

Quelques problèmes mathématiques posés par les métamatériaux électromagnétiques à permittivité diélectrique et perméabilité magnétique négatives

A. S. Bonnet-Ben Dhia*, L. Chesnel et P. Ciarlet Jr.

POEMS, UMR 7231 CNRS-INRIA-ENSTA, Paris, France

* CERFACS, Toulouse, France

Thèse de Carlo-Maria Zwölf (soutenue en décembre 2007)

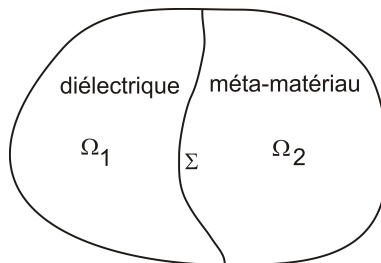
Thèse de Lucas Chesnel (depuis octobre 2009)

Collège de France, Mai 2010

Motivation

On considère un problème d'électromagnétisme en régime périodique établi dans un milieu hétérogène du type suivant :

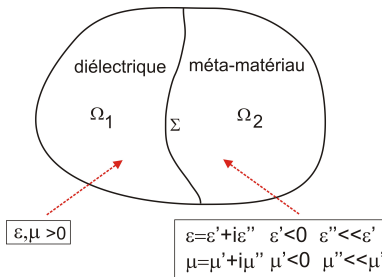
Le domaine Ω :



Motivation

On considère un problème d'électromagnétisme en régime périodique établi dans un milieu hétérogène du type suivant :

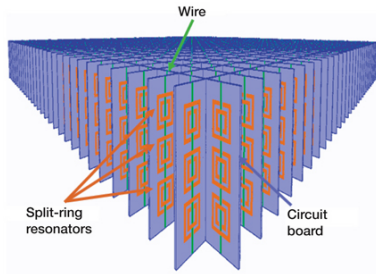
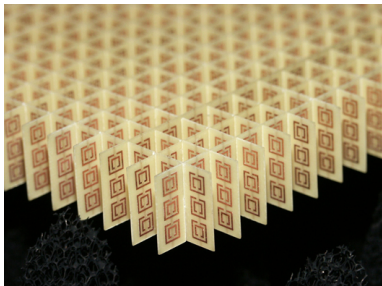
Le domaine Ω :



Le **métamatériau** est modélisé (à la fréquence d'intérêt) comme un matériau dont la **permittivité diélectrique** ε et la **perméabilité magnétique** μ ont une **partie réelle négative** et une petite partie imaginaire.

Motivation

C'est en réalité un matériau **périodique** constitué d'un assemblage de très petits résonateurs :

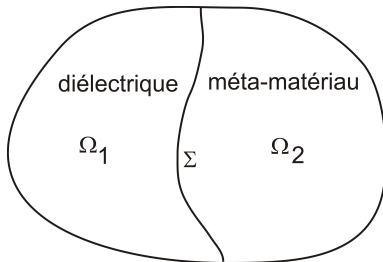


Exemple de métamatériau (NASA)

Pour une justification mathématique du modèle homogénéisé, voir [G. Bouchitté, C. Bourel et D. Felbacq, CRAS, 2009.](#)

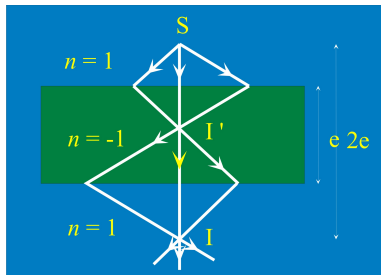
Motivation

Ce type de configuration, incluant une **interface entre un diélectrique et un métamatériau**, se rencontre fréquemment lorsque l'on cherche à utiliser des métamatériaux.



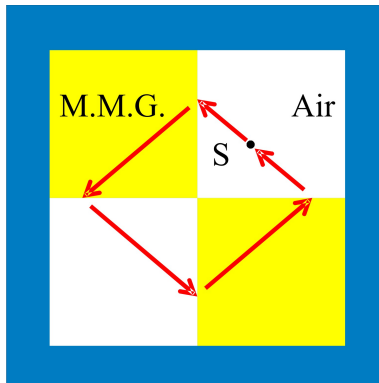
Motivation

- 1 Pour réaliser des lentilles parfaites (J. B. Pendry, Phys. Rev. Letters (2000), D. Maystre et S. Enoch JOSA (2004))



Motivation

- 1 Pour réaliser des lentilles parfaites (J. B. Pendry, Phys. Rev. Letters (2000), D. Maystre et S. Enoch JOSA (2004))
- 2 Pour réaliser des pièges à photons (J. B. Pendry)



- ① Pour réaliser des lentilles parfaites (J. B. Pendry, Phys. Rev. Letters (2000), D. Maystre et S. Enoch JOSA (2004))
- ② Pour réaliser des pièges à photons (J. B. Pendry)
- ③ Pour réaliser des cavités résonantes sous-longueur d'onde.

- ① Pour réaliser des lentilles parfaites (J. B. Pendry, Phys. Rev. Letters (2000), D. Maystre et S. Enoch JOSA (2004))
- ② Pour réaliser des pièges à photons (J. B. Pendry)
- ③ Pour réaliser des cavités résonantes sous-longueur d'onde.
- ④ Etc...

Motivation

En présence d'une **interface entre un diélectrique et un métamatériau**, la difficulté vient du **changement de signe** des parties réelles de ε et μ à travers l'interface Σ .

Motivation

En présence d'une **interface entre un diélectrique et un métamatériau**, la difficulté vient du **changement de signe** des parties réelles de ε et μ à travers l'interface Σ .

La présence de **dissipation** ($\Im m(\varepsilon) > 0$ ou $\Im m(\mu) > 0$), même faible, assure le caractère bien posé du problème mathématique et la convergence des méthodes usuelles de discrétisation.

Motivation

En présence d'une **interface entre un diélectrique et un métamatériau**, la difficulté vient du **changement de signe** des parties réelles de ε et μ à travers l'interface Σ .

La présence de **dissipation** ($\Im m(\varepsilon) > 0$ ou $\Im m(\mu) > 0$), même faible, assure le caractère bien posé du problème mathématique et la convergence des méthodes usuelles de discrétisation.

Mais l'objectif est de réaliser des **métamatériaux aussi peu dissipatifs que possible**. La question pertinente est donc : que se passe-t-il si l'on néglige la dissipation ?

Motivation

En présence d'une **interface entre un diélectrique et un métamatériau**, la difficulté vient du **changement de signe** des parties réelles de ε et μ à travers l'interface Σ .

La présence de **dissipation** ($\Im m(\varepsilon) > 0$ ou $\Im m(\mu) > 0$), même faible, assure le caractère bien posé du problème mathématique et la convergence des méthodes usuelles de discrétisation.

Mais l'objectif est de réaliser des **métamatériaux aussi peu dissipatifs que possible**. La question pertinente est donc : que se passe-t-il si l'on néglige la dissipation ?

Le problème reste-t-il bien posé ? Dans quel cadre fonctionnel ? Les méthodes numériques usuelles convergent-elles ? ...

Résultats classiques pour des matériaux “positifs”

Supposons que l'on veuille résoudre par éléments finis le problème suivant, en champ électrique :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E \right) - \omega^2 \varepsilon E = F & \text{dans } \Omega \\ E \times n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec un terme source F , tel que $\operatorname{div} F = 0$.

Une approche possible est de considérer la formulation variationnelle :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E \cdot \operatorname{rot} \bar{E}' + \operatorname{div}(\varepsilon E) \operatorname{div}(\varepsilon \bar{E}') \\ - \omega^2 \int_{\Omega} \varepsilon E \cdot \bar{E}' = \int_{\Omega} F \cdot \bar{E}' \end{aligned}$$

dans l'espace $V_{\varepsilon} = H_0(\operatorname{rot})(\Omega) \cap H(\operatorname{div}, \varepsilon)(\Omega)$.

Résultats classiques pour des matériaux “positifs”

Le caractère bien-posé du problème et la convergence des méthodes numériques reposent sur les 2 résultats suivants :

Résultats classiques pour des matériaux “positifs”

Le caractère bien-posé du problème et la convergence des méthodes numériques reposent sur les 2 résultats suivants :

① La **coercivité** de

$$a(E, E') = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E \cdot \operatorname{rot} \bar{E}' + \operatorname{div}(\varepsilon E) \operatorname{div}(\varepsilon \bar{E}')$$

Résultats classiques pour des matériaux “positifs”

Le caractère bien-posé du problème et la convergence des méthodes numériques reposent sur les 2 résultats suivants :

① La **coercivité** de

$$a(E, E') = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E \cdot \operatorname{rot} \bar{E}' + \operatorname{div}(\varepsilon E) \operatorname{div}(\varepsilon \bar{E}')$$

Pour $E' = E$:

$$a(E, E) = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} |\operatorname{rot} E|^2 + |\operatorname{div}(\varepsilon E)|^2 \geq \|E\|_{V_{\varepsilon}}^2 \text{ pour } \mu > 0.$$

Résultats classiques pour des matériaux “positifs”

Le caractère bien-posé du problème et la convergence des méthodes numériques reposent sur les 2 résultats suivants :

① La **coercivité** de

$$a(E, E') = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E \cdot \operatorname{rot} \bar{E}' + \operatorname{div}(\varepsilon E) \operatorname{div}(\varepsilon \bar{E}')$$

② La **compacité** du terme

$$b(E, E') = -\omega^2 \int_{\Omega} \varepsilon E \cdot \bar{E}'$$

Résultats classiques pour des matériaux “positifs”

Le caractère bien-posé du problème et la convergence des méthodes numériques reposent sur les 2 résultats suivants :

- 1 La **coercivité** de

$$a(E, E') = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E \cdot \operatorname{rot} \bar{E}' + \operatorname{div}(\varepsilon E) \operatorname{div}(\varepsilon \bar{E}')$$

- 2 La **compacité** du terme

$$b(E, E') = -\omega^2 \int_{\Omega} \varepsilon E \cdot \bar{E}'$$

Elle résulte de la **compacité de l'injection** de

$$V_{\varepsilon} = H_0(\operatorname{rot})(\Omega) \cap H(\operatorname{div}, \varepsilon)(\Omega) \text{ dans } L^2(\Omega)^3,$$

prouvée pour $\varepsilon > 0$.

Résultats classiques pour des matériaux "positifs"

Le caractère bien-posé du problème et la convergence des méthodes numériques reposent sur les 2 résultats suivants :

- 1 La **coercivité** de

$$a(E, E') = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E \cdot \operatorname{rot} \bar{E}' + \operatorname{div}(\varepsilon E) \operatorname{div}(\varepsilon \bar{E}')$$

- 2 La **compacité** du terme

$$b(E, E') = -\omega^2 \int_{\Omega} \varepsilon E \cdot \bar{E}'$$

Ces deux résultats utilisent de façon essentielle la **positivité** de ε et μ !

Résultats classiques pour des matériaux “positifs”

Le caractère bien-posé du problème et la convergence des méthodes numériques reposent sur les 2 résultats suivants :

- 1 La **coercivité** de

$$a(E, E') = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E \cdot \operatorname{rot} \bar{E}' + \operatorname{div}(\varepsilon E) \operatorname{div}(\varepsilon \bar{E}')$$

- 2 La **compacité** du terme

$$b(E, E') = -\omega^2 \int_{\Omega} \varepsilon E \cdot \bar{E}'$$

Question :

Que se passe-t-il si ε et μ **changent de signe** ?

- 1 Introduction
- 2 Comment traiter le défaut de coercivité (dans le cas scalaire)
- 3 Coercivité et injection compacte dans le cas vectoriel
- 4 Que se passe-t-il dans l'intervalle critique ?

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Comment traiter le défaut de coercivité (dans le cas scalaire)
- 3 Coercivité et injection compacte dans le cas vectoriel
- 4 Que se passe-t-il dans l'intervalle critique ?

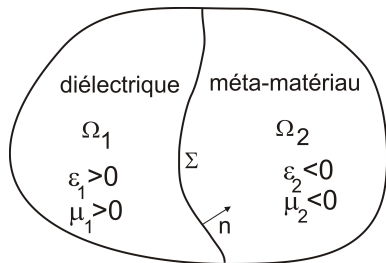
Un problème scalaire modèle en 2D

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \nabla u \right) + \omega^2 \varepsilon u = -f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Le domaine Ω :

$$\mu_i, 1/\mu_i \text{ et } \varepsilon_i \in L^\infty(\Omega_i)$$

$$f \in L^2(\Omega)$$



Le contraste $\kappa_\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ prend des valeurs négatives sur Σ !

Un problème scalaire modèle en 2D

Pour des coefficients μ_i réguliers, le problème

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \nabla u \right) + \omega^2 \varepsilon u = -f \text{ dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

peut se récrire sous la forme d'un **problème de transmission** ($u_i = u|_{\Omega_i}$) :

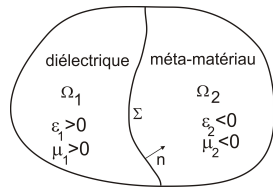
$$-\operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu_1} \nabla u_1 \right) - \omega^2 \varepsilon_1 u_1 = f_1 \quad \text{dans } \Omega_1$$

$$-\operatorname{div} \left(\frac{1}{|\mu_2|} \nabla u_2 \right) - \omega^2 |\varepsilon_2| u_2 = -f_2 \quad \text{dans } \Omega_2$$

$$u_1 = u_2 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$\partial_n u_1 = \kappa_\mu \partial_n u_2 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$



Un problème scalaire modèle en 2D

Pour des coefficients μ_i réguliers, le problème

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \nabla u \right) + \omega^2 \varepsilon u = -f \text{ dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

peut se récrire sous la forme d'un **problème de transmission** ($u_i = u|_{\Omega_i}$) :

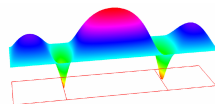
$$-\operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu_1} \nabla u_1 \right) - \omega^2 \varepsilon_1 u_1 = f_1 \quad \text{dans } \Omega_1$$

$$-\operatorname{div} \left(\frac{1}{|\mu_2|} \nabla u_2 \right) - \omega^2 |\varepsilon_2| u_2 = -f_2 \quad \text{dans } \Omega_2$$

$$u_1 = u_2 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$\partial_n u_1 = \kappa_\mu \partial_n u_2 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$



$$\kappa_\mu < 0!$$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \nabla u \right) + \omega^2 \varepsilon u = -f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \nabla u \right) + \omega^2 \varepsilon u = -f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

❶ Le problème est-il **bien posé** dans $H^1(\Omega)$?

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla u \cdot \nabla v - \omega^2 \int_{\Omega} \varepsilon u v = \int_{\Omega} f v$$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \nabla u \right) + \omega^2 \varepsilon u = -f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- ① Le problème est-il **bien posé** dans $H^1(\Omega)$? S'il l'est :
- Peut-on utiliser **les méthodes numériques usuelles** (et les codes usuels) pour le résoudre?
 - Si oui, peut-on **prouver leur convergence**?
 - Si non, existe-t-il **des approches alternatives**?

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \nabla u \right) + \omega^2 \varepsilon u = -f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- 1 Le problème est-il **bien posé** dans $H^1(\Omega)$? S'il l'est :
 - Peut-on utiliser **les méthodes numériques usuelles** (et les codes usuels) pour le résoudre?
 - Si oui, peut-on **prouver leur convergence**?
 - Si non, existe-t-il **des approches alternatives**?
- 2 Si le problème est **mal posé** dans $H^1(\Omega)$...

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \nabla u \right) + \omega^2 \varepsilon u = -f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- 1 Le problème est-il **bien posé** dans $H^1(\Omega)$? S'il l'est :
 - Peut-on utiliser **les méthodes numériques usuelles** (et les codes usuels) pour le résoudre?
 - Si oui, peut-on **prouver leur convergence**?
 - Si non, existe-t-il **des approches alternatives**?
- 2 Si le problème est **mal posé** dans $H^1(\Omega)$...
 - Faut-il changer de **cadre fonctionnel**?
 - Faut-il changer le **modèle** (au voisinage de l'interface)?

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \nabla u \right) + \omega^2 \varepsilon u = -f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- 1 Le problème est-il **bien posé** dans $H^1(\Omega)$? S'il l'est :
 - Peut-on utiliser **les méthodes numériques usuelles** (et les codes usuels) pour le résoudre?
 - Si oui, peut-on **prouver leur convergence**?
 - Si non, existe-t-il **des approches alternatives**?
- 2 Si le problème est **mal posé** dans $H^1(\Omega)$...
 - Faut-il changer de **cadre fonctionnel**?
 - Faut-il changer le **modèle** (au voisinage de l'interface)?

Les résultats dépendent

- des valeurs de μ_1 et μ_2 (et du contraste $\kappa_\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ sur Σ)
- de la régularité de l'interface Σ

Résultats dans le cas “régulier”

En écrivant une équation intégrale sur l'interface Σ , on montre le

Théorème

Si Σ est régulière et μ_i est constant dans Ω_i , alors :

- 1 Si $\kappa_\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2} = -1$, le problème est mal posé.
- 2 Si $\kappa_\mu \neq -1$, le problème est bien posé (Fredholm).

Ref. : M. Costabel, E. Stephan, *J. of Math. Anal. et Appl.*, 1985.

Résultats dans le cas “régulier”

En écrivant une équation intégrale sur l'interface Σ , on montre le

Théorème

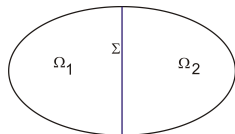
Si Σ est régulière et μ_i est constant dans Ω_i , alors :

- 1 Si $\kappa_\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2} = -1$, le problème est mal posé.
- 2 Si $\kappa_\mu \neq -1$, le problème est bien posé (Fredholm).

Ref. : M. Costabel, E. Stephan, *J. of Math. Anal. et Appl.*, 1985.

Remarques :

- Si Ω est symétrique et $\kappa_\mu = \kappa_\varepsilon = -1$, il existe pour toute fréquence ω **une infinité de champs résonants !**
- Or justement, $\kappa_\mu = \kappa_\varepsilon = -1$ est le Graal pour les physiciens !...



Résultats dans le cas général

Nous avons développé 2 **approches variationnelles** pour une interface lipschitzienne Σ et des coefficients $\mu_i \in L^\infty$:

Résultats dans le cas général

Nous avons développé 2 **approches variationnelles** pour une interface lipschitzienne Σ et des coefficients $\mu_i \in L^\infty$:

① La “ T -coercivité” :

② La “ formulation enrichie” :

Résultats dans le cas général

Nous avons développé 2 **approches variationnelles** pour une interface lipschitzienne Σ et des coefficients $\mu_i \in L^\infty$:

① La “ T-coercivité ” :

C'est une façon simple d'établir une **condition inf-sup** pour la formulation variationnelle “naturelle” :

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\underbrace{\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla u \cdot \nabla v}_{a(u,v)} - \omega^2 \underbrace{\int_{\Omega} \varepsilon u v}_{c(u,v)} = \underbrace{\int_{\Omega} f v}_{l(v)}$$

② La “ formulation enrichie ” :

Résultats dans le cas général

Nous avons développé 2 **approches variationnelles** pour une interface lipschitzienne Σ et des coefficients $\mu_i \in L^\infty$:

① La “ T -coercivité” :

C'est une façon simple d'établir une **condition inf-sup** pour la formulation variationnelle “naturelle” :

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\underbrace{\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla u \cdot \nabla v}_{a(u,v)} - \underbrace{\omega^2 \int_{\Omega} \varepsilon u v}_{c(u,v)} = \underbrace{\int_{\Omega} f v}_{l(v)}$$

② La “formulation enrichie” :

Nous avons écrit une formulation équivalente dont les inconnues sont $u = (u_1, u_2)$ et ∇u_2 , où u_i désigne $u|_{\Omega_i}$, qui est de type **coercif+compact**.

Résultats dans le cas général

Nous montrons ainsi le caractère **bien posé** du problème et la **convergence** d'une méthode d'éléments finis conformes sous une condition portant sur le contraste $\kappa_\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ et la géométrie de l'interface Σ .

Résultats dans le cas général

Nous montrons ainsi le caractère **bien posé** du problème et la **convergence** d'une méthode d'éléments finis conformes sous une condition portant sur le contraste $\kappa_\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ et la géométrie de l'interface Σ .

Pour des coefficients μ_i constants :

Le problème est bien posé si $\kappa_\mu \notin \mathcal{I}_\Sigma = [-\mathcal{R}_\Sigma, -1/\mathcal{R}_\Sigma]$ avec $-1 \in \mathcal{I}_\Sigma$

L'intervalle critique \mathcal{I}_Σ ne dépend que de la géométrie de Σ .
En particulier :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\Sigma = \{-1\} &\iff \mathcal{R}_\Sigma = 1 \iff \Sigma \text{ est régulière} \\ \mathcal{I}_\Sigma \neq \{-1\} &\iff \mathcal{R}_\Sigma > 1 \iff \Sigma \text{ comporte des coins}\end{aligned}$$

Résultats dans le cas général

Nous montrons ainsi le caractère **bien posé** du problème et la **convergence** d'une méthode d'éléments finis conformes sous une condition portant sur le contraste $\kappa_\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ et la géométrie de l'interface Σ .

Pour des coefficients μ_i variables :

Le problème est bien posé si $\kappa_\mu^\downarrow < -\mathcal{R}_\Sigma \leq -1$ ou $\kappa_\mu^\uparrow > -1/\mathcal{R}_\Sigma \geq -1$

où

$$\kappa_\mu^\downarrow = \frac{\inf_{x \in \Sigma} \mu_1}{\inf_{x \in \Sigma} \mu_2} \quad \text{et} \quad \kappa_\mu^\uparrow = \frac{\sup_{x \in \Sigma} \mu_1}{\sup_{x \in \Sigma} \mu_2}$$

T-coercivité (1)

Considérons le problème abstrait :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) + c(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V.$$

T -coercivité (1)

Considérons le problème abstrait :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) + c(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V.$$

Théorème

Supposons :

① a est T -coercive : il existe un isomorphisme $T \in \mathcal{L}(V)$ tel que

$$|a(u, Tu)| \geq \alpha \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V \quad (\alpha > 0)$$

② c est une perturbation compacte

alors le problème est de type Fredholm.

T -coercivité (1)

Le problème est équivalent à

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, Tv) + c(u, Tv) = l(Tv) \quad \forall v \in V.$$

Théorème

Supposons :

- 1 a est T -coercive : il existe un isomorphisme $T \in \mathcal{L}(V)$ tel que
$$|a(u, Tu)| \geq \alpha \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V \quad (\alpha > 0)$$
- 2 c est une perturbation compacte

alors le problème est de type Fredholm.

Démonstration.

Il suffit de remplacer v par Tv et l'on obtient une formulation coercive+compacte. □

T-coercivité (2)

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\underbrace{\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla u \cdot \nabla v}_{a(u,v)} - \omega^2 \underbrace{\int_{\Omega} \varepsilon u v}_{c(u,v)} = \underbrace{\int_{\Omega} f v}_{l(v)}$$

T-coercivité (2)

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega_1} \frac{1}{|\mu|} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Omega_2} \frac{1}{|\mu|} \nabla u \cdot \nabla v$$

T -coercivité (2)

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega_1} \frac{1}{|\mu|} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Omega_2} \frac{1}{|\mu|} \nabla u \cdot \nabla v$$

?? $T \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega))$, isomorphisme, et $\alpha > 0$ tel que

$$\left| \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla u \cdot \nabla(Tu) \right| \geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

T-coercivité (2)

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega_1} \frac{1}{|\mu|} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Omega_2} \frac{1}{|\mu|} \nabla u \cdot \nabla v$$

?? $T \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega))$, isomorphisme, et $\alpha > 0$ tel que

$$\left| \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla u \cdot \nabla(Tu) \right| \geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Solution :

$$Tu = \begin{cases} u & \text{dans } \Omega_1 \\ -u + \dots & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}$$

T -coercivité (2)

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega_1} \frac{1}{|\mu|} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Omega_2} \frac{1}{|\mu|} \nabla u \cdot \nabla v$$

?? $T \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega))$, isomorphisme, et $\alpha > 0$ tel que

$$\left| \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla u \cdot \nabla (Tu) \right| \geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Solution :

$$Tu = \begin{cases} u & \text{dans } \Omega_1 \\ -u + 2R(u|_{\Omega_1}) & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}$$

où R est un opérateur linéaire de prolongement H^1 de Ω_1 à Ω_2 :

$$R\varphi_1|_{\Sigma} = \varphi_1|_{\Sigma} \quad \forall \varphi_1$$

T -coercivité (2)

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega_1} \frac{1}{|\mu|} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Omega_2} \frac{1}{|\mu|} \nabla u \cdot \nabla v$$

?? $T \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega))$, isomorphisme, et $\alpha > 0$ tel que

$$\left| \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla u \cdot \nabla (Tu) \right| \geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Solution :

$$Tu = \begin{cases} u & \text{dans } \Omega_1 \\ -u + 2R(u|_{\Omega_1}) & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}$$

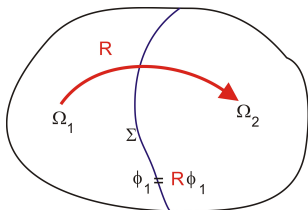
où R est un opérateur linéaire de prolongement H^1 de Ω_1 à Ω_2 :

$$R\varphi_1|_{\Sigma} = \varphi_1|_{\Sigma} \quad \forall \varphi_1$$

Alors $T^{-1} = T$.

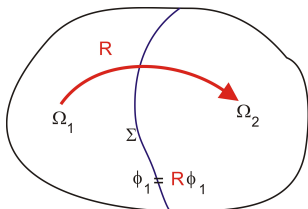
T -coercivité (2)

$$Tu = \begin{cases} u & \text{dans } \Omega_1 \\ -u + 2R(u|_{\Omega_1}) & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}$$



T -coercivité (2)

$$Tu = \begin{cases} u & \text{dans } \Omega_1 \\ -u + 2R(u|_{\Omega_1}) & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}$$

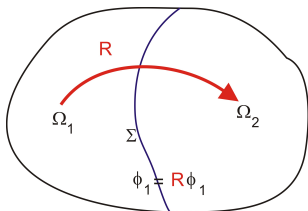


Alors $\forall u \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} a(u, Tu) &= \int_{\Omega_1} \frac{1}{\mu_1} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega_2} \frac{1}{\mu_2} \nabla u \cdot \nabla (-u + 2R(u|_{\Omega_1})) \\ &\geq \int_{\Omega} \frac{1}{|\mu|} |\nabla u|^2 - 2 \int_{\Omega_2} \frac{1}{|\mu_2|} |\nabla u| |\nabla R(u|_{\Omega_1})| \end{aligned}$$

T -coercivité (2)

$$Tu = \begin{cases} u & \text{dans } \Omega_1 \\ -u + 2R(u|_{\Omega_1}) & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}$$

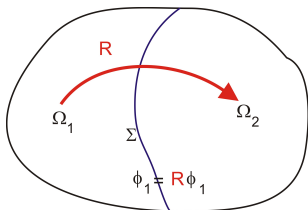


Inégalité de Young $\Rightarrow a$ est T -coercive si

$$\kappa_{\mu}^{\uparrow} = \frac{\sup_{x \in \Omega_1} \mu_1}{\sup_{x \in \Omega_2} \mu_2} > -\frac{1}{\|R\|^2} \text{ où } \|R\| = \sup_{\varphi_1} \frac{\|R\varphi_1\|_{H^1(\Omega_2)}}{\|\varphi_1\|_{H^1(\Omega_1)}}$$

T -coercivité (2)

$$Tu = \begin{cases} u & \text{dans } \Omega_1 \\ -u + 2R(u|_{\Omega_1}) & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}$$



Inégalité de Young $\Rightarrow a$ est T -coercive si

$$\kappa_{\mu}^{\uparrow} = \frac{\sup_{x \in \Omega_1} \mu_1}{\sup_{x \in \Omega_2} \mu_2} > -\frac{1}{\|R\|^2} \text{ où } \|R\| = \sup_{\varphi_1} \frac{\|R\varphi_1\|_{H^1(\Omega_2)}}{\|\varphi_1\|_{H^1(\Omega_1)}}$$

Remarques :

- On peut inverser les rôles de Ω_1 et Ω_2 et établir une condition portant sur $\kappa_{\mu}^{\downarrow}$.
- On peut localiser R au voisinage de Σ .

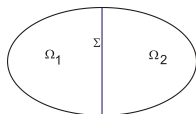
Comment choisir R ?

On cherche R tel que $\|R\| = \sup_{\varphi_1} \frac{\|R\varphi_1\|_{H^1(\Omega_2)}}{\|\varphi_1\|_{H^1(\Omega_1)}}$ soit minimal.

Comment choisir R ?

On cherche R tel que $\|R\| = \sup_{\varphi_1} \frac{\|R\varphi_1\|_{H^1(\Omega_2)}}{\|\varphi_1\|_{H^1(\Omega_1)}}$ soit minimal.

- Le cas le plus simple : la symétrie



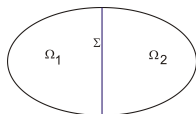
$$R = S_{\Sigma} \text{ d'où } \|R\| = 1$$

$$\text{Pb bien posé} \Leftrightarrow \kappa_{\mu} \neq -1$$

Comment choisir R ?

On cherche R tel que $\|R\| = \sup_{\varphi_1} \frac{\|R\varphi_1\|_{H^1(\Omega_2)}}{\|\varphi_1\|_{H^1(\Omega_1)}}$ soit minimal.

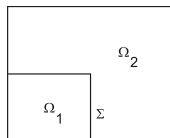
- Le cas le plus simple : la symétrie



$$R = S_{\Sigma} \text{ d'où } \|R\| = 1$$

Pb bien posé $\Leftrightarrow \kappa_{\mu} \neq -1$

- Un peu plus dur : la double symétrie pour le coin



$$R = S_x \circ S_y \text{ d'où } \|R\|^2 = 3$$

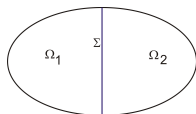
Pb bien posé $\Leftrightarrow \kappa_{\mu} > -1/3$

Optimal !

Comment choisir R ?

On cherche R tel que $\|R\| = \sup_{\varphi_1} \frac{\|R\varphi_1\|_{H^1(\Omega_2)}}{\|\varphi_1\|_{H^1(\Omega_1)}}$ soit minimal.

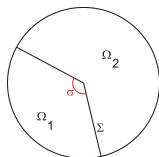
- Le cas le plus simple : la symétrie



$$R = S_{\Sigma} \text{ d'où } \|R\| = 1$$

Pb bien posé $\Leftrightarrow \kappa_{\mu} \neq -1$

- Le cas d'un angle quelconque



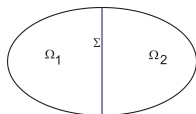
$$R = S_{\Sigma} \circ D_{\theta}$$

(composée d'une dilatation en θ et d'une symétrie)

Comment choisir R ?

On cherche R tel que $\|R\| = \sup_{\varphi_1} \frac{\|R\varphi_1\|_{H^1(\Omega_2)}}{\|\varphi_1\|_{H^1(\Omega_1)}}$ soit minimal.

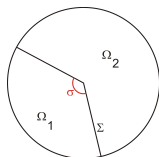
- Le cas le plus simple : la symétrie



$$R = S_{\Sigma} \text{ d'où } \|R\| = 1$$

Pb bien posé $\Leftrightarrow \kappa_{\mu} \neq -1$

- Le cas d'un angle quelconque



$$R = S_{\Sigma} \circ D_{\theta} \text{ d'où } \|R\|^2 = \mathcal{R}_{\sigma} = \frac{2\pi - \sigma}{\sigma}$$

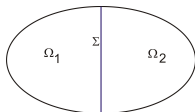
Pb bien posé $\Leftrightarrow \kappa_{\mu} \notin [-\mathcal{R}_{\sigma}, -1/\mathcal{R}_{\sigma}]$

Optimal !

Comment choisir R ?

On cherche R tel que $\|R\| = \sup_{\varphi_1} \frac{\|R\varphi_1\|_{H^1(\Omega_2)}}{\|\varphi_1\|_{H^1(\Omega_1)}}$ soit minimal.

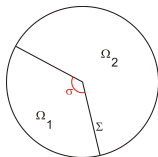
- Le cas le plus simple : la symétrie



$$R = S_\Sigma \text{ d'où } \|R\| = 1$$

Pb bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\mu \neq -1$

- Le cas d'un angle quelconque



$$R = S_\Sigma \circ D_\theta \text{ d'où } \|R\|^2 = \mathcal{R}_\sigma = \frac{2\pi - \sigma}{\sigma}$$

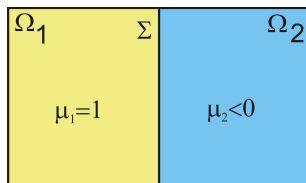
Pb bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\mu \notin [-\mathcal{R}_\sigma, -1/\mathcal{R}_\sigma]$

Optimal !

Pour l'angle droit : $\sigma = \pi/2 \Rightarrow \mathcal{R}_\sigma = 3 \Rightarrow \mathcal{I}_\Sigma = [-3, -1/3]$

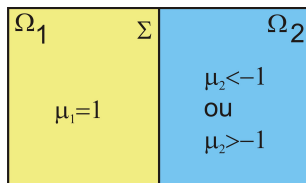
Bilan pour une interface régulière

Pour simplifier, on fixe $\mu_1 = 1$ dans le diélectrique :



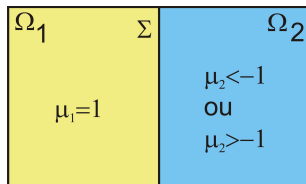
Bilan pour une interface régulière

On a montré que le problème est bien posé si :

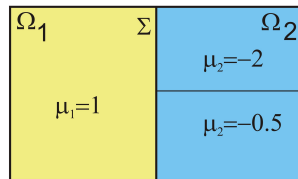
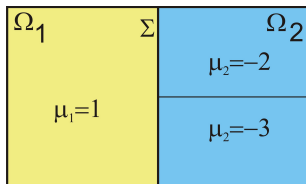


Bilan pour une interface régulière

On a montré que le problème est bien posé si :

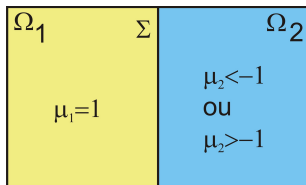


Exemple et contre-exemple :

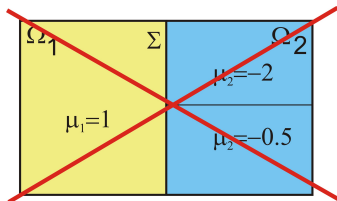
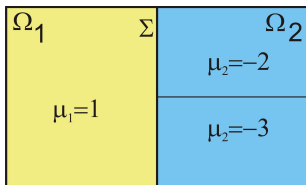


Bilan pour une interface régulière

On a montré que le problème est bien posé si :

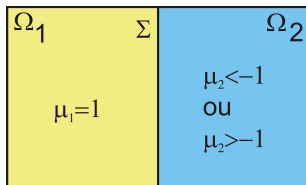


Exemple et contre-exemple :

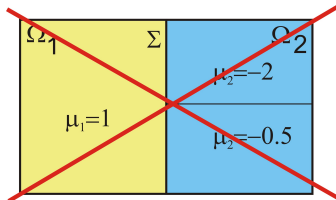
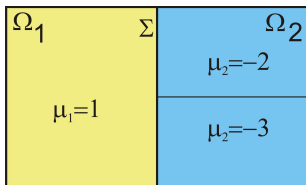


Bilan pour une interface régulière

On a montré que le problème est bien posé si :



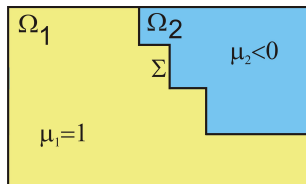
Exemple et contre-exemple :



Que se passe-t-il dans ce dernier cas ... ? Affaire à suivre...

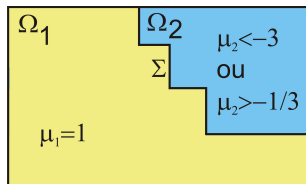
Bilan pour une interface à coin

Pour simplifier, on fixe $\mu_1 = 1$ dans le diélectrique et Σ n'a que des angles droits :



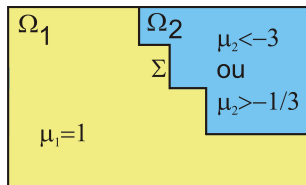
Bilan pour une interface à coin

On a montré que le problème est bien posé si :

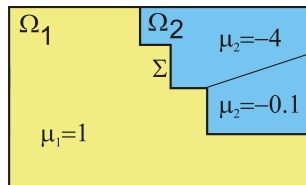
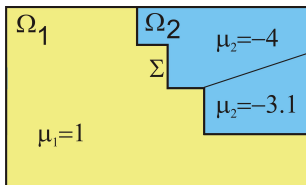


Bilan pour une interface à coin

On a montré que le problème est bien posé si :

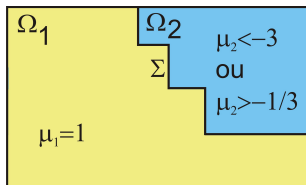


Exemple et contre-exemple :

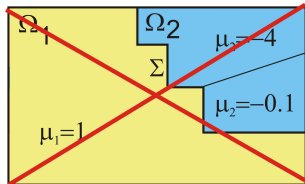
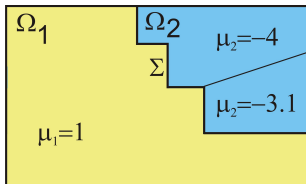


Bilan pour une interface à coin

On a montré que le problème est bien posé si :



Exemple et contre-exemple :



Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Comment traiter le défaut de coercivité (dans le cas scalaire)
- 3 Coercivité et injection compacte dans le cas vectoriel
- 4 Que se passe-t-il dans l'intervalle critique ?

Coercivité dans le cas vectoriel (3D)

Nous avons étendu aux **équations de Maxwell** les 2 approches variationnelles.

(Supposons tout d'abord que $\varepsilon \equiv 1$ et que seul μ change de signe.)

Coercivité dans le cas vectoriel (3D)

Nous avons étendu aux **équations de Maxwell** les 2 approches variationnelles.

(Supposons tout d'abord que $\varepsilon \equiv 1$ et que seul μ change de signe.)

① La formulation enrichie

② La T -coercivité

Coercivité dans le cas vectoriel (3D)

Nous avons étendu aux **équations de Maxwell** les 2 approches variationnelles.

(Supposons tout d'abord que $\varepsilon \equiv 1$ et que seul μ change de signe.)

① La formulation enrichie

A.-S. B., P. Ciarlet Jr. et C. M. Zwölf, *Math. Models Meth. App. Sci.*, 2008

On écrit une formulation équivalente de type coercif+compact dont les inconnues sont $E = (E_1, E_2)$ et H_2 (où E_i désigne $E|_{\Omega_i}$).

② La T -coercivité

Coercivité dans le cas vectoriel (3D)

Nous avons étendu aux **équations de Maxwell** les 2 approches variationnelles.

(Supposons tout d'abord que $\varepsilon \equiv 1$ et que seul μ change de signe.)

① La formulation enrichie

A.-S. B., P. Ciarlet Jr. et C. M. Zwölf, *Math. Models Meth. App. Sci.*, 2008

On écrit une formulation équivalente de type coercif+compact dont les inconnues sont $E = (E_1, E_2)$ et H_2 (où E_i désigne $E|_{\Omega_i}$).

② La T -coercivité

appliquée à la formulation naturelle du problème :

Trouver $E \in W$ tel que $\forall E' \in W$

$$\underbrace{\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E \cdot \operatorname{rot} \bar{E}'}_{a(E, E')} - \omega^2 \underbrace{\int_{\Omega} \varepsilon E \cdot \bar{E}'}_{c(E, E')} = \underbrace{\int_{\Omega} F \cdot \bar{E}'}_{l(E')}$$

Coercivité dans le cas vectoriel (3D)

Nous avons étendu aux **équations de Maxwell** les 2 approches variationnelles.

(Supposons tout d'abord que $\varepsilon \equiv 1$ et que seul μ change de signe.)

① La formulation enrichie

A.-S. B., P. Ciarlet Jr. et C. M. Zwölf, *Math. Models Meth. App. Sci.*, 2008

On écrit une formulation équivalente de type coercif+compact dont les inconnues sont $E = (E_1, E_2)$ et H_2 (où E_i désigne $E|_{\Omega_i}$).

② La T -coercivité

appliquée à la formulation naturelle du problème :

Trouver $E \in W$ tel que $\forall E' \in W$

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E \cdot \operatorname{rot} \bar{E}' - \omega^2 \int_{\Omega} \varepsilon E \cdot \bar{E}' = \int_{\Omega} F \cdot \bar{E}'$$

$$\text{où } W = \{E \in H_0(\operatorname{rot})(\Omega); \operatorname{div} E = 0 \text{ dans } \Omega\}$$

Trouver $E \in W$ tel que $\forall E' \in W$

$$\underbrace{\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E \cdot \operatorname{rot} \bar{E}'}_{a(E, E')} - \omega^2 \underbrace{\int_{\Omega} \varepsilon E \cdot \bar{E}'}_{c(E, E')} = \underbrace{\int_{\Omega} F \cdot \bar{E}'}_{l(E')}$$

où $W = \{E \in H_0(\operatorname{rot})(\Omega); \operatorname{div} E = 0 \text{ dans } \Omega\}$

Trouver $E \in W$ tel que $\forall E' \in W$

$$\underbrace{\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E \cdot \operatorname{rot} \bar{E}'}_{a(E, E')} - \omega^2 \underbrace{\int_{\Omega} \varepsilon E \cdot \bar{E}'}_{c(E, E')} = \underbrace{\int_{\Omega} F \cdot \bar{E}'}_{l(E')}$$

où $W = \{E \in H_0(\operatorname{rot})(\Omega); \operatorname{div} E = 0 \text{ dans } \Omega\}$

On cherche $T \in \mathcal{L}(W)$ tel que a soit T -coercive.

T -coercivité en vectoriel

Trouver $E \in W$ tel que $\forall E' \in W$

$$\underbrace{\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E \cdot \operatorname{rot} \bar{E}'}_{a(E, E')} - \omega^2 \underbrace{\int_{\Omega} \varepsilon E \cdot \bar{E}'}_{c(E, E')} = \underbrace{\int_{\Omega} F \cdot \bar{E}'}_{l(E')}$$

où $W = \{E \in H_0(\operatorname{rot})(\Omega); \operatorname{div} E = 0 \text{ dans } \Omega\}$

On cherche $T \in \mathcal{L}(W)$ tel que a soit T -coercive. Par analogie avec le cas scalaire, on cherche T de la forme

$$TE = \begin{cases} E & \text{dans } \Omega_1 \\ -E + 2R(E|_{\Omega_1}) & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}$$

où R est un opérateur linéaire de prolongement de Ω_1 à Ω_2 tel que

$$\begin{aligned} (RE_1) \times \mathbf{n} &= E_1 \times \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma \\ (RE_1) \cdot \mathbf{n} &= E_1 \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma \end{aligned}$$

T -coercivité en vectoriel

Trouver $E \in W$ tel que $\forall E' \in W$

$$\underbrace{\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E \cdot \operatorname{rot} \bar{E}'}_{a(E, E')} - \omega^2 \underbrace{\int_{\Omega} \varepsilon E \cdot \bar{E}'}_{c(E, E')} = \underbrace{\int_{\Omega} F \cdot \bar{E}'}_{l(E')}$$

où $W = \{E \in H_0(\operatorname{rot})(\Omega); \operatorname{div} E = 0 \text{ dans } \Omega\}$

On cherche $T \in \mathcal{L}(W)$ tel que a soit T -coercive. Par analogie avec le cas scalaire, on cherche T de la forme

$$TE = \begin{cases} E & \text{dans } \Omega_1 \\ -E + 2R(E|_{\Omega_1}) & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}$$

où R est un opérateur linéaire de prolongement de Ω_1 à Ω_2 tel que

$$\begin{aligned} (RE_1) \times \mathbf{n} &= E_1 \times \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma \\ (RE_1) \cdot \mathbf{n} &= E_1 \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma \end{aligned} \quad \text{C'est impossible !!!}$$

T-coercivité en vectoriel

Trouver $E \in W$ tel que $\forall E' \in W$

$$\underbrace{\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E \cdot \operatorname{rot} \bar{E}'}_{a(E, E')} - \omega^2 \underbrace{\int_{\Omega} \varepsilon E \cdot \bar{E}'}_{c(E, E')} = \underbrace{\int_{\Omega} F \cdot \bar{E}'}_{l(E')}$$

où $W = \{E \in H_0(\operatorname{rot})(\Omega); \operatorname{div} E = 0 \text{ dans } \Omega\}$

On construit $T \in \mathcal{L}(W)$ de la forme :

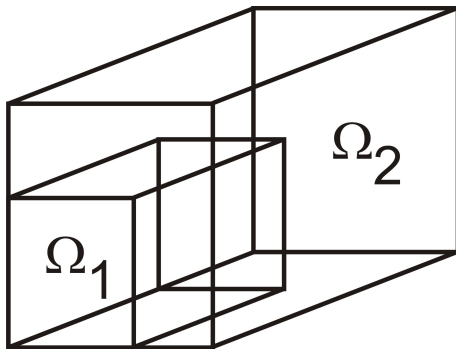
$$TE = \begin{cases} E & + \nabla \varphi \text{ dans } \Omega_1 \\ -E + 2R(E|_{\Omega_1}) & + \nabla \varphi \text{ dans } \Omega_2 \end{cases}$$

où R est tel que

$$(RE_1) \times \mathbf{n} = E_1 \times \mathbf{n} \text{ sur } \Sigma$$

et φ assure le raccord de la composante normale.

Comment choisir R ?



L'étude en 3D dans le cas d'une interface à coins reste à faire....

Injection compacte : le résultat

Si les deux coefficients ε et μ , changent de signe, on a aussi besoin du

Théorème

L'espace

$$V_\varepsilon = H_0(\text{rot})(\Omega) \cap H(\text{div}, \varepsilon)(\Omega)$$

s'injecte de façon compacte dans $L^2(\Omega)^3$

Injection compacte : le résultat

Si les deux coefficients ε et μ , changent de signe, on a aussi besoin du

Théorème

L'espace

$$V_\varepsilon = H_0(\text{rot})(\Omega) \cap H(\text{div}, \varepsilon)(\Omega)$$

s'injecte de façon compacte dans $L^2(\Omega)^3$ si

$$\kappa_\varepsilon^\uparrow > -1/\mathcal{R}_\Sigma \geq -1 \quad \text{où} \quad \kappa_\varepsilon^\uparrow = \frac{\sup_{x \in \Sigma} \varepsilon_1}{\sup_{x \in \Sigma} \varepsilon_2}$$

Injection compacte : le résultat

Si les deux coefficients ε et μ , changent de signe, on a aussi besoin du

Théorème

L'espace

$$V_\varepsilon = H_0(\text{rot})(\Omega) \cap H(\text{div}, \varepsilon)(\Omega)$$

s'injecte de façon compacte dans $L^2(\Omega)^3$ si

$$\kappa_\varepsilon^\uparrow > -1/\mathcal{R}_\Sigma \geq -1 \quad \text{ou} \quad \kappa_\varepsilon^\downarrow < -\mathcal{R}_\Sigma \leq -1$$

Injection compacte : le résultat

Si les deux coefficients ε et μ , changent de signe, on a aussi besoin du

Théorème

L'espace

$$V_\varepsilon = H_0(\text{rot})(\Omega) \cap H(\text{div}, \varepsilon)(\Omega)$$

s'injecte de façon compacte dans $L^2(\Omega)^3$ si

$$\kappa_\varepsilon^\uparrow > -1/\mathcal{R}_\Sigma \geq -1 \quad \text{ou} \quad \kappa_\varepsilon^\downarrow < -\mathcal{R}_\Sigma \leq -1$$

Démonstration.

Preuve à la Weber.

L'idée de la preuve (1)

Soit E_n une suite bornée de V_ε :

L'idée de la preuve (1)

Soit E_n **une suite bornée** de V_ε : il existe des suites bornées $\varphi_n \in H_0^1(\Omega)$ et $\Psi_n \in H(\text{rot})(\Omega) \cap H_0(\text{div})(\Omega)$ telles que

$$E_n = \nabla \varphi_n + \frac{1}{\varepsilon} \text{rot } \Psi_n$$
$$\text{div}(\varepsilon \nabla \varphi_n) = \text{div}(\varepsilon E_n) \stackrel{\text{def}}{=} f_n$$
$$\text{rot}\left(\frac{1}{\varepsilon} \text{rot } \Psi_n\right) = \text{rot}(E_n) \stackrel{\text{def}}{=} F_n$$

L'idée de la preuve (1)

Soit E_n **une suite bornée** de V_ε : il existe des suites bornées $\varphi_n \in H_0^1(\Omega)$ et $\Psi_n \in H(\text{rot})(\Omega) \cap H_0(\text{div})(\Omega)$ telles que

$$E_n = \nabla \varphi_n + \frac{1}{\varepsilon} \text{rot } \Psi_n$$
$$\text{div}(\varepsilon \nabla \varphi_n) = \text{div}(\varepsilon E_n) \stackrel{\text{def}}{=} f_n$$
$$\text{rot}\left(\frac{1}{\varepsilon} \text{rot } \Psi_n\right) = \text{rot}(E_n) \stackrel{\text{def}}{=} F_n$$

Objectif :

Trouver une sous-suite telle que $\nabla \varphi_n$ et $\text{rot } \Psi_n$ convergent dans L^2 .

L'idée de la preuve (2)

Considérons par exemple les φ_n :

L'idée de la preuve (2)

Considérons par exemple les φ_n :

- 1 Pour une sous-suite (Rellich) :

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \text{ dans } L^2(\Omega)$$

L'idée de la preuve (2)

Considérons par exemple les φ_n :

- 1 Pour une sous-suite (Rellich) :

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \text{ dans } L^2(\Omega)$$

- 2 Posons $\varphi_{nm} = \varphi_n - \varphi_m$, alors :

$$\int_{\Omega} \varepsilon \nabla \varphi_{nm} \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f_{nm} v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

L'idée de la preuve (2)

Considérons par exemple les φ_n :

- 1 Pour une sous-suite (Rellich) :

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \text{ dans } L^2(\Omega)$$

- 2 Posons $\varphi_{nm} = \varphi_n - \varphi_m$, alors :

$$\int_{\Omega} \varepsilon \nabla \varphi_{nm} \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f_{nm} v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

- 3 On montre finalement en utilisant le critère de Cauchy que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ dans $H_0^1(\Omega)$:

- Dans la preuve de Weber pour $\varepsilon > 0$: il suffit de prendre $v = \varphi_{nm}$.

L'idée de la preuve (2)

Considérons par exemple les φ_n :

- 1 Pour une sous-suite (Rellich) :

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \text{ dans } L^2(\Omega)$$

- 2 Posons $\varphi_{nm} = \varphi_n - \varphi_m$, alors :

$$\int_{\Omega} \varepsilon \nabla \varphi_{nm} \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f_{nm} v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

- 3 On montre finalement en utilisant le critère de Cauchy que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ dans $H_0^1(\Omega)$:

- Dans la preuve de Weber pour $\varepsilon > 0$: il suffit de prendre $v = \varphi_{nm}$.
- Pour ε qui change de signe : on utilise la **T -coercivité** en prenant $v = T\varphi_{nm}$.

Le résultat complet pour les équations de Maxwell

Soit $F \in H(\operatorname{div})(\Omega)$. Le problème

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E \right) - \omega^2 \varepsilon E = F & \text{dans } \Omega \\ E \times n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

est bien posé (Fredholm) si les conditions suivantes sont vérifiées :

- 1) $\kappa_{\mu}^{\uparrow} > -1/\mathcal{R}_{\Sigma} \geq -1$ ou $\kappa_{\mu}^{\downarrow} < -\mathcal{R}_{\Sigma} \leq -1$
- 2) $\kappa_{\varepsilon}^{\uparrow} > -1/\mathcal{R}_{\Sigma} \geq -1$ ou $\kappa_{\varepsilon}^{\downarrow} < -\mathcal{R}_{\Sigma} \leq -1$

qui s'écrit, pour des coefficients ε_i et μ_i constants :

$$\kappa_{\mu} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \notin \mathcal{I}_{\Sigma} \quad \text{et} \quad \kappa_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \notin \mathcal{I}_{\Sigma}$$

où l'intervalle critique \mathcal{I}_{Σ} contient -1 .

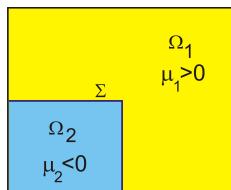
Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Comment traiter le défaut de coercivité (dans le cas scalaire)
- 3 Coercivité et injection compacte dans le cas vectoriel
- 4 Que se passe-t-il dans l'intervalle critique ?

Le cas de l'angle droit en 2D

Notre objectif est de comprendre ce qui arrive lorsque **les contrastes appartiennent aux intervalles critiques** (mais sont différents de -1).

Nous considérons le cas le plus simple des coefficients μ_i constants :

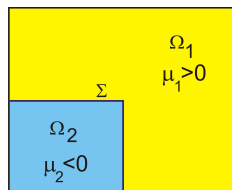


$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \nabla u \right) + \omega^2 \varepsilon u = -f & (\Omega) \\ u = 0 & (\partial\Omega) \end{cases}$$

Le cas de l'angle droit en 2D

Notre objectif est de comprendre ce qui arrive lorsque **les contrastes appartiennent aux intervalles critiques** (mais sont différents de -1).

Nous considérons le cas le plus simple des coefficients μ_i constants :

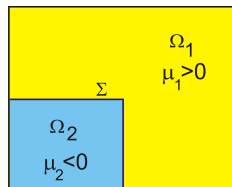


$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \nabla u \right) + \omega^2 \varepsilon u = -f & (\Omega) \\ u = 0 & (\partial\Omega) \end{cases}$$

Le problème est **mal posé** dans $H^1(\Omega)$ si

$$\kappa_\mu \in \mathcal{I}_\Sigma = [-3, -1/3]$$

Le cas de l'angle droit en 2D



$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \nabla u \right) + \omega^2 \varepsilon u = -f & (\Omega) \\ u = 0 & (\partial\Omega) \end{cases}$$

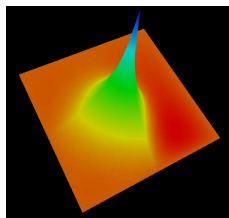
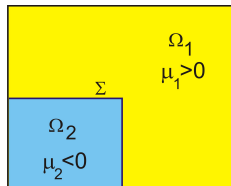
Le problème est **mal posé** dans $H^1(\Omega)$ si

$$\kappa_\mu \in \mathcal{I}_\Sigma = [-3, -1/3]$$

A.S. Bonnet-Ben Dhia, M. Dauge, K. Ramdani, Analyse spectrale et singularités d'un problème de transmission non coercif, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 1999.

M. Dauge, B. Texier, Problèmes de transmission non coercifs dans des polygones, *Preprint*, 1997.

Le cas de l'angle droit en 2D



$$\kappa_\mu = -3.8$$

Le problème est **mal posé** dans $H^1(\Omega)$ si

$$\kappa_\mu \in \mathcal{I}_\Sigma = [-3, -1/3]$$

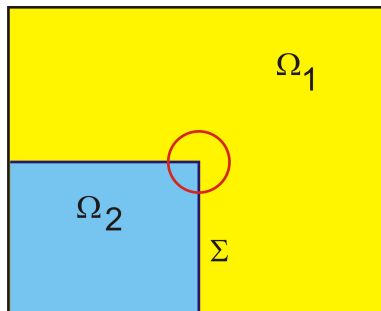
L'analyse de Mellin montre que, pour $\kappa_\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{I}_\Sigma$: $u = u^{reg} + \alpha S$ où $u_i^{reg} \in H^2(\Omega_i)$ et $S(r, \theta) \approx r^\lambda \phi(\theta) \in H^1(\Omega)$ ($\Re(\lambda) > 0$)

$$\kappa_\mu \rightarrow \mathcal{I}_\Sigma \implies \Re(\lambda) \rightarrow 0 \implies S \text{ sort de } H^1(\Omega)!!!$$

L'analogie avec les problèmes de scattering

Introduisons les **coordonnées de Mellin** dans un petit disque autour du point singulier :

$$(x, y) \mapsto (r, \theta) \mapsto (t, \theta) \text{ avec } t = -\log r$$



Pour simplifier, considérons le cas statique ($\omega = 0$) :

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \nabla u \right) + \cancel{\omega^2} \varepsilon u = -f$$

L'analogie avec les problèmes de scattering

Introduisons les **coordonnées de Mellin** dans un petit disque autour du point singulier :

$$(x, y) \longmapsto (r, \theta) \longmapsto (t, \theta) \text{ avec } t = -\log r$$

On a la correspondance suivante :

L'analogie avec les problèmes de scattering

Introduisons les **coordonnées de Mellin** dans un petit disque autour du point singulier :

$$(x, y) \mapsto (r, \theta) \mapsto (t, \theta) \text{ avec } t = -\log r$$

On a la correspondance suivante :

L'équation $\operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \nabla u \right) = 0$
en (x, y) dans le **disque** de rayon a



La même équation en (t, θ) dans
la **bande semi-infinie** $t > -\log a$



L'analogie avec les problèmes de scattering

Introduisons les **coordonnées de Mellin** dans un petit disque autour du point singulier :

$$(x, y) \mapsto (r, \theta) \mapsto (t, \theta) \text{ avec } t = -\log r$$

On a la correspondance suivante :

L'équation $\operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \nabla u \right) = 0$
en (x, y) dans le **disque** de rayon a



Les singularités dans le disque :

$$S = r^\lambda \varphi(\theta)$$

La même équation en (t, θ) dans la **bande semi-infinie** $t > -\log a$



Les modes du guide d'ondes :

$$M = e^{-\lambda t} \varphi(\theta)$$

L'analogie avec les problèmes de scattering

Introduisons les **coordonnées de Mellin** dans un petit disque autour du point singulier :

$$(x, y) \mapsto (r, \theta) \mapsto (t, \theta) \text{ avec } t = -\log r$$

On a la correspondance suivante :

L'équation $\operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \nabla u \right) = 0$
en (x, y) dans le **disque** de rayon a



\Leftrightarrow

La même équation en (t, θ) dans
la **bande semi-infinie** $t > -\log a$



Les singularités dans le disque :

$$S = r^\lambda \varphi(\theta)$$

\Leftrightarrow

Les modes du guide d'ondes :

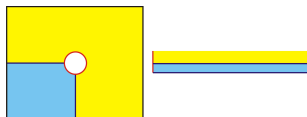
$$M = e^{-\lambda t} \varphi(\theta)$$

$$S \in H^1 \Leftrightarrow \Re(\lambda) > 0 \Leftrightarrow M \text{ est évanescent}$$

$$S \notin H^1 \Leftrightarrow \Re(\lambda) = 0 \Leftrightarrow M \text{ est propagatif}$$

La stratégie

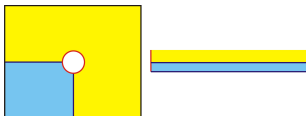
- 1 Ecrire le problème comme un problème de scattering dans la réunion du carré perforé et de la bande semi-infinie :



Quand $\kappa_\mu \in \mathcal{I}_\Sigma$, il existe 2 modes propagatifs dans la bande se propageant dans des directions opposées : $M^\pm = e^{\pm i\beta t} \varphi(\theta)$.

La stratégie

- 1 Ecrire le problème comme un problème de scattering dans la réunion du carré perforé et de la bande semi-infinie :

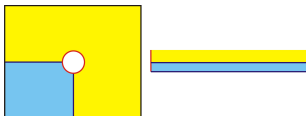


Quand $\kappa_\mu \in \mathcal{I}_\Sigma$, il existe 2 modes propagatifs dans la bande se propageant dans des directions opposées : $M^\pm = e^{\pm i\beta t} \varphi(\theta)$.

- 2 Etablir un principe d'absorption limite pour sélectionner le mode sortant/la singularité correcte.

La stratégie

- 1 Ecrire le problème comme un problème de scattering dans la réunion du carré perforé et de la bande semi-infinie :



Quand $\kappa_\mu \in \mathcal{I}_\Sigma$, il existe 2 modes propagatifs dans la bande se propageant dans des directions opposées : $M^\pm = e^{\pm i\beta t} \varphi(\theta)$.

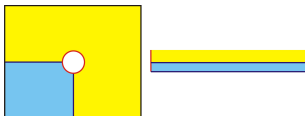
- 2 Etablir un principe d'absorption limite **pour sélectionner le mode sortant/la singularité correcte.**

Un phénomène étrange :

Si le contraste appartient à l'intervalle critique, une partie de l'énergie disparaît dans le coin !

La stratégie

- 1 Ecrire le problème comme un problème de scattering dans la réunion du carré perforé et de la bande semi-infinie :



Quand $\kappa_\mu \in \mathcal{I}_\Sigma$, il existe 2 modes propagatifs dans la bande se propageant dans des directions opposées : $M^\pm = e^{\pm i\beta t} \varphi(\theta)$.

- 2 Etablir un principe d'absorption limite pour sélectionner le mode sortant/la singularité correcte.

Un phénomène étrange :

Si le contraste appartient à l'intervalle critique, une partie de l'énergie disparaît dans le coin !

Des phénomènes analogues se produisent dans des domaines cuspidaux : Nazarov parle de trou noir.

Illustration numérique

- On résout le problème dans un **demi-disque** Ω :

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \nabla u \right) + \omega^2 \varepsilon u = 0 \quad (\Omega) \quad \text{et } u = g \quad (\partial\Omega)$$

- A l'aide des variables de Mellin, on se ramène à résoudre un problème dans **une bande semi-infinie**.
- On utilise des **PML** (Perfectly Matched Layers) pour tronquer la bande et résoudre numériquement le problème par **éléments finis**.

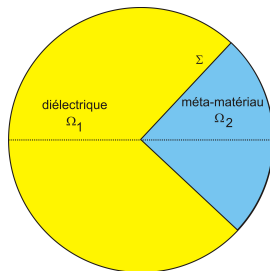


Illustration numérique

- On résout le problème dans un **demi-disque** Ω :

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \nabla u \right) + \omega^2 \varepsilon u = 0 \quad (\Omega) \quad \text{et } u = g \quad (\partial\Omega)$$

- A l'aide des variables de Mellin, on se ramène à résoudre un problème dans **une bande semi-infinie**.
- On utilise des **PML** (Perfectly Matched Layers) pour tronquer la bande et résoudre numériquement le problème par **éléments finis**.

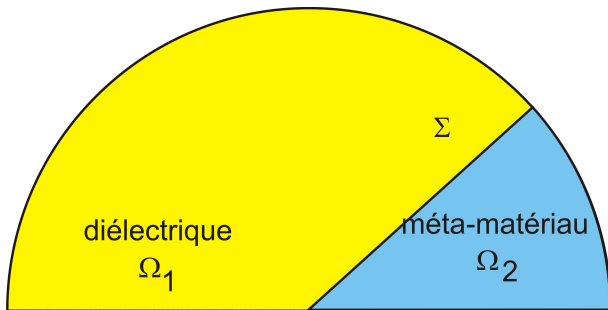


Illustration numérique

- On résout le problème dans un **demi-disque** Ω :

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \nabla u \right) + \omega^2 \varepsilon u = 0 \quad (\Omega) \quad \text{et } u = g \quad (\partial\Omega)$$

- A l'aide des variables de Mellin, on se ramène à résoudre un problème dans **une bande semi-infinie**.
- On utilise des **PML** (Perfectly Matched Layers) pour tronquer la bande et résoudre numériquement le problème par **éléments finis**.

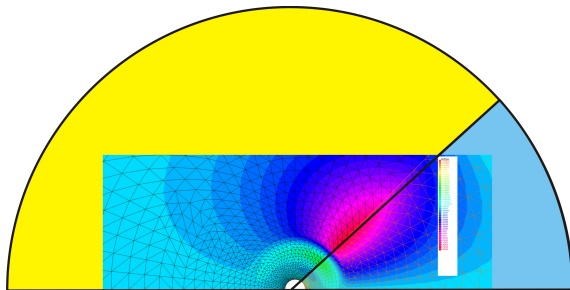


Illustration numérique

$$\kappa_\mu = \kappa_\varepsilon = -1.3 \notin [-3, -1/3]$$

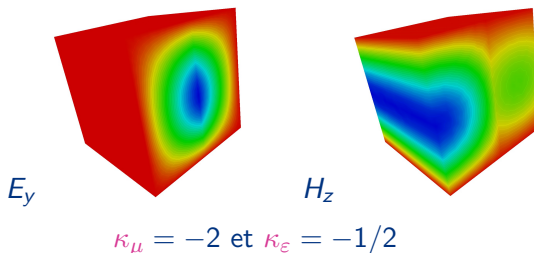
(Film en attente...)

- 1 Déterminer les intervalles critiques pour les géométries 3D.

- 1 Déterminer les intervalles critiques pour les géométries 3D.
- 2 Etudier la **convergence des méthodes d'éléments finis pour les équations de Maxwell** (éléments d'arête, éléments de Lagrange avec traitement des singularités etc...)

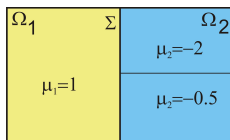
Perspectives

- 1 Déterminer les intervalles critiques pour les géométries 3D.
- 2 Etudier la convergence des méthodes d'éléments finis pour les équations de Maxwell (éléments d'arête, éléments de Lagrange avec traitement des singularités etc...)



Perspectives

- 1 Déterminer les intervalles critiques pour les géométries 3D.
- 2 Etudier la convergence des méthodes d'éléments finis pour les équations de Maxwell (éléments d'arête, éléments de Lagrange avec traitement des singularités etc...)
- 3 Etudier les **cas non couverts par les théories précédentes**.
Encore des trous noirs ... ?



$\mathcal{I}_\Sigma = \mathbb{R}!!$ (J. Pasciak)

- 1 Déterminer les intervalles critiques pour les géométries 3D.
- 2 Etudier la convergence des méthodes d'éléments finis pour les équations de Maxwell (éléments d'arête, éléments de Lagrange avec traitement des singularités etc...)
- 3 Etudier les cas non couverts par les théories précédentes.
Encore des trous noirs ... ?
- 4 Etudier une problématique analogue pour un **opérateur d'ordre 4** :

$$\Delta(\varepsilon\Delta u) = f$$

lorsque ε change de signe. (*Ce problème se pose lors de l'étude de la Linear Sampling Method*)