Équations aux dérivées partielles et applications

M. Pierre-Louis LIONS, membre de l'Institut
(Académie des sciences), professeur

COURS : ÉQUATIONS PARABOLIQUES ET ERGODICITÉ

Le cours a eu lieu du 7 novembre 2014 au 6 février 2015 [a].

1. Introduction

Cette année le cours a porté sur le comportement en temps long des solutions d'équations paraboliques et sur l'ergodicité de processus de diffusion. Ces questions ont été abordées par de très nombreux auteurs, surtout du point de vue stochastique, et notre objectif est de mettre en place une théorie générale et systématique permettant d'effectuer une synthèse de (et de généraliser) toutes les contributions antérieures. En outre les méthodes introduites permettent également d'aborder des problèmes non-linéaires.

L'exemple canonique des questions étudiées est celui d'équations linéaires paraboliques du second ordre éventuellement dégénérées c'est-à-dire

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a_{ij}\partial_{ij}u - b_i\partial_i u = 0 \quad \forall x \in Q, \forall t \geq 0 \tag{1}$$

$$u\,|_{t=0} = u_0 \ \text{ sur } \ Q \tag{2}$$

où l'inconnue $u(t, x)$ est à valeurs réelles, Q désigne le cube $[0,1]^d (d \geq 1)$ et les coefficients a_{ij}, b_i sont supposés vérifier

$$a = \frac{1}{2}\,\sigma\sigma^{\top}\ ,\ \sigma,\ b \text{ réguliers} \tag{3}$$

a. Les enregistrements vidéo des cours sont disponibles sur le site internet du Collège de France : http://www.college-de-france.fr/site/pierre-louis-lions/course-2014-2015.htm [NdÉ].

avec $\sigma = (\sigma_{ik})$ pour $1 \le i \le d, 1 \le k \le m (m \ge 1)$. Dans (1) et dans tout ce qui suit nous utilisons systématiquement la convention de sommation implicite sur les indices répétés.

Pour ce résumé de cours, nous nous contenterons de considérer la situation périodique, c'est-à-dire le cas où toutes les fonctions données ou inconnues sont supposés périodiques de période 1 dans chacune des variables. En fait, dans le cours, grâce aux méthodes introduites et ici résumées, nous avons considéré le cas d'équations posées dans l'espace entier, ou dans un domaine général avec des conditions de type Neumann ainsi que le cas d'équations intégro-différentielles. Enfin, les hypothèses de régularité des coefficients sont aisément précisées et la question de la régularité minimale de ces coefficients a été traitée en cours ainsi que diverses extensions à des situations non linéaires.

Comme il est bien connu, dès que $u_0 \in C(Q)$, il existe une unique solution $u(t,x) \in C([0, \infty[, Q)$ de (1)-(2) qui est donnée par la représentation stochastique suivante

$$u(t,x) = E[u_0(X_t)] \tag{4}$$

où X_t est la solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \sigma(Xt)dW_t + b(X_t)dt, \qquad X_0 = x \in \mathbb{R}^d \tag{5}$$

(dans un espace de Wiener canonique $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ muni d'un mouvement brownien $W_t m$-dimensionnel). De plus, X_t est un processus de Markov et même de Feller.

La notion d'ergodicité est présentée suivant les contextes de diverses manières et, en fait, on devrait réellement parler de notions d'ergodicité. De manière peu précise, il s'agit de situations où la loi du processus X_t « converge », quand t tend vers $+\infty$, vers une unique loi stationnaire, « oubliant » de ce fait la condition initiale x. Bien sûr, la représentation (4) assure alors que $u(t,x)$ « converge » vers une constante. La raison des guillemets autour de *converge* est qu'il y a en fait naturellement deux convergences possibles : la convergence usuelle, et nous parlerons alors d'ergodicité forte, et la convergence au sens de Cesaro, et nous parlerons alors d'ergodicité faible. Enfin, nous ne considèrerons que le cas de la convergence uniforme pour $u(t,x)$.

Plus précisément, nous disons que le processus X_t est fortement ergodique si les propriétés suivantes sont vérifiées

i) il existe une unique mesure (de probabilité) invariante m, qui est solution de

$$A^*m = 0 \text{ dans } Q, m \ge 0 \text{ dans } Q, \int_Q dm = 1 \tag{6}$$

où on note $A = -a_{ij}\partial_{ij} - b_i\partial_i$, $A^* = -\partial_{ij}(a_{ij}.) + \partial_i(b_i)$,

ii) pour toute fonction continue (périodique) u_0, la solution u de (1)-(2) vérifie

$$u(t,x) \to \int_Q u_0 \, dm \text{ uniformément sur } Q, \text{ quant } t \to +\infty. \tag{7}$$

Et on dit que X_t est faiblement ergodique si i) a lieu et si la propriété suivante iii) a lieu

iii) pour toute fonction continue (périodique) u_0, la solution u de (1)-(2) vérifie

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(t,x)dt \to \int_Q u_0 dm \text{ uniformément sur } Q, \text{ quant } t \to +\infty. \tag{8}$$

Précisons également qu'il est bien connu que le système (1)-(2) admet une unique solution régulière si u_0 l'est et une unique solution de viscosité continue pour toute donnée initiale continue u_0. De plus, le système définit un semi-groupe de contractions sur l'espace des fonctions continues.

2. Quelques faits généraux

On peut démontrer (sans grande difficulté) que ii) implique en fait i) et plus précisément que si, pour toute fonction continue (ou régulière) u_0, $u(t, x)$ converge uniformément quand t tend vers + ∞ vers une constante alors i) a lieu et la constante limite est donnée par $\int_Q u_0 \, dm$.

De même si $\frac{1}{T}\int_0^T u(t,x)dx$ converge uniformément quand t tend vers + ∞ vers une constante, alors i) a lieu et, à nouveau, la constante limite est donnée par $\int_Q u_0 \, dm$.

En conséquence l'ergodicité forte (respectivement faible) revient à démontrer que, pour tout $u_0 \in C(Q)$, $u(t,x)$ (respectivement $\frac{1}{T}\int_0^T u(t,x)dt$) converge uniformément vers une constante.

D'autre part, on vérifie (sans grande difficulté) que l'ergodicité faible implique la propriété suivante, pour tout $u_0 \in C(Q)$,

$$\frac{1}{T}\int_0^T u_0(X_t)dt \to \int_Q u_0 \, dm \text{ en probabilité si, } t \geq +\infty \tag{9}$$

(en fait, la convergence est p.s).

Enfin, il est possible d'établir une formulation équavalente de l'ergodicité faible basée sur les résolvantes (au lieu du semigroupe, ce qui est naturel au vu des théorèmes taubériens...). Plus précisément, on considère pour $f \in C$, $\varepsilon > 0$ la solution $u_\varepsilon \in C$ de (au sens des solutions de viscosité)

$$Au_\varepsilon + \varepsilon u_\varepsilon = f \tag{10}$$

Alors, l'ergodicité faible est équivalente à la propriété suivante

$$\varepsilon u_\varepsilon \to v \text{ constante, uniformément quand } \varepsilon \to 0 \tag{11}$$

Remarques : i) On peut démontrer que l'ergodicité faible est également équivalente à l'unicité de la mesure invariante ou plus précisément à la propriété suivante

$$\text{si } A^*m = 0 \text{ dans } Q \text{ et } \int_Q dm = 0 \text{ alors m} \equiv 0. \tag{12}$$

ii) La compacité du « cube périodique » implique aisément qu'il existe toujours au moins une mesure invariante.

iii) En observant que

$$Au^2 = 2Au\ u - 2a_{ij}\ \partial_i u\ \partial_j u \tag{13}$$

on voit que le semigroupe $S(t)$ défini par $S(t)u_0 = u(t)$ où u est la solution de (1)-(2) est un semi-groupe de contractions dans l'espace L^2_m de Hilbert associé à la norme $(\int_Q \varphi^2 \, dm)^{1/2}$ pour toute mesure invariante m. En effet, (13) implique que l'on a

$$\int Au\ u\ dm = \int a_{ij}\ \partial_i u\ \partial_j u\ dm \geq 0 \tag{14}$$

Cela permet, par une extension simple du théorème classique de Von Neumann sur les semi-groupes unitaires, d'établir que, pour toute mesure invariante m,

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt \to \bar{u} \quad \text{dans} \quad L_m^2, \text{si } T \to +\infty \tag{15}$$

où $\bar{u}$ est la projection orthogonale dans L_m^2 de u_0 sur le noyau de A. Il est à noter qu'aucune hypothèse n'est faite sur les coefficients a_{ij}, b_i !

iii) Grâce au principe du maximum, on peut démontrer que $u(t)$ et $\varepsilon u_\varepsilon$ sont uniformément (en t et ε) bornées. De plus

$$\max u(t) \downarrow \text{ si } t \uparrow +\infty, \ \min u(t) \uparrow \text{ si } t \uparrow +\infty \tag{16}$$

$$\max(\varepsilon u_\varepsilon) \text{ et } \min(\varepsilon u_\varepsilon) \text{ convergent quand } \varepsilon \text{ tend vers } 0. \tag{17}$$

3. Conditions nécessaires et suffisantes pour l'ergodicité

On observe tout d'abord que la caractérisation ou la définition de l'ergodicité assure que l'ergodicité forte (respectivement faible) implique que

$$u(t) \text{ est uniformément continue, uniformément en } t \geq 0 \tag{18}$$

(respectivement

$$\varepsilon u_\varepsilon \text{ est uniformément continue, uniformément en } \varepsilon \in]0,1]). \tag{19}$$

Et nous reviendrons plus loin sur la vérification de l'une ou l'autre de ces propriétés.

Grâce à (18) ou (19), quitte à extraire des sous-suites, on peut supposer que $u(T+t, x)$ (resp. $\varepsilon u_\varepsilon$) converge uniformément en $x \in Q$, t borné si T tend vers $+\infty$ (resp. uniformément sur Q si ε tend vers 0) vers $\bar{u}(t, x)$ (resp. $\bar{u}$) vérifiant

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + A\bar{u} = 0 \quad \text{pour} \quad x \in Q, t \in \mathbb{R} \tag{20}$$

(resp.

$$A\bar{u} = 0 \text{ dans } Q). \tag{21}$$

De plus, d'après (16), $\bar{u}$ vérifie

$$\max_Q \bar{u}(t,x) \text{ et } \min_Q \bar{u}(t,x) \text{ sont indépendants de } t \in \mathbb{R} \tag{22}$$

On introduit alors les ensembles de contrôlabilité (approchée) qui sont bien sûr également les supports de la loi du processus X_t. On note β le champ de vecteurs suivant

$$\beta_i = b_i - \frac{1}{2}\,\sigma_{jk}\,\partial_j\sigma_{ik} \qquad (1 \leq i \leq d) \tag{23}$$

et pour $x \in \mathbb{R}^d$, $T \geq 0$, on considère l'ensemble $\mathcal{C}(x, T)$ donné par la fermeture de l'ensemble des points z pour lesquels il existe $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tel que la solution ξ de

$$\dot{\xi}_i = \sigma_{ik}(\xi)u_k + \beta_i(\xi) \quad \text{pour } t \in [0, T] 1 \leq i \leq d, \ \xi(0) = x \tag{24}$$

vérifie $\xi(T) = z$. Et enfin on introduit l'ensemble $\mathcal{C}\ (x)$ donné par la fermeture de $\cup_{T\geq 0}\ \mathcal{C}(x, T)$.

Les équations (20), (21) avec la propriété (22) permettent alors, grâce à une formulation précisée du principe du maximum fort, les résultats suivants.

Théorème 1 (ergodicité forte) : *L'ergodicité forte est équivalente au fait que* (18) *et la condition qui suit soient vérifiées :*

$$\forall x, y \in Q, \exists T \geq 0 \text{ tel que } C(x,T) \cap C(y,T) \neq \phi \tag{25}$$

Théorème 2 (ergodicité faible) : *L'ergodicité faible est équivalente au fait que* (19) *et la condition qui suit soient vérifiées :*

$$\forall x, y \in Q,\ C(x) \cap C(y) \neq \phi \tag{26}$$

Une étude détaillée de ces ensembles $\mathcal{C}$ a été développée dans le cours ainsi que différents exemples (généraux) où (25) ou (26) sont vérifiées (uniforme ellipticité, hypoellipticité, équilibre stable, conditions de « non résonance », dégénérescence locale compensée par la dérive...). En ce qui concerne la vérification des conditions (18) ou (19), là encore, nous avons montré dans le cours comment ces conditions pouvaient être vérifiées dans des situations (générales) comme l'uniforme ellipticité, l'hypoellipticité ou des conditions de stabilité uniforme.

4. Au-delà de l'équicontinuité

Il est naturel de poser la question des liens entre les conditions d'équicontinuité (18) ou (19) et de contrôlabilité (25) ou (26).

Tout d'abord, l'exemple qui suit montre que (26) (sans (19)) ne suffit pas à assurer l'ergodicité : on considère l'opérateur $(-\frac{1}{2} \mid x \mid^2 \Delta)$ sur la boule unité B de $\mathbb{R}^d$ avec $d \geq 3$ et des conditions de Neumann sur ∂B. Comme $0 \in \mathcal{C}(x)$ pour tout $x \in B$, la condition (26) (ou son adaptation au cas de conditions aux limites de Neumann) est bien sûr vérifiée. Pourtant, $\frac{1}{|x|^2}$ et δ_0 sont deux mesures invariantes. Et on se convainc aisément du fait que $u(t_0 x)$ convergement (uniformément localement) sur $B - \{0\}$ vers $\int_B \frac{u_0}{|x|}\, dx$ tandis que $u(t, 0) = u_0(0)$ pour tout $t \geq 0$.

On peut également considérer une version renforcée des conditions (25) ou (26) (correspondant à des systèmes contrôlables) à savoir

$$\mathcal{C}(x, T) = Q \text{ pour } T \text{ suffisamment grand, pour tout } x \in Q \tag{25'}$$

ou

$$\mathcal{C}(x) = Q \text{ pour tout } x \in Q \tag{26'}$$

Les méthodes introduites dans le cours permettent de montrer que si la condition (25′) est vérifiée alors on a, pour tout $\delta > 0$,

$$\lim_{t\to+\infty} \max\{u(t,y) / \mid y - x \mid < \delta\} = M \text{ , uniformément en } x \in Q, \tag{27}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \min\{u(t,y) / \mid y - x \mid < \delta\} = m \text{ , uniformément en } x \in Q, \tag{28}$$

où les constantes M, m sont données par

$$M = \lim_{t \to +\infty} \max_{x \in Q} u(t,x)\,,\; m = \lim_{t \to -\infty} \min_{x \in Q} u(t,x)\,.$$

De manière analogue, si la condition (26′) est vérifiée alors on a, pour tout $\delta > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \max\{\varepsilon u_\varepsilon(y) / \mid y - x \mid < \delta\} = M \text{ , uniformément en } x \in Q, \tag{29}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \min\{\varepsilon u_\varepsilon(y) / \mid y - x \mid < \delta\} = m \text{ , uniformément en } x \in Q, \tag{30}$$

où les constantes M, m sont données par

$$M = \lim_{\varepsilon \to 0} \max_{x \in Q} \varepsilon u_\varepsilon, m = \lim_{\varepsilon \to 0} \min_{x \in Q} \varepsilon u_\varepsilon\,.$$

En revanche, l'ergodicité forte (ou faible) n'est pas toujours vraie (i.e. on n'a pas toujours égalité entre M et m) comme le montre l'exemple de systèmes dynamiques dont toutes les orbites sont denses possédant plusieurs mesures invariantes.

SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES [b]

14 novembre 2014 : Pierre-Louis Lions (Collège de France) : Estimées nouvelles pour les équations quasilinéaires.

21 novembre 2014 : Benjamin Stamm (LJLL - Université Pierre et Marie Curie) : Une méthode de décomposition de domaine pour des modèles de solvatation continue.

28 novembre 2014 : Fernado Quirós (Universidad Autónoma de Madrid) : The Hele-Shaw asymptotics for mechanical models of tumor growth.

5 décembre 2014 : Gilles Vilmart (Université de Genève) : Méthodes numériques d'homogénéisation pour des problèmes multi-échelles quasi-linéaires.

12 décembre 2014 : Ludovic Chamoin (LMT ENS Cachan - INRIA Rocquencourt) : Vérification des modèles numériques : estimation d'erreur et techniques adaptatives.

9 janvier 2015 : Tony Lelièvre (CERMICS-ENPC) : Processus stochastiques métastables et distributions quasi-stationnaires.

16 janvier 2015 : Lucas Chesnel (CMAP-École polytechnique) : Invisibilité en champ lointain pour un problème de diffraction acoustique.

23 janvier 2015 : Clotilde Fermanian Kammerer (Université Paris Est-Créteil) : Semi-classical measures and effective mass theorems.

30 janvier 2015 : Matthieu Hillairet (Université Montpellier 2) : Dérivation de modèles pour les écoulements multiphasiques.

10 avril 2015 : Habib Ammari (DMA - ENS Ulm) : Mathématiques pour l'imagerie.

22 mai 2015 : Marie Doumic Jauffret (INRIA-Paris Rocquencourt) : Problèmes d'estimation dans des équations de fragmentation.

29 mai 2015: Ping Zhang (Institute of Mathematics, AMSS, Beijing) : Inhomogeneous incompressible viscous flows with slowly varying initial data.

5 juin 2015 : Pierre Cardaliaguet (Ceremade, Université Paris-Dauphine) : Homogénéisation stochastique d'équations géométriques et d'équations de Hamilton-Jacobi non convexes.

---

b. Les enregistrements vidéo des séminaires sont disponibles sur le site internet du Collège de France : http://www.college-de-france.fr/site/pierre-louis-lions/seminar-2014-2015.htm [NdÉ].

12 juin : Alexandre d'Aspremont (École normale supérieure-Ulm) : Méthodes spectrales pour l'ordonnancement.

19 juin : Albert Cohen (LJLL - Université Pierre et Marie Curie) : Méthodes d'interpolation adaptative pour les problèmes de grande dimension.

Publications

LIONS P.-L., en collaboration avec P.E. SOUGANIDIS, *Viscosity solutions and stochastic partial differential equations*, livre en préparation.

LIONS P.-L., en collaboration avec X. GABAIX, J.-M. LASRY et B. MOLL, « The dynamics of inequality », soumis à *Econometrica*.

LIONS P.-L., en collaboration avec C. LE BRIS*, Parabolic partial differential equations with irregular data and applications to stochastic differential equations*, livre en préparation.

LIONS P.-L., en collaboration avec X. BLANC et C. LE BRIS, « Local profiles for elliptic problems at different scales : defects in, and interfaces between periodic structures ».

LIONS P.-L., « Équations elliptiques ou paraboliques, et homogénéisation précisée » (résumé du cours au Collège de France), *Annuaire du Collège de France 2013-2014*, Paris, Collège de France, 2015, https://annuaire-cdf.revues.org/11881.

LACHAPELLE A., LASRY J.-M., LEHALLE C.-A. et LIONS P.-L., « Efficiency of the Price Formation Process in Presence of High Frequency Participants: a Mean Field Game analysis », *ArXiv*, 27 mai 2013, [1ère version déposée en mai 2013], arXiv: 1305.6323.

LIONS P.-L., ACHDOU Y., LASRY J.-M. et MOLL B., « Heterogeneous Agent Models in Continuous Time ».

FRIZ P.K., GASSIAT P., LIONS P.-L. et SOUGANIDIS P.E., « Eikonal equations and pathwise solutions to fully non-linear SPDEs », *ArXiv*, 15 février 2016, arXiv: 1602.04746.

LIONS P.-L., en collaboration avec P. CARDALIAGUET, F. DELAUNE et J.-M. LASRY, « Existence and uniqueness results for the master equation of mean field games ».

ACHDOU Y., BUERA F.J., LASRY J.-M., LIONS P.-L. et MOLL B., « Partial differential equation models in macroeconomics », *Phil. trans. Royal Society A.*, 2014, vol. 372, 20130397.

Missions, invitations, conférences

Doctorat honoris causa et conférence publique, université de Narvik, Norvège, 15 juillet 2014.

Conférence, université de Campinas, Brésil, 24 juillet 2014.

Conférence, « XV International Conference on Hyperbolic Problems : Theory, Numerics and Applications (HYP2014) », IMPA, Rio de Janeiro, 29 juillet 2014.

Conférence « IMPA's Magna Lecture », 31 juillet 2014.

Conférence au congrès « Topics in Nonlinear Elliptic Equations », Naples, 12 septembre 2014.

Série de trois exposés à l'université de Chicago, États-Unis, 29 septembre-8 octobre 2014.

Conférence au colloque « Prospects in Applied Mathematics », Chicago, 19 octobre 2014.

Conférence « WPI Lecture Series », Worcester, 21 octobre 2014.

Conférence « France-Hong Kong Distinguished Lecture », City University of Hong Kong, 10 novembre 2014.

Conférence au congrès en l'honneur de Carlos Conca, Bilbao, 13 décembre 2014.

Séances de trois exposés à l'université de Chicago, États-Unis, 18 janvier-31 janvier 2015.

Conférence sur les Big Data, SCOR, Paris, 18 mars 2015.

Conférence l'École polytechnique, 23 avril 2015.

Réception à l'Académie royale de Belgique, 30 mai 2015.

Conférence au congrès « Mean Field Games and Related Topics », Paris, 10 juin 2015.

Conférence au congrès « Meet the Data II », Paris, 15 juin 2015.

Responsabilités collectives et fonctions diverses

Membre de l'Académie des sciences ; de l'Académie des technologies ; de l'Académie des sciences d'Italie, d'Argentine, du Brésil, du Chili et de Belgique ; de l'Istituto Lombardo et de l'Académie de Naples, de la TWAS, de l'Academia Europea.

Professeur à temps partiel à l'École polytechnique.

Président du conseil scientifique de l'institut Louis Bachelier.

Président du conseil scientifique de la chaire de Finance et développement durable, université Paris-Dauphine.

Président du conseil scientifique de la chaire Économie et gestion des données numériques, université Paris-Dauphine.

Président du conseil scientifique de ParisTech.

Président du conseil scientifique du projet EMMA.

Président du jury du prix « Science et défense ».

Président du jury des prix en mathématiques de la TWAS.

Membre du Scientific Advisory Panel de l'European Mathematical Society.

Membre fondateur du comité International de l'International Summer School of Applied Mathematics, Morningside Institute, Chinese Academy of Sciences.

Membre de l'International Advisory Board de l'Institute of Mathematical Sciences de l'Imperial College.

Membre du conseil d'administration de la fondation d'entreprise Natixis.

Membre de la Société des amis du Palais de la découverte.

Membre de l'International Advisory Board of the Scuola di Dottorato in Scienze Astronomiche, Chimiche, Fisiche e Mathematiche « Vito Volterra ».

Membre du conseil scientifique du BCAM (Basque Centre for Applied Mathematics).

Conseiller scientifique auprès de HAVAS et ILB.

Fondateur et membre du conseil de surveillance de MFG R&D.

Rédacteur en chef du *Journal de mathématiques pures et appliquées*.

Éditeur de plus de 45 revues internationales.