

Sur la régularité des solutions de problèmes à forte conductivité en homogénéisation

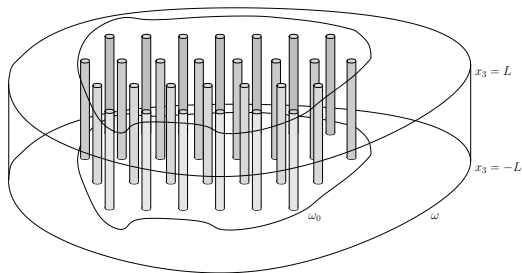
Yves Capdeboscq

Oxford Centre for Nonlinear PDE, University of Oxford

10 Février 2012

avec Marc Briane (Rennes) & Luc Nguyen (Princeton)

Matériaux à fort contraste



On considère

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a_\varepsilon \nabla W_\varepsilon) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ W_\varepsilon = \Phi & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

avec $a_\varepsilon = 1$ à part dans des fibres de rayon $\varepsilon r_\varepsilon$, où

$$\kappa_- \leq a_\varepsilon \pi r_\varepsilon^2 \leq \kappa_+.$$

Le rayon r_ε vérifie

$$\frac{2\pi}{\gamma_+} \leq -\varepsilon^2 \ln r_\varepsilon \leq \frac{2\pi}{\gamma_-}.$$

Supposons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_\varepsilon \pi r_\varepsilon^2 = \kappa \in [\kappa_-, \kappa_+], \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\pi}{\varepsilon^2 |\ln r_\varepsilon|} = \gamma \in [\gamma_-, \gamma_+].$$

et que $\Phi_b \in C^1(\bar{\Omega})$. Alors, $W_\varepsilon \rightharpoonup W_*$ dans $H^1(\Omega)$ du système couplé

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta W_* + \gamma(W_* - V_*) 1_{\Omega_0} = 0 & \text{dans } \Omega \\ -\kappa \partial_{33}^2 V_* + \gamma(V_* - W_*) = 0 & \text{dans } \Omega_0 = \omega_0 \times (-L, L) \\ W_* = \Phi_b & \text{sur } \partial\Omega \\ V_*(\cdot, \pm L) = \Phi_b(\cdot, \pm L) & \text{sur } \omega_0. \end{array} \right.$$

Matériaux à fort contraste

La fonction V_* est une limite

$$\frac{1}{|\text{fibres}|} \mathbf{1}_{\text{fibres}} W_\varepsilon \rightharpoonup V_* \text{ faible } * \text{ dans } \mathcal{M}(\Omega).$$

Introduisons la fonction capacitaire c_ε^σ pour un $\sigma \geq 1$ au choix, dans Ω

$$c_\varepsilon^\sigma(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } r = \|(x_1, x_2) - (m, n)\varepsilon\| \leq \varepsilon r_\varepsilon \\ \frac{\ln r - \ln(\varepsilon r_\varepsilon)}{\ln(\varepsilon^\sigma/2) - \ln(\varepsilon r_\varepsilon)} & \text{si } r \in (\varepsilon r_\varepsilon, \varepsilon^\sigma/2), \quad \text{pour } (m, n) \in I_\varepsilon, \\ 1 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Alors

$$\nabla W_\varepsilon \cdot \nabla c_\varepsilon^\sigma \rightharpoonup \gamma(U_* - V_*) \text{ faible } * \text{ dans } \mathcal{M}(\Omega),$$

et

$$\nabla W_\varepsilon c_\varepsilon^\sigma \rightharpoonup \nabla W_* \text{ faible } * \text{ dans } \mathcal{M}(\Omega).$$

H-convergence forte avec des correcteurs L^2 : pas de gain

Pour une donnée au bord C^1 ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} a_{\varepsilon} \left| \nabla W_{\varepsilon} - \nabla c_{\varepsilon}^{\sigma} (W_* - V_*) - c_{\varepsilon}^{\sigma} \nabla W_* - (1 - c_{\varepsilon}^{\sigma}) \partial_3 V_* e_3 \right|^2 dx = 0.$$

Le correcteur est seulement L^2 (en contraste borné, $P \in W^{1,\infty}$).

H -convergence forte avec des correcteurs L^2 : pas de gain

Pour une donnée au bord C^1 ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} a_{\varepsilon} |\nabla W_{\varepsilon} - \nabla c_{\varepsilon}^{\sigma} (W_* - V_*) - c_{\varepsilon}^{\sigma} \nabla W_* - (1 - c_{\varepsilon}^{\sigma}) \partial_3 V_* e_3|^2 dx = 0.$$

Le correcteur est seulement L^2 (en contraste borné, $P \in W^{1,\infty}$).

Supposons que Φ est $C^2(\bar{\Omega})$ et que

$$|(\{x : \Delta \Phi(\cdot, L) = 0\} \cap \{x : \Delta \Phi(\cdot, -L) = 0\})| = 0.$$

Alors, pour tout $\Omega' \subset \Omega$ il existe une constante $C(\Phi, \Omega') > 0$ telle que

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(r_{\varepsilon}^{1-2/p} \|\nabla W_{\varepsilon}\|_{L^p(\Omega')}^2 \right) \geq C(\Phi, \Omega').$$

Explosion partout à vitesse exponentielle ($\exp(C/\varepsilon^2)$) dans $W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega_0)$.

Soit

$$\mathcal{O}_\varepsilon = \{x \in \omega_0 : 0 < \text{dist}(x, D_\varepsilon) < \varepsilon r_\varepsilon^\rho\} \times (-L, L),$$

A partir de la définition de c_ε^σ , et de la continuité de $W^* - V^*$,

$$1_{\mathcal{O}_\varepsilon} |\nabla c_\varepsilon^\sigma|^2 (V_* - W_*)^2 \rightharpoonup \gamma(1-\rho) (V_* - W_*)^2 \quad \text{faible* dans } \mathcal{M}(\Omega_0).$$

La limite n'est pas nulle sur Ω' . Le résultat de correcteur montre que

$$1_{\mathcal{O}_\varepsilon} |\nabla W_\varepsilon - \nabla c_\varepsilon^\sigma (W_* - V_*)|^2 \longrightarrow 0 \quad \text{fortement dans } L^1_{\text{loc}}(\Omega_0).$$

Donc

$$1_{\mathcal{O}_\varepsilon} |\nabla W_\varepsilon|^2 \rightharpoonup \gamma(1-\rho) (V_* - W_*)^2 \quad \text{faible* dans } \mathcal{M}(\Omega_0).$$

Prenons $\Omega'' \Subset \Omega' \subset \Omega_0$, et ζ un cut-off.

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega''} \gamma(1-\rho)(V_* - W_*)^2 dx &\leq \int_{\Omega_0} \gamma(1-\rho)(V_* - W_*)^2 \zeta dx \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{O}_\varepsilon} |\nabla W_\varepsilon|^2 \zeta dx \\
 &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{O}_\varepsilon \cap \Omega'} |\nabla W_\varepsilon|^2 dx \\
 &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(|\mathcal{O}_\varepsilon|^{1-2/p} \|\nabla W_\varepsilon\|_{L^p(\Omega' \setminus Q_\varepsilon)}^2 \right) \\
 &\leq C_1 \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(r_\varepsilon^{2\rho(1-2/p)} \|\nabla W_\varepsilon\|_{L^p(\Omega' \setminus Q_\varepsilon)}^2 \right).
 \end{aligned}$$

Pour tout $\Omega'' \Subset \Omega'$. Vrai en dehors des fibres $(\rho' - \rho) \dots$

Pour un $\omega_0 \Subset \omega_1 \Subset \omega$ donné, on définit ω_τ^ε par

$$\omega_\tau^\varepsilon = \{x \in \omega_1 : \text{dist}(x, D_\varepsilon) \geq \varepsilon\tau\}. \quad (1)$$

Pour le problème $-\text{div}(a_\varepsilon \nabla U_\varepsilon) = F$ dans $H_0^1(\Omega)$ on a

Theorem

Pour $\kappa > 0$, $\tau > \kappa \varepsilon^{\frac{1-\eta}{2(1+\eta)}}$ avec $\eta \in (\frac{3}{4}, 1)$, and $0 < \nu < 2(\eta - \frac{3}{4})$, la solution U_ε vérifie

$$\|U_\varepsilon - V\|_{C^{1,\nu}(\omega_\tau^\varepsilon \times (-L,L))} \leq C(\kappa, \eta, \nu) \|F\|_{L^2(\Omega)},$$

où $V \in H_0^1(\Omega)$ est la solution de

$$-\Delta V = F.$$

A propos de $-\operatorname{div}(a_\varepsilon \nabla W_\varepsilon) = 0$ dans $H^1(\Omega)$, avec $u = \Phi_b$ sur $\partial\Omega$
on a

Theorem

Soit $\Omega_\tau^\varepsilon = \omega_\tau^\varepsilon \times (-l, l)$, avec $l < L$. Pour $\kappa > 0$, $\tau > \kappa \varepsilon^{\frac{1-\eta}{2(1+\eta)}}$ avec $\eta \in (\frac{3}{4}, 1)$, et $0 < \nu < 2(\eta - \frac{3}{4})$, la solution W_ε vérifie

$$\|W_\varepsilon\|_{C^{1,\nu}(\Omega_\tau^\varepsilon)} \leq C(\kappa, \eta, \nu, l) \|\Phi_b\|_{C^1(\bar{\Omega})}.$$

On utilise la forme $2d + 1$ du problème, qui devient

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_2(a_\varepsilon \nabla_2 u_\varepsilon) + \lambda a_\varepsilon u_\varepsilon = f + a_\varepsilon g + \operatorname{div}_2(a_\varepsilon \mathbf{h}) & \text{dans } \omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\omega, \end{cases}$$

avec $f \in L^2(\omega)$, $\sqrt{a_\varepsilon}g \in L^2(\omega)$ et $\mathbf{h} \in L^\infty(\omega)^2$.

On compare u_ε avec v (sans fibres),

$$\begin{cases} -\Delta_2 v + \lambda v = f + g + \operatorname{div}_2(\mathbf{h}) & \text{dans } \omega, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\omega, \end{cases}$$

On écrit hors des fibres $u_\varepsilon - v = \tilde{u}_\varepsilon + \hat{u}_\varepsilon$ où $\tilde{u}_\varepsilon \in H^1(\omega \setminus D_\varepsilon)$ est la solution de

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u}_\varepsilon + \lambda \tilde{u}_\varepsilon = 0 & \text{dans } \omega \setminus D_\varepsilon, \\ \tilde{u}_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\omega, \\ \tilde{u}_\varepsilon = u_{m,n} & \text{sur } \partial D_{m,n,\varepsilon}. \end{cases} \quad (2)$$

avec

$$u_{m,n} = \frac{1}{|\partial D_{m,n,\varepsilon}|} \int_{\partial D_{m,n,\varepsilon}} [u_\varepsilon(x) - v(x)] d\sigma(x),$$

Des estimations fines sont possibles:

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^\infty(\omega_\tau^\varepsilon)} + \lambda^{\beta-1/2} \|\nabla \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^\infty(\omega_\tau^\varepsilon)} \leq \frac{C(\beta)}{\lambda^{1/2}} \sup_{m,n} |u_{m,n}|$$

pour $0 < \beta < \frac{1}{2}$, et $\tau > \varepsilon^{\frac{1-2\beta}{1+2\beta}}$.

Le reste $\hat{u}_\varepsilon \in H^1(\omega \setminus D_\varepsilon)$ est solution de

$$\begin{cases} -\Delta \hat{u}_\varepsilon + \lambda \hat{u}_\varepsilon = 0 & \text{dans } \omega \setminus D_\varepsilon, \\ \hat{u}_\varepsilon = u_\varepsilon - v - u_{m,n}, & \text{sur } \partial D_{m,n,\varepsilon}. \end{cases} \quad (3)$$

Poincaré + estimations d'énergie pour u_ε + estimations locales pour v donnent que c'est un reste...

Donc la preuve est finie si on obtient une borne pour

$$\sup_{m,n} |u_{m,n}| \leq \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\omega)} + \|v\|_{L^\infty(\omega)}$$

qui décroît suffisamment en λ .

Principe de la preuve

Par les méthodes de régularité elliptique (itérations de de Giorgi-Moser-Nash): pour tout $q > 2$, et $\omega' \Subset \omega$,

$$\|v\|_{L^\infty(\omega')} \leq \frac{C(q, \omega')}{\lambda^{\frac{1}{q}}} [\|f\|_{L^2(\omega)} + \|g\|_{L^2(\omega)} + \|\mathbf{h}\|_{L^\infty(\omega)}].$$

cela ne demande qu'une borne elliptique inférieure donc si $g = 0$ et $\mathbf{h} = 0$, on a aussi

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\omega)} \leq \frac{C(q)}{\lambda^{1/q}} \|f\|_{L^2(\omega)} \quad (4)$$

Ca ne suffit pas si le membre de droite contient $a_\varepsilon \times L^q$ (sauf L^∞), bien que ce soit homogène.

Contre-exemple

Considérons

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_2(a_\varepsilon \nabla_2 u_\varepsilon) + \lambda a_\varepsilon u_\varepsilon = a_\varepsilon f & \text{in } \omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\omega, \end{cases}$$

Soit $\mathbf{1}_{D_{0,0,\varepsilon}}$ la fonction indicatrice du disque $D_{0,0,\varepsilon} \subset \mathbb{R}^2$. Prenons $f_\varepsilon := \varepsilon^{-1} \mathbf{1}_{D_{0,0,\varepsilon}}$. Alors,

$$\|\sqrt{a_\varepsilon} f_\varepsilon\|_{L^2(\omega)} \leq \sqrt{\kappa_+}, \quad \text{and} \quad \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\omega)} \geq \frac{1}{\varepsilon} \frac{\kappa_-}{\kappa_+ \gamma_+ + \lambda \kappa_+ + o(1)},$$

où $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} o(1) = 0$.

Preuve. 1. Calculons l'énergie :

$$\int_\omega a_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 dx + \int_\omega \lambda a_\varepsilon u_\varepsilon^2 dx = \int_\omega a_\varepsilon f_\varepsilon u_\varepsilon dx \leq \kappa_+ \varepsilon \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\omega)}.$$

2. Calculons l'énergie de $g_\varepsilon := \varepsilon^{-1}(1 - c_\varepsilon^\sigma) \mathbf{1}_{\varepsilon Y} \in H_0^1(\omega)$, pour $\sigma = 1$:

$$\int_{\omega} a_\varepsilon |\nabla g_\varepsilon|^2 dx + \int_{\omega} \lambda a_\varepsilon g_\varepsilon^2 dx \leq \gamma_+ + \lambda \kappa_+ + o(1).$$

3. Appliquons Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} & \left(\kappa_+ \varepsilon \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\omega)} \right)^{\frac{1}{2}} (\gamma_+ + \lambda \kappa_+ + o(1))^{\frac{1}{2}} \\ & \geq \int_{\omega} a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla g_\varepsilon dx + \int_{\omega} a_\varepsilon u_\varepsilon g_\varepsilon dx \\ & = \int_{\omega} a_\varepsilon f_\varepsilon g_\varepsilon dx = \int_{D_{0,0,\varepsilon}} a_\varepsilon \varepsilon^{-2} dx \geq \kappa_-. \end{aligned}$$

Principe de la preuve

C'est un contre exemple critique: $1/\varepsilon$, pas $1/r_\varepsilon$. Constante de Sobolev optimale:

$$\int_{\omega} a_\varepsilon |v|^s dx \leq C(s) \varepsilon^{2-s} \left(\int_{\omega} a_\varepsilon |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{s}{2}} \quad \forall v \in H_0^1(\omega).$$

pour tout $s > 2$. Pour $\varphi_\varepsilon \in H_0^1(\omega)$ solution de

$$-\operatorname{div}(a_\varepsilon \nabla \varphi_\varepsilon) + \lambda a_\varepsilon \varphi_\varepsilon = a_\varepsilon f_\varepsilon + \operatorname{div}(a_\varepsilon \mathbf{h}).$$

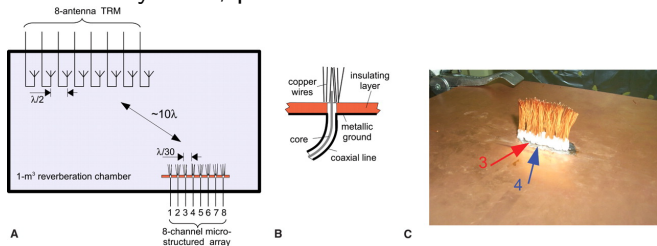
on a pour tout $1 < \alpha < 2$, $0 < \beta < 1 - \alpha/2$,

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(\omega)} \leq \frac{C(\alpha, \beta)}{\varepsilon^\alpha \lambda^\beta} \left(\|\sqrt{a_\varepsilon} f\|_{L^2(\omega)} + \varepsilon^{\frac{\alpha+1}{2}} \|\sqrt{a_\varepsilon} \mathbf{h}\|_{L^\infty(\omega)} \right).$$

la régularité de la donnée au bord Φ_b suffit pour conclure (gel..).

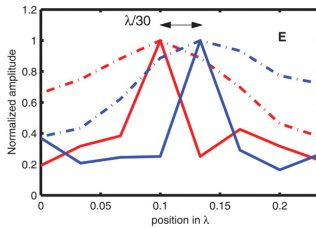
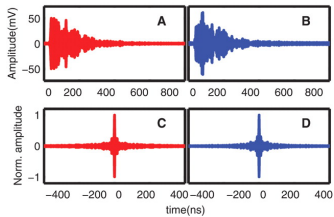
Par-delà la limite de diffraction

G. Lerosey, J. de Rosny, A. Tourin, A. Derode, M. Fink, *Focusing Beyond the Diffraction Limit with Far-Field Time Reversal Science*, 23 February 2007, p.1120-1122

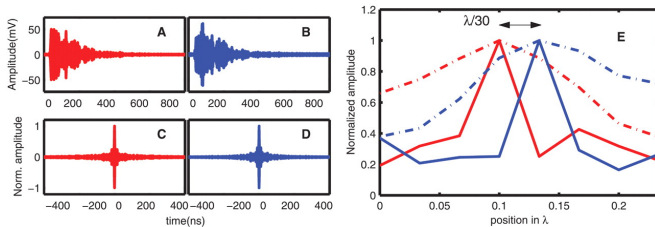


Un MRT composé de 8 antennes dipolaires du commerce opérant à $\lambda = 12$ cm. est placé dans une chambre réverbérante de 1 m³. À dix longueurs d'ondes du MRT est placée une bande réceptrice sous-longueur d'onde composée de 8 antennes micro-structurées situées à $\lambda/30$ les unes des autres.

Par-delà la limite de diffraction



Par-delà la limite de diffraction



Explication par homogénéisation et développements faible volume.

Notion de résolution

Exemple: fond (ε_0, μ_0) et inclusion (ε_1, μ_1) , $D = B(0, r)$ avec $r \rightarrow 0$.

Notion de résolution

Exemple: fond (ε_0, μ_0) et inclusion (ε_1, μ_1) , $D = B(0, r)$ avec $r \rightarrow 0$.

$$(\Lambda(\phi), \psi) = r^d R(\phi, \psi) + o(r^d)$$

L'opérateur de réponse R est la forme bilinéaire donnée par

$$R(\phi, \psi) = \frac{1}{r^d} \int_{B_r} M_B \nabla u_\phi \cdot \nabla u_\psi dy + \frac{1}{r^d} \int_{B_r} \omega^2 m_B u_\phi u_\psi dy$$

Le terme M_B est le tenseur de polarisation, ici $M_B = \frac{2}{\varepsilon_0 + \varepsilon_1} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} I_d$,
et $m_B = \mu_1 - \mu_0$.

La fonction u_ϕ (resp. u_ψ) est la solution de

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varepsilon_0^{-1} \nabla u_\phi) + \omega^2 \mu_0 u_\phi &= 0 \text{ dans } B_R \\ u_\phi &= \phi \text{ resp. } \psi \text{ sur } S_R. \end{aligned}$$

Dans cet exemple R (et Λ) est explicite (Bessel)

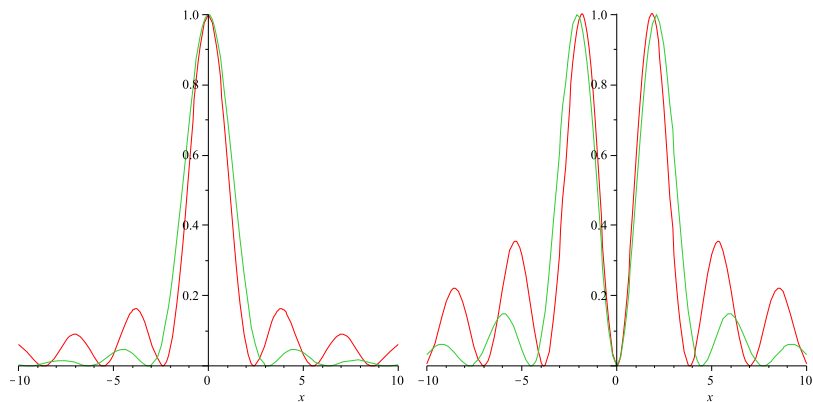
La réponse à une variation de a et μ est, à $o(r^d)$ près,

$$\begin{aligned}\Lambda &= C_{1,B} J_1(kr) e^{i\theta} \left\langle J_1(kr) e^{i\theta}, \cdot \right\rangle \\ &+ C_{0,B} J_0(kr) e^{i\theta} \left\langle J_0(kr) e^{i\theta}, \cdot \right\rangle \text{ pour } d = 2,\end{aligned}$$

ou

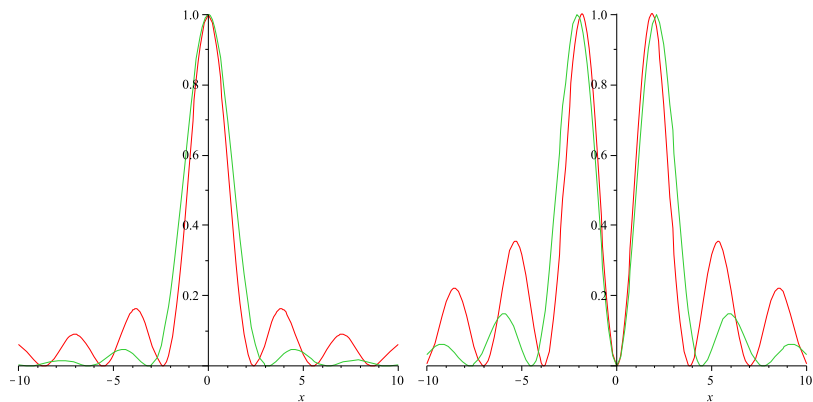
$$\begin{aligned}\Lambda &= C_{1,B} j_1(kr) e^{i\theta} \left\langle j_1(kr) e^{i\theta}, \cdot \right\rangle \\ &+ C_{0,B} j_0(kr) e^{i\theta} \left\langle j_0(kr) e^{i\theta}, \cdot \right\rangle \text{ pour } d = 3,\end{aligned}$$

Notion de résolution



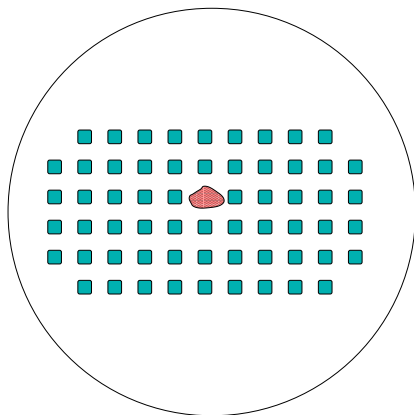
La taille de la tache focale est donnée par la taille du premier lobe de la fonction de Bessel $J_0(\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \omega \cdot)$ ($J_1(\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \omega \cdot)$).

Notion de résolution



La taille de la tache focale est donnée par la taille du premier lobe de la fonction de Bessel $J_0(\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \omega \cdot})$ ($J_1(\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \omega \cdot})$).
Cette taille est indépendante de celle de l'inclusion.

Résolution en présence d'une microstructure



$$\lim_{|D| \rightarrow 0} \delta = 0.$$

$$(|D|^2, -1/\ln|D|, \dots)$$

Amélioration de la Résolution par un réseau périodique

On ajoute des inclusions dans le milieu, sur une grille périodique.
(par exemple). $B_{\delta,j} = j\delta + \delta B$

$$(a_{\delta}(x), \mu_{\delta}(x)) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\varepsilon_s + i\sigma_s/\omega}, \mu_s \right) & \text{sur } \cup_{j \in \mathcal{S}_{\delta}} B_{\delta,j} \\ (\varepsilon_0^{-1}, \mu_0) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5)$$

Le milieu avec défaut est donné par

$$(a_{\delta,d}(x), \mu_{\delta,d}(x)) = \begin{cases} (\varepsilon_D^{-1}, \mu_D) & \text{dans } D \\ \left(\frac{1}{\varepsilon_s + i\sigma_s/\omega}, \mu_s \right) & \text{sur } \cup_j B_{\delta,j} \setminus \overline{D}. \\ (\varepsilon_0^{-1}, \mu_0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Résolution améliorée en milieu structuré

On considère des mesures différentielles,

$$\begin{aligned}\Lambda : H^{1/2}(S_R) &\rightarrow H^{-1/2}(S_R) \\ \varphi &\rightarrow a \nabla (u_{\delta,D} - u_{\delta}) \cdot n|_{S_R}\end{aligned}$$

Résolution améliorée en milieu structuré

On considère des mesures différentielles,

$$\begin{aligned}\Lambda : H^{1/2}(S_R) &\rightarrow H^{-1/2}(S_R) \\ \varphi &\rightarrow a \nabla (u_{\delta,D} - u_{\delta}) \cdot n|_{S_R}\end{aligned}$$

Ammari-Bonnetier-C '09: Si $\delta \rightarrow 0$ quand $|D| \rightarrow 0$, l'opérateur de réponse donné par

$$\langle \Lambda(\varphi), \varphi \rangle = \int_D M_* \nabla u_*(x) \cdot \nabla u_*(x) dx + \omega^2 \int_D m_* u_*^2(x) dx + o(|D|),$$

où M_* et m_* sont des termes de polarisation constants dépendant de l'inclusion et où $o(|D|)/|D| \rightarrow 0$ uniformément pour

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}} \leq 1$$

Résolution améliorée en milieu structuré

On considère des mesures différentielles,

$$\begin{aligned}\Lambda : H^{1/2}(S_R) &\rightarrow H^{-1/2}(S_R) \\ \varphi &\rightarrow a \nabla (u_{\delta,D} - u_{\delta}) \cdot n|_{S_R}\end{aligned}$$

Ammari-Bonnetier-C '09: Si $\delta \rightarrow 0$ quand $|D| \rightarrow 0$, l'opérateur de réponse donné par

$$\langle \Lambda(\varphi), \varphi \rangle = \int_D M_* \nabla u_*(x) \cdot \nabla u_*(x) dx + \omega^2 \int_D m_* u_*^2(x) dx + o(|D|),$$

où M_* et m_* sont des termes de polarisation constants dépendant de l'inclusion et où $o(|D|)/|D| \rightarrow 0$ uniformément pour

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}} \leq 1$$

A comparer avec l'opérateur de réponse non perturbé

$$R(\varphi) = \int_D (M \nabla u_0 \cdot \nabla u_0 + \omega^2 \mu u_0^2) dx + o(|D|).$$

- 1 Si $\delta \rightarrow 0$ puis $|D| \rightarrow 0$: bonne taille de tache focale mais développement asymptotique incorrect.

Différents régimes asymptotiques

- 1 Si $\delta \rightarrow 0$ puis $|D| \rightarrow 0$: bonne taille de tache focale mais développement asymptotique incorrect.
- 2 Si $|D| \rightarrow 0$ puis $\delta \rightarrow 0$, on obtient la résolution “de référence”

Différents régimes asymptotiques

- 1 Si $\delta \rightarrow 0$ puis $|D| \rightarrow 0$: bonne taille de tache focale mais développement asymptotique incorrect.
- 2 Si $|D| \rightarrow 0$ puis $\delta \rightarrow 0$, on obtient la résolution “de référence”
- 3 Si $\delta^d \ll |D|$ on retrouve (1).

Preuve: H -convergence + Avellaneda-Lin, Régularité Li-Nirenberg, Compacité. Rien ne passe à la limite fort contraste.

Défauts en fort contraste

Supposons que $G_\varepsilon \subset \Omega_\varepsilon$, $|G_\varepsilon| \rightarrow 0$, et que $|G_\varepsilon|^{-1} \mathbf{1}_{G_\varepsilon}$ tend vers une mesure μ . Il existe une sous-suite ε , et une fonction matricielle $M \in L^2(\Omega, \mu)^{3 \times 3}$ telle que

$$\mathcal{R}(\Phi) = |G_\varepsilon| \int_{\Omega} M \nabla W^* \cdot \nabla W^* d\mu + o(|G_\varepsilon|) \text{ for any } \Phi \in C^1(\bar{\Omega}),$$

où W^* est la solution du problème homogénéisé avec c-d-b Φ , et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\|\Phi\|_{C^1(\bar{\Omega})} \leq 1} \frac{o(|G_\varepsilon|)}{|G_\varepsilon|} = 0.$$

De plus, M est symétrique, indépendante de Φ , et vérifie

$$(\gamma_1 - 1) \min \left(1, \frac{1}{\gamma_1} \right) \leq M(y) \xi \cdot \xi \leq \max \left(1, \frac{1}{\gamma_1} \right) \mu\text{-a.e.}$$