivées partielles et applications

M. Pierre-Louis LIONS, membre de l'Institut
(Académie des sciences), professeur

COURS : ÉQUATIONS ELLIPTIQUES OU PARABOLIQUES, ET HOMOGÉNÉISATION PRÉCISÉE

1. Introduction

Cette année le cours a porté sur la caractérisation de profils asymptotiques des solutions d'équations aux dérivées partielles correspondant à des modèles variés. Ces profils asymptotiques ou correcteurs sont associés à des singularités, défauts ou interfaces... Nous supposerons toujours une dimension caractéristique notée ε (> 0) pour ces défauts. Il est utile d'observer que, souvent pour des applications réalistes, ce paramètre ε n'est pas « très petit » mais peut être de l'ordre de 0,1.

De plus, nous considèrerons systématiquement des situations où ces défauts de taille ε sont présents dans des environnements périodiques dont la période est également d'ordre ε. Noter qu'il s'agit en fait du seul cas intéressant car si la période est beaucoup plus grande, on peut considérer l'environnement comme indépendant de ε, tandis que si la période est beaucoup plus petite il convient de résoudre ces oscillations avant toute chose par exemple en appliquant ou en tentant d'appliquer la théorie de l'homogénéisation.

Lorsque la période est effectivement d'ordre ε, la théorie de l'homogénéisation permet de prendre en compte les oscillations de l'environnement sans défaut notamment par l'introduction de correcteurs périodiques. Le problème considéré est donc double : i) confirmer (ou infirmer) le fait que la présence du défaut ne modifie pas le problème limite (typiquement le problème homogénéisé) ; ii) déterminer, lorsque cela est possible, le comportement des solutions, en présence de défauts, par des *correcteurs précisés*.

Pour conclure cette introduction, mentionnons que, d'une certaine manière, notre approche permet de donner un sens précis à ce que les méthodes multi-échelles en calcul scientifique font (ou devraient faire...). D'autre part, le programme esquissé ci-dessus a été réalisé pour les modèles stationnaires classiques (équations et systèmes elliptiques, équations quasilinéaires, équations de Hamilton-Jacobi et optique géométrique, équations complètement nonlinéaires...) avec des adaptations aisées à des modèles dépendant du temps (équations de type chaleur, équation de Schrödinger ou équations des ondes – dans des « régimes basse fréquence »). Le principal problème ouvert concerne la propagation d'ondes avec une longueur d'onde d'ordre ε également : on s'attend d'ailleurs dans ce cas à des phénomènes complexes qui n'ont pas été abordés rigoureusement pour l'instant.

2. Équations elliptiques

Cette section correspond à des travaux réalisés en collaboration avec X. Blanc et C. Le Bris.

On considère à titre d'exemple l'équation

$$-\partial_i \left(a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_j \, u_\varepsilon \right) = f(x) \text{ dans } \mathbb{R}^d \tag{1}$$

où $d \geqslant 3$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ (et on utilise la convention de sommation implicite sur les indices répétés), $\varepsilon > 0$, f est une fonction scalaire donnée sur $\mathbb{R}^d$ et les coefficients a_{ij} vérifient les conditions suivantes :

$$\exists\, \nu \in]0,1],\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^d,\ \nu\,|\,\xi\,|^2 \leqslant a_{ij}\, \xi_i\, \xi_j \leqslant \frac{1}{\nu}\,|\,\xi\,|^2,\ \forall x \in \mathbb{R}^d \tag{2}$$

$$a_{ij} = a_{ij}^{\text{per}} + b_{ij},\ a_{ij}^{\text{per}} \text{ est périodique de période } T_k \text{ en } x_k \tag{3}$$

$$a_{ij}, b_{ij} \in C_b^\infty;\ b_{ij} \to 0 \text{ si } |\,x\,| \to \infty. \tag{4}$$

Noter que ces conditions impliquent que $\left(a_{ij}^{\text{per}}\right)$ vérifie également (2). L'ansatz classique, formel mais qui peut être justifié rigoureusement grâce aux résultats qui suivent,

$$u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \ldots \tag{5}$$

conduit facilement à la détermination suivante de u_0 (la limite) et de u_1 (le correcteur). La limite u_0 n'est autre que la solution du problème homogénéisé périodique (correspondant à $b = 0$) et le correcteur $u_1(x_0, .)$ (pour x_0 fixé) résout l'équation suivante :

$$-\partial_i \left(a_{ij}(x)(\partial_j .\, u_1 + p_j) \right) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^d \tag{6}$$

où $p = \nabla u_0(x_0)$ peut être considéré comme un vecteur quelconque dans $\mathbb{R}^d$. De façon à bien découpler u_0 et u_1, u_1 doit vérifier

$$\lim_{|x| \to \infty} u_1(x)(1 + |\,x\,|)^{-1} = 0 \tag{7}$$

Dans le cas où $b \equiv 0$, le problème (6) (7) est classiquement résolu grâce à la périodicité des coefficients et on obtient l'existence de u_1^{per}, périodique de même période que a_{ij}^{per}, vérifiant donc

$$-\partial_i \left(a_{ij}^{\text{per}} \left(\partial_j\, u_1^{\text{per}} + p_j\right)\right) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^d. \tag{8}$$

De plus, $u_1^{\mathrm{per}} \in C_b^\infty$ et u_1^{per} est unique à une constante additive près (*i.e.* $\nabla u_1^{\mathrm{per}}$ est unique).

Il est alors naturel de chercher v_1 sous la forme $u_1 = u_1^{\mathrm{per}} + u$ ce qui conduit à l'équation suivante :

$$-\partial_i\,(a_{ij}\partial_j u) = \partial_i(b_{ij}p_j) \text{ dans } \mathbb{R}^d$$

Nous considérerons en fait un problème plus général, à savoir :

$$-\partial_i\,(a_{ij}\partial_j u) = \partial_i f_i \text{ dans } \mathbb{R}^d \tag{9}$$

où les fonctions f_i sont données et tendent vers 0 à l'infini (au moins dans un sens faible). D'après ce qui précède, on s'intéresse tout particulièrement au cas où f_i et b_{ij} ont le même type de comportement à l'infini. Ce comportement sera mesuré dans les espaces $L^p (p \geqslant 2)$, la « décroissance » à l'infini devenant de plus en plus faible quand p augmente.

Le cas le plus simple correspond à $p = 2$: en effet, si $p = 2$, le lemme de Lax-Milgram donne facilement le résultat suivant : si $f_i \in L^2 (\forall i)$, $\exists ! u$ solution de (9) vérifient $u \in L^{2d/(d-2)}\mathbb{R}^d$, $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. De plus, u est régulière si f_i l'est.

En observant que u « devrait se comporter à l'infini comme une primitive (opérateur régularisant d'ordre 1) de » f_i, on déduit qu'au moins formellement une décroissance en $\frac{1}{|x|}$ à l'infini devrait être le comportement limite pour f_i à l'infini permettant d'obtenir une solution bornée ou tendant vers 0 à l'infini. En effet, tel est le cas d'après le

Théorème 1 : Si $f_i \in L^{d,1}$ (en particulier si $f \in L^p \cap L^q$ avec $1 \leqslant p < d < q$), alors il existe une unique solution $u \in C_0(\mathbb{R}^d)$, de plus régulière si f_i l'est. □

Reste donc le cas où $p \geqslant d$, auquel cas une solution éventuelle ne peut rester bornée.

Théorème 2 : Si $f_i, b_{ij} \in L^p$ $(2 \leqslant p < \infty)$ alors il existe une solution $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ de (9) telle que $\nabla u \in L^p$.

Cette solution est unique à une constante additive près, et régulière si f_i l'est. Si $p < d$, cette solution, à une constante additive près, appartient à $L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$ avec $p^* = \frac{p\,d}{p-d}$. Enfin, si $p > d$, $u \in C(\mathbb{R}^d)$ et vérifie sur $\mathbb{R}^d$

$$|u(x)| \leqslant C(1 + |x|^\alpha), \alpha = 1 - d/p. \square$$

3. Autres équations

Il est possible de considérer et de traiter de nombreux autres exemples d'équations. Nous mentionnons ici le cas d'équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre, d'équations quasilinéaires ou complètement nonlinéaires. Ces exemples ont été analysés dans des travaux en collaboration avec P.E. Sougandis.

Pour expliquer les nouveaux phénomènes apparaissant dans ces équations, commençons par le cas d'équations de Hamilton-Jacobi de type suivant (même si des hamiltoniens généraux peuvent être traités) :

$$|p + \nabla u|^m = f_0(x) + f(x) + \bar{H}(p) \text{ dans } \mathbb{R}^d, \frac{u(x)}{1+|x|} \to 0 \text{ si } |x| \to \infty \tag{10}$$

où $p \in \mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$, $m \geqslant 1$, f_0 est continue périodique normalisée de sorte que $\min_{\mathbb{R}^d} f_0 = 0$ et f (la perturbation « localisée ») est une fonction continue qui tend vers 0 à l'infini. Enfin, $\bar{H}(p)$ est l'hamiltonien homogénéisé. D'après les travaux antérieurs en collaboration avec G. Papanicolaou et S.R.S. Varadhan, on sait que $\bar{H}$ est une fonction convexe, positive ou nulle de p, que $\bar{H}(0)=0$ et $\frac{\bar{H}(p)}{|p|^m} \to 1$ si $|p| \to \infty$. Enfin, $\{p \,/\, \bar{H}=0\} = C$ est un ensemble convexe compact qui, suivant les propriétés de f_0, peut ne pas être réduit à $\{0\}$. $\bar{H}(p)$ est caractérisé comme étant l'unique réel λ tel qu'il existe u_{per} solution périodique du problème

$$|p + \nabla u_{\text{per}}|^m = f + \lambda \text{ dans } \mathbb{R}^d. \tag{11}$$

Bien sûr, aussi bien pour (10) que pour (11), les solutions sont solutions de viscosité des équations.

Le signe de f intervient tant pour la résolution de (10) que pour la limite du problème avec une petite échelle ε à savoir l'analyse de (1). C'est pourquoi on s'intéresse au cas où $f \geqslant 0$.

On a alors le résultat suivant :

Théorème 3 : i) Si $p \in C$, alors il existe une solution bornée de (10) si f est à support compact. ii) Si $p \notin C$, alors il existe une solution bornée de (10) si $f(x) \leqslant C(1 + |x|)^{-k}$ où $k > 1$.

De plus, si $f > 0$ et si $p \in C$, il n'existe en général pas de solution.

Dans le cas d'équations quasilinéaire du type (par exemple)

$$-\Delta u + |\, p + \nabla u\,|^m = f_0 + f + \bar{H}, \frac{u(x)}{1+|\,x\,|} \to 0 \text{ si } |\,x\,| \to \infty \tag{12}$$

où $\bar{H}$ est l'hamiltonien homogénéisé caractérisé comme étant l'unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une unique (à une constante additive près) solution périodique de

$$-\Delta u_{\text{per}} + |p + \nabla u_{\text{per}}|^m = f_0 + \overline{H} \text{ dans } \mathbb{R}^d. \tag{13}$$

Là encore, il est naturel de supposer que $f \geqslant 0$ (on peut en fait considérer la situation générale mais l'existence dépend alors de manière fine de la « taille » de la partie négative de f) et on a le résultat suivant si $d \geqslant 3$ (les cas $d = 1$ ou $d = 2$ pouvant être abordés par d'autres techniques).

Théorème 4 : Si $f_0 \in L^{\frac{2d}{d+2}}$, alors il existe une unique solution de (12) telle que $u - u_{\text{per}} \in L^{\frac{2d}{d+2}}$ et $\nabla u - \nabla u_{\text{per}} \in L^2$.

Enfin, nous conclurons avec les équations complètement nonlinéaires à savoir :

$$F(x, A + D^2 u) = f(x) + \bar{F}(A) \text{ dans } \mathbb{R}^d \tag{14}$$

avec la condition naturelle à l'infini

$$u(x)(1 + |x|^2)^{-1} \to 0 \text{ si } |x| \to \infty, \tag{15}$$

où $F(x, B)$ est (par exemple) Lipschitz sur $\mathbb{R}^d \times M^d$ (M^d désignant l'espace des matrices symétriques $d \times d$), F est périodique en x, f est continue tendant rapidement vers 0 à l'infini (par exemple à support compact) et F vérifie la condition d'ellepticité suivante

$$-\mu Tr(B) \leqslant F(x, A + B) - F(x, A) \leqslant -Tr(B), \tag{16}$$

pour tous $x \in \mathbb{R}^d$, $A \in M^d$, $B \in M^d \geqslant 0$ et $\mu \geqslant 1$.

Une fois de plus, $\overline{F}$ est caractérisé comme étant l'unique réel λ tel qu'il existe une unique (à une constante additive près) solution périodique de

$$F(x, A + D^2u_{\text{per}}) = \lambda \text{ dans } \mathbb{R}^d. \tag{17}$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 5 : i) Si $\mu < d - 1$, on note $\alpha = \mu - d + 1$, alors il existe une unique solution $u \in C_0$ de (16) et on a

$$|u(x)| \leqslant C(1 + |x|)^\alpha \text{ sur } \mathbb{R}^d \tag{18}$$

ii) Si $\mu > d - 1$ alors il existe une unique (à une constante additive près) solution u de (16) vérifiant (18).

Bien sûr le résultat ii) est encore vrai si $\mu = d - 1$, auquel cas le membre de droite dans (18) est remplacé par $(1 + \log(1 + |x|))$.

Cours

Le cours a eu lieu du 8 novembre 2013 au 7 février 2014 [1].

Séminaire

Séminaire de mathématiques appliquées [2]

8 novembre 2013 : Pierre-Louis Lions (Collège de France), « Homogénéisation quasi périodique ».

15 novembre : Sergey Gavrilyuk (université Aix Marseille), « Un nouveau modèle hyperbolique des écoulements cisaillés d'eau peu profonde : applications aux trains de rouleaux et au ressaut hydraulique ».

22 novembre : Alain Damlamian (université Paris-Est – Créteil Val-de-Marne), « Quelques inégalités de Korn unilatérales avec application à un problème d'omogénéisation périodique avec inclusions ».

29 novembre : Erwan Faou (ENS-INRIA), « Quelques résultats mathématiques en lien avec la théorie de la turbulence d'ondes ».

13 décembre : Michal Kowalczyk (DIM, université du Chili), « Multiple end solutions to the Allen-Cahn equation on the plane ».

---

1. Les enregistrements vidéo des cours sont disponibles sur le site Internet du Collège de France : http://www.college-de-france.fr/site/pierre-louis-lions/course-2013-2014.html [NdÉ].

2. Les enregistrements vidéo des séminaires sont disponibles sur le site Internet du Collège de France : http://www.college-de-france.fr/site/pierre-louis-lions/seminar-2013-2014.html [NdÉ].

10 janvier : Laura Grigori (INRIA-Rocquencourt), « Nouveaux algorithmes parallèles d'algèbre linéaire à grande échelle et leur stabilité numérique ».

17 janvier : Isabelle Gallagher (université Paris Diderot), « Limite de diffusion pour un système de sphères dures ».

31 janvier : Thomas Alazard (ENS-Ulm), « Existence globale pour l'équation d'Euler incompressible à surface libre ».

7 février : Jonathan Weare (université de Chicago), « An improved diffusion Monte Carlo and other ensemble sampling schemes ».

7 mars : Emmanuel Trélat (université Paris VI), « Optimisation de domaine pour l'observabilité d'EDP, et ergodicité quantique ».

14 mars : Pierre Rouchon (Centre Automatique et Systèmes – Mines ParisTech), « Stabilisation par feedback de systèmes quantiques ouverts ».

21 mars : François Bouchut (LAMA – CNRS & université Paris-Est), « Convergence d'approximations conformes pour les écoulements de type Bingham sans viscosité, et application aux granulaires ».

28 mars : Karine Beauchard (CMLS – École polytechnique), « Contrôlabilité d'opérateurs paraboliques dégénérés de type Kolmogorov : temps minimal et condition de contrôle géométrique ».

4 avril : Delphine Salort (Institut Jacques Monod – université Paris Diderot), « Autour de certaines équations de Schrödinger quasi linéaires ».

23 mai : Julien Sabin (Laboratoire AGM – université de Cergy-Pontoise), « Dispersion dans les systèmes quantiques infinis ».

6 juin : L. Ridgway Scott (université de Chicago), « Electron correlation in van der Waals interactions ».

13 juin : Josselin Garnier (université Paris-Diderot), « Analyse multi-échelles de la propagation des ondes en milieux aléatoires et application l'imagerie interférométrique ».

PUBLICATIONS

LIONS P.-L., en collaboration avec SOUGANIDIS P.E., *Viscosity solutions and stochastic partial differential equations* (livre en préparation).

LIONS P.-L., en collaboration avec PERTHAME B. et SOUGANIDIS P.E., « Scalar conservation laws with rough (stochastic) fluxes », *Stochastic partial differential equations: analysis and computations*, 1(4), novembre 2013, 664-686, DOI : 10.1007/s40072-013-0021-3.

LIONS P.-L., « Sur l'unicité des solutions des MFG ».

LIONS P.-L., en collaboration avec PERTHAME B. et SOUGANIDIS P.E., « Stochastic averaging lemmas for kinetic equations », *ArXiv:1204.0317 [math]*, avril 2012, http://arxiv.org/abs/1204.0317.

LIONS P.-L., en collaboration avec BLANC X. et LE BRIS C., « Homogenization approach for the numerical simulation of periodic microstructures with defects : proof of concept ».

LIONS P.-L., « Équations et systèmes paraboliques : quelques questions nouvelles », *Annuaire du Collège de France 2012-2013*, 113, 2014, 99-107 [en ligne : http://annuaire-cdf.revues.org/2285].

CARDALIAGUET P., LASRY J.-M., LIONS P.-L. et PORRETTA A., « Long time average of mean field games with a nonlocal coupling », *SIAM Journal on Control and Optimization*, 51(5), 2013, 3558-3591, DOI : 10.1137/120904184.

LIONS P.-L., en collaboration avec CARRARELLI L. et CARLIER G.,« $C^{1,\alpha}$ regularity for variational problems with a convexity constraint and related issues ».

LIONS P.-L., en collaboration avec LACHAPELLE A., LASRY J.-M. et LEHALLE C.-A., « Efficiency of the Price Formation Process in Presence of High Frequency Participants: a Mean Field Game analysis », *ArXiv:1305.6323 [math, q-fin]*, 27 mai 2013, http://arxiv.org/abs/1305.6323.

LIONS P.-L., en collaboration avec ACHDOU Y., LASRY J.-M. et MOLL B., « Heterogeneous Agent Models in Continuous Time », 2013, http://www.princeton.edu/~moll/HACT.pdf.

LIONS P.-L., en collaboration avec FRITZ P.K., GASSIAT P et SOUGANIDIS P.E., « Eikonal equations and pathwise solutions to fully non-linear SPDEs ».

ACHDOU Y., BUERA F.J., LASRY J.-M., LIONS P.-L. et MOLL B., « Partial differential equation models in macroeconomics », *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 372(2028), 2014, 20130397-20130397, DOI : 10.1098/rsta.2013.0397.

AUTRES ACTIVITÉS

Missions, invitations, conférences

Conférence au colloque sur les *Mean Field Games*, université de Padoue, Italie, 4 août 2013.

Série de trois exposés à l'université de Chicago, États-Unis, 30 septembre-9 octobre 2013.

Conférence publique, Nancy, 17 octobre 2013.

Conseil scientifique de BCAM, Bilbao, Espagne, 28 octobre 2013.

Série de trois exposés à l'université de Chicago, États-Unis, 20 janvier-29 janvier 2014.

Conférence publique à l'Institut français, Vienne, Autriche, 25 mars 2014.

Conférence « Pauli » et séminaire à l'université de Vienne, 26 mars 2014.

Conférence au congrès « Modern Applied Mathematics » (en l'honneur de E. Tadmor), Bethesda, États-Unis, 30 avril 2014.

Conférence à l'université de Lisbonne, Portugal, 18 juin 2014.

Table-ronde sur les mathématiques et la pluridisciplinarité , université de Lisbonne, Portugal, 18 juin 2014.

Conférence à l'université de Lisbonne, 19 juin 2014.

Conférence au colloque organisé en l'honneur d'Ivar Ekeland, université Paris-Dauphine, 20 juin 2014.

Conférence au congrès sur « Le contrôle et les jeux à champ moyen », Tours, 25 juin 2014.

Doctorat *Honoris causa* et conférence publique à l'université de Narvik, Norvège, 15 juillet 2014.

Responsabilités collectives et fonctions diverses

Membre de l'Académie des sciences ; de l'Académie des technologies ; de l'Académie des sciences d'Italie, d'Argentine, du Brésil et du Chili ; de l'Istituto Lombardo et de l'Académie de Naples, de la TWAS, de l'Academia Europea.

Professeur à temps partiel à l'École polytechnique.

Président du conseil d'administration de l'ENS.

Président du conseil scientifique de l'institut Louis Bachelier.

Président du conseil scientifique de la chaire de Finance et développement durable, université Paris-Dauphine.

Président du conseil scientifique de la chaire Économie et gestion des données numériques, université Paris Dauphine.

Président du conseil scientifique de ParisTech.

Président du conseil scientifique du projet EMMA.

Président du jury du prix « Science et défense ».

Membre du Haut Conseil de la science et de la technologie.

Membre du Scientific Advisory Panel de l'European Mathematical Society.

Membre fondateur du comité international de l'« International Summer School of Applied Mathematics », Morningside Institute, Chinese Academy of Sciences.

Membre de l'*international advisory board* de l'Institute of Mathematical Sciences de l'Imperial College.

Membre du conseil scientifique de la fondation du risque.

Membre du conseil d'administration de la fondation d'entreprise Natixis.

Membre de la Société des amis du Palais de la découverte.

Membre de l'*international advisory board* de la Scuola di Dottorato in Scienze Astronomiche, Chimiche, Fisiche e Mathematiche « Vito Volterra ».

Membre du conseil scientifique du BCAM (Basque Centre for Applied Mathematics).

Conseiller scientifique auprès de BNP PARIBAS, EADS-ST et IEF.

Fondateur de MFG R&D.

Rédacteur en chef du *Journal de mathématiques pures et appliquées*.

Éditeur de plus de 45 revues internationales.